F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

3166

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL VIII

IANUARIE—MARTIE 1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETARI DE MECANICĂ APLICATĂ

1

ANUL VIII

IANUARIE—MARTIE 1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

1989

F
2557

COMITETUL DE REDACȚIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEȘ, membru corespondent al Academiei R.P.R.
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.
R. BOGDAN, conferențiar la Institutul de petrol și gaze, București.
N. TIPEI, conferențiar la Institutul politehnic. București.
M. ARCAN, conferențiar la Institutul de construcții, București.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóirat
5060

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VIII, nr. 1 Ianuarie-martie 1957

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ

Pag.

N. N. PATRAULEA, Calculul deflecţiunii vînei şi al vitezelor induse pe discul rotorului de elicopter 13

D. PAVELESCU şi D. OLARU, Cu privire la determinarea unor parametri ai rachetelor auxiliare 23

VIBRAŢII

A. TONDL, Mişcarea periodică a rotoarelor cu o caracteristică neliniară a reazemelor 35

TEORIA MECANISMELOR

D. MANGERON, C. DRĂGAN şi VL. SVIJEVSCHI, O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor şi a maşinilor 51

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

N. TIPEI şi AL. NICA, Asupra condiţiilor la limită în problema lubrificaţiei 63

GH. VASILCA, Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $p = g(V)$ 75

L. ROZEANU şi O. PREOŢESCU, Consideraţii asupra uzurii ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj 85

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

L. DUMITRESCU şi C. STĂNESCU, Torsiunea unei bare cilindrice neomogene 111

P. P. TEODORESCU, Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere 115

S. RĂUTU şi FL. DINCĂ, Asupra comportării barei drepte supusă la sarcini dinamice axiale 135

E. PROCOPOVICI, Asupra deformării transversale a unei bare solicitate prin şoc axial 141

GH. I. PANĂ, Folosirea lemnului alterat pentru construcţii şi industrie . . . 155

I. IONESCU, V. CALCAN şi N. GOLDENBERG, Mase plastice pe bază de furfurol şi derivaţi. IV. Influenţa tratamentului termic asupra unor rezistenţe la eforturi progresive la rupere, ale textolitului cu răşină furfurol-fenolică 171

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

TEODOR CĂRARE şi CEZAR AMZULESCU, Calculul cadrelor tip shed prin ecuaţii cu diferenţe finite 189

Pag.

MIHAIL IFRIM, Considerații în legătură cu un criteriu de pierdere a stabilității elastice a sistemelor de bare 213

HIDROTEHNICĂ

GR. VASILESCU, Transformarea brațului Sulina în canal maritim. Soluție care conduce la asigurarea ieșirii la mare și la valorificarea bogățiilor deltei Dunării 233

M. KAHAN și C. IAMANDI, Mărirea capacității de spălare și transport aluvionar a scurgerilor în canale scurte 249

REFERATE ȘTIINTIFICE ȘI TEHNICE

D. PAVELESCU, Cu privire la studiul uzurii cuțitelor de strung (iradiate) pentru determinarea parametrilor optimi de așchiere 265

RECENZII 285

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAJAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VIII, n° 1 Janvier-mars 1957

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AEROMÉCANIQUE

N. N. PATRAULEA, Le calcul de la déflexion de la veine et des vitesses induites sur le disque du rotor de l'hélicoptère 13
D. PAVELESCU and D. OLARU, On the Determination of some Parameters of the Auxiliary Rockets 23

VIBRATIONS

A. TONDL, Le mouvement périodique des rotors à caractéristique non linéaire des supports 35

THÉORIE DES MÉCANISMES

D. MANGERON, C. DRĂGAN et VL. SVIJEVSCHI, Une nouvelle méthode d'étude concernant la théorie des mécanismes et des machines 51

LUBRIFICATION – FROTTEMENT – USURE

N. TIPEI et AL. NICA, Sur les conditions aux limites dans le problème de la lubrification 63
GH. VASILCA, Etude du coefficient de frottement dans un palier circulaire, au moyen des courbes $p = g(V)$ 75
L. ROZEANU et O. PREOŢESCU, Considérations sur l'usure des ensembles de frottement à la période de rodage 85

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX – ÉLASTICITÉ

L. DUMITRESCU et C. STĂNESCU, Torsion d'une barre cylindrique non homogène 111
P. P. TEODORESCU, Sur le calcul des poutres-parois à une seule ouverture 115
S. RĂUTU et FL. DINCĂ, Sur le comportement de la barre droite soumise à des efforts dynamiques axiaux 135
E. PROCOPOVICI, Sur la déformation transversale d'une barre sollicitée par choc axial 141
GH. I. PANĂ, L'utilisation du bois altéré dans le bâtiment et l'industrie 155
I. IONESCU, V. CALCAN et N. GOLDENBERG, Masses plastiques à base de furfurol et dérivés. IV. Influence du traitement thermique sur certaines résistances à des efforts progressifs à la rupture d'un stratifié à résine furfurol-phénolique 171

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS Page

TEODOR CĂRARE et CEZAR AMZULESCU, Calcul des cadres de type *shed* au moyen des équations aux différences finies 189

MIHAIL IFRIM, Considérations sur un critérium de perte de la stabilité élastique des systèmes de barres 213

HYDROTECHNIQUE

GR. VASILESCU, Transformation du bras de Soulina en canal maritime. Solution radicale pour assurer la sortie à la mer et pour mettre en valeur les richesses du delta du Danube 233

M. KAHAN et C. IAMANDI, Accroissement de la capacité de lavage et de transport alluvionnaire des écoulements à travers des canaux courts 249

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

D. PAVELESCU, L'étude de l'usure des outils coupants (irradiés) en vue de déterminer les meilleurs paramètres du détachement en copeaux 265

COMPTES RENDUS 285

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.,

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Construction mécanique (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques, seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille, Raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VIII, № 1 Январь-март 1957

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОДИНАМИКА

Стр.

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Расчет дефлекции струн и индуктивных скоростей на диске ротора геликоптера 13

Д. ПАВЕЛЕСКУ и Д. ОЛАРУ, Об определении некоторых параметров вспомогательных ракет 23

ВИБРАЦИИ

А. ТОНДЛ, Периодическое движение ротора при нелинейной характеристике упругих стоек подшипников 35

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Д. МАНЖЕРОН, К. ДРЭГАН и В. СВИЖЕВСКИ, Новый метод изучения теории механизмов и машин 51

ТРЕНИЕ-СМАЗЫВАНИЕ-ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ и А. НИКА, О предельных условиях для проблемы смазки 63

Г. ВАСИЛКА, Изучение коэффициента трения в круглом подшипнике при помощи кривых $p = g\ (V)$ 75

Л. РОЗЯНУ и О. ПРЕОЦЕСКУ, Об износе узлов трения в период обкатки 85

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Л. ДУМИТРЕСКУ и К. СТЭНЕСКУ, Кручение неоднородного цилиндрического стержня 111

П. П. ТЕОДОРЕСКУ, О расчете однопролетных балок-стенок . . . 115

С. РЭУТУ и Ф. ДИНКЭ, О поведении подвергнутого осевым динамичес нагрузкам прямого стержня 135

Е. ПРОКОПОВИЧ, О поперечной деформации стержня, подвергающегося осевому удару 141

Г. И. ПАНЭ, Об использовании испортившейся древесины в строительстве и промышленности 155

И. ИОНЕСКУ, В. КАЛКАН и Н. ГОЛЬДЕНБЕРГ, Пластмассы на основе фурфурола и дериватов. IV. Влияние термической обработки на некоторые сопротивления прогрессивным усилиям на излом текстолита с феноло-фурфуроловой смолой 171

Стр.

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. КЭРАРЕ и АМЗУЛЕСКУ, Расчет рам шедового типа при помощи уравнения в конечных разностях 189

М. ИФРИМ, Об одном критерии потери эластичной стабильности системами штанг 213

ГИДРОТЕХНИКА

Г. ВАСИЛЕСКУ, Превращение сулинского рукава в морской канал. Радикальное решение для обеспечения выхода в море и для освоения богатств дельты Дуная 233

М. КАГАН и К. ЯМАНДИ, Увеличение способности размыва и перемещения наносов воды, текущей по коротким каналам 249

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

Д. ПАВЕЛЕСКУ, К исследованию износа токарных резцов (облученных) для определения оптимальных параметров резания 265

РЕЦЕНЗИИ 285

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал Института прикладной механики Академии РНР
«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра и пр.).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

AEROMECANICĂ

CALCULUL DEFLECȚIUNII VÎNEI ȘI AL VITEZELOR INDUSE PE DISCUL ROTORULUI DE ELICOPTER

DE

N. N. PATRAULEA

1. Ipoteze

Calculul ce urmează se bazează pe o teorie turbionară și vom admite că se realizează aproximativ următoarea schemă (fig. 1).

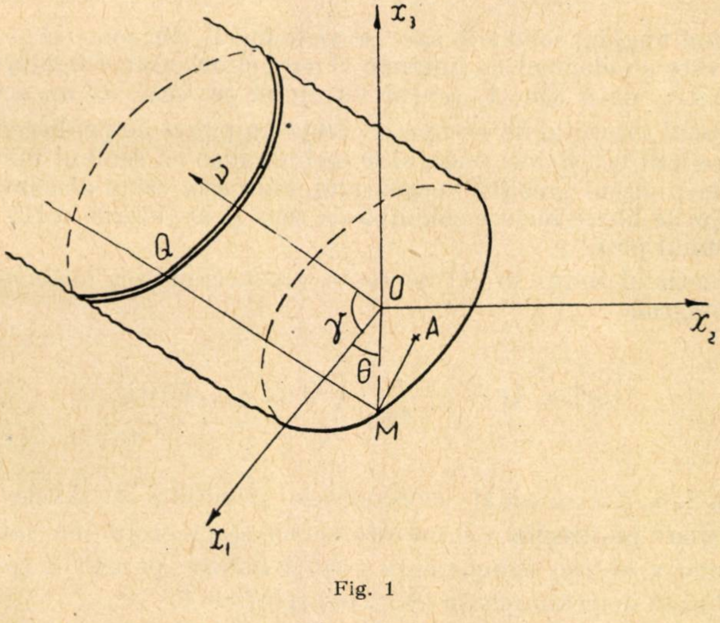


Fig. 1

Curentul care are direcția $\overline{V}$ la infinit amonte, în planul x_1Ox_3 este deflectat la trecerea prin planul Ox_1x_2 al rotorului făcînd un anumit unghi γ cu Ox_1, luînd direcția versorului $\overline{\nu}$.

Vom presupune că rotorul are un număr infinit de pale, că vitezele induse de rotație sînt neglijabile și că circulația este constantă de-a lungul palelor.

În aceste condiții se vor desprinde de pe discul rotorului inele circulare de vîrtejuri paralele cu planul rotorului și care sînt transportate de curentul deflectat. Vom presupune mai departe că aceste vîrtejuri generează o suprafață aproximativ cilindrică și în calcule o vom presupune riguros cilindrică. De asemenea densitatea de vîrtej va fi presupusă constantă de-a lungul cilindrului. Ipotezele menționate sînt ipotezele teoriei mișcărilor cu dîră aproape rectilinie*).

2. Componenta vitezei induse paralelă cu curentul deflectat

Expresia acestei componente este cunoscută și se poate calcula pe baza unui calcul foarte simplu.

Într-adevăr, potențialul indus într-un punct A al rotorului, de un inel elementar de vîrtej de intensitate $\varepsilon d\zeta'$, este dat de expresia cunoscută

$$d\varphi = -\frac{1}{4\pi}\cdot \varepsilon \Theta d\zeta', \tag{2.1}$$

Θ fiind unghiul solid sub care se vede inelul, din punctul A.

$d\zeta'$ este un element de lungime al axei cilindrului. Unghiul Θ se consideră pozitiv, dacă din A, sensul vîrtejului se vede ca un sens direct.

În cazul rotorului de elicopeter, dintr-un punct de pe discul rotorului sensul pare indirect și deci unghiul Θ trebuie luat cu semnul minus. Dimpotrivă, dacă discul „rezistă" curentului, cum este cazul discului de autogir, vîrtejurile libere inelare schimbă de sens și unghiurile solide Θ se vor lua cu semnul plus.

Potențialul indus în A, de toată pînza cilindrică turbionară va fi dat de integrala

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot \int\limits_{\zeta'=0}^{\infty} \Theta(\xi, \eta, \zeta, \zeta')\, d\zeta'. \tag{2.2}$$

Prin ξ, η, ζ s-au notat coordonatele punctului A. Axele ζ, η sînt perpendiculare pe direcția $\bar{v}$ și nu este nevoie să precizăm mai mult.

Pentru a obține componenta vitezei induse, pe axa ζ (paralelă cu $\bar{v}$) va trebui să derivăm relația (2.2), în raport cu ζ.

---

*) N. N. Patraulea, *Aerodinamica suprafețelor permeabile*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1956, p. 57.

Este vizibil însă că,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta} = -\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta'} \tag{2.3}$$

așa încît

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} = w_\zeta = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\Theta_{\xi'=\infty} - \Theta_{\xi'=0}\right). \tag{2.4}$$

Dar deoarece $\Theta_{\xi'=\infty} = 0$ și $\Theta_{\xi'=0} = -2\pi$ se obține formula cunoscută pentru viteza indusă

$$w_3(A) = \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{2.5}$$

3. Calculul general al vitezelor induse

Fie discul rotorului în planul $x_1\, Ox_3$ (fig. 1).

Să considerăm viteza indusă de vîrtejul elementar $\varepsilon\bar{k}_3 \times \bar{\rho} R \times \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\zeta'$, unde $\bar{k}_i$ sînt versorii axelor de coordonate, $\bar{\rho}$ versorul razei vectoare $\overline{OM}$, din planul rotorului care face unghiul θ cu axa Ox_1, R este raza rotorului.

Aplicînd formula lui Biot-Savart, se obține

$$d\bar{v}_A = \frac{1}{4\pi}\cdot \varepsilon R \mathrm{d}\theta \int_0^\infty \frac{(\bar{k}_3 \times \bar{\rho}) \times \bar{r}_{QA}}{r_{QA}^3}\,\mathrm{d}\zeta. \tag{3.1}$$

Pentru efectuarea calculului, vom descompune vectorul de poziție

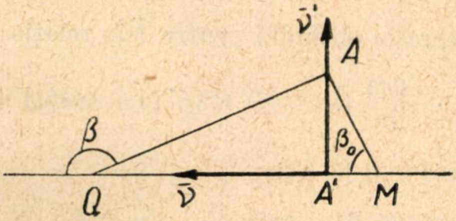


Fig. 2

$\bar{r}_{QA}$ după direcția $\bar{\nu}$ perpendiculară pe $\bar{\nu}'$, în planul format de generatoarea QM cu punctul A (fig. 2).

Vom pune

$$AA' = \bar{r}_{QA}\cdot\bar{\nu}' = D = r\sin\beta \tag{3.2}$$

și pe de altă parte avem

$$\bar{r}_{QA}\cdot\bar{\nu} = r\cos\beta. \tag{3.3}$$

Se deduce

$$r = \frac{D}{\sin\beta}\,. \tag{3.4}$$

Vom avea nevoie în (3.1) de integrala

$$\bar{I} = \int \frac{\bar{r}_{QA}}{r^3_{QA}}\,\mathrm{d}\zeta.$$

Vom introduce aici,

$$\bar{r}_{QA} = \bar{\nu}' \cdot D + \bar{\nu}\, r \cos\beta \tag{3.5}$$

și avem

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2, \tag{3.6}$$

unde

$$\bar{I}_1 = \int_0^\infty \frac{\bar{\nu} D \mathrm{d}\zeta}{r^3_{QA}}; \qquad \bar{I}_2 = \int_0^\infty \frac{\bar{\nu} r \cos\beta}{r^3_{QA}}.\mathrm{d}\zeta.$$

Efectuînd calcule elementare se obține,

$$\bar{I}_1 = \bar{\nu}' D \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\zeta}{r^3} = \frac{\bar{\nu}'}{D}\int_{\beta_0}^{\pi} \sin\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{\bar{\nu}'}{D}(1 + \cos\beta_0), \tag{3.7}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{\nu}\int_0^\infty \frac{\cos\beta\,\mathrm{d}\zeta}{r^2} = \frac{\bar{\nu}}{D}\sin\beta_0\,. \tag{3.8}$$

Valoarea β_0 a unghiului β corespunde intersecției generatoarei cu planul rotorului.

Introducînd expresia obținută pentru $\bar{I}$ în relația (3.1) avem

$$\mathrm{d}\bar{v}_A = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\varepsilon R \mathrm{d}\theta}{D}(\bar{k}_3 \times \bar{\rho}) \times [\bar{\nu}'(1 + \cos\beta_0) + \bar{\nu}\sin\beta_0]. \tag{3.9}$$

Fie proiecțiile versorului $\bar{\nu}$, pe axe;

$$\nu_1 = \cos\gamma, \qquad \nu_2 = 0, \qquad \nu_3 = \sin\gamma. \tag{3.10}$$

Fie mai departe $M(\xi_i)$, punctul în care o generatoare intersectează planul rotorului și x_i, coordonatele punctului A.

Din figura 2, se vede că avem

$$\overline{A'A} = \bar{r}_A - \bar{r}_M + \overline{A'M} = \bar{r}_0 + \overline{A'M},$$

de unde deducem

$$\bar{\nu}' = \frac{\bar{k}_j}{D}[x_j - \xi_j - \nu_j \nu_i (x_i - \xi_i)]; \; D = \sqrt{(x_i - \xi_i)^2 - [\nu_i (x_i - \xi_i)]^2}. \tag{3.11}$$

În (3.11) și mai departe vom adopta convenția însumării după indicii care se repetă.

Avem de asemenea

$$\cos\beta_0 = \frac{\nu_j (x_j - \xi_j)}{\sqrt{(x_j - \xi_j)^2}}\,; \qquad \sin\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{[\nu_j (x_j - \xi_j)]^2}{(x_k - \xi_k)^2}}\,. \tag{3.12}$$

Ținînd seama de (3.10), vom avea

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_1' = \frac{(x_1 - \xi_1)\sin^2\gamma}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 \sin^2\gamma + (x_2 - \xi_2)^2}}\,; \quad \nu_2' = \frac{x_2 - \xi_2}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 \sin^2\gamma + (x_2 - \xi_2)^2}}\\
&\nu_3' = \frac{-\cos\gamma\sin\gamma\,(x_1 - \xi_1)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 \sin^2\gamma + (x_2 - \xi_2)^2}}\,,\\
&\cos\beta_0 = \frac{\cos\gamma\,(x_1 - \xi_1)}{\sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}}\,; \quad \sin\beta_0 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\gamma\,(x_1 - \xi_1)^2}{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}}\\
&D = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 \sin^2\gamma + (x_2 - \xi_2)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

4. Viteza indusă în centrul rotorului

Pentru a calcula viteza indusă în centrul rotorului, vom pune în formulele obținute $x_i = 0$. Căpătăm astfel

$$\left.\begin{aligned}
&\nu_1' = \frac{-\cos\theta\sin^2\gamma}{\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\gamma + \sin^2\theta}}\,; \quad \nu_2' = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\gamma + \sin^2\theta}}\,;\\
&\nu_3' = \frac{\cos\gamma\sin\gamma\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\gamma + \sin^2\theta}}\,,\\
&\cos\beta_0 = -\cos\gamma\cos\theta\,; \quad \sin\beta_0 = \sqrt{\cos^2\theta\sin^2\gamma + \sin^2\theta}\,,\\
&D = R\sqrt{\cos^2\theta\sin^2\gamma + \sin^2\theta}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

Vom avea de înlocuit aceste valori în formula (3.9) pe care o vom scrie în prealabil astfel

$$\mathrm{d}\bar{v}_A = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{R\,\mathrm{d}\theta}{D}(\bar{k}_2\cos\theta - \bar{k}_1\sin\theta) \times [\nu_i' \bar{k}_i (1 + \cos\beta_0 + \nu_i \bar{k}_i \sin\beta_0)]\,\cdot$$

Făcînd calculele se obține

$$v_3 = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1 - \cos\gamma\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\varepsilon}{2}\,; \quad v_2 = 0\,;$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$v_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon R d\theta}{D}\,[\cos^2\theta\cos\gamma\sin\gamma\,(1-\cos\gamma\cos\theta)+\cos\theta\sin\gamma\,(\cos^2\theta\sin^2\gamma+\sin^2\theta)].$$

Ținînd seama că expresia lui D este simetrică față de x_1 și x_2 vom avea

$$v_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\gamma\sin\gamma\cos^2\theta\,d\theta}{1+\cos^2\theta\,(\sin^2\gamma-1)} = \frac{\varepsilon}{\pi}\cos\gamma\sin\gamma . I,$$

unde

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\theta\,d\theta}{1-\cos^2\theta.\cos^2\gamma} = \frac{\pi}{\cos^2\gamma}\cdot\frac{1-\sin\gamma}{\sin\gamma}.$$

Se obține deci

$$v_1 = \frac{\varepsilon}{2\cos\gamma}(1-\sin\gamma).$$

Rezumînd, avem așadar, rezultatele foarte simple

$$v_1 = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\,;\quad v_2 = 0\,;\quad v_3 = \frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{4.2}$$

Se verifică ușor că proiecția vitezei induse (4.2) pe direcția curentului deflectat este $\frac{\varepsilon}{2}$, rezultat deja obținut pe o cale mai simplă la paragraful 2.

Se constată imediat că *direcția vitezei induse este bisectoarea unghiului făcut de normala la rotor cu direcția curentului deflectat* (fig. 3).

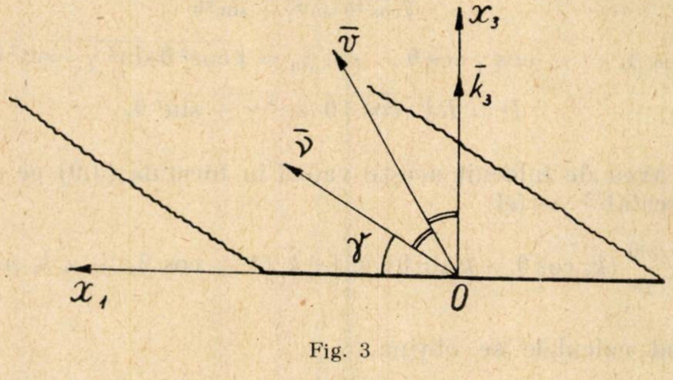


Fig. 3

Aceste relații (4.2) dau componentele vitezei induse în funcție de densitatea turbionară și de unghiul γ. În paragraful ce urmează se va arăta cum poate fi determinat unghiul γ și densitatea de vîrtej ε.

5. Deflecţiunea curentului în centrul rotorului

Notînd cu U_3 componenta normală pe rotor a vitezei de la infinit şi cu U_1 componenta tangentă la planul rotorului a vitezei de la infinit, din definiţia lui γ şi pe baza relaţiilor (4.2) rezultă

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{U_1 + v_1}{U_3 + v_3} = \frac{1 + \dfrac{\varepsilon}{2U_1} \cdot \dfrac{1 - \sin\gamma}{\cos\gamma}}{\dfrac{U_3}{U_1} + \dfrac{\varepsilon}{2U_1}} . \tag{5.1}$$

Viteza curentului deflectat va avea intensitatea

$$V^{\star} = \sqrt{\left(U_1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1 - \sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2 + \left(U_3 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2} \tag{5.2}$$

şi componentele

$$v_1^{\star} = U_1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1 - \sin\gamma}{\cos\gamma}\, ; \quad v_2^{\star} = 0\, ; \quad v_3^{\star} = U_3 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \tag{5.3}$$

6. Observaţii

Din relaţiile (5.3) se constată

a) Pentru viteze mari de deplasare a elicopterului şi deci pentru γ foarte mic,

$$v_1 = v_3 = \frac{\varepsilon}{2}, \tag{6.1}$$

v_1 se poate neglija faţă de viteza mare de translaţie aşa încît este justificată formula empirică utilizată în mod curent care ţine seama numai de componenta v_3 a vitezei induse $\left(v_3 = \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

b) În cazul funcţionării la punct fix, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ şi deci după (5.3)

$$v_1 = 0,\ v_3 = 0,$$

aşa că din nou este justificată formula empirică amintită.

c) Pentru situaţii intermediare este cazul însă să se ţină seama de formulele (5.3).

7. Relaţia între saltul de presiune δp şi densitatea turbionară

Saltul de presiune δp se leagă de saltul constantei lui Bernoulli la traversarea discului rotorului.

Avem deci la infinit aval

$$\delta p = \frac{\rho}{2}\left[V_{\infty}^2 - \left(V_{\infty}^{\star} - \varepsilon\right)^2\right] = \rho\varepsilon\left(V_{\infty}^{\star} - \frac{\varepsilon}{2}\right), \tag{7.1}$$

unde prin $V^\star_\infty$ s-a notat viteza efectivă la infinit aval în interiorul vînei

$$V^\star_\infty = \sqrt{\left(U_1 + \varepsilon\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2 + (U_3+\varepsilon)^2}. \tag{7.2}$$

8. Coeficienţii adimensionali potriviţi şi relaţiile dintre ei

Vom introduce următorii coeficienţi adimensionali :

$\overline{\delta p} = \delta p \Big/ \frac{\rho}{2} V^2$ — saltul de presiune adimensional,

α — unghiul de incidenţă al rotorului,

γ — unghiul de deflecţie a vînei aproape de rotor,

$\overline{\varepsilon} = \varepsilon/V$ — densitatea turbionară adimensională,

$\overline{v}^\star = \overline{V^\star}/V$ — viteza efectivă adimensională în centrul rotorului, (8.1)

$\overline{v}_1{}^\star$ — componenta tangenţială a lui $\overline{v^\star}$,

$\overline{v}_3{}^\star$ — componenta normală a lui $\overline{v^\star}$.

Formulele precedente devin

$$\operatorname{ctg}\gamma = \frac{\cos\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}}{\sin\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}}, \tag{8.2}$$

$$\overline{v}^\star = \sqrt{\left(\cos\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2 + \left(\sin\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\right)^2}, \tag{8.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{v}^\star_1 &= \cos\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}, \\ \overline{v}^\star_2 &= 0, \\ \overline{v}^\star_3 &= \sin\alpha + \frac{\overline{\varepsilon}}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

$$\overline{\delta p} = 2\,\overline{\varepsilon}\left(\overline{v}^\star_\infty - \frac{\overline{\varepsilon}}{2}\right), \tag{8.5}$$

$$\overline{v}^\star_\infty = \sqrt{\left(\cos\alpha + \overline{\varepsilon}\frac{1-\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2 + (\sin\alpha + \overline{\varepsilon})^2}. \tag{8.6}$$

Dîndu-se α și γ se pot calcula ceilalți coeficienți. Într-adevăr din (8.2) avem succesiv

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{2} = \frac{\sin(\gamma-\alpha)\cos\gamma}{1-\sin\gamma}, \tag{8.7}$$

$$\bar{v}_1^{\star} = \cos\alpha + \sin(\gamma-\alpha),$$

$$\bar{v}_3^{\star} = \sin\alpha + \sin(\gamma-\alpha)\frac{\cos\gamma}{1-\sin\gamma} = \sin\alpha + \frac{\bar{\varepsilon}}{2}, \tag{8.8}$$

$$\bar{v}_\infty^{\star} = \sqrt{[\cos\alpha + 2\sin(\gamma-\alpha)]^2 + (\sin\alpha + \bar{\varepsilon})^2}, \tag{8.9}$$

$$\overline{\delta p} = 2\bar{\varepsilon}\left(\bar{v}_\infty^{\star} - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}\right). \tag{8.10}$$

Astfel se pot trasa diagramele

$$\bar{v}_1^{\star} = \bar{v}_1^{\star}(\overline{\delta p};\ \alpha); \qquad \bar{v}_3^{\star} = \bar{v}_3^{\star}(\overline{\delta p};\ \alpha) \tag{8.11}$$

$$\gamma = \gamma(\overline{\delta p};\ \alpha)\ ; \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\overline{\delta p};\ \alpha)$$

Primită la redacție la 4 iulie 1956.

РАСЧЕТ ДЕФЛЕКЦИИ СТРУИ И ИНДУКТИВНЫХ СКОРОСТЕЙ НА ДИСКЕ РОТОРА ГЕЛИКОПТЕРА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Расчет основан на гипотезах теории движений с почти прямым следом [стр. 14], применяемой к ротору геликоптера, который рассматривается как проницаемая поверхность. Затем допускается, что перепад давления δp на диске постоянен и что касательные силы незначительны.

Путем расчетов, основанных на соответствующей вихревой схеме, приходят к формулам (4,2), которые дают проекции индуктивной скорости в центре ротора на осях $Ox_1x_2x_3$ (рис. 1).

Отсюда следует, что вектор — индуктивная скорость в центре ротора находится на биссектрисе угла, образованного нормалью к диску и направлением $\bar{v}$ отклоненной струи.

В параграфе 8 в полученных соотношениях применяются подходящие безразмерные параметры.

LE CALCUL DE LA DÉFLEXION DE LA VEINE ET DES VITESSES INDUITES SUR LE DISQUE DU ROTOR DE L'HÉLICOPTÈRE

(RÉSUMÉ)

Le calcul est basé sur les hypothèses de la théorie des mouvements à sillage presque rectiligne [cit. p. 14], appliquée au rotor de l'hélicoptère, considéré comme surface perméable.

On admet ensuite que le saut de pression δp est constant sur le disque et que les forces tangentielles sont négligeables.

Après des calculs basés sur un schéma tourbillonnaire, on arrive aux formules (4.2), donnant les projections de la vitesse induite au centre du rotor, sur les axes $Ox_1x_2x_3$ (fig. 1).

Il en résulte que le vecteur vitesse induite y est sur la bissectrice de l'angle formé par la normale au disque et la direction $\overline{v}$, *de la veine déflechie.*

Au paragraphe 8, on utilise — dans les relations obtenues — des paramètres adimensionnels convenables.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

AEROMECANICĂ

CU PRIVIRE LA DETERMINAREA UNOR PARAMETRI AI RACHETELOR AUXILIARE

DE

D. PAVELESCU şi D. OLARU

Rachetele auxiliare, ajutătoare decolării, sînt folosite din ce în ce mai mult ca organe acceleratoare la diferite tipuri de avioane atît cu reacţie cît şi cu elice. Rachetele de „start" se remarcă printr-o singură perioadă caracteristică : perioada activă de ardere. Ne vom ocupa de racheta cu combustibil solid. La aceasta, pentru a se putea depăşi durata de funcţionare, care normal poate fi cuprinsă între 0,05 şi 20s, racheta dispune de ajutaj cu un ac regulator care modifică secţiunea critică, rereglînd scurgerea ; se menţionează că, în cursul încercărilor experimentale prezentate în lucrare, nu s-a utilizat nici un dispozitiv de reglaj, preferîndu-se numai perioade active reduse (0,7. . . 2s).

Pentru siguranţa obţinerii unei anumite forţe de tracţiune la rachete, este necesar să se cunoască precis atît parametrii cît şi eventualele cauze de nestabilitate ale procesului de ardere.

În acest scop s-a pus problema realizării unei aparaturi adecvate măsurătorilor „statice", astfel ca, prin rezultatele experimentale obţinute, fie să se stabilească tabelele şi diagramele calculului, fie să se verifice aspectele teoretice ce se bazează pe anumite aproximări şi cer o confirmare practică.

NOTAŢII :

u = viteza liniară de propagare a arderii, m/s ;
w = viteza de scurgere a gazelor, m/s ;
p = presiunea într-o secţiune curentă a ajutajului, kg/cm^2 ;
p_i = presiunea din camera de ardere, kg/cm^2 ;
T = temperatura gazelor în grade absolute, °K ;
$F_{r\,\mathrm{exp}}$ = forţa de tracţiune experimentală la banc, kg ;
F_{r_c} = forţa de tracţiune calculată, kg ;
S_e = secţiunea de ieşire a ajutajului, cm^2 ;

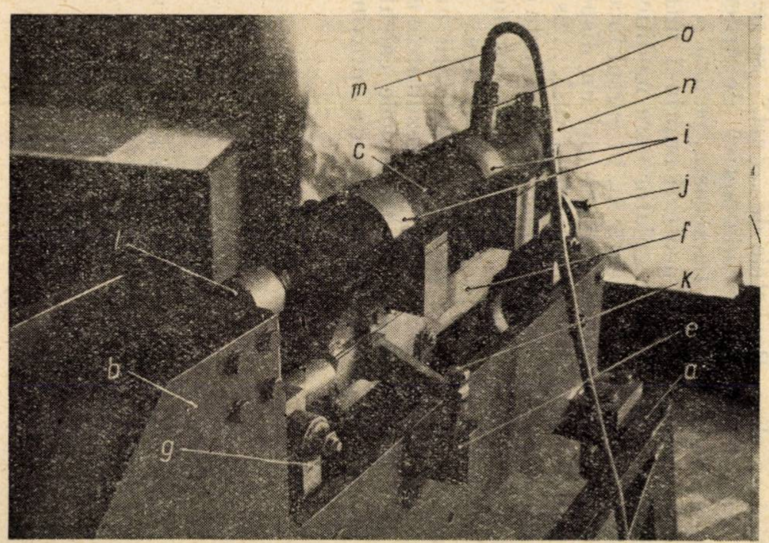

m
c
l
b
g
o
n
i
j
f
K
e
a

Fig. 1

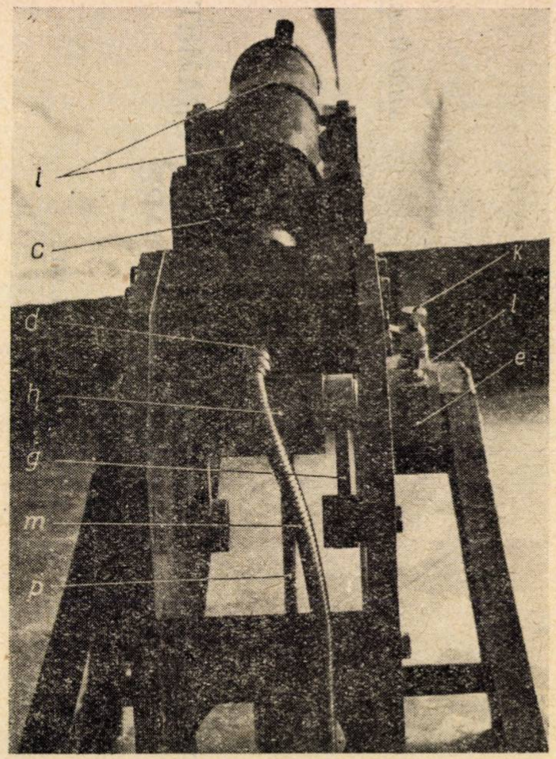

i
c
d
h
g
m
p
k
l
e

Fig. 2

S_{cr} = secțiunea critică a ajutajului, cm^2;
G_s = debitul masic pe secundă, kg/s;
δ = greutatea specifică a pulberii, kg/dm^3;
ω_0 = greutatea inițială a pulberii, kg.

INDICI:

i = privind interiorul camerii;
c = privind camera de ardere;
a = privind ajutajul;
o = privind faza inițială;
k = privind faza finală;
e = privind secțiunea de ieșire;
cr = privind secțiunea critică.

1. **Metoda și aparatura de măsură**

În primul rînd a apărut necesitatea măsurării „la sol", la racheta auxiliară, a cîtorva parametri ai perioadei active, ca forța de tracțiune, presiunea în camera de ardere, temperatura de ardere etc., pentru ca apoi să se obțină verificarea altor parametri teoretici.

S-a ajuns la concluzia obținerii unor condiții optime de măsurare, prin adaptarea unui sistem electronic cu captor piezoelectric care, prin intermediul unui sistem mecanic adecvat, să execute în primul rînd determinările care se reduc la măsurători de presiuni.

Nu vom insista asupra aparaturii electronice, ansamblul captor-amplificator-oscilograf catodic fiind de tipul celor folosite la determinarea pe cale electrică a parametrilor neelectrici, în cazul de față presiuni.

Menționăm adaptarea aparaturii pentru o gamă de eforturi cuprinsă între 1 și 2500 kg, determinările fiind făcute simultan cu două canale de măsură. S-au întrebuințat cristale de cuarț pentru eforturi de 800 și 5000 kg, cu deformații sub 4μ la eforturile măsurate (maximum 1000 kg), considerîndu-se erorile de temperatură practic nule pînă la 500°C; cristalele au fost astfel protejate ca să poată exista o riguroasă proporționalitate între efortul de apăsare și cantitatea de electricitate acumulată pe fețele cristalului. Din cauza temperaturilor mari din camera de ardere și ajutaj, captorii piezoelectrici au fost modificați pentru acest regim.

Constructiv s-a realizat posibilitatea plasării captoarelor în diferite puncte de măsură (pe corpul rachetei, ajutaj sau bancul de măsură) punctele (*d*, *e* și *o* din fig. 1 și fig. 2), aflate în general la o distanță de aproximativ 10 m de aparatura radiometrică, cordonul de legătură fiind asigurat cu blindajul metalic elastic *m*.

Sistemul de fotografiere al oscilografului catodic, printr-o gamă largă de turații a tamburului prevăzut cu un film pancromatic, a putut înregistra fenomene cu durate variind între 10^{-4} și 2s, baza de timp fiind marcată de un generator de impulsuri cu frecvențe cuprinse între 60 și 1000 Hz.

Un dispozitiv electric a asigurat atît sincronizarea cît și succesiunea operațiilor adecvate măsurătorii, diferitele aspecte și faze fiind filmate cu viteza de aproximativ 1500 imagini pe minut.

O parte originală a aparaturii o constituie sistemul mecanic de transmitere a eforturilor (fig. 1 și fig. 2). Vom descrie sumar această aparatură.

Batiul metalic *a* are posibilitatea de a fi încastrat într-o fundație de beton; constructiv s-a prevăzut un prag tampon *b* de opunere la tendința de înaintare a rachetei *c*. Bancul de măsură este astfel amenajat încît permite transmiterea efortului de înaintare pe suprafața activă a captorului piezoelectric plasat axial *d* și măsurarea momentului de răsucire cu un captor plasat lateral *e*. Presiunile în diferitele puncte ale camerei de ardere se măsoară cu captorul *o*.

O sanie dublu basculantă *f* permite atît mișcarea longitudinală (cu ajutorul unui sistem de biele *g*, cît și cea de răsucire (pivotarea pe rulmenți *h*) a rachetei, cu care aceasta face corp comun prin intermediul a două coliere metalice *i*. Două dispozitive de pretensionare *j* și *k* asigură contactul intim între corpul rachetei și piesa auxiliară *l* a captorului piezoelectric, eliminînd posibilitățile de șoc sau vibrații, atît longitudinale cît și radiale.

Pentru a se scoate sistemul din poziția de echilibru nestabil (centrul de greutate fiind plasat deasupra axului de rotație), pivotul de oscilație este prevăzut cu un braț vertical cu contragreutate *p*.

Sistemul de măsură arătat mai sus corespunde celor trei condiții cerute de specificul determinărilor:

a) Să poată urmări și înregistra cît mai fidel fenomenele ce au loc chiar în fracțiuni de secundă.

b) Să fie robust, evitînd etalonări repetate sau faze necomparabile.

c) Să elimine erorile sau deformațiile datorite variațiilor de temperatură.

Au fost experimentate trei modele ale unui singur tip de rachetă clasică de start cu combustibil solid*) amorsată electric, încărcătura din camera de ardere putînd varia între 2 și 5 kg prin schimbarea numărului bastoanelor de combustibil. A existat de asemenea posibilitatea înlocuirii plăcii de fund a rachetei *n*, astfel ca să se experimenteze diferite ajutaje; remarcăm modelul cu un singur ajutaj central, ale cărui caractere experimentale le vom prezenta în paralel cu cele teoretice.

2. Rezultate experimentale

Dintr-un număr de aproximativ 120 de experiențe, executate într-o variată gamă de parametri, s-au putut face o serie de observații importante:

---

*) S-a folosit o pulbere clasică în „bastoane" avînd în compoziția ei coloxinină, centralită, dinitrodietilenglicol, ulei de vaselină etc. Față și de valorile temperaturilor, rezultă un $\varkappa = 1{,}20$ pentru gazele ce se scurg prin ajutaj.

a) În perioada activă s-a remarcat că presiunea interioară se menține practic constantă (fig. 3 *a*).

Se dovedește că pentru același tip de ajutaj și combustibil folosit, forța de tracțiune variază funcție de presiunea din camera de ardere. Existența în timpul relativ scurt al perioadei active, a unei presiuni interioare și a unei forțe de tracțiune de valoare constantă simplifică mult aspectul problemei.

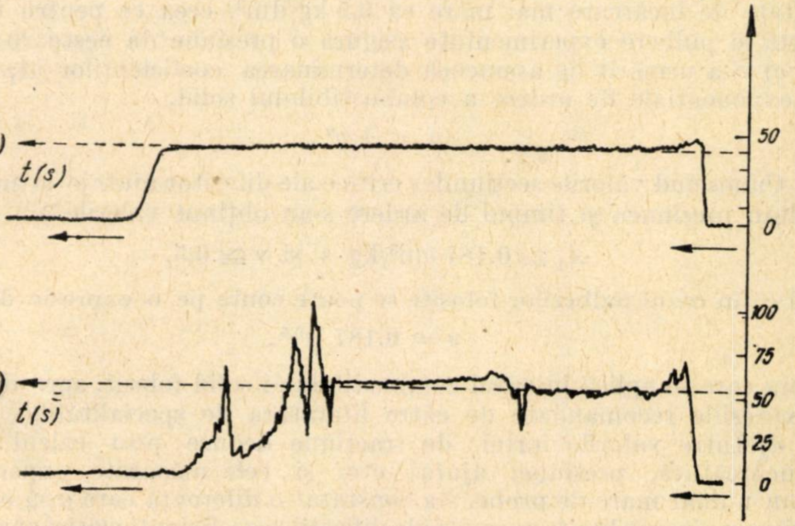


Fig. 3

b) Curbele de presiune interioară ne dau totodată indicații cu privire la acțiunea așa-numitului fenomen de „tuse"*) a rachetei experimentale. Întreruperea sacadată a arderii manifestată uneori prin 1. . . 3 atenuări și reintensificări a jetului incandescent — „tusea" rachetelor cu combustibil solid — se poate explica prin faptul că, în timpul arderii, în anumite cazuri, datorită calității necorespunzătoare a combustibilului solid, presiunea din camera de ardere poate să scadă sub o anumită valoare (aproximativ 10 ata). În această situație, viteza de ardere este prea mică pentru a completa consumul de gaze evacuat prin ajutaj, micșorîndu-se astfel mult transmisia de căldură de la gaze la pulbere, ceea ce provoacă o micșorare pronunțată a arderei pentru o foarte scurtă durată de timp. Fenomenul a fost înregistrat în cursul a mai multor experiențe; diagrama din figura 3*b* reprezintă variația presiunii din camera de ardere a rachetei, obținută pe pelicula fotografică a oscilografului catodic, într-unul din aceste cazuri.

---

*) Spre deosebire de fenomenul pendular de „autoreglare" dintre debitul de formare și cel de scurgere.

De asemenea, a fost filmată și propagarea jetului de gaze la ieșirea din ajutaj ; în figura 4 se observă jetul unei ,,prime faze de ardere'' și începerea celei de a doua. În figurile 5 și 6 au fost redate detaliat, prin imagini succesive, atît propagarea jetului de gaze incandescente, cît și fenomenul de tuse constatat în acest caz.

În această privință, în urma efectuării unor experiențe repetate, tragem concluzia că pentru înlăturarea acestui fenomen se impune o densitate de încărcare mai mare ca 0,5 kg/dm^3, ceea ce pentru tipul de rachetă și pulbere experimentate asigură o presiune de peste 20 kg/cm^2.

c) S-a urmărit de asemenea determinarea coeficienților A_1 și ν ai legii exponențiale de ardere a combustibilului solid,

$$u = A_1 p^{\nu} .$$

Cunoscînd valorile secțiunilor critice ale diferitor ajutaje și măsurînd simultan presiunea și timpul de ardere s-au obținut valorile*)

$$A_1 \cong 0{,}187 \text{ cm}^3/\text{kg}\cdot\text{s} \quad \text{și} \quad \nu \cong 0{,}5,$$

astfel că în cazul pulberilor folosite se poate conta pe o expresie de forma

$$u = 0{,}187\ p^{0{,}5},$$

singura care se aplică în cazul combustibilului solid folosit, spre deosebire de expresiile recomandate de către literatura de specialitate.

d) Între valorile forței de tracțiune deduse prin calcul funcție de încărcătură, presiune, ajutaj etc. și cele măsurate experimental într-un număr mare de probe, s-a constatat o diferență care însă confirmă valorile cuprinse în limite normale ale diferiților coeficienți clasici ai rachetei.

De exemplu, în experiența nr. 17, s-a determinat cu captorul *o*, în camera de ardere, o presiune $p_i = 42{,}60$ kg/cm^2 și s-a măsurat cu captorul *d* o forță de tracțiune $F_{r_{exp}} = 292$ kg valoarea forței de tracțiune teoretice fiind $F_{r_c} = 327{,}5$ kg.

Mărind numărul ajutajelor (față de un singur ajutaj central) cu aceeași încărcătură, s-au obținut valori mai mici, explicabil de altfel prin pierderile introduse în plus ($p_i \cong 42{,}50$ kg/cm^2, $F_{r_{exp}} = 280$ kg, $F_{r_c} = 319$ kg).

Pentru verificarea preciziei măsurătorilor, s-a folosit și metoda comparării rezultatelor citite pe ecranul tubului catodic (valori instantanee maxime), cu acelea indicate de un crucher etalon, intercalat între rachetă și captor. Au rezultat diferențe de numai aproximativ 2 %.

e) S-a urmărit de asemenea compararea valorilor unor parametri, în special a parametrilor *w* și *T*, deduși prin calcul, cu valorile respective obținute experimental.

---

*) Pulberea folosită în rachetele experimentale avînd raportul suprafețelor de ardere constant, există relația

$$1 = Z_k = \frac{\Sigma_0\, \delta A_1}{\omega_0}\, p_i^{\nu} t_k.$$

În acest mod pentru calculul coeficienților A_1 și ν sînt necesare determinările pe cale experimentală a parametrilor p_i și t_k.

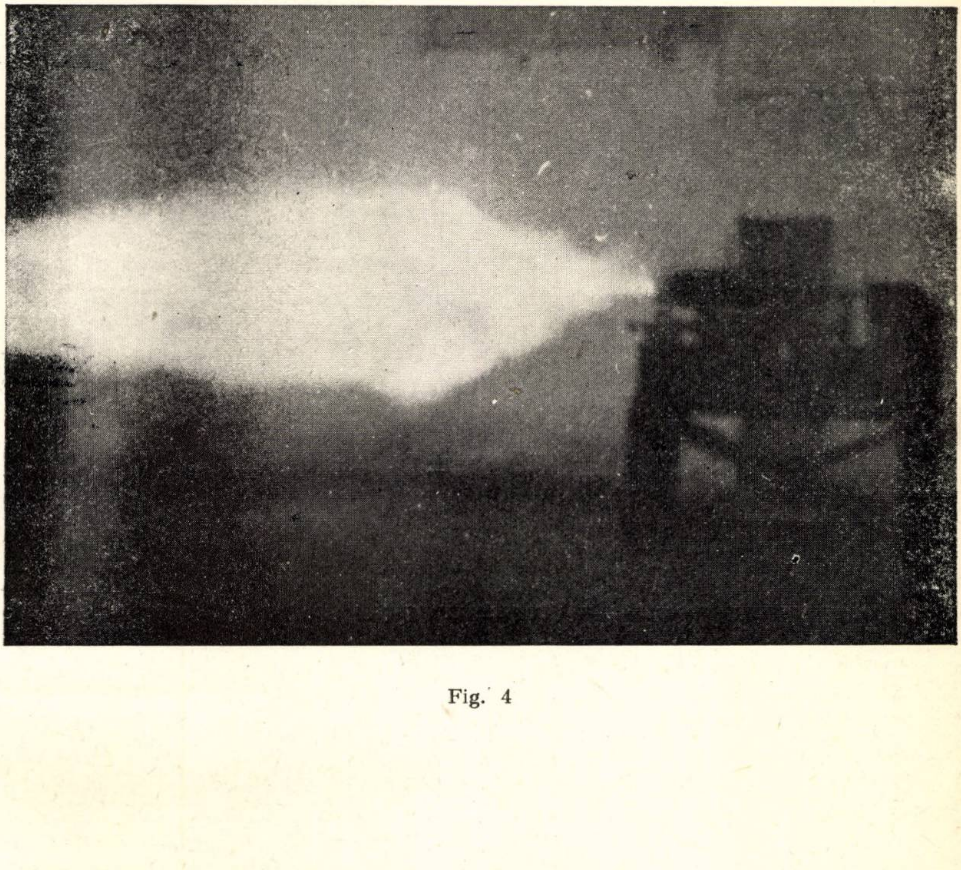


Fig. 4

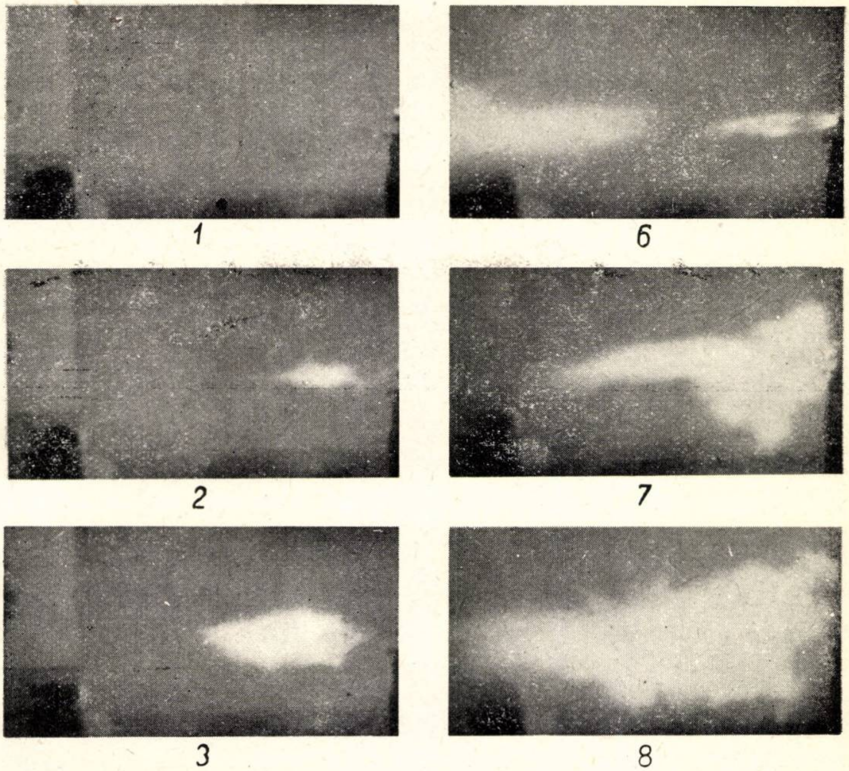
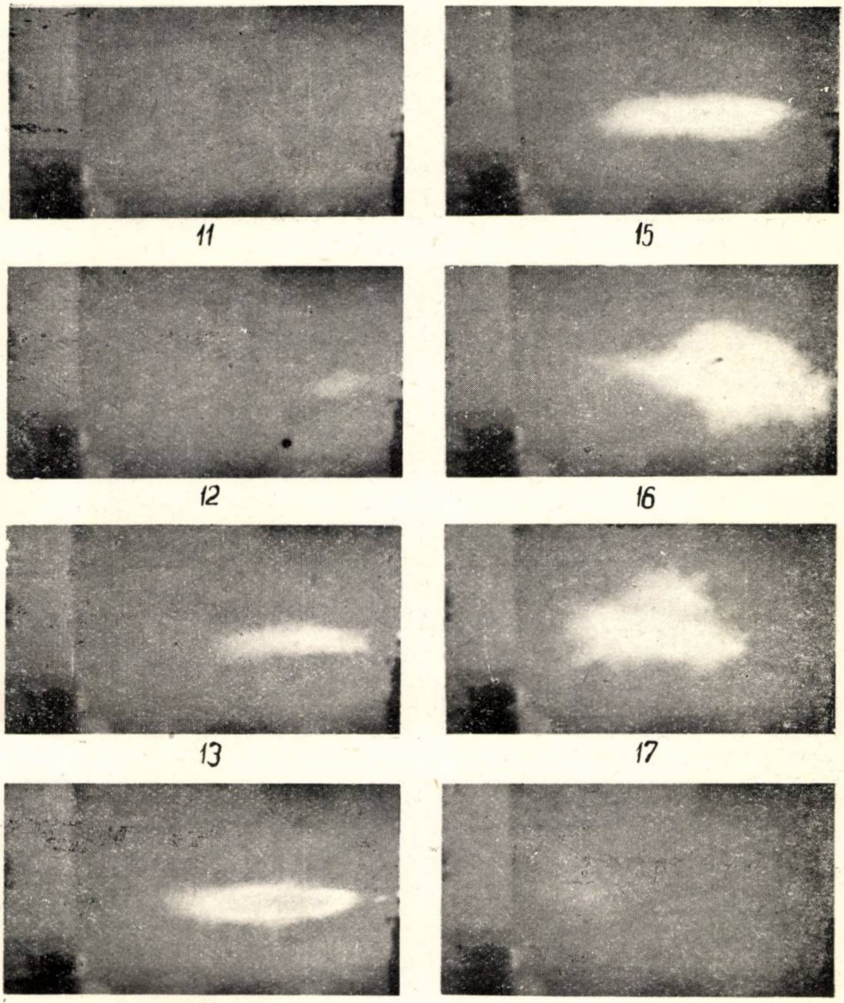

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Fig. 5



11 15

12 16

13 17

14 18

Fig. 6

Dacă admitem că arderea se face după funcția exponențială indicată anterior, înseamnă că în mod implicit considerăm, în general, numai o singură influență și anume cea a presiunii din interiorul camerei de ardere. În realitate însă, combustia se desfășoară sub influența mai multor factori, fapt care conduce la valori diferite ale parametrilor în cazul real față de cazul teoretic. De asemenea, regimul de scurgere supersonic al jetului de gaze prin ajutaj se face în condiții diferite de ipotezele teoretice.

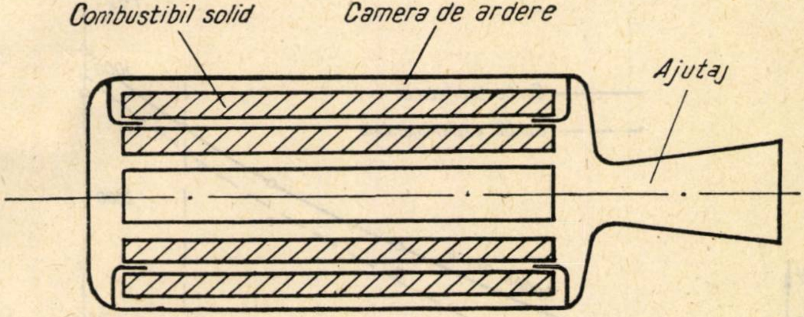


Fig. 7

Precizăm că au fost experimentate numai modele ce aparțin grupei de rachete cu încărcătură nerestricționată (fig. 7), la care combustibilul solid umple aproape complet camera de ardere, combustia propagîndu-se însă atît din interior spre exterior, cît și din exterior spre interior.

În tabloul următor, au fost consemnate valorile teoretice și experimentale ale presiunii și vitezei de scurgere a gazelor printr-un ajutaj central (model D_1), obținute în diferite secțiuni ale acestui ajutaj.

Pentru același caz sînt de asemenea prezentate și valorile temperaturii produselor de ardere.

Valori teoretice și experimentale ale ajutajului

Model D_1

Puncte	Secțiuni ajutaj	Presiuni p (kg/cm^2)		Vitezele jetului de gaze w (m/s)		Temperatura absolută T (°K)	
		Valori teoretice în axul ajutajului	Valori experimentale la perete	Valori teoretice în axul ajutajului	Valori experimentale la perete	Valori teoretice în axul ajutajului	Valori experimentale
0	31,75 (S_e)	1,05	1,00	2410	2250	1640	1500
1	12,85	3,65	3,50	2040	1950	2010	1800
2	7,40	9,45	9,00	1670	1550	2360	2200
3	5,32	15,50	14,50	1936	1300	2560	2400
4	5,15 (S_{cr})	24,00	—	1070	—	2760	—
5	31,75 (S_i)	42,50	41,80	0	—	3050	2900

După cum rezultă, la modelul de rachetă și de ajutaj prezentat, s-a măsurat în camera de ardere $p_i \cong 42$ kg/cm² și $T \cong 2900$°K. Datele mai importante ale ajutajului sînt următoarele:

$$\frac{S_e}{S_{cr}} = 6{,}15, \quad \alpha = 5\ldots 18° \quad \text{și} \quad L = 140 \text{ mm}.$$

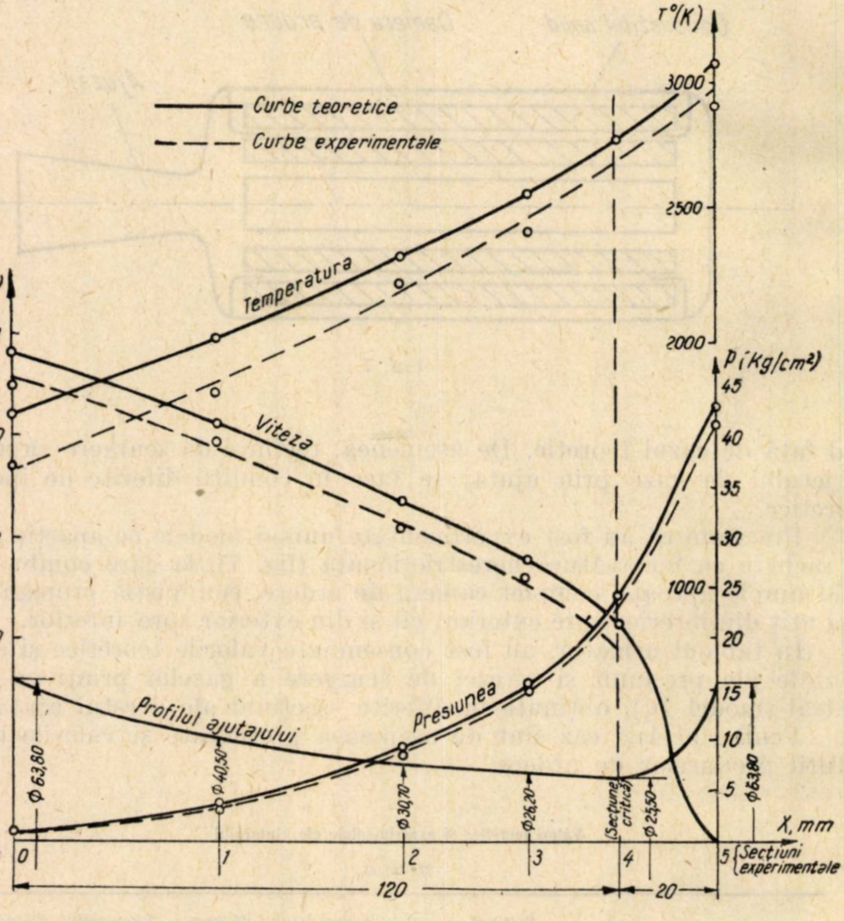


Fig. 8

În figura 8 sînt redate profilul acestui ajutaj precum și diagramele cu distribuția valorilor teoretice și experimentale ale parametrilor p, w, și T (°K) din tablou.

Valorile teoretice din tablou s-au obținut printr-un calcul grafico-analitic pe baza diagramelor I-T și S-T, generalizate pentru un caz ideal al unei scurgeri izentropice. S-a ales această metodă deoarece prezintă avantajul că ia în considerare atît disociația (care are loc în camera de combustie la aceste temperaturi), cît şi variaţia căldurilor specifice cu temperatura.

f) Dintre rezultatele cele mai importante ale probelor executate la banc în paralel cu valorile obţinute prin calcul sînt şi determinările diferitor coeficienţi ai rachetei.

Astfel din datele prezentate a rezultat coeficientul de pierderi al ajutajului

$$\varphi_a = 0{,}94 \text{ (valoare medie).}$$

Experimentînd bastoanele de pulbere cu compoziţia indicată, s-a obţinut de asemenea valoarea coeficientului de pierderi al camerei de ardere*)

$$\varphi_c = 0{,}915.$$

Faţă de aceste valori a rezultat coeficientul de „utilizare'' al rachetei experimentate

$$\varphi = 0{,}86.$$

Determinîndu-se $F_{r_{\text{exp}}}$, S_{cr}, $p_{i_{exp}}$ şi φ_a, s-a putut obţine de asemenea valoarea experimentală a coeficientului forţei de tracţiune (reacţie)

$$C_{F_{\text{exp}}} \cong 1{,}34,$$

valoarea sa teoretică, fiind

$$C_{F_{\text{teor}}} \cong 0{,}152.$$

3. Observaţii generale

Remarcăm că ajutajul experimental folosit, care se caracterizează printr-o variaţie progresivă a jumătăţii unghiului la centru, de la aproximativ 5° pînă la aproximativ 18° (S_e), nu prezintă „desprinderi'' din cauza scurgerii politropice cu absorbţie de căldură a jetului incandescent de gaze. Lungimea şi construcţia acestui tip de ajutaj a avantajat adaptarea captoarelor piezoelectrice pentru măsurarea presiunilor la suprafaţă în cele patru puncte indicate mai sus ale zonei supersonice; de asemenea, pentru măsurarea „optică'' a temperaturilor s-a redus progresiv lungimea ajutajului prin secţionări executate în planele 1, 2 şi 3 (perpendiculare pe axa scurgerii). În camera de ardere temperatura s-a determinat cu conuri ceramice; presiunea p_i a fost măsurată în mod permanent la fiecare determinare, pentru a se dispune de o valoare de comparaţie.

Se menţionează că datele prezentate experimental reprezintă media a cîte şase determinări; s-a procedat astfel pentru a se putea anihila

---

*) Coeficientul de utilizare al camerei de ardere se obţine din raportul

$$\varphi_c = \left[\frac{p_i\, S_{cr}}{G_s}\right]_{\text{exp}} \Bigg/ \left[\frac{p_i\, S_{cr}}{G_s}\right]_{\text{teor}}.$$

erorile ce inerent apar atunci cînd nu există posibilitatea ridicării simultane a tuturor punctelor experimentale a unei ,,încărcături''.

În scopul cunoașterii cît mai fidele a evoluției procesului de ardere la asemenea rachete, este necesară pe de o parte stabilirea precisă a compoziției chimice a pulberii de propulsie, iar pe de altă parte efectuarea măsurătorilor statice cu deosebită atenție. Astfel numai anumite condiții experimentale pot conduce la o reproducere cît mai corectă a fenomenelor care se petrec în timpul arderii în perioada activă a rachetei auxiliare.

După cum rezultă și din examinarea tabloului centralizator prezentat și a exemplului citat, există unele necorespondențe între valorile determinate teoretic și cele obținute pe cale experimentală pentru același parametru. Aceste neconcordanțe se datoresc atît erorilor de măsură și citire, cît și faptului că metodele analitice de calcul neglijează unele influențe ale procesului de ardere, iar ajutajul introduce de asemenea pierderi.

Vom sezisa cîteva dificultăți mai importante întîmpinate în timpul măsurătorilor efectuate :

— Umiditatea atmosferică mai accentuată în unele zile a influențat negativ sensibilitatea captoarelor piezoelectrice, astfel încît unele diagrame de presiune au indicat coborîri repezi, cu toate că confruntarea cu filmul cinematografic indica o ardere continuă. În alte cazuri, a fost influențată pulberea și drept urmare caracterul arderii.

— Aprecierea temperaturilor prin determinări ,,optice'', cît și pe baza comparației materialelor etalon, determinarea vitezelor prin intermediul presiunilor etc., se fac de asemenea cu erori variind aproximativ între 2 și 10 %, specificul măsurătorii impunînd condiții experimentale dificile.

— Variația tensiunii rețelei și a cîmpurilor exterioare a influențat aparatura electronică, impunînd de multe ori chiar repetarea măsurătorilor.

— Dispozitivele de pretensionare folosite s-au dovedit a fi de asemenea o sursă de erori.

Cu toate aceste dificultăți și cauze de erori, aparatura prezentată a dat în general rezultate satisfăcătoare prin precizia obținută la determinarea experimentală a unor parametri.

Primită la redacție la 15 octombrie 1956.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ ПАРАМЕТРОВ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ РАКЕТ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Ввиду все растущего значения в авиации впомогательных ракет с твердым горючим, авторы описывают экспериментальную установку для статического определения некоторых параметров рассматриваемого типа ракет, как например: силы тяги, давления в камере сгорания, температуры сгорания, скорости протекания газов через сопло и пр. Использованная авторами система измерений механически-электронная, причем механическая система является исходной.

Сравниваются результаты опытов с результатами, полученными путем вычисления, причем указываются некоторые более значительные затруднения, вызывающие погрешности, которые все же могли быть сведены к сравнительно невысокому уровню, так что в общем достигается исключительная точность определения.

ON THE DETERMINATION OF SOME PARAMETERS OF THE AUXILIARY ROCKETS

(ABSTRACT)

Owing to the fact that auxiliary rockets with solid fuel are increasingly used in aviation, this paper presents an experimental method for the statical determination of some parameters of the considered type of rocket, i.e. thrust, pressure in the combustion chamber, combustion temperature, flow velocity of gases through nozzles. A mechanical-electronical measuring system is used, the mechanical system being an original one.

The results of the tests are compared to those obtained by computation. The most important difficulties, which may be a cause of errors, are indicated but they could nevertheless be avoided, the accuracy of the determinations being generally remarkable.

BIBLIOGRAFIE

1. Elie Carafoli, *High Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
2. Theodor von Karman, *Le décollage assisté par fusées*. Interavia, 1952, nr. 7, p. 376—379.
3. N. V. Inozemţov şi V. S. Zuev, *Motoare cu reacţie în aviaţie*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952.
4. I. S. Korner, *Balistica interioară*. I.D.T., Bucureşti, 1954 (traducere).
5. Dumitru Olaru şi Dumitru Andreescu, *Unele rezultate obţinute în experienţele efectuate cu rachete cu combustibil solid*. Bul. ştiinţ. Acad. Tehn. Mil., 1956, anul II, nr. 3.
6. F. R. Polanski, *Balistica interioară a rachetelor*. I.D.T., Bucureşti, 1951 (traducere).
7. Rudolf H. Reichel, *La détermination au banc du rendement maximum des chambres de combustion des fusées*. Interavia, 1954, nr. 3.
8. George P. Sutton, *Rocket Propulsion elements*. John Wiley & Sons I Inc., New-York, 1949.
9. * * * *Jet propulsion*. Journal of the A.R.S., ianuarie 1956, vol. 26, nr. 1.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

VIBRAŢII

MIŞCAREA PERIODICĂ A ROTOARELOR CU O CARACTERISTICĂ NELINIARĂ A REAZEMELOR

DE

A. TONDL

Introducere

În problema mişcărilor oscilatorii şi a stabilităţii rotoarelor, s-au găsit în ultimul timp soluţii punîndu-se în evidenţă o serie întreagă de parametri care influenţează fenomenul. Importanţa acestei probleme şi necesitatea găsirii unei soluţii, apar pe primul plan, în special cînd luăm în considerare turaţia de regim mereu crescîndă a rotoarelor şi deplasarea turaţiilor de regim peste prima sau chiar cea de a doua turaţie critică.

Vom examina, în această lucrare, influenţa unei caracteristici neliniare a reacţiunilor din reazeme pe rulmenţi. Soluţia mişcării şi stabilitatea rotoarelor cu lagăre elastice avînd o caracteristică liniară a reazemelor, au fost deja studiate de alţi autori [1], [2], [3].

Vom începe prin a explica neliniaritatea caracteristicilor unui reazem. Dacă se consideră un lagăr de construcţie obişnuită, se poate vedea cu uşurinţă că în cazul cînd forţa acţionează în sens vertical (adică atunci cînd arborele rotorului se găseşte în poziţie orizontală), există, pentru o valoare oarecare a devierii centrului cuzinetului, o valoare a reacţiunii, pe direcţia verticală, mai mare cînd lagărul reazemului este comprimat, decît atunci cînd este tensionat (cînd reacţiunea este provocată în special prin supraîncărcarea şuruburilor de fixare a cuzinetului şi prin deformarea capacului acestuia). Într-un caz oarecum ideal, dependenţa reacţiunii R de deplasare a reazemului x are aspectul din figura 1. Această diferenţă este, prin urmare, neliniară şi asimetrică, formată din două ramuri liniare.

În realitate, cele două ramuri nu vor fi liniare şi schimbarea bruscă a semnului în punctul $x = 0$ nu va mai fi atît de pronunţată. Mai mult, cu toate că în calcul nu este vorba în mod direct de influenţa grosimii stratului activ lubrifiant al lagărului, trebuie să se ţină totuşi seama de faptul că acest strat are un caracter precis de neliniaritate, crește în mod continuu în timpul mișcării fusului de sus în jos. Din punct de vedere matematic, o caracteristică avînd un punct unghiulos ca în figura 1, introduce dificultăți, deoarece funcția $R = f(x)$ nu mai este analitică, astfel încît nu i se poate aplica cu succes metodele cunoscute, de exemplu metoda lui Poincaré. Metodele folosite pentru soluția ecuațiilor diferențiale avînd funcțiile neanalitice nu permit decît determinarea valorii aproximative a unei componente armonice a mișcării. De aceea nu ne putem servi de metodele de mai sus, decît în cazul cînd sîntem convinși că această componentă armonică este categoric dominantă. Rămîne încă de rezolvat problema stabilității soluției, care nu poate fi determinată în aceste condiții decît cu aproximație.

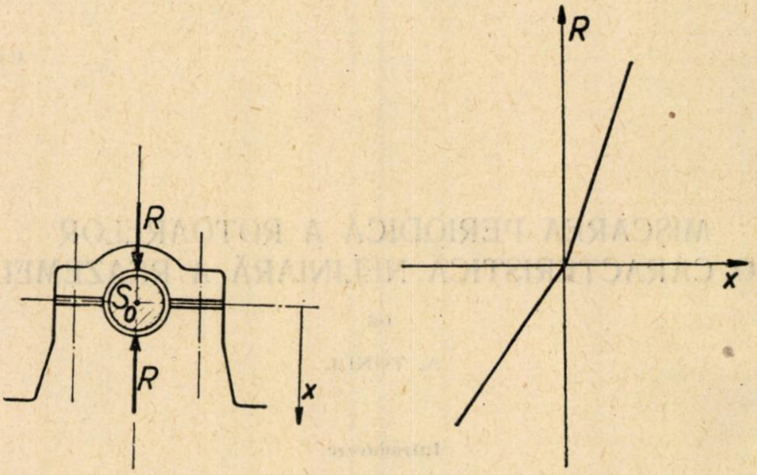


Fig. 1

Din aceste motive vom înlocui caracteristica reazemului printr-o funcție simplă asimetrică și neliniară:

$$f(x) = c_1 x + b^2 x^2.$$

Presupunem că

$$|x| < \frac{1}{2} \frac{c_2}{b^2},$$

unde se ia pentru sensul pozitiv al direcției centrului de rotație, x mișcarea în sensul forței gravitației. Această funcție este reprezentată în figura 2.

În această lucrare vom examina numai soluția mișcării periodice avînd o perioadă egală cu $2\pi/\omega$ (unde ω este viteza unghiulară a rotației arborelui) și stabilitatea acestei mișcări periodice. Viteza de rotație va fi presupusă tot timpul constantă.

Studiul a fost efectuat datorită sugestiei date de prof. Mastovsky, căruia autorul îi transmite pe această cale mulţumirile sale. Autorul îşi exprimă mulţumirile sale şi prof. Gonda, membru corespondent al Academiei Slovace de Ştiinţe, care a binevoit să citească această lucrare şi a comunicat autorului observaţii preţioase.

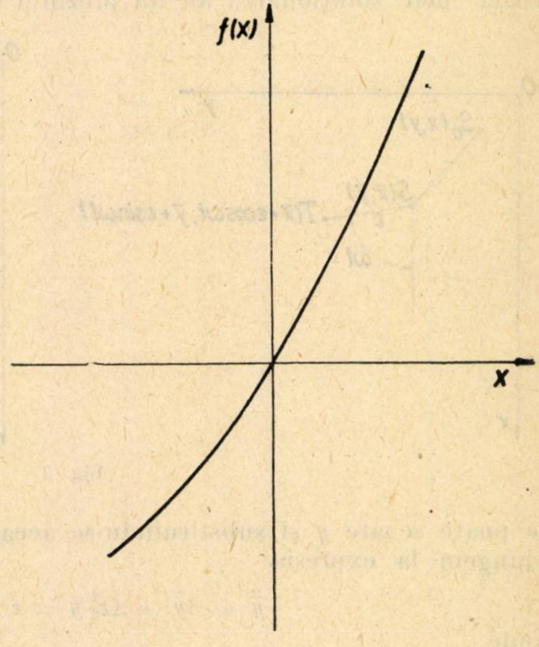


Fig. 2

1. Stabilirea ecuaţiilor diferenţiale şi soluţia mişcării periodice a unui rotor

Vom examina exemplul unui rotor simplu cu un singur disc în centrul arborelui, masa rotorului în comparaţie cu aceea a discului fiind neglijabilă.

Vom nota cu m masa discului şi cu c rigiditatea arborelui în zona discului. Vom presupune că reazemele sînt identice. În acest caz mişcarea discului este plană, ceea ce simplifică considerabil soluţia şi face posibilă o analiză mai amănunţită a influenţei reazemelor cu caracteristici neliniare. Să notăm cu $\bar{x}$, $\bar{y}$ coordonatele centrului discului S şi coordonatele centrului de rotaţie S_0 cu x, y (fig. 3 *a*). Excentricitatea centrului de gravitate T o vom nota $\overline{ST} = \varepsilon$. Admitem, mai departe, că arborele rotorului se roteşte cu o viteză unghiulară constantă ω. Reacţiunea în cele două reazeme în sens orizontal, adică în sensul axei y poate fi considerată ca variind liniar cu deplasarea cu un coeficient de rigiditate egal cu c_2. În sens vertical, adică în sensul axei x, reacţiunea reazemelor va fi, după cum s-a arătat în introducere, o funcţie neliniară de x.

Să presupunem, mai departe, că există forţe de amortizare care vor fi funcţii liniare ale vitezelor $\dot{\bar{x}}$, $\dot{\bar{y}}$, cu un coeficient de amortizare k.

Plecînd de la echilibrul forţelor (fig. 3, *b*), vom avea următoarele ecuaţii diferenţiale :

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\bar{x}} + k\dot{\bar{x}} + c(\bar{x} - x) &= m\varepsilon\omega^2\cos\omega t + mg, \\ m\ddot{\bar{y}} + k\dot{\bar{y}} + c(\bar{y} - y) &= m\varepsilon\omega^2\sin\omega t, \\ c(x - \bar{x}) + f(x) &= 0, \\ c(y - \bar{y}) + c_2 y &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

unde $f(x) = c_1x + b^2x^2$.

Se constată în primul rînd, că prima și a treia ecuație sînt independente de a doua și a patra, putînd fi deci rezolvate separat. Cel de-al doilea grup este compus din două ecuații liniare cu coeficienți constanți astfel încît soluționarea lor nu prezintă dificultăți. Din a patra ecuație

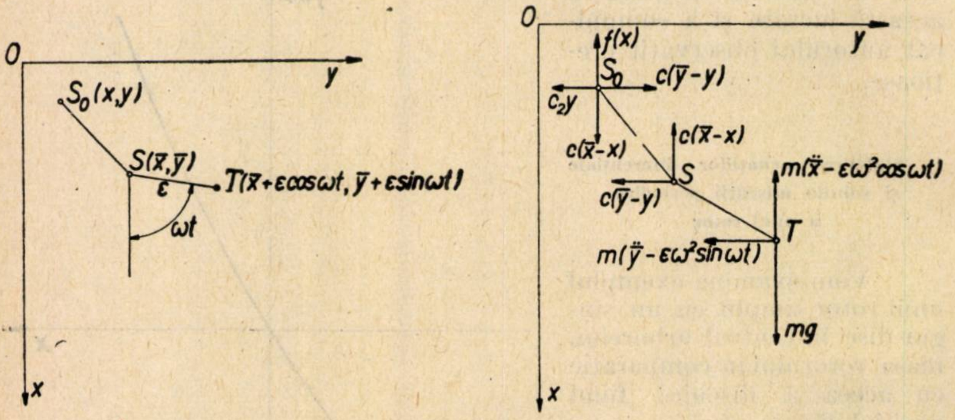

O
y
x
$S_0(x,y)$
$S(\bar{x},\bar{y})$
$T(\bar{x}+\varepsilon\cos\omega t, \bar{y}+\varepsilon\sin\omega t)$
ε
ωt
O
y
x
f(x)
S_0
$c(\bar{y}-y)$
c_2y
$c(\bar{x}-x)$
$c(\bar{x}-x)$
S
$c(\bar{y}-y)$
$m(\ddot{\bar{x}}-\varepsilon\omega^2\cos\omega t)$
T
$m(\ddot{\bar{y}}-\varepsilon\omega^2\sin\omega t)$
mg

Fig. 3

se poate scoate y și substituindu-se această valoare în a doua ecuație, ajungem la expresia

$$\ddot{\bar{y}} + \delta\dot{\bar{y}} + \Omega_2^2\,\bar{y} = \varepsilon\,\omega^2 \sin\omega t, \tag{1.2}$$

unde

$$\delta = \frac{k}{m}, \quad \Omega_2^2 = \frac{c\,c_2}{m\,(c + c_2)}.$$

Soluția generală a ecuației (1.2) este următoarea:

$$\bar{y} = e^{-\frac{1}{2}\delta t}\left(C_1 \cos\sqrt{\Omega_2^2 - \left(\frac{1}{2}\,\delta\right)^2}\; t + C_2 \sin\sqrt{\Omega_2^2 - \left(\frac{1}{2}\,\delta\right)^2}\; t\right) +$$

$$+ \frac{\varepsilon\omega^2}{(\Omega_2^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\,\omega^2}\,[(\Omega_2^2 - \omega^2)\sin\omega t - \delta\,\omega\cos\,\omega t], \tag{1.3}$$

unde C_1, C_2 sînt constante de integrare. Primii doi termeni reprezintă vibrațiile proprii, care practic dispar după un oarecare timp. Al treilea termen exprimă mișcarea periodică stabilizată și excitată de dezechilibrul rotorului.

Din prima și a treia ecuație a sistemului (1.1) se obține

$$\begin{gathered} \ddot{\bar{x}} + \delta\dot{\bar{x}} + \Omega^2\,(\bar{x} - x) = \varepsilon\,\omega^2\cos\,\omega t + g, \\ c\,(x - \bar{x}) + f\,(x) = 0, \end{gathered} \tag{1.4}$$

unde $\Omega^2 = \dfrac{c}{m}$.

Aici ar fi de preferat să se elimine variabila $\bar{x}$ şi să se calculeze mai întîi mişcarea centrului de rotaţie. Din a doua ecuaţie (1.4) obţinem pentru $\bar{x}$ valoarea

$$\bar{x} = \left(\frac{c_1}{c} + 1\right) x + \frac{b^2}{c}\, x^2. \tag{1.5}$$

Înlocuind această expresie în prima ecuaţie (1.4) se va obţine ecuaţia diferenţială

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{c_1}{c} + 1\right) \ddot{x} + 2\,\frac{b^2}{c}\,(\dot{x}^2 + \ddot{x}x) + \delta\left[\left(\frac{c_1}{c} + 1\right)\dot{x} + 2\,\frac{b^2}{c}\,\dot{x}x\right] + \\
&\qquad + \Omega^2\left(\frac{c_1}{c}\, x + \frac{b^2}{c}\, x^2\right) = \varepsilon\, \omega^2 \cos\, \omega t + g \\
&\text{sau} \\
&\qquad \ddot{x} + \delta\dot{x} + \Omega_1^2\, x + \mu\,[2\,(\dot{x}^2 + \ddot{x}x) + 2\,\delta\,\dot{x}x + \Omega^2 x^2] = \\
&\qquad\qquad = \frac{gc}{c + c_1} + \frac{c}{c + c_1}\,\varepsilon\omega^2 \cos\, \omega t, \\
&\text{unde} \\
&\qquad\qquad \Omega_1^2 = \frac{cc_1}{m\,(c + c_1)},\ \ \mu = \frac{b^2}{c + c_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Să căutăm soluţia ecuaţiei (1.6) sub forma unei serii în raport cu un parametru μ:

$$x = x_0 + \mu\, x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{1.7}$$

şi să presupunem că seria (1.7) converge îndeajuns de repede.

Înlocuind (1.7) în ecuaţia (1.6) şi comparînd coeficienţii de acelaşi grad μ, se obţin următoarele ecuaţii diferenţiale, din care se poate scoate un număr arbitrar de funcţii $x_k = x_k\,(t)$; $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_0 + \delta\dot{x}_0 + \Omega_1^2\, x_0 = \frac{c}{c + c_1}\,(g + \varepsilon\omega^2 \cos\, \omega t), \\
&\ddot{x}_1 + \delta\dot{x}_1 + \Omega_1^2\, x_1 = -\,[2\,(\dot{x}_0^2 + \ddot{x}_0 x_0) + 2\,\delta\,{}^{\cdot}{}_0 x_0 + \Omega^2 x_0^2], \\
&\ddot{x}_2 + \delta\dot{x}_2 + \Omega_1^2\, x_2 = 2\,[2\dot{x}_0 x_1 + \ddot{x}_0 x_1 + \ddot{x}_1 x_0 + \delta\,(\dot{x}_0 x_1 + \\
&\qquad\qquad + \dot{x}_1 x_0) + \Omega^2 x_0 x_1], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

Soluția periodică a primei ecuații din sistemul (1.8) este următoarea :

$$x_0 = \frac{c}{c + c_1} (A_{00} + A_{01} \cos \omega t + B_{01} \sin \omega t), \tag{1.9}$$

unde[*]) :

$$A_{00} = \frac{g}{\Omega_1^2}, \; A_{01} = \frac{1}{\Delta_1} \varepsilon\omega^2 (\Omega_1^2 - \omega^2), \; B_{01} = \frac{1}{\Delta_1} \varepsilon\omega^2 \delta\omega,$$

$$\Delta_1 = (\Omega_1^2 - \omega^2)^2 + \delta^2\omega^2.$$

A doua ecuație a sistemului (1.8) dă după cîteva transformări

$$\ddot{x}_1 + \delta\dot{x}_1 + \Omega_1^2 x_1 = -\left(\frac{c}{c + c_1}\right)^2 \Big\{\Omega^2\Big[A_{00}^2 + \frac{1}{2}(A_{01}^2 + B_{01}^2)\Big] +$$

$$+ 2 A_{00} \{[(\Omega^2 - \omega^2) A_{01} + \delta\omega B_{01}] \cos \omega t + [(\Omega^2 - \omega^2) B_{01} - \delta\omega A_{01}] \sin \omega t\} +$$

$$+ \frac{1}{2} [(\Omega^2 - 4\omega^2)(A_{01}^2 - B_{01}^2) + 2 \delta\omega 2 A_{01} B_{01}] \cos 2 \omega t +$$

$$+ \frac{1}{2} [(\Omega^2 - 4\omega^2) 2 A_{01} B_{01} - 2 \delta\omega (A_{01}^2 - B_{01}^2)] \sin 2 \omega t \Big\}.$$

Atunci soluția periodică dă

$$x_1 = -\left(\frac{c}{c + c_1}\right)^2 (A_{10} + A_{11} \cos \omega t + B_{11} \sin \omega t + A_{12} \cos 2 \omega t + B_{12} \sin 2 \omega t), \tag{1.10}$$

unde

$$A_{10} = \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\Big[A_{00}^2 + \frac{1}{2}(A_{01}^2 + B_{01}^2)\Big] = \left(1 + \frac{c}{c_1}\right)\left(\frac{g^2}{\Omega_1^4} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2\omega^4}{\Delta_1}\right),$$

$$A_{11} = 2 A_{00} \frac{\varepsilon\omega^2}{\Delta_1^2} (\Omega^2 - \omega^2) [(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \delta^2 \omega^2],$$

$$B_{11} = 2 A_{00} \frac{\varepsilon\omega^2}{\Delta_1^2} \delta\omega [(\Omega_1^2 - \omega^2)^2 - \delta^2\omega^2],$$

$$A_{12} = \frac{1}{2\Delta_2} \{(\Omega_1^2 - 4\omega^2) [(\Omega^2 - 4\omega^2)(A_{01}^2 - B_{01}^2) + 2 \delta\omega 2 A_{01} B_{01}] -$$

$$- 2 \delta\omega [(\Omega^2 - 4\omega^2) 2 A_{01} B_{01} - 2 \delta\omega (A_{01}^2 - B_{01}^2)]\},$$

$$B_{12} = \frac{1}{2\Delta_2} \{(\Omega_1^2 - 4\omega^2) [(\Omega^2 - 4\omega^2) 2 A_{01} B_{01} - 2 \delta\omega (A_{01}^2 - B_{01}^2)] -$$

$$- 2 \delta\omega [(\Omega^2 - 4\omega^2)(A_{01}^2 - B_{01}^2) + 2 \delta\omega 2 A_{01} B_{01}]\},$$

$$\Delta_2 = (\Omega_1^2 - 4\omega^2)^2 + 4 \delta^2\omega^2.$$

Se pot astfel determina celelalte funcții x_h ($h = 2, 3, \ldots$).

---

[*]) Primul indice h al lui A_{hn} și B_{hn} arată că este vorba de amplitudinea funcției x_h și al doilea indice n arată că este vorba de a n-a componentă armonică.

Rezultatul poate fi pus sub forma următoare:

$$x(t)=\frac{c}{c+c_1}\left\{A_{00}+\sqrt{A_{01}^2+B_{01}^2}\cos(\omega t-\varphi_{01})-\mu\frac{c}{c+c_1}\left[A_{10}+\right.\right.\tag{1.11}$$

$$\left.\left.+\sqrt{A_{01}^2+B_{01}^2}\cos(\omega t-\varphi_{11})+\sqrt{A_{12}^2+B_{12}^2}\cos(2\,\omega t-\varphi_{12})\right]+\ldots\right\},$$

unde

$$A_{00}=\frac{g}{\Omega_1^2},\ \sqrt{A_{01}^2+B_{01}^2}=\frac{\varepsilon\omega^2}{\sqrt{\Delta_1}}=\varepsilon\frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+D^2\eta^2}},\ \operatorname{tg}\varphi_{01}=\frac{\delta\omega}{\Omega_1^2-\omega^2}=\frac{D\eta}{1-\eta^2},$$

$$\sqrt{A_{11}^2+B_{11}^2}=2\,A_{00}\frac{\varepsilon\omega^2}{\Delta_1^2}\left[(\Omega_1^2-\omega^2)^2-\delta^2\omega^2\right]\sqrt{(\Omega^2-\omega^2)^2+\delta^2\omega^2}=$$

$$=2\,A_{00}\,\varepsilon\,\frac{\eta^2\left[(1-\eta^2)^2-D^2\eta^2\right]}{\left[(1-\eta^2)^2+D^2\eta^2\right]}\sqrt{\left(1+\frac{c}{c_1}-\eta^2\right)^2+D^2\eta^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{11}=\frac{\delta\omega}{\Omega^2-\omega^2}=\frac{D\eta}{1+\frac{c}{c_1}-\eta^2},$$

$$\sqrt{A_{12}^2+B_{12}^2}=\frac{\varepsilon^2\omega^4}{2\,\Delta_1\sqrt{\Delta_2}}\sqrt{(\Omega^2-4\,\omega^2)^2+4\,\delta^2\omega^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon^2\eta^4}{(1-\eta^2)^2+D^2\eta^2}\,\frac{\sqrt{\left(1+\frac{c}{c_1}-\eta^2\right)^2+D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-4\eta^2)^2+4\,D^2\eta^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{12}=\frac{2\,\delta\omega\left\{(\Omega^2-\Omega_1^2)\left[(\Omega_1^2-\omega^2)^2-\delta^2\omega^2\right]+(\Omega_1^2-\omega^2)\left[(\Omega_1^2-4\,\omega^2)(\Omega^2-4\omega^2)+4\delta^2\omega^2\right]\right\}}{\left[(\Omega_1^2-\omega^2)^2-\delta^2\omega^2\right]\left[(\Omega_1^2-4\omega^2)(\Omega^2-4\omega^2)+4\delta^2\eta^2\right]-4\delta^2\omega^2(\Omega_1^2-\omega^2)(\Omega^2-\Omega_1^2)}=$$

$$=\frac{2\,D\eta\left\{\frac{c}{c_1}\left[(1-\eta^2)^2-D^2\eta^2\right]+(1-\eta^2)\left[(1-4\,\eta^2)\left(1+\frac{c}{c_1}-4\,\eta^2\right)+4\,D^2\eta^2\right]\right\}}{\left[(1-\eta^2)^2-D^2\eta^2\right]\left[(1-4\,\eta^2)\left(1+\frac{c}{c_1}-4\,\eta^2\right)+4\,D^2\eta^2\right]-4\,D^2\eta^2\frac{c}{c_1}(1-\eta^2)},$$

$$\eta=\frac{\omega}{\Omega_1},\quad D=\frac{\delta}{\Omega_1}.$$

Descompunînd $x(t)$ în componente armonice vom avea

$$x(t)=\frac{c}{c+c_1}\left\{(A_{00}-eA_{10}+\ldots)+(A_{01}-eA_{11}+\ldots)\cos\omega t+\right.\tag{1.11'}$$

$$\left.+(B_{01}-eB_{11}+\ldots)\sin\omega t-(eA_{12}+\ldots)\cos 2\,\omega t-(eB_{12}+\ldots)\sin 2\,\omega t+\ldots\right\},$$

unde $e=\mu\frac{c}{c+c_1}$.

Vom avea apoi pentru mişcarea centrului discului, folosind ecuaţia (1.5), expresia

$$\overline{x}(t) = \left\{A_{00} - e\left[A_{10} - A_{00}^2 - \frac{1}{2}\left(A_{01}^2 + B_{01}^2\right)\right] + \ldots\right\} +$$

$$+ \left[A_{01} - e\left(A_{11} - 2\,A_{00}\,A_{01}\right) + \ldots\right] \cos \omega t +$$

$$+ \left[B_{01} - e\left(B_{11} - 2\,A_{00}\,B_{01}\right) + \ldots\right] \sin \omega t -$$

$$- \left\{e\left[A_{12} - \frac{1}{2}\left(A_{01}^2 - B_{01}^2\right)\right] + \ldots\right\} \cos 2\,\omega t - \left[e\left(B_{12} - A_{01}\,B_{01}\right) +\right.$$

$$\left. + \ldots\right] \sin \omega t + \ldots = X_0 + X_1 \cos(\omega t - \psi_1) - X_2 \cos(2\,\omega t - \psi_2) + \ldots, \quad (1.12)$$

unde

$$\left.\begin{aligned}
X_0 &\cong \frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\,e\,\frac{c}{c_1}\,\frac{\varepsilon^2\eta^4}{\Delta_1},\\
X_1 &\cong \frac{\varepsilon\eta^2}{\Delta_1}\sqrt{\left[(1-\eta)^2 - 2\,e\,\frac{g}{\Omega_1^2}\,\frac{c}{c_1}\,\frac{(1-\eta^2)^2 - D^2\eta^2}{\Delta_1}\right]^2 + \left[D\eta - 4e\,\frac{g}{\Omega_1^2}\,D^3\eta^3\right]^2},\\
\operatorname{tg}\psi_1 &\cong \frac{D\eta\left(1 - 4\,e\,\dfrac{g}{\Omega\eta^2}\,\dfrac{D^2\eta^2}{\Delta_1}\right)}{1 - \eta^2 - 2\,e\,\dfrac{g}{\Omega_1^2}\,\dfrac{c}{c_1}\,\dfrac{1}{\Delta_1}\left[(1-\eta^2)^2 - D^2\eta^2\right]},\\
X_2 &\cong \frac{1}{2}\,e\,\frac{c}{c_1}\,\frac{\varepsilon^2\,\eta^4}{\Delta_1\sqrt{\Delta_2}},\\
\operatorname{tg}\psi_2 &\cong 2\,D\eta\left(\frac{1-\eta^2}{(1-\eta^2)^2 - D^2\eta^2} - \frac{1}{1 + \dfrac{c}{c_1} - 4\eta^2}\right),
\end{aligned}\right\}(1.12\,\text{a})$$

unde

$$\Delta_1 = (1 - \eta^2)^2 + D^2\eta^2, \quad \Delta_2 = (1 - 4\,\eta^2)^2 + 4\,D^2\eta^2.$$

În figura 4 este reprezentată funcţia $\frac{1}{\varepsilon}\,X$, în funcţie de η, iar în figura 5 variaţia unghiului de fază ψ_1 pentru valorile :

$$e\,\frac{g}{\Omega_1^2} = 0{,}004, \ D = 0{,}05, \ \frac{c}{c_1} = 0{,}3, \ \frac{g}{\Omega^2} = 0{,}02 \ [\text{cm}].$$

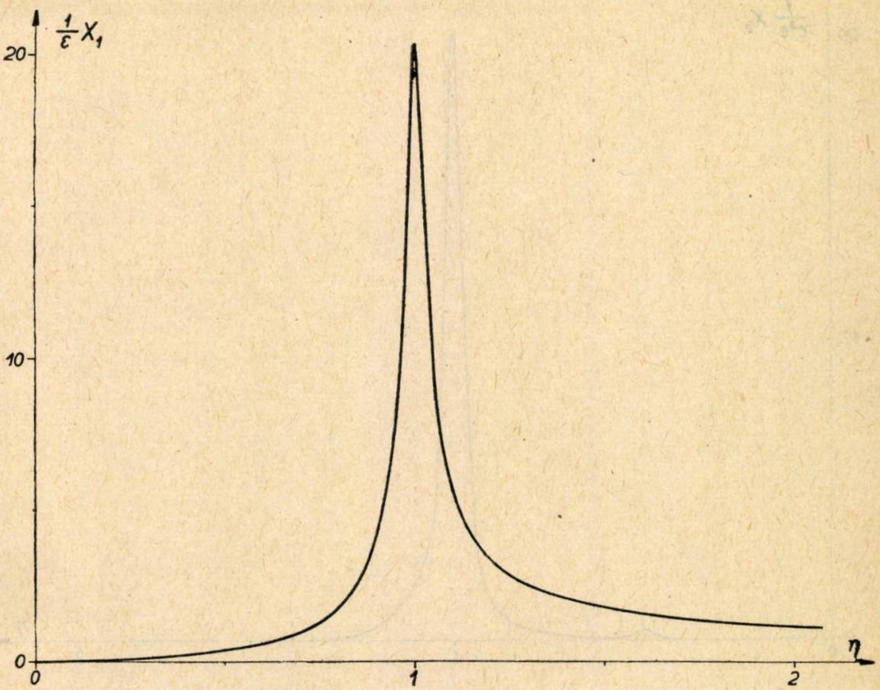


Fig. 4

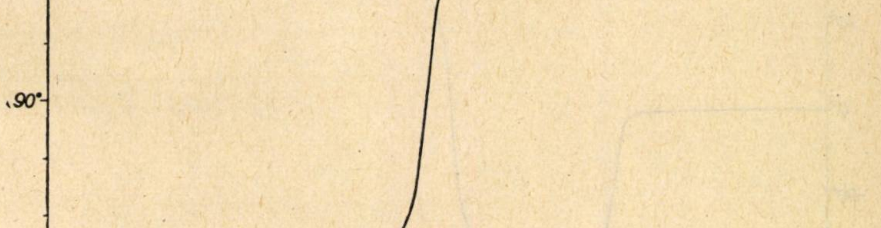


Fig. 5

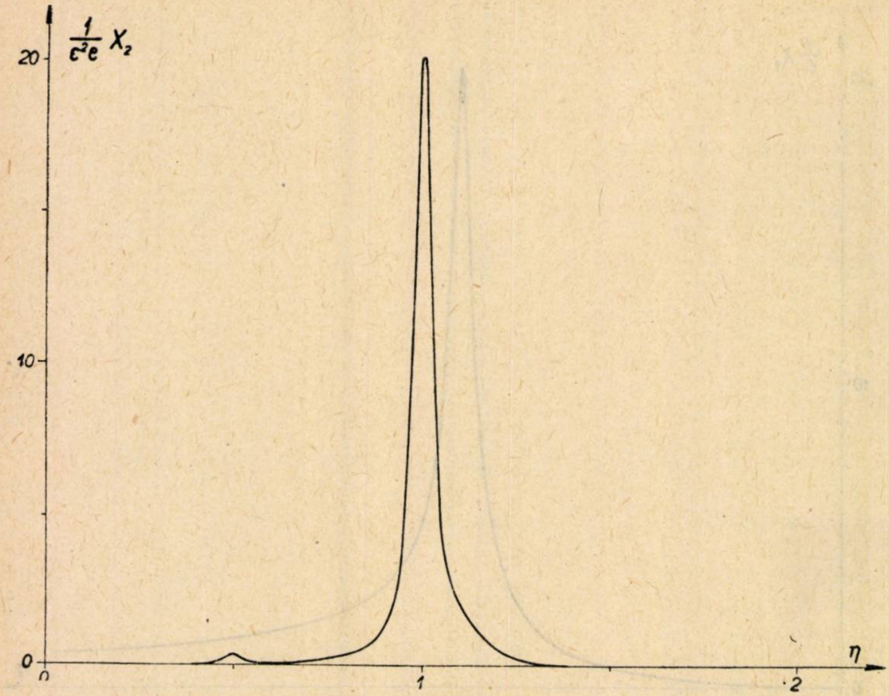

$\frac{1}{\varepsilon^2 e} X_2$
20
10
0
0
1
2
η

Fig. 6

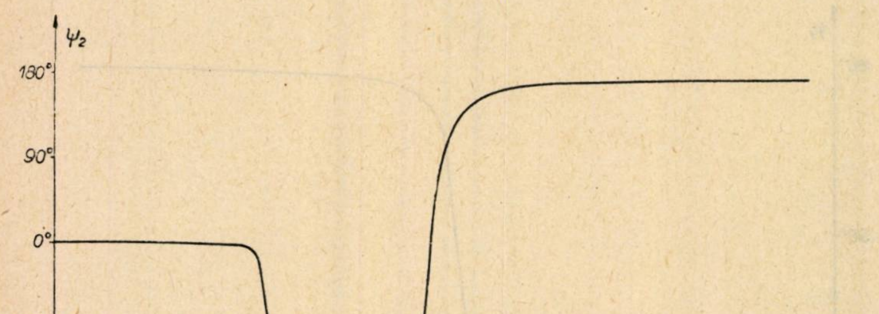

ψ_2
180°
90°
0°
-90°
-180°
0
1
2
η

Fig. 7

În figurile 6 şi 7 sînt reprezentate funcţiile $\frac{1}{\varepsilon^2 e} X_2$ şi ψ_2 pentru valorile : $\frac{c}{c_1} = 0$, $D = 0{,}05$, de asemenea în funcţie de η.

Se constată astfel că funcţiile $\frac{1}{\varepsilon} X_1$, ψ_1 diferă într-o măsură neînsemnată de funcţiile analoge $\frac{\eta^2}{\sqrt{\Delta_1}}$, $\frac{D\eta}{1-\eta^2}$, care se obţin pentru caracteristici liniare ale reazemelor.

Se vede, din rezultatele arătate, că neliniaritatea reazemelor are drept consecinţă, în primul rînd, faptul că mişcarea rezultantă conţine, în afară de componenta sa principală de frecvenţă $\frac{2\pi}{\omega}$, şi alte componente armonice, crescînd o dată cu coeficientul de neliniaritate. Curba de rezonanţă a primei componente armonice (fig. 4) va diferi prea puţin de curba de rezonanţă a sistemului liniar, dacă valorile lui e sînt mici. Astfel, de exemplu, pentru $e = 0{,}2$ pe diagrama din figura 4, curbele corespunzătoare sînt practic identice.

Un alt rezultat foarte interesant este dat de faptul că componenta absolută nu va fi identică cu încovoierea statică, atunci cînd aceasta este funcţie de coeficientul de acord η, adică funcţie de ω. Această componentă este mai mică decît valoarea de încovoiere statică, dar poate atinge în zona de rezonanţă valori negative chiar pentru valori destul de mici ale lui e.

Apoi, toate funcţiile depind de raportul rigidităţii $\frac{c}{c_1}$. Atunci cînd acest raport creşte, adică atunci cînd reazemele faţă de rigiditatea arborelui devin mai flexibile şi mai suple, influenţa neliniarităţii reazemelor se va face şi mai mult simţită.

2. Stabilitatea vibraţiilor periodice cu frecvenţa ω

Vom examina acum stabilitatea vibraţiilor periodice (în sensul definiţiei stabilităţii, a lui Ljapunov).

În ce priveşte mişcarea în sensul axei y, aceasta este stabilă în tot domeniul lui ω*).

Pentru stabilitatea mişcării în sensul axei x vom scrie ecuaţia diferenţială a mişcării perturbate.

Să exprimăm funcţia care reprezintă mişcarea periodică prin

$$x(\omega t) = \frac{c}{c+c_1} F(\omega t) = \frac{c}{c+c_1} F, \tag{2.1}$$

unde

$$F = F_0 + eF_1 + e^2 F_2 + \ldots \tag{2.1'}$$

---

*) Mişcarea în sensul axei y fiind exprimată prin ecuaţia diferenţială liniară cu coeficienţi constanţi, forma vibraţiilor proprii defineşte stabilitatea.

Să notăm coordonata mișcării perturbatoare prin ξ. Se va obține ecuația diferențială a mișcării perturbatoare înlocuind pe x în ecuația (1.6) după cum urmează

$$x = \frac{c}{c + c_1} F + \xi. \tag{2.2}$$

După cîteva transformări se obține, notînd cu δ membrul stîng al ecuației (1.6)

$$\delta = \mu \frac{c}{c + c_1} \delta_0 = e\delta_0. \tag{2.3}$$

Ținînd seama de faptul că $x = \frac{c}{c + c_1} F$ reprezintă soluția ecuației (1.6), se obține

$$\ddot\xi + \Omega_1^2\ \xi = -\ e\ [2\,F\,\ddot\xi + (4\,\dot F - \delta_0)\ \dot\xi + 2\,(\ddot F + \Omega^2)\,\xi] + \\ + e^2\,2\ \delta_0\,(F\,\dot\xi + \dot F\,\xi) + X\,(\ddot\xi,\ \dot\xi,\ \xi,\ t), \tag{2.4}$$

unde $e = \mu \frac{c}{c + c_1} = \frac{b^2 c}{(c + c_1)^2}$ reprezintă parametrul mic și $X\ (\ddot\xi,\ \dot\xi,\ \xi,\ t)$ funcția neliniară de $\ddot\xi$, $\dot\xi$, ξ, care nu conține membri liniari.

Cum $F = F\ (\omega t)$ este o funcție liniară de timp, ecuația diferențială (2.4) devine o ecuație diferențială neliniară, avînd coeficienți variabili periodic.

După teoremele din Ljapunov, pentru prima aproximație putem aprecia stabilitatea, servindu-ne de ecuațiile diferențiale pentru prima aproximație, adică suprimîndu-se membrii neliniari, atît timp cît nu este vorba de un caz critic, unde modulul unei rădăcini a ecuației caracteristice este egal cu 1, [4]. Dacă nu este vorba de un caz critic, mișcarea este stabilă atît timp cît modulele tuturor rădăcinilor sînt mai mici decît 1. Cazurile critice sînt acelea care formează limitele între soluțiile stabile și labile. Aici nu se poate determina, dacă limitele aparțin soluțiilor stabile sau labile, ceea ce, de altfel, nu prezintă dificultăți datorită aproximării ulterioare, dat fiind că nu căutăm decît o evaluare a zonelor labile.

Cum ecuația (2.4) este o ecuație diferențială generală de ordinul al doilea, sînt valabile teoremele lui Haupt (a se vedea, de pildă, [5]).

Din aceste teoreme urmează că soluțiile periodice, cu perioade $\frac{2\pi}{\omega}$ și $\frac{4\pi}{\omega}$ vor forma limita între soluțiile labile și cele stabile și că limitele zonelor labile provin din punctele definite de : $\frac{\Omega_1^2}{\omega^2} = \left(\frac{1}{2} n\right)^2$; $n = 1,2,\ldots$

În cele ce urmează vom neglija expresia $X\,(\ddot\xi,\ \xi,\ \xi\ t)$ și vom urmări calculul în felul menționat în cartea lui I. G. Malkin [4].

Să considerăm

$$\Omega_1^2 = \left(\frac{1}{2}\ \omega n\right)^2 + e\,\alpha_1 + e^2\,\alpha_2 + \ldots \qquad (n = 1,\ 2,\ldots) \tag{2.5}$$

şi să căutăm soluţia periodică sub forma

$$\xi = \xi_0 + e\,\xi_1 + e^2\,\xi_2 + \ldots, \tag{2.6}$$

presupunînd că seria (2.6) converge destul de repede. Înlocuind expresia (2.6) în ecuaţia (2.4) fără membrul neliniar $X\,(\ddot{\xi}, \dot{\xi}, \xi, t)$ şi comparînd coeficienţii aceloraşi puteri ale lui e, se poate deduce progresiv un număr arbitrar de funcţii ξ_k. Din condiţia periodicităţii soluţiilor se vor determina apoi coeficienţii α_k, adică limita zonelor labile, cu o precizie corespunzătoare numărului membrilor lui ξ_k şi α_k.

Vom face calculul lui α_1 care este suficient pentru determinarea aproximativă a zonelor labile.

Se obţine atunci pentru funcţia ξ_0:

$$\xi_0 = M_0 \cos \frac{1}{2}\, n\, \omega t + N_0 \sin \frac{1}{2}\, n\, \omega t, \tag{2.7}$$

unde M_0, N_0 reprezintă constante arbitrare de integrare. Pentru ξ_1 vom avea atunci următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\ddot{\xi}_1 + \left(\frac{1}{2}\, n\, \omega^2\right)^2 \xi_1 = -\,[\alpha_1 \xi_0 + 2\;F_0\,\ddot{\xi}_0 + (4\,\dot{F}_0 - \delta_0)\,\dot{\xi}_0 +$$

$$+ 2\,(\ddot{F}_0 + \Omega^2 F_0)\,\xi_0\,] = \Phi\left(\frac{1}{2}\, n\, \omega t\right), \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.8}$$

Din condiţia periodicităţii soluţiilor lui ξ_1 se poate scrie

$$\int_0^{4\pi/n\omega} \Phi\left(\frac{1}{2}\, n\, \omega t\right) \cos \frac{1}{2}\, n\, \omega t\, dt = 0, \quad \int_0^{2\pi/n\omega} \Phi\left(\frac{1}{2}\, n\, \omega t\right) \sin \frac{1}{2}\, n\, \omega t\, dt = 0,$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2.9}$$

cu alte cuvinte, coeficienţii termenilor de rezonanţă trebuie deci să fie egali cu zero.

Pentru $n = 1$ ecuaţiile (2.9) pot fi scrise în felul următor:

$$\left.\begin{aligned} &M_0\left[-\alpha_1 - 2\,A_{00}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) - A_{01}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) + \right.\\ &\qquad \left. + N_0\left[\frac{\omega}{2}\,\delta_0 - B_{01}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)\right]\right] = 0,\\ &-M_0\left[\frac{\omega}{2}\,\delta_0 + B_{01}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)\right] + N_0\left[-\alpha_1 - 2\,A_{00}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) + \right.\\ &\qquad \left. + A_{01}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Condiţia necesară şi suficientă ca să existe o soluţie netrivială pentru M_0, N_0 este ca valoarea determinantului sistemului (2.10) să fie zero.

Vom avea atunci, pentru α_1:

$$\alpha_1 = -2A_{00}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right) \pm \sqrt{(A_{01}^2 + B_{01}^2)\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4}\delta_0^2}\,. \qquad (2.11)$$

Dacă în ecuaţia (2.5) se neglijează termenul în α_2 şi termenii superiori şi dacă se înlocuieşte δ_0 din ecuaţia (2.3), se obţine pentru limita primei zone stabile următoarea ecuaţie aproximativă:

$$\Omega_1^2 - \frac{\omega^2}{4} \cong -2A_{00}\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)e \pm \sqrt{e^2(A_{01}^2 + B_{01}^2)\left(\Omega^2 - \frac{\omega^2}{4}\right)^2 - \delta^2\frac{\omega^2}{4}} \qquad (2.11')$$

Împărţind relaţia precedentă prin Ω_1^2 se obţine, înlocuind valorile A_{00}, A_{01}, B_{01}, Ω:

$$1 - \frac{1}{4}\eta^2 \cong -2\frac{g}{\Omega_1^2}\left(1 + \frac{c}{c_1} - \frac{1}{4}\eta^2\right)e \pm$$
$$\pm\sqrt{e^2\left(1 + \frac{c}{c_1} - \frac{1}{4}\eta^2\right)\frac{\varepsilon^2\eta^4}{\Delta_1} - \frac{1}{4}D^2\eta^2}\,, \qquad (2.12)$$

unde

$$\eta = \frac{\omega}{\Omega_1},\ \Delta_1 = (1 - \eta^2)^2 + D^2\eta^2,\ D = \frac{\delta}{\Omega_1}.$$

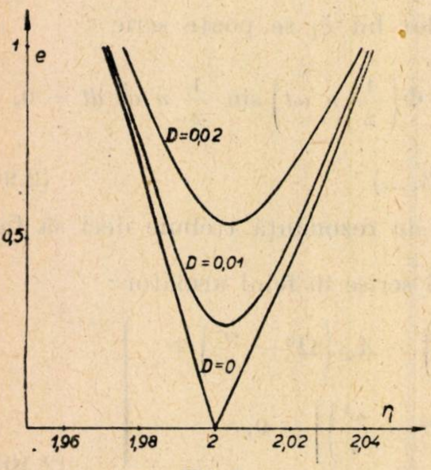


Fig. 8

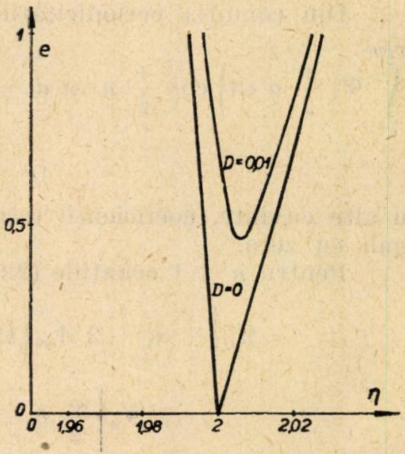


Fig. 9

În figurile 8 şi 9 sînt date diagramele zonelor labile, adică ale valorilor limită e în funcţie de η pentru diferitele valori ale lui D. În figura 8 este reprezentat cazul în care $\varepsilon = 0{,}1$ cm, iar în figura 9 pe acela în care

$$\varepsilon = 0{,}05 \text{ cm};\ (g/\ \Omega_1^2 = 0{,}02 \text{ cm},\ \frac{c}{c_1} = 0{,}3).$$

Se vede, în primul rînd, că atunci cînd coeficientul de neliniaritate e creşte, zona labilă creşte şi ea. La fel, dacă valorile ε şi raportul $\frac{c}{c_1}$ cresc, şi dacă amortizarea relativă D descreşte zona stabilă se lărgeşte.

CONCLUZII

În rezumat, constatăm că neliniaritatea reazemelor poate avea urmări defavorabile, în special, în zona unde turaţiile sînt duble faţă de cele critice. În aceste zone, ca urmare a slabei amortizări a mişcării centrului de greutate al rotorului şi al reazemelor mai puţin rigide, cu o caracteristică neliniară, mişcarea periodică a rotorului nu este neapărat stabilă, ceea ce înseamnă în majoritatea cazurilor, riscuri în ce priveşte siguranţa funcţionării agregatului în chestiune.

Aşadar se cere, în primul rînd, un echilibru perfect al rotorului şi o rigiditate suficientă a reazemelor, căci cu cît este mai mare raportul dintre rigiditatea arborelui şi rigiditatea medie a reazemelor c_1, cu atît este mai sensibilă influenţa caracteristicii neliniare a reazemului.

Un alt rezultat este apariţia componentelor armonice superioare. Un rezultat interesant este de asemenea dat de influenţa încovoierii arborelui asupra turaţiilor critice.

Se poate întîmpla ca în rezonanţă să se producă cazul încovoierii arborelui în sens contrar gravitaţiei pămîntului şi acest lucru cu valori destul de mici ale excentricităţii ε şi ale coeficientului de neliniaritate e.

Studiul rezonanţei subarmonice va face subiectul unui articol următor.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1956.

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ РОТОРА ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ УПРУГИХ СТОЕК ПОДШИПНИКОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Нелинейность характеристики стоек подшипников (рис. 1) при решении заменена простой аналитической функцией:

$$f(x)=c_1 x + b^2x^2$$

Периодическое движение ротора имеет несколько гармонических компонентов в сравнении с линейным случаем, который имеет только один компонент с периодом $2\pi/\omega$ и одну постоянную величину. Из решения следует также, что нелинейность может причинить неустойчивость периодических колебаний прежде всего при таких оборотах ротора, которые приблизительно в два раза выше критических.

Влияние нелинейности будет тем больше, чем больше будет отношение жесткости вала c и средней жесткости стоек подшипников c_1 и также чем больше будет величина эксцентриситета диска.

LE MOUVEMENT PÉRIODIQUE DES ROTORS À CARACTÉRISTIQUE NON LINÉAIRE DES SUPPORTS

(RÉSUMÉ)

La non linéarité de la caractéristique des supports des paliers (fig. 1) a été remplacée, à la résolution, par une fonction analytique simple :

$$f(x) = c_1x + b^2x^2.$$

Le mouvement périodique du rotor a plusieurs composantes harmoniques, par comparaison au cas linéaire, qui n'a qu'une seule composante ayant une période de $2\pi/\omega$ et une grandeur constante unique. Il résulte encore de la solution que la non linéarité peut être la cause de l'instabilité des vibrations périodiques, en premier lieu pour tous les tours du rotor, qui sont approximativement deux fois plus grands que les tours critiques. L'influence de la non linéarité sera d'autant plus importante que le rapport entre la rigidité de l'arbre C et la rigidité moyenne des supports des paliers C_1 sera plus grand et que l'excentricité du disque sera plus marquée.

BIBLIOGRAFIE

1. T. M. Dimentberg, *Poperecinîie kolebaniia vrasciaiuscegosia vala s diskami pri nalicii soprotivleniia treniia.* Poperecinîie kolebaniia i kriticeskiie skorosti, sbornik pervîi, 1951.
2. A. I. Gurin, *Issledovaniia ustoicivosti dvijeniia vala s nasajennîm na nego diskom.* Trudî seminara po teorii maşin i mehanizmov, 1949, t. VI, fasc. 24.
3. A. Tondl, *Některé otázky kmitání a stability odpruženych rotoru.* Rozpravy ČSAV, rada TV, 1955, sesit. 5.
4. I. G. Malkin, *Teoriia ustoicivosti dvijeniia.* Gostehizdat, Moscova, 1952.
5. L. Pusti, A. Tondl, *Úvod do theorie nelineárnich a quasiharmonických kmitu mechanických soustav.* Nakladatelstvo ČSAV, 1956.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

O NOUĂ METODĂ DE STUDIU INTERESÎND TEORIA MECANISMELOR ȘI A MAȘINILOR

DE

D. MANGERON, C. DRĂGAN și VL. SVIJEVSCHI

Teoreme fundamentale

1. Fie $\overline{a}_M^{(i)}$ accelerația de ordin i a unui punct M situat pe un organ rigid ce execută o mișcare paralelă cu un plan fix, exprimată prin formulele generalizate ale lui Somov [1], transcrise în notații matriciale

$$\begin{Bmatrix} \overset{(i+1)}{x_1} \\ \overset{(i+1)}{x_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \overset{(i+1)}{x_{10}} \\ \overset{(i+1)}{x_{20}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -A_i & -B_i \\ B_i & -A_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 & -x_{10} \\ x_2 & -x_{20} \end{Bmatrix}, \tag{1}$$

în care $A_i = A_i\,(t)$ și $B_i = B_i\,(t)$ sînt definite prin formulele de recurență

$$A_i = \dot{A}_{i-1} + \dot{\theta}\,B_{i-1},\ B_i = \dot{B}_{i-1} - \dot{\theta}\,A_{i-1},\ A_1 = \dot{\theta}^2,\ B_1 = \ddot{\theta}, \tag{2}$$

$$\left(\cdot \equiv \frac{d}{dt}\right),\quad i = 1,2,\ldots$$

și $\theta = \theta\,(t)$ este unghiul de rotație.

Au loc teoremele ce urmează.

I. Teorema relativă la izocline. *Locul geometric al punctelor M^* definite prin ecuația vectorială*

$$\overline{r}_{M^*} = \overline{r}_M + \lambda_i\,\overline{a}_M^{(i)}, \tag{3}$$

în care M este un punct generic situat pe o dreaptă arbitrară AB de pe un organ rigid în mișcare, paralelă cu un plan fix, este o dreaptă (D_{AB}) ce formează cu dreapta AB un unghi φ_i dat prin

$$\operatorname{tg}\varphi_i = \frac{\lambda_i B_i}{1 - \lambda_i A_i}. \tag{4}$$

Evident, unghiul φ_i nu depinde decît de starea de mișcare instantanee a organului considerat și de parametrul ales λ_i.

II. Teorema de extremum relativă la accelerațiile reduse. *Accelerațiile reduse de ordin i, introduse în* [2] *și definite prin raportul*

$$\bar{a}^{(i)}_{Mr} = \frac{\bar{a}^{(i)}_M}{A_i},\ A_i = \dot{A}_{i-1} + \dot{\theta} B_{i-1},\ \bar{a}^{(1)}_r = \frac{\bar{a}^{(1)}}{A_1}, \tag{5}$$

în care A_i și B_i sînt date prin formulele de recurență (2), *satisfac la proprietatea de a realiza un extremum pentru funcția* (4).

III. Teorema fundamentală relativă la distribuția accelerațiilor de diferite ordine interesînd teoria mecanismelor și a mașinilor. ***Locul geometric al extremităților accelerațiilor reduse de ordin i ale punctelor unei drepte (D) de pe un organ rigid în mișcare, paralelă cu un plan fix, este o dreaptă (Dr) perpendiculară pe prima.***

Problema distribuției accelerațiilor într-un corp rigid în mișcare plană

2. Teoremele de mai sus conduc la *metoda accelerațiilor reduse* cu ajutorul căreia se va studia mai întîi, în cele ce urmează, problema clasică a distribuției accelerațiilor de ordinul întîi și apoi problema distribuției accelerațiilor de ordinul al doilea *) pentru grupele lui Assur aparținînd mecanismelor plane.

Să considerăm un organ, de formă oarecare, aparținînd unui mecanism plan și să folosim noțiunea de accelerație redusă de primul ordin la construirea accelerațiilor punctelor organului.

Fie $\bar{a}_A$ accelerația unui punct A al organului (fig 1), $\bar{a}_B$ accelerația unui alt punct al aceluiași organ, ω_1 viteza lui unghiulară instantanee și ε_1 accelerația lui unghiulară instantanee. Considerînd mișcarea paralelă cu un plan fix a organului ca fiind compusă dintr-o mișcare de transport (translație o dată cu punctul A) și o mișcare relativă (rotație în jurul lui A), se poate scrie

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}^n_{BA} + \bar{a}^t_{BA} = \bar{a}_A + l_{AB}\omega_1^2 \bar{j} + l_{AB}\varepsilon_1 \bar{i}, \tag{6}$$

în care $\bar{j}$ și $\bar{i}$ sînt respectiv versorii dreptei BA și ai unei perpendiculare pe ea, ca în figura 1.

---

*) Necesitatea studiilor teoretice multilaterale relative la accelerații de ordin superior, justificată în trecut printr-un număr de lucrări răzlețe, printre care unele de seamă, ca, de exemplu, cunoscuta lucrare a lui N. E. Jukovski, *Aplicarea teoriei centrelor accelerațiilor de ordin superior la mecanismul de ghidaj a lui Cebîșev,* apare din ce în ce mai evidentă în legătură cu problemele moderne de fizică atomică și chiar și de automatizare. Astfel, de exemplu, forțe de frecare de iradiere se prezintă sub formă ce are ca factor accelerația de ordinul al doilea (derivata de ordinul al treilea a vectorului de poziție în raport cu timpul). A se vedea, E. V. Spolski, *Fizica atomică.* Ed. tehnică, București, 1954, ed. II, vol. I, p. 221.

Împărțind relația (6) prin $A_1 = \dot{\theta}_1^2 = \omega_1^2$, se obține

$$\bar{a}_{Br} = \bar{a}_{Ar} + l_{AB}\,\bar{j} + l_{AB}\,\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\,\bar{i}, \tag{7}$$

în care a_{Br} şi a_{Ar} sînt accelerațiile reduse de ordinul întîi ale punctelor B şi A ce se obțin din formula de definiție (5) făcînd pe $i = 1$.

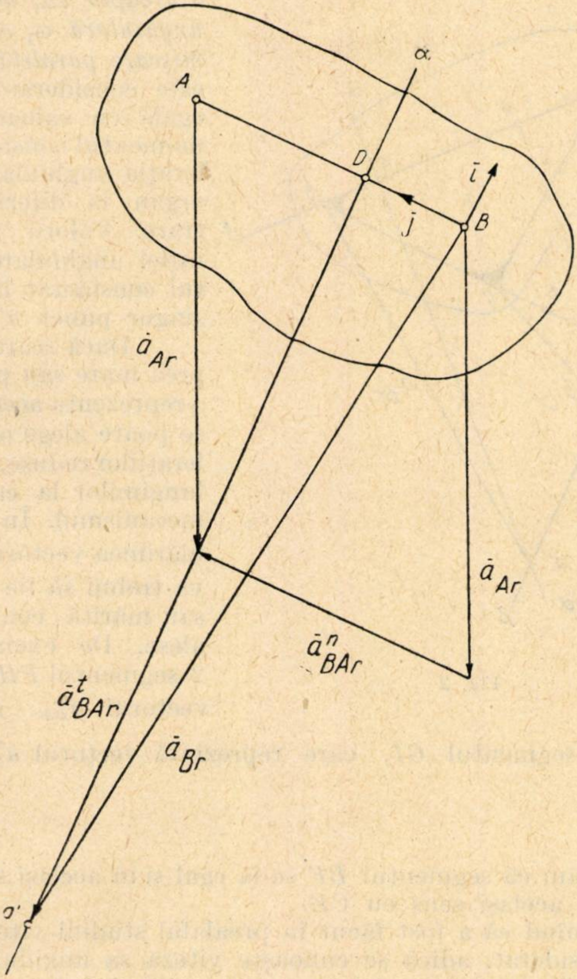


Fig. 1

Vectorul $\bar{a}^n_{BAr} = l_{AB}\,\bar{j}$ îl numim *componenta normală a accelerației relative reduse de ordinul întîi*, iar vectorul $\bar{a}^t_{BAr} = l_{AB}\,\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}$ *componenta tangențială a acceleraței relative reduse de ordinul întîi.*

Deoarece accelerațiile reduse au dimensiunile unor lungimi, putem alege scara accelerațiilor reduse μ egală în valoare cu scara lungimilor și atunci vectorul $\overline{a}^{n}_{BAr}$ va fi reprezentat, în construcția grafică, prin segmentul *BA* luat în sensul de la *B* către *A*. Se vede ușor că este valabilă următoarea

IV. Teoremă. *Locul geometric al extremității vectorului $\overline{a}_{Br}$ este o dreaptă $\alpha\alpha$, atunci cînd viteza unghiulară ω_1 a unui organ în mișcare paralelă cu un plan fix* este considerată invariabilă și egală cu valoarea sa reală în momentul considerat, iar accelerația unghiulară ε_1 a aceluiași organ ia diferite valori arbitrare. Valorii reale a accelerației unghiulare ε_1 în momentul considerat îi corespunde un singur punct a' pe dreapta $\alpha\alpha$.

Dacă scara lungimilor este prea mare sau prea mică pentru a reprezenta accelerațiile reduse, se poate alege o scară μ a accelerațiilor reduse, diferită de scara lungimilor la care este schițat mecanismul. În acest caz însă mărimea vectorului $\overline{a}^{n}_{BAr} = l_{AB}\,\overline{j}$ va trebui să fie și ea micșorată sau mărită conform noii scări alese. De exemplu, în figura 2 segmentul *FH* care reprezintă vectorul $\overline{a}^{n}_{BAr}$ are ca lungime $\frac{l_{AB}}{\mu}$; la fel, segmentul *GI*, care reprezintă vectorul $\overline{a}^{n}_{BCr}$, are ca lungime $\frac{l_{BC}}{\mu}$.

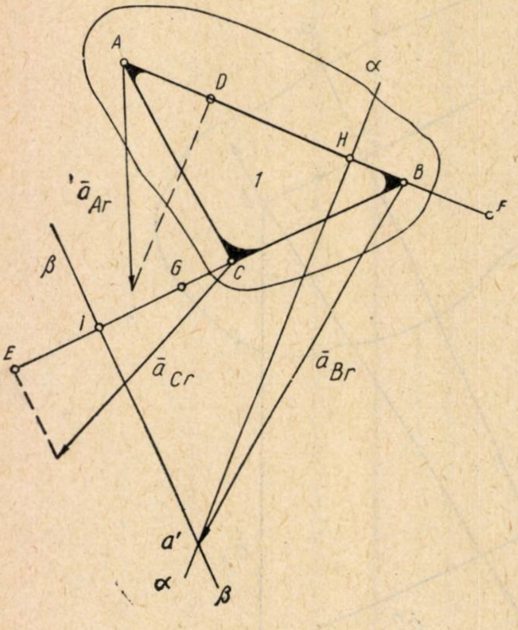


Fig. 2

Menționăm că segmentul *BF* se ia egal și în același sens cu *AD*, iar *BG* egal și în același sens cu *CE*.

Presupunînd că a fost făcut în prealabil studiul vitezelor punctelor organului considerat, adică se cunoaște viteza sa unghiulară ω_1 și fiind date accelerațiile a două puncte oarecare ale sale *A* și *C*, se poate determina accelerația oricărui alt punct aparținînd aceluiași organ.

Pentru aceasta se calculează mărimile vectorilor $\overline{a}_{Ar}$ și $\overline{a}_{Cr}$ și, așa cum se vede în figura 2, se construiesc cele două locuri geometrice, adică dreptele $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$ (teorema III). Vectorul $\overline{a}_{Br}$ va avea originea în punctul *B* și extremitatea în punctul de intersecție al dreptelor $\alpha\alpha$ și $\beta\beta$. În adevăr, mișcarea organului *1* mai poate fi considerată ca fiind compusă dintr-o mişcare de transport (translaţie o dată cu punctul C) și o mișcare relativă (rotație în jurul lui C), deci

$$\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{BC} + \bar{a}^t_{BC} = \bar{a}_C + l_{BC}\omega_1^2 \bar{j}_1 + l_{BC}\,\varepsilon_1 \bar{i}_1, \tag{8}$$

$$\bar{a}_{Br} = \bar{a}_{Cr} + l_{BC}\bar{j}_1 + l_{BC}\,\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}\,\bar{i}_1, \tag{9}$$

în care prin $\bar{j}_1$ și $\bar{i}_1$ s-au notat respectiv versorii dreptei BC și ai unei perpendiculare pe ea. Extremitatea vectorului $\bar{a}_{Br}$ este în punctul a' (fig. 2).

Vectorul $\bar{a}_B$ este coliniar cu vectorul $\bar{a}_{Br}$, de același sens și are mărimea

$$|\bar{a}_B| = |\bar{a}_{Br}|\,\omega_1^2. \tag{10}$$

Problema distribuției accelerațiilor de primul ordin pentru grupele lui Assur

3. Să aplicăm metoda accelerațiilor reduse unor grupe ale lui Assur aparținînd mecanismelor plane.

Fie o grupă de clasa întîia, după clasificarea recentă a lui G. G. Baranov [3] și destul de cuprinzătoare, grupă formată din organele *1* și *2* asociate între ele prin articulația interioară din B și care, cu ajutorul articulațiilor exterioare din A și C se asociază restului mecanismului. Grupa este deci din ordinul doi și este reprezentată în figura 3.

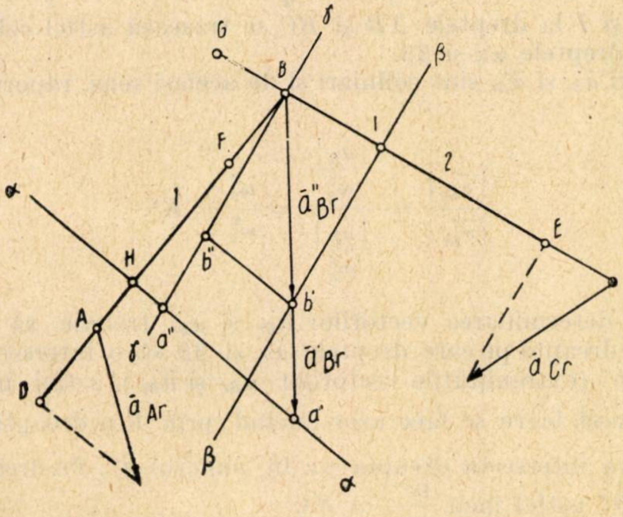


Fig. 3

Presupunem că s-a făcut în prealabil studiul vitezelor și accelerațiilor din ordinul întîi al restului mecanismului, deci se cunosc accelerațiile de ordinul întîi $\bar{a}_A$ și $\bar{a}_C$ ale punctelor A și C. De asemenea, s-a făcut și pentru grupă studiul vitezelor, deci se cunosc vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 ale organelor *1* și *2*.

Se calculează şi se trasează pe desen, la scara μ a acceleraţiilor reduse, cu originea respectiv în punctele A şi C, vectorii

$$\overline{a}_{Ar} = \frac{\overline{a}_A}{\omega_1^2}; \quad \overline{a}_{Cr} = \frac{\overline{a}_C}{\omega_2^2}. \tag{11}$$

Pentru punctul B se pot defini două acceleraţii reduse, deoarece el aparţine ambelor organe *1* şi *2*, deci

$$\overline{a}'_{Br} = \frac{\overline{a}_B}{\omega_1^2} \text{ şi } \overline{a}''_{Br} = \frac{\overline{a}_B}{\omega_2^2}. \tag{12}$$

O construcţie grafică foarte simplă permite, de asemenea cu ajutorul a două locuri geometrice, să se determine vectorii $\overline{a}'_{Br}$ şi $\overline{a}''_{Br}$ şi deci şi vectorul $\overline{a}_{Br}$. După aceasta, cunoscînd pentru organele *1* şi *2* acceleraţiile a cîte două puncte, poate fi considerată rezolvată problema distribuţiei acceleraţiilor de ordinul întîi pentru grupa considerată.

Se proiectează vectorii $\overline{a}_{Ar}$ şi $\overline{a}_{Cr}$ respectiv pe dreptele AB şi BC, determinîndu-se astfel punctele D şi E. Din B se iau pe dreptele AB şi BC segmentele BF şi BG egale şi de acelaşi sens cu AD şi CE. Din F, în sensul de la B către A, se ia segmentul FH egal cu $\frac{l_{AB}}{\mu}$ şi din G, în sensul de la B către C, se ia segmentul GI egal cu $\frac{l_{BC}}{\mu}$. Ridicîndu-se perpendiculare în punctele H şi I la dreptele AB şi BC se trasează astfel cele două locuri geometrice, dreptele $\alpha\alpha$ şi $\beta\beta$.

Vectorii $\overline{a}'_{Br}$ şi $\overline{a}''_{Br}$ sînt coliniari şi de acelaşi sens, raportul mărimilor lor fiind

$$\frac{|\overline{a}'_{Br}|}{|\overline{a}''_{Br}|} = \frac{\dfrac{|\overline{a}_B|}{\omega_1^2}}{\dfrac{|\overline{a}_B|}{\omega_2^2}} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = K^2. \tag{13}$$

Pentru determinarea vectorilor $\overline{a}'_{Br}$ şi $\overline{a}''_{Br}$ trebuie să se ducă prin punctul B o dreaptă pe care dreptele $\alpha\alpha$ şi $\beta\beta$ să o intersecteze în două puncte a' şi b' (extremităţile vectorilor $\overline{a}'_{Br}$ şi $\overline{a}''_{Br}$), astfel încît raportul $\frac{Ba'}{Bb'} = K^2$. Acest lucru se face uşor ducînd prin B o dreaptă $\gamma\gamma$ paralelă cu $\beta\beta$, care va intersecta dreapta $\alpha\alpha$ în punctul a''. Pe dreapta $\gamma\gamma$ se ia segmentul Bb'' astfel încît $\frac{Ba''}{Bb''} = K^2$.

Prin punctul b'' ducem o paralelă la dreapta $\alpha\alpha$ şi la intersecţia ei cu dreapta $\beta\beta$, adică în punctul b', se determină extremitatea vectorului $\overline{a}''_{Br}$. Prelungind dreapta Bb' pînă intersectează dreapta $\alpha\alpha$ în a', se determină şi vectorul $\overline{a}'_{Br}$.

Justificarea acestei construcţii este imediată deoarece triunghiurile $Bb'b''$ şi $Ba'a''$ sînt asemenea.

Problema distribuţiei acceleraţiilor de ordinul doi pentru grupele lui Assur

4. Fie o grupă a lui Assur, reprezentată în figura 4, şi care conform clasificării lui Baranov [3] aparţine clasei a doua, ordinul doi.

Grupa fiind separată dintr-un mecanism la care ea a fost asociată prin articulaţiile din O şi C, se presupune că restul mecanismului a fost studiat în prealabil, deci se cunosc în fiecare moment poziţiile, vitezele şi acceleraţiile de ordinul întîi şi doi ale punctelor O şi C, adică ale axelor articulaţiilor exterioare. De asemenea, se mai presupune că a fost făcut studiul poziţiilor organelor grupei înseşi, al vitezelor şi al acceleraţiilor de ordinul întîi, deci se cunosc pentru fiece organ $\omega = \dot{\theta}$ şi $\varepsilon = \ddot{\theta}$.

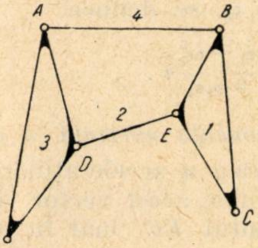


Fig. 4

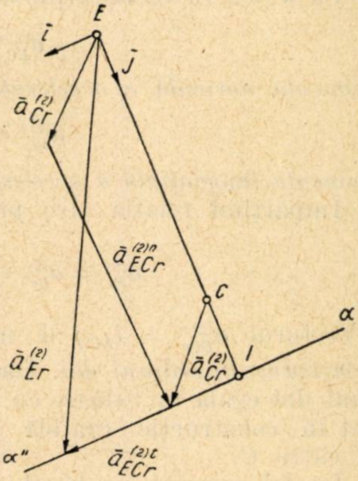


Fig. 5

Ne vom ocupa, după cum am menţionat la punctul 2, numai de problema distribuţiei acceleraţiilor de ordinul doi şi a distribuţiei acceleraţiilor reduse de acelaşi ordin.

Întrucît pe baza definiţiei recurente (5), aplicată la cazul $i = 2$, avem $\bar{a}_r^{(2)} = \dfrac{\bar{a}^{(2)}}{A_2}$, rezultă

$$\bar{a}_r^{(2)} = \frac{\bar{a}^{(2)}}{3\omega\varepsilon}$$

şi deci

$$\bar{a}_{Cr}^{(2)} = \frac{\bar{a}_C^{(2)}}{3\omega_1\varepsilon_1}; \quad \bar{a}_{Or}^{(2)} = \frac{\bar{a}_O^{(2)}}{3\omega_3\varepsilon_3}. \tag{14}$$

În virtutea teoremei III, extremitatea acceleraţiei reduse de ordinul doi a punctului E (fig. 4), se va găsi pe o dreaptă perpendiculară pe CE, extremitatea acceleraţiei reduse de ordinul doi a punctului B se va găsi pe o dreaptă perpendiculară pe CB. La fel, pentru punctele D şi A.

Să considerăm un organ în mişcare paralelă cu un plan fix, concepută ca fiind compusă dintr-o mişcare de transport (translaţie, o dată cu punctul C) şi dintr-o mişcare relativă (rotaţie în jurul lui C) (fig. 5).

Considerînd versorii $\bar{i}$ și $\bar{j}$ ca în figura 5, se poate scrie

$$\bar{a}_E = \bar{a}_C + \bar{a}^n_{EC} + \bar{a}^t_{EC} = \bar{a}_C + l_{EC}\,\omega_1^2\,\bar{j} + l_{EC}\,\varepsilon_1\,\bar{i}. \tag{15}$$

Derivînd în raport cu timpul, se obține

$$\bar{a}^{(2)}_E = \bar{a}^{(2)}_C + 3l_{EC}\,\omega_1\varepsilon_1\,\bar{j} + l_{EC}\,(\dot{\varepsilon}_1 - \omega_1^3)\,\bar{i}\,. \tag{16}$$

Ca și pentru accelerațiile de ordinul întîi, vom numi vectorul

$$\bar{a}^{(2)\,n}_{EC} = 3l_{EC}\,\omega_1\varepsilon_1\,\bar{j}$$

componenta normală a accelerației relative de ordinul doi, iar vectorul

$$\bar{a}^{(2)\,t}_{EC} = l_{EC}\,(\dot{\varepsilon}_1 - \omega_1^3)\,\bar{i}$$

componenta tangențială a accelerației relative de ordinul doi.

Împărțind relația (16) prin $A_2 = 3\omega_1\varepsilon_1$, se deduce

$$\bar{a}^{(2)}_{Er} = \bar{a}^{(2)}_{Cr} + l_{EC}\,\bar{j} + l_{EC}\,\frac{\dot{\varepsilon}_1 - \omega_1^3}{3\,\omega_1\varepsilon_1}\,\bar{i}\,. \tag{17}$$

Vectorul $\bar{a}^{(2)\,n}_{ECr} = l_{EC}\,\bar{j}$ îl numim *componenta normală a accelerației relative reduse de ordinul doi*. Dacă se ia scara μ a accelerațiilor reduse de ordinul doi egală în valoare cu cea a lungimilor, acest vector va fi reprezentat în construcție grafică prin segmentul EC luat în sensul de la E către C.

La fel, numim vectorul

$$\bar{a}^{(2)\,t}_{ECr} = l_{EC}\,\frac{\dot{\varepsilon}_1 - \omega_1^3}{3\omega_1\varepsilon_1}\,\bar{i}$$

componenta tangențială a accelerației relative reduse de ordinul doi.

Așa cum se vede în figura 5, extremitatea vectorului $\bar{a}^{(2)}_{Er}$ se va găsi pe dreapta $\alpha''\alpha''$, perpendiculară pe EC.

Fie, în momentul considerat, pozițiile punctelor O și C date în figura 4. Prin îndepărtarea antrenorului *4* în acest moment, partea rămasă din grupă se transformă într-un mecanism cu un singur grad de libertate, deci numărul gradelor de libertate al mecanismului din care face parte grupa crește cu o unitate.

În acest mecanism ce reprezintă partea rămasă a grupei, se consideră organul *1* drept organ inițial și dîndu-i-se vitezele unghiulare arbitrare ω_1' și ω_1'' se determină, prin metoda cunoscută a planurilor fictive ale vitezelor, vitezele unghiulare reale ale tuturor organelor. Dîndu-i-se apoi organului inițial *1* accelerațiile unghiulare arbitrare ε_1' și ε_1'', se determină, printr-o construcție grafică presupusă efectuată pentru accelerațiile reduse de ordinul întîi întru totul analogă cu aceea ce vom da în figura 6 pentru accelerațiile reduse de ordinul doi, accelerațiile unghiulare ale tuturor organelor grupei.

Aplicarea metodei ce vom indica duce la rezolvarea oricărei grupe a lui Assur, deoarece după îndepărtarea antrenorului, mecanismul obținut din grupă poate fi descompus în grupe, în cel mai rău caz aparținînd unor clase cu o unitate mai mică decît clasa grupei iniţiale. Într-adevăr, numărul organelor se micşorează cu doi, antrenorul îndepărtat şi organul iniţial. În exemplul considerat mecanismul obţinut din grupă va conţine o singură grupă de clasa întîi, ordinul doi conform clasificării lui Baranov, formată din organele *2* şi *3*.

Dînd organului iniţial *1* două valori arbitrare pentru $\dot{\varepsilon}_1$ şi folosind o construcţie grafică, analogă cu aceea folosită pentru grupa de clasa întîi la studiul acceleraţiilor de ordinul întîi, pentru acceleraţiile de ordinul doi, pornind de la acceleraţiile de ordinul doi cunoscute ale punctelor O şi C, se determină acceleraţiile de ordinul doi corespunzătoare ale punctelor A şi B. Acceleraţiile reduse de ordinul doi corespunzătore ale punctelor A şi B, vor fi deci

$$\overline{a}^{(2)'}_{Ar} = \frac{\overline{a}^{(2)'}_{A}}{3\omega_4\varepsilon_4}, \quad \overline{a}^{(2)''}_{Ar} = \frac{\overline{a}^{(2)''}_{A}}{3\omega_4\varepsilon_4}$$

şi

$$\overline{a}^{(2)'}_{Br} = \frac{\overline{a}^{(2)'}_{B}}{3\omega_4\varepsilon_4}, \quad \overline{a}^{(2)''}_{Br} = \frac{\overline{a}^{(2)''}_{B}}{3\omega_4\varepsilon_4}.$$

Construcţia grafică ce permite determinarea acceleraţiilor reduse de ordinul doi, reale, ale punctelor A şi B corespunzătoare valorii reale a lui $\dot{\varepsilon}_1$ în momentul considerat, adică atunci cînd se adaugă antrenorul *4*, se bazează pe următoarea

V. Teoremă. *Locul geometric al extremităţii acceleraţiei reduse de ordinul doi a punctului ce reprezintă axa unei articulaţii ce asocia antrenorul la mecanismul obţinut din grupă prin îndepărtarea antrenorului, este o dreaptă atunci cînd* $\dot{\varepsilon}_1$ *ia valori arbitrare, poziţiile organelor, vitezele unghiulare şi acceleraţiile unghiulare fiind considerate invariabile şi anume cele reale în momentul considerat.*

Teorema V este valabilă pentru orice mecanism obţinut prin îndepărtarea unui antrenor din orice grupă a lui Assur, deoarece toate acceleraţiile normale reduse de ordinul doi ale tuturor punctelor organelor sînt determinate de vitezele unghiulare şi acceleraţiile unghiulare care sînt invariabile, atunci cînd $\dot{\varepsilon}_1$ ia valori arbitrare ; iar acceleraţiile tangenţiale reduse de ordinul doi variază proporţional cu variaţiile arbitrare date lui $\dot{\varepsilon}_1$, aşa cum se constată din relaţia (17).

O dată cu teorema enunţată mai sus, se poate demonstra şi următoarea

Lemă. *Locul geometric al extremităţii acceleraţiei de ordinul doi a unui punct ce aparţine unui organ este o dreaptă, dacă extremităţile acceleraţiilor de ordinul doi a două puncte ce aparţin aceluiaşi organ au ca locuri geometrice două drepte.*

Construcţia grafică ce permite determinarea acceleraţiilor reduse de ordinul doi, reale în momentul considerat, ale punctelor A şi B corespunzătoare valorii reale a lui $\dot{\varepsilon}_1$ este reprezentată în figura 6.

Dreptele $\alpha''\alpha''$ şi $\beta''\beta''$ reprezintă locurile geometrice ale extremităţilor vectorilor $\overline{a}^{(2)}_{Ar}$ şi $\overline{a}^{(2)}_{Br}$. În infinitatea de valori arbitrare ce se pot lua pentru $\dot{\varepsilon}_1$ este cuprinsă și valoarea reală căreia îi corespunde pe dreptele $\alpha''\alpha''$ și $\beta''\beta''$ două puncte a'' și b'' ce trebuie determinate.

Pentru valoarea reală a lui $\dot{\varepsilon}_1$, adică atunci cînd punctele A și B aparțin aceluiași organ *4*, se poate verifica ușor că este valabilă relația

$$\overline{a}^{(2)\,n}_{BAr} + \overline{a}^{(2)'}_{Ar} + \overline{a_1''a''} - \overline{b_1''b''} = \overline{a}^{(2)'}_{Br} - \overline{a}^{(2)\,t}_{BAr}. \tag{18}$$

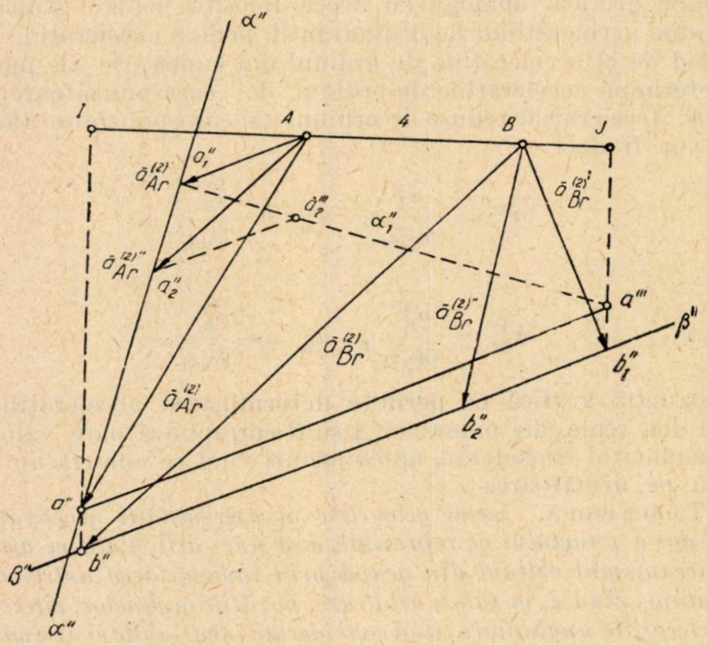


Fig. 6

Prezența termenului $\overline{a}^{(2)n}_{BAr}$ în membrul întîi al relației arată că dacă originea vectorului $\overline{a}^{(2)'}_{Br}$ va fi luată în punctul B, originea vectorului $\overline{a}^{(2)}_{Ar}$ va trebui să fie luată în punctul A.

Dacă în loc de $\overline{a}^{(2)}_{Ar}$ și $\overline{a}^{(2)}_{Br}$ se consideră vectorii $\overline{a}^{(2)''}_{Ar}$ și $\overline{a}^{(2)''}_{Br}$ corespunzători unei valori arbitrare $\dot{\varepsilon}_1''$, relația de mai sus *nu va fi satisfăcută.*

Cu originea în punctul a_2'' să trasăm segmentul $a_2''a_2'''$ egal și paralel cu $b_1''b_2''$, dar luat în sens contrar. Să considerăm vectorul

$$\overline{a}^{(2)'}_{Ar} + \overline{a_1''a_2''} - \overline{b_1''b_2''} = \overline{a}^{(2)''}_{Ar} + \overline{a}^{(2)''}_{Br} - \overline{a}^{(2)'}_{Br}.$$

Atunci cînd $\dot{\varepsilon}_1''$ ia valori arbitrare între care este cuprinsă și cea reală, locul geometric al vectorului de mai sus este o dreaptă pe care am notat-o pe figură cu α_1''. În adevăr, numai componentele tangențiale ale accelerațiilor reduse de ordinul doi variază proporțional cu variațiile arbitrare date lui $\dot{\varepsilon}_1$. Ducînd deci o paralelă prin a''' la dreapta $\beta''\beta''$, în punctul a'' de intersecție a acesteia cu dreapta $\alpha''\alpha''$ se va găsi extremitatea vectorului

$\overline{a}^{(2)}_{Ar}$ iar în punctul b'' extremitatea vectorului $\overline{a}^{(2)}_{Br}$. Vectorii $\overline{a}^{(2)}_{A}$, $\overline{a}^{(2)}_{B}$ vor fi coliniari și de același sens cu vectorii $\overline{a}^{(2)}_{Ar}$, $\overline{a}^{(2)}_{Br}$ și

$$\left|\overline{a}^{(2)}_{A}\right| = \left|\overline{a}^{(2)}_{Ar}\right| \cdot 3\omega_4\varepsilon_4\,; \quad \left|\overline{a}^{(2)}_{B}\right| = \left|\overline{a}^{(2)}_{Br}\right| \cdot 3\omega_4\varepsilon_4\,.$$

Totodată a fost determinată și componenta tangențială a accelerației relative reduse de ordinul doi, adică vectorul

$$a^{(2)t}_{BAr} = l_{AB}\,\frac{\dot{\varepsilon}_4 - \omega_4^3}{3\omega_4\varepsilon_4}\,\overline{i}$$

reprezentat în figura 6 prin segmentul $a''b''$. Deci s-a obținut astfel și valoarea reală în momentul considerat a lui $\dot{\varepsilon}_4$.

CONCLUZII

5. Cu aceasta se poate considera tratată complet problema distribuției accelerațiilor de ordinul întîi și doi interesînd teoria mecanismelor și a mașinilor, deoarece, chiar dacă un mecanism plan conține și cuple cinematice superioare, acestea pot fi înlocuite, după cum se știe [4], [5], prin lanțuri cinematice echivalente care să conțină numai cuple cinematice inferioare.

Rezultatele expuse, cristalizînd și precizînd problema noii metode unitare și fructuoase a accelerațiilor reduse la studiul grafo-analitic al mecanismelor plane, sugerează un număr de probleme cu caracter mai general, a căror soluție va constitui subiectele lucrărilor în curs de elaborare.

Conținutul acestor probleme se rezumă, între altele, la următoarele :

1) studiul comparativ al diferitelor clasificări ale mecanismelor;

2) studiul grafo-analitic al problemei de distribuție a accelerațiilor de ordin oarecare;

3) studiul grafo-analitic al mecanismelor spațiale;

4) rezolvarea problemei de determinare a configurațiilor lanțurilor cinematice supuse la legături anolonome ș.a.

Primită la redacție la 20 septembrie 1956.

НОВЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Применяя понятие пониженного ускорения любого порядка, определяемого выражениями (5), (2) и теоремами I—V, относящимися к таким ускорениям, разрабатывается метод пониженных ускорений, который допускает систематическое и единое решение задачи распределения ускорений любого порядка для плоских механизмов. Затем приводятся примеры применения разработанного метода для некоторых наиболее характерных групп Ассура.

UNE NOUVELLE MÉTHODE D'ÉTUDE CONCERNANT LA THÉORIE DES MÉCANISMES ET DES MACHINES

(RÉSUMÉ)

En utilisant la notion d'accélération réduite d'un ordre quelconque, définie par (5), (2) et les théorèmes I à V, relatifs à de telles accélérations, on a élaboré la méthode des accélérations réduites, qui conduit à la solution systématique et unitaire du problème de la distribution des accélérations d'ordre quelconque, pour les mécanismes plans.

On donne ensuite des exemples d'application de la méthode élaborée, en ce qui concerne quelques groupes des plus caractéristiques d'Assur.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Obobscenie formul Somova ob uskoreniah vissih poreadkov*. DAN SSSR, 1955, t. 102, nr. 4, p. 705.
2. — *K grafo-analiticeskim metodam kinematiki materialnih sistem*. DAN SSSR, 1955, t. 102, nr. 5, p. 897.
3. G. G. Baranov, *Klasifikatia, stroienie, kinematika i kinetostatika ploskih mehanismov s parami pervogo roda. Trudi Seminara po teorii mașin i mehanismov*, 1954, t. XIV, nr. 54, p. 25.
4. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*. Ed. tehnică, București, 1955, ed. a 2-a.
5. S. N. Kojevnikov, *Teoria mehanismov i mașin*. Mașghiz, Kiev, 1954.
6. — *O privedennih uskoreniah liubogo poreadka, interesuiuscih teoriu mehanizmov i mașin i nekotorih ih extremalinih svoistvah*. DAN SSSR (sub tipar).
7. D. Mangeron și C. Drăgan, *O nouă metodă de determinare a accelerațiilor mecanismelor plane de clasa a doua*. Bul. Inst. politehnic din Iași, 1955, serie nouă, t. I (V), p. 229.
8. — *Aplicarea metodei accelerațiilor reduse de ordin oarecare la studiul mecanismelor plane de clasa a treia*. Bul. Inst. politehnic din Iași, 1956, serie nouă, t. II (VI), p. 295.
9. D. Mangeron, *Asupra unor proprietăți a accelerațiilor reduse și rolul lor în teoria mecanismelor și a mașinilor*. Comunicare prezentată în Sesiunea științifică a Academiei R.P.R. din iulie 1956 (sub tipar).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

ASUPRA CONDIŢIILOR LA LIMITĂ ÎN PROBLEMA LUBRIFICAŢIEI

DE

N. TIPEI şi AL. NICA

Fixarea condiţiilor la limită şi determinarea începutului şi sfîrşitului zonei de suprapresiuni în stratul lubrifiant condiţionează valabilitatea rezultatelor date de teoria hidrodinamică a ungerii. Cum pe de altă parte este stabilit că această teorie corespunde fenomenelor reale, rezultă că de o justă alegere a condiţiilor amintite va depinde posibilitatea unui calcul pe baze ştiinţifice a ansamblurilor de frecare folosite în construcţia de maşini.

Asupra acestor condiţii la limită există mai multe ipoteze şi anume :

1) Zona de presiuni începe în punctul de grosime δ maximă a peliculei şi se termină acolo unde δ este minim. Unghiul său la centru este π, iar presiunile sînt o funcţie periodică de perioadă 2π.

2) Zona de presiuni începe în punctul unde $\delta = \delta_{\max}$ şi se termină acolo unde presiunile au un minimum ($p - p_0 = 0$ pentru $\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$, θ fiind unghiul de poziţie al unui punct curent cu vîrful în centrul axului).

3) Suprapresiunile $p - p_0$ încep în punctul $\delta = \delta_{\max}$ şi cresc continuu cînd δ scade fiind maxime în punctul $\delta = \delta_{\min}$.

4) Se dă valoarea presiunilor la intrare $p = p_i$ într-un punct cunoscut $\theta = \theta_i$, iar pentru sfîrşitul zonei active se consideră una din ipotezele precedente.

Se va exclude de la început existenţa zonei de presiuni negative, pe care experienţa o infirmă în toate cazurile, o dată cu teoria care arată dificultatea obţinerii unor tensiuni negative la fluidele incompresibile, în condiţiile practic existente. Chiar dacă o mică zonă de depresiuni ar apare uneori, extinderea sa şi valorile reduse ale depresiunilor o fac fără importanţă practică.

Dacă se examinează comparativ cele patru cazuri se constată că 2) şi 3) introduc o dificultate, care din punct de vedere matematic şi fizic apare inadmisibilă și anume că presiunile nu mai sînt o funcție uniformă cu perioada 2π. Toate cele patru cazuri elimină presiunile $p-p_0$ negative și în regiunea corespunzătoare admit $p = p_0$, presiunea atmosferică, ipoteză valabilă fizic și verificată practic. În consecință, în punctele unde începe sau se sfîrșește zona de suprapresiuni intervine o modificare calitativă a fenomenului care în mod normal se traduce printr-o discontinuitate a variației presiunilor și vitezelor. De acest fapt ține seama numai prima ipoteză. A doua ipoteză caută, dimpotrivă, să elimine această realitate prin asigurarea continuității curbei presiunilor în punctul de ieșire. Ideia care stă la baza condițiilor 2) este că în zona divergentă a filmului, cu presiune constantă, repartiția vitezelor este liniară și în consecință trebuie racordate cele două mișcări, asigurîndu-se o valoare unică a debitului în punctul respectiv. În realitate se face astfel abstracție de mișcarea fluidului de-a lungul axului lagărului și de faptul că mișcarea generală suferă o discontinuitate în punctul $\delta_{\min} = \delta_2$. Noua mișcare, dincolo de acest punct este caracterizată prin $p = p_0$ și o repartiție dată de viteza la intrare. În această regiune aproximațiile curent introduse $\frac{\partial v_j}{\partial x_k} = 0$; $\frac{\partial^2 v_j}{\partial^2 x_k} = 0$ $(j,k = 1,3)$, axele Ox_1 și Ox_3 fiind conținute într-una din suprafețele solide care mărginesc fluidul, nu mai sînt valabile. Cîmpul de viteze este dat de ecuațiile

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \Delta v_3 = 0 \tag{1}$$

care arată că acestea sînt funcții armonice, cu valori date pe frontiera corespunzătoare grosimii minime. După o zonă făcînd un unghi la centru foarte mic, aproximațiile inițiale devin din nou valabile, mișcarea stabilindu-se în noul regim. Astfel, ținînd seama de rezultatele obținute în alte lucrări [1], considerînd $\delta =$ const. în această zonă unde grosimea trece printr-un minimum se poate scrie, cu o aproximație foarte bună, viteza tangențială v_1 și axială v_3 sub forma

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= A_1 \cdot e^{-\pi \frac{r_1}{\delta} \theta} \times \cos \frac{\pi}{b} x_3 \cdot \sin \pi \frac{x_2}{\delta} + V\left(1 - \frac{x_2}{\delta}\right); \\ A_1 &= \frac{e^{\pi^2 \frac{r_1}{\delta}} \delta^2 \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)_{\theta = \pi;\ x_3 = \frac{b}{2}},}{8\mu_1 r_1}, \\ v_3 &= \frac{b}{\delta} A_1 e^{-\pi \frac{r_1}{\delta} \theta} \times \sin \frac{\pi}{b} x_3 \cdot \sin \pi \frac{x_2}{\delta};\ v_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Vitezele v_3 suferă o variație rapidă în dreptul secțiunii minime, de la 0 la valoarea (2), după care se amortizează repede, ca și primul termen al vitezei tangențiale. Se remarcă apoi că prin condiția (2) se asigură continuitatea curbei de presiuni numai la ieșirea din zona de suprapresiuni, iar la intrare nu numai că rămîne aceeași discontinuitate dar este încă agravată de faptul că teoretic punctul unghiulos de la intrare este înlocuit cu un salt ce face ca valorile măsurate, valorile teoretice și condițiile la limită impuse în acest punct să fie în complet dezacord între ele. Justificarea aparentă prin existența unei surse de alimentare în regiunea corespunzătoare dispare de altfel complet dacă se consideră că ansamblul funcționează înecat în baia de fluid.

Primele trei condiții nu țin seama de presiunea de alimentare și de poziția punctului de alimentare cu lubrifiant. Acest neajuns apare însă numai în cazul construcțiilor neadecvate, la care alimentarea se face în regiunea de grosime minimă sau la care se realizează presiuni exagerate la intrare, fapt care mărește sensibil frecările, ridică temperatura și conduce la valori maxime mai ridicate a presiunilor pentru o aceeași încărcare. În consecință, pentru construcțiile bine executate și cu presiuni normale de alimentare, condițiile 1), 2), 3) sînt chiar preferabile cazului ultim 4), deoarece în practică p_i poate varia foarte mult, la același ansamblu de frecare, fiind condiționat de temperatura ambiantă, de regimul de lucru, de starea dispozitivelor de filtrare a lubrifiantului etc.

În figurile 1,2 și 3 s-au reprezentat punctele în care începe și se sfîrșește zona activă (de suprapresiuni), pentru lagărele circulare cu diferite alungiri $\lambda = \frac{b}{2r_1}$, unde b este lățimea zonei de acoperire și $2r_1$ diametrul fusului. Unghiurile $\theta^{\star}$ de pe ordonată sînt măsurate față de direcția încărcării P, iar în abscisă s-a luat numărul lui Sommerfeld

$$S = \frac{1 + \frac{2}{3}\bar{a}\alpha}{2\pi(1+\alpha)\zeta}, \tag{3}$$

în care α este excentricitatea relativă $\alpha = \frac{e}{\Delta}$ (e fiind distanța dintre axele fusului și cuzinetului, iar Δ jocul radial), $\bar{a}$ un coeficient depinzînd de α și λ [1], iar ζ este coeficientul de încărcare [2]

$$\zeta = \frac{P\psi^2}{2\mu_1 bV}. \tag{4}$$

În această relație μ_1 este viscozitatea la intrare, iar V viteza periferică a fusului; viscozitatea medie, care intră de obicei în calculul numărului S s-a obținut considerînd μ variabil de-a lungul filmului după o lege de forma $\mu = \mu_1 \frac{\delta}{\delta_1}$ și notînd Q_s debitul care scapă pe la capete [1], [2],

$$\mu_m = \frac{2}{Q_s}\int_0^{Q_s}\mu_1\frac{\delta}{\delta_1}\,dQ_s = -\frac{r_1}{Q_s}\int_0^{\pi}\int_0^{\delta} x_2(x_2-\delta)\frac{\sqrt{\beta_{1A}}}{r_1}\,\mathrm{th}\,\lambda\sqrt{\beta_{1A}}\cdot\frac{A_1\sin\theta + A_2\sin 2\theta}{(1+\alpha\cos\theta)^2}\,d\theta\,dx_2 =$$

$$= \frac{1+\frac{2}{3}\bar{a}\alpha}{1+\alpha}\mu_1. \tag{5}$$

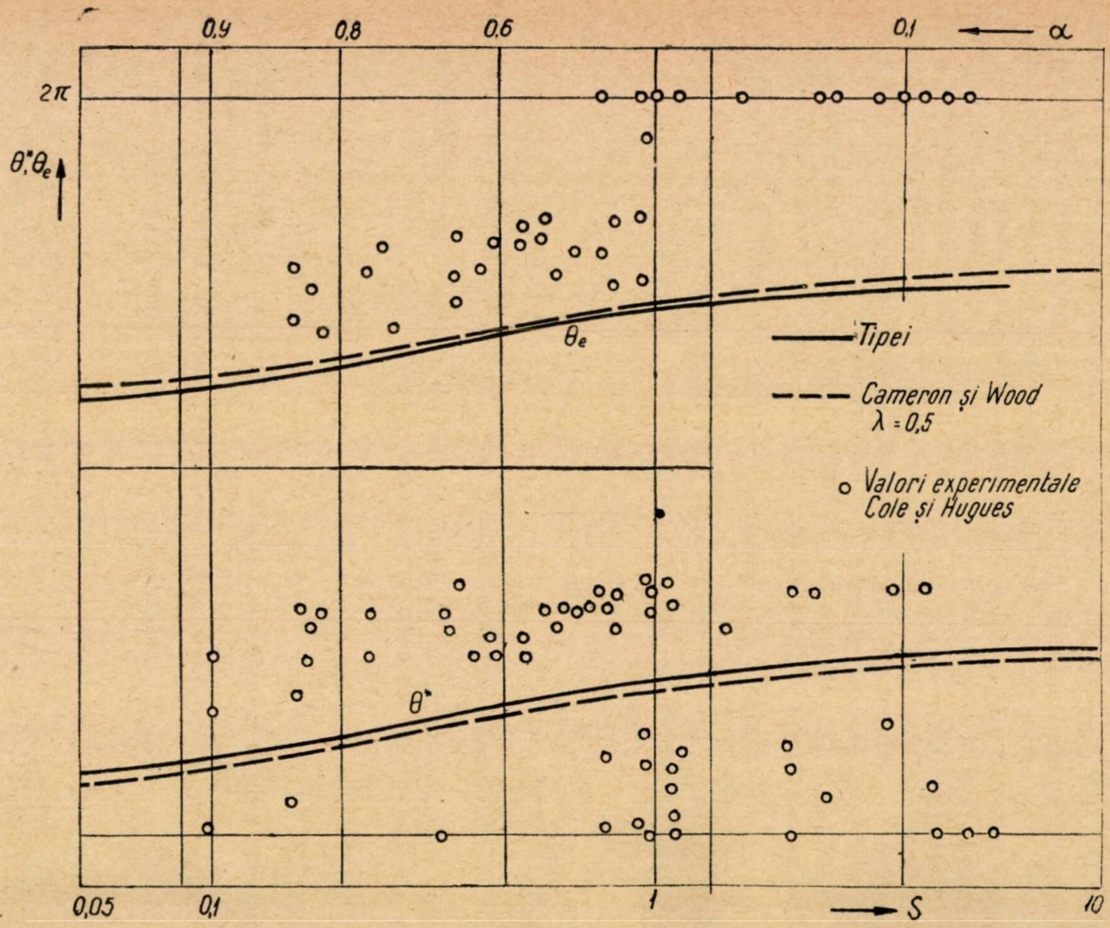

0,9
0,8
0,6
0,1
α
2π
θ*, θe
θe
Tipei
Cameron și Wood
λ = 0,5
Valori experimentale
Cole și Hugues
θ*
0,05
0,1
1
S
10

Fig. 1

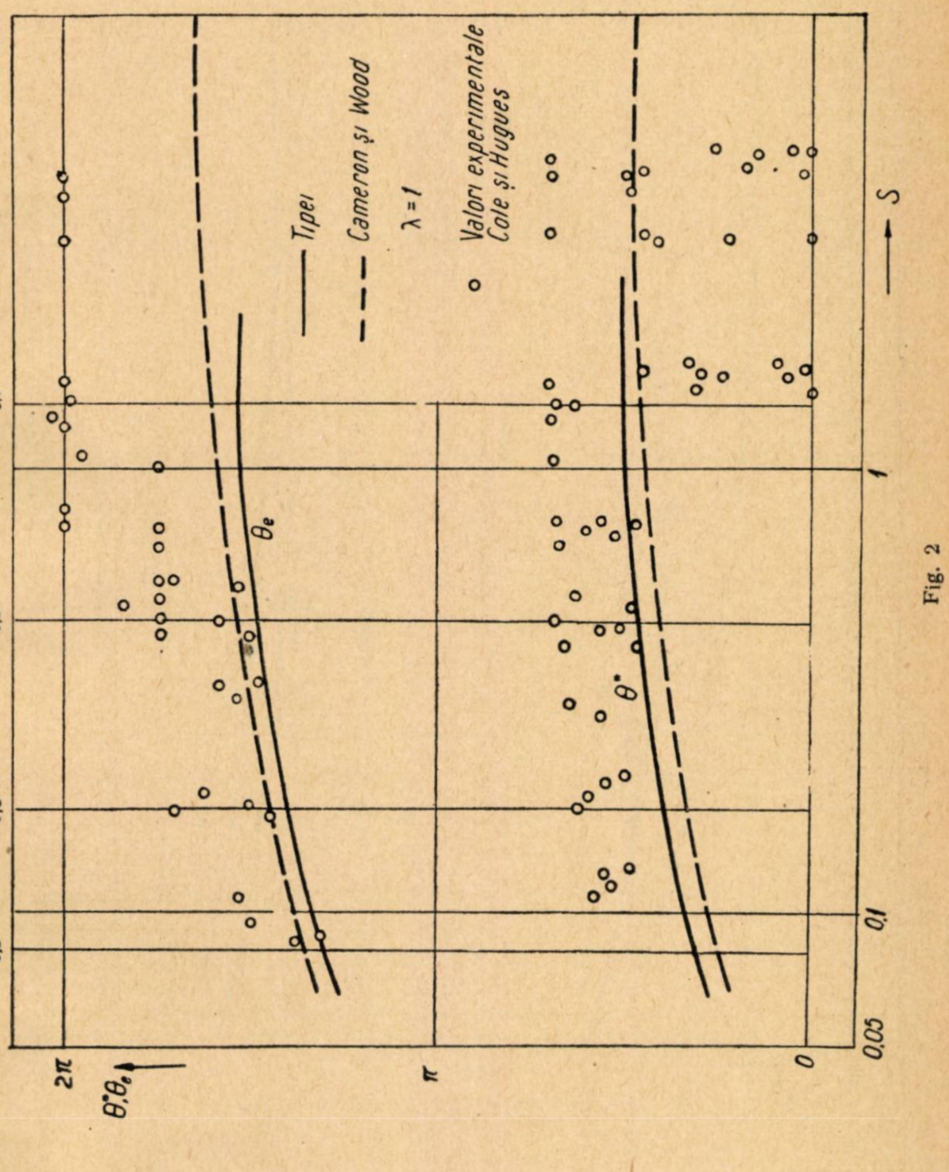

0,8
0,6
0,3
0,1
α
Tipei
Cameron şi Wood
λ = 1
Valori experimentale Cole şi Hugues
θ_e
θ^*
2π
π
0
θ^*, θ_e
0,05
0,1
1
S

Fig. 2

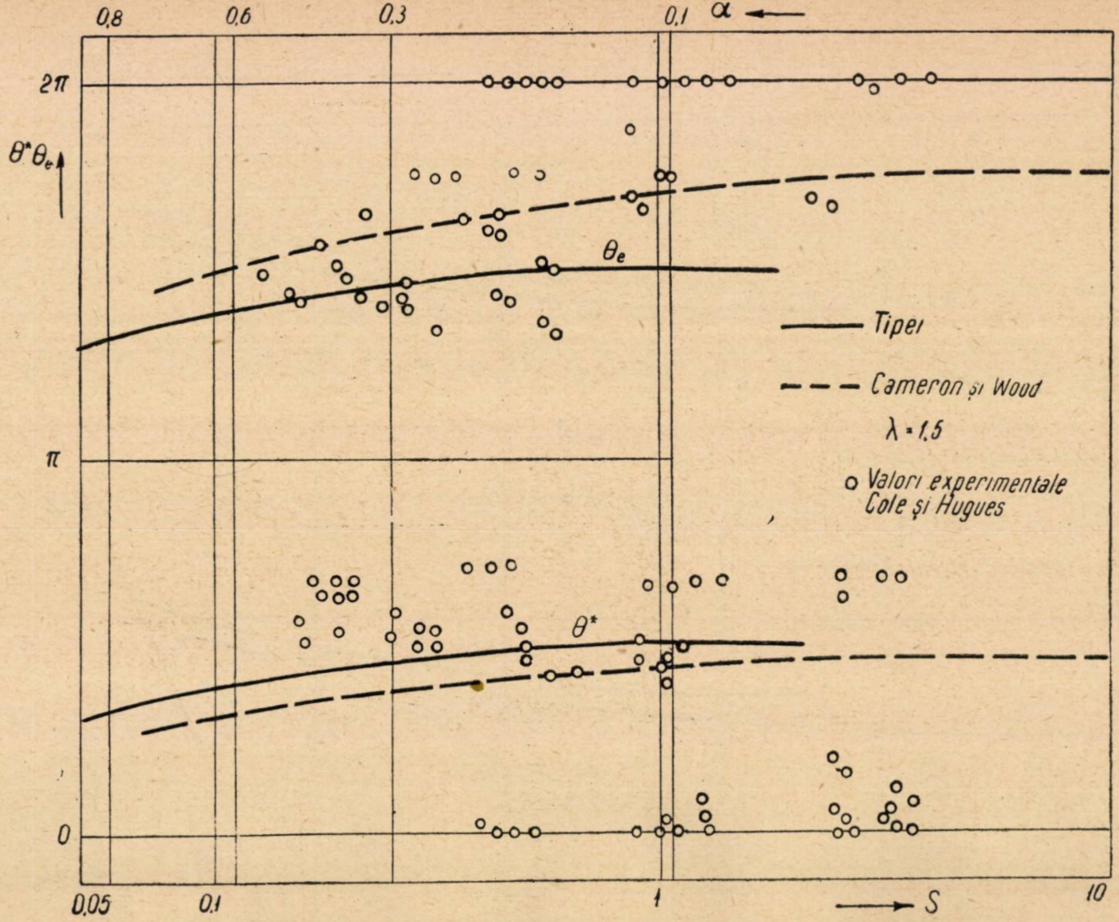

0,8
0,6
0,3
0,1
α
2π
$\theta^* \theta_e$
π
0
θ_e
θ^*
Tipei
Cameron și Wood
$\lambda = 1,5$
Valori experimentale Cole și Hugues
0,05
0,1
1
10
S

Fig. 3

Punctele din diagrame corespund valorilor experimentale după Cole și Hughes [3], iar curbele au fost trasate după rezultatele obținute prin metode cu totul diferite de Cameron și Wood cu condițiile 2) și de Tipei cu condițiile 1). Din diagrame se constată:

1. Că unghiul la centru al zonei de suprapresiuni este sensibil egal cu π.

2. Că între zonele active determinate teoretic și experimental este un decalaj care apare în general mai accentuat pentru condițiile 2), mai ales la unghiul corespunzător intrării în această zonă.

3. Că în general există o dispersiune accentuată a punctelor experimentale, indicînd o sensibilitate a regimurilor de lubrificație sub o sarcină dată, față de ceilalți parametri (temperatură, viteză etc.).

4. Că în general teoria și experiența dau un acord satisfăcător, mai ales pentru condițiile 1), arătînd astfel posibilitățile de aplicare ale teoriei hidrodinamice.

Decalajul semnalat mai sus se datorește în parte unei întîrzieiri a formării stratului portant din cauza condițiilor experimentale care n-au asigurat alimentarea de-a lungul unei generatrice a suprafețelor [3], așa cum se prevede în formulele teoretice. Totodată valorile mai mari ale unghiurilor pentru ieșirea din zona activă se datoresc faptului că acestea au fost obținute prin observație vizuală și că ruperea filmului observată nu are loc exact în punctul unde $p = p_0$. Se precizează de asemenea că valorile α mai mici decît 0,1, la care apare o împrăștiere mai mare a rezultatelor, nu prezintă nici o importanță practică (de obicei $\alpha > 0{,}3$).

Se obține suprafața complet scăldată de lubrifiant și importantă pentru calculul momentelor de frecare, observînd că ea cuprinde întreaga regiune de suprapresiuni, iar că pe restul suprafețelor lățimea efectivă a filmului lubrifiant se poate scrie

$$b_\theta = b\,\frac{\delta_2}{\delta}, \tag{6}$$

ținînd seama de continuitatea debitelor și de expresia lui v_1, din care rezultă că primul termen se amortizează aproape imediat lîngă punctul $\theta = \pi$, $\delta = \delta_2$, după care v_1 are o variație liniară, debitul de scăpări laterale este nul ($v_3 \to 0$), iar debitul longitudinal este $Q_1 = \frac{1}{2} b_\theta \delta V$. Relația (6) a fost de altfel obținută anterior de Gümbel-Everling [4], pe o cale mai puțin riguroasă. Se deduce raportul dintre această suprafață S_f și suprafața totală $S_t = 2\pi r_1 b$, în cazul condițiilor 1)

$$\frac{S_f}{S_t} = \frac{1}{2} + \frac{\int_\pi^{2\pi} b_\theta d\theta}{2\pi b} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\right). \tag{7}$$

Cu această valoare s-a construit curba din figura 4 care arată un bun acord cu valorile experimentale.

Coeficientul de debit al fluidului care scapă dintre suprafețe se scrie

$$c_{q_s} = \frac{\alpha}{\lambda} \sqrt{\beta_{1A}}\, \mathrm{th}\, \lambda \sqrt{\beta_{1A}} + \frac{\Delta^2 p_i}{6\lambda (1 - \nu) \mu_1 b V} \left[\left(1 + \frac{3}{2}\alpha^2\right)\theta^\star + 3\alpha \left(1 + \frac{\alpha^2}{4}\right) \sin\theta^\star + \right.$$

$$\left. + \frac{3\alpha^2}{4} \sin 2\theta^\star + \frac{\alpha^2}{12} \sin 3\theta^\star \right], \tag{8}$$

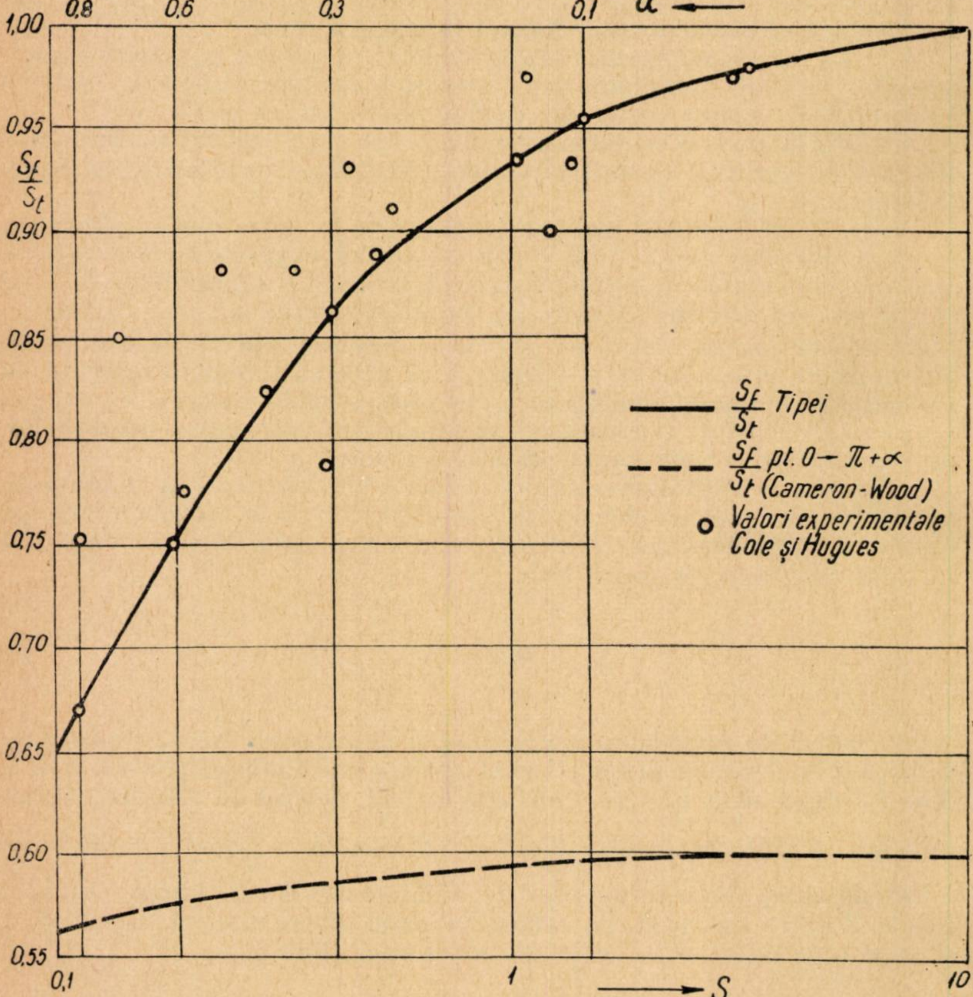


Fig. 4

în care β_{1A} este o funcție de excentricitatea relativă α [1], $\lambda = \frac{b}{2r_1}$ este alungirea, $\nu = \frac{b_i}{b}$, $\theta^\star$ unghiul dintre încărcare și linia centrelor, iar

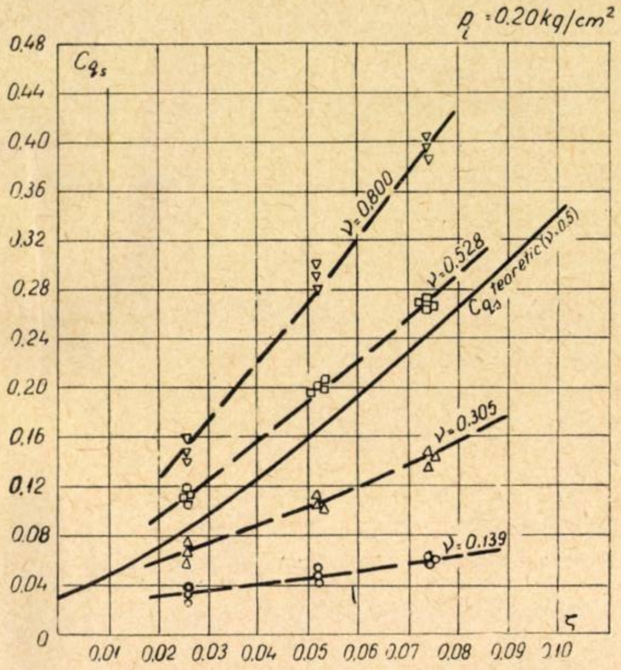


Fig. 5

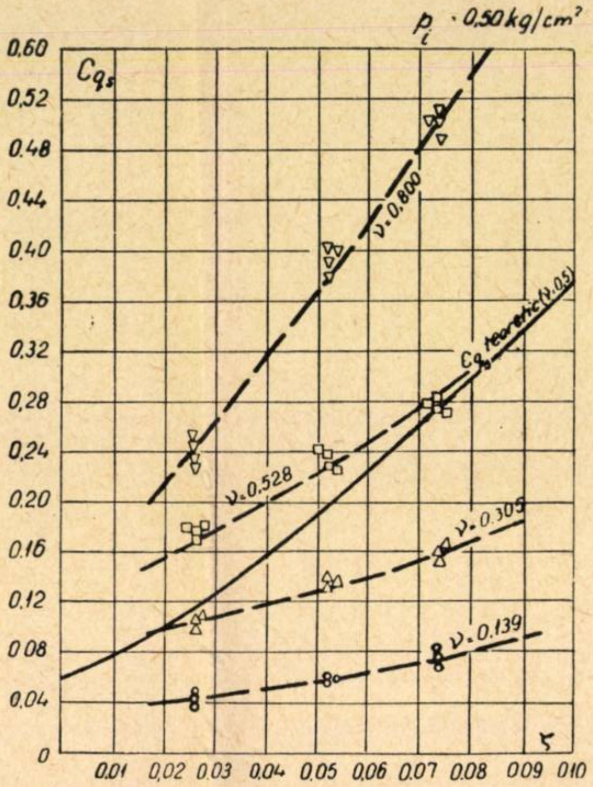


Fig. 6

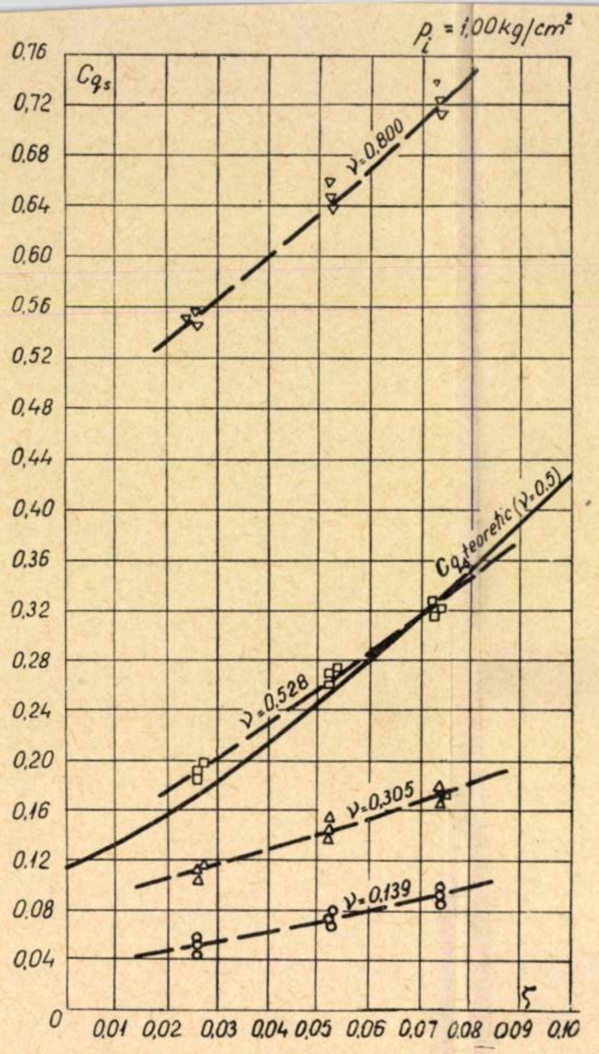


Fig. 7

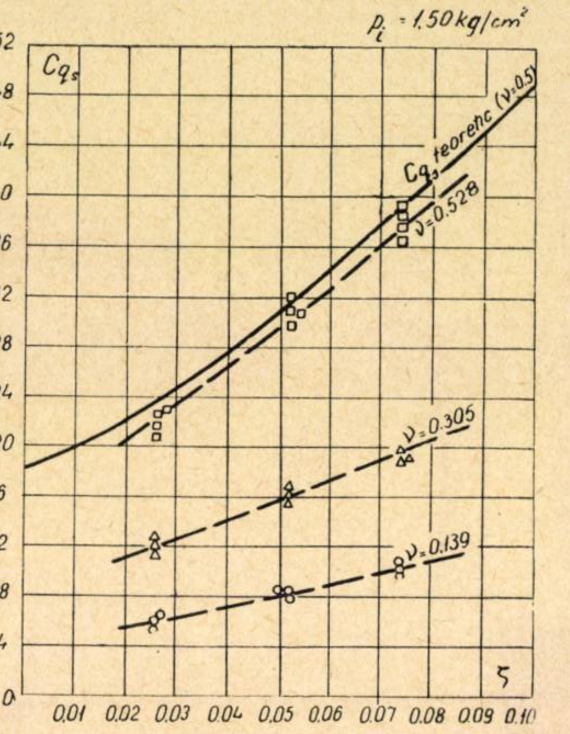


Fig. 8

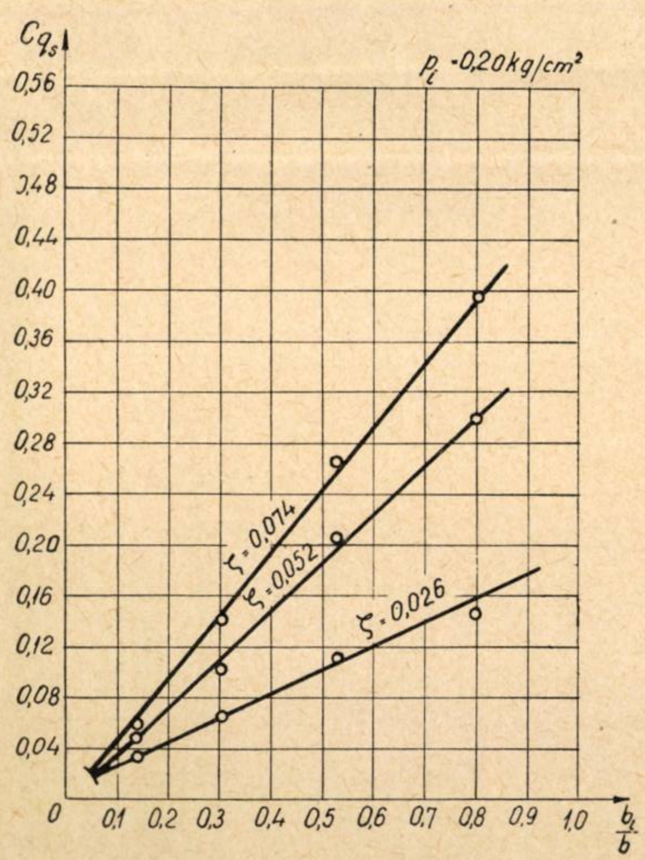


Fig. 9

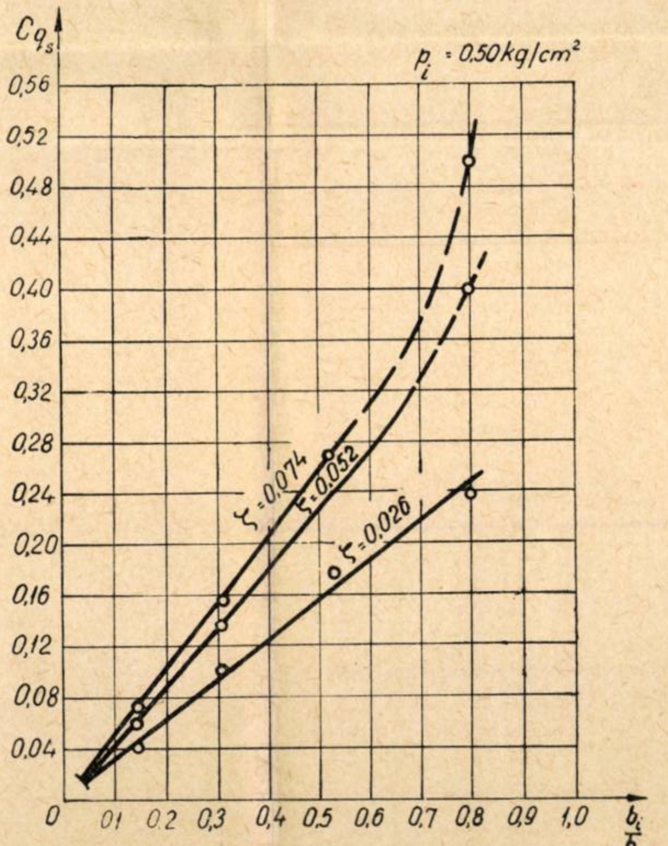


Fig. 10

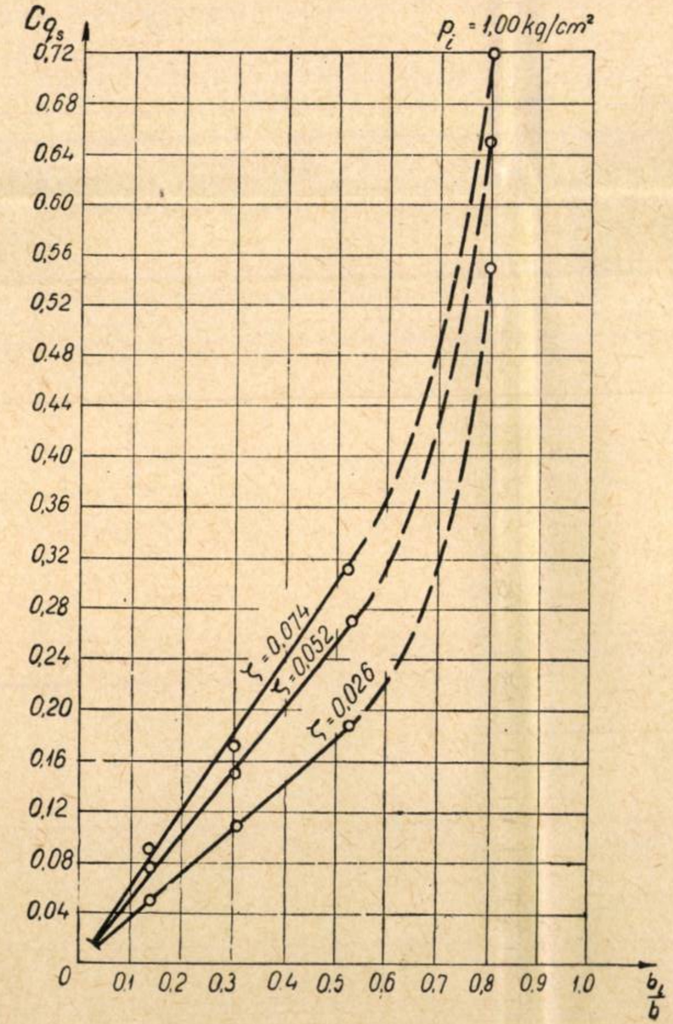


Fig. 11

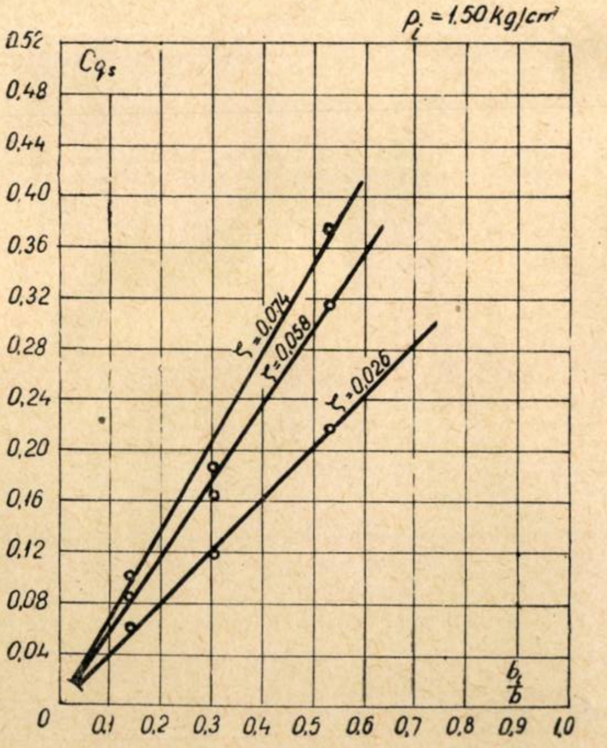


Fig. 12

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

p_i presiunea de alimentare. Al doilea termen al formulei (8) reprezintă fluidul care se scurge pe la cele două capete înainte de intrarea în zona de suprapresiuni, calculat în mod aproximativ.

Din diagramele figurilor 5—8 rezultă că valorile C_{q_s} teoretice și experimentale coincid în mod satisfăcător pentru $\nu = 0{,}5$; cu alte cuvinte, condițiile admise curent în mod teoretic că alimentarea se face sub presiune nulă în dreptul grosimii maxime a peliculei, corespunde practic, fenomenele reale fiind sensibil mai complexe totuși, cu alimentarea printr-o fantă de lungime egală cu jumătate din lărgimea suprafețelor, adăugîndu-se în ambele cazuri debitul de scăpări pe distanța corespunzătoare unghiului la centru θ^* dintre poziția fantei, respectiv a încărcării și linia centrelor. La valori $\nu \to 1$ corecția dată de al doilea termen din (8) nu mai este suficientă, debitul crește mult datorită curgerii directe a fluidului în exterior. Coeficientul C_{q_s} experimental apare astfel mărit în mod artificial, fără ca fluidul să participe în întregime la fenomenele de frecare dintre suprafețe.

Diagramele următoare (fig. 9—12) scot în evidență proporționalitatea debitelor cu lungimea fantei, pentru gamă mare de presiuni de alimentare. Se observă faptul că debitul Q_s este proporțional cu lungimea și nu cu secțiunea fantei, după cum rezultă din diagrame pentru $\nu = 0{,}139$ și $\nu = 0{,}305$, corespunzînd unor orificii de secțiune circulară de diametru b_i. Această variație nu influențează sensibil repartiția de presiuni, ci numai începutul zonei active (unghiul θ^*), fapt care explică valorile mai mari găsite pentru acest unghi (fig. 1—3). Efectul practic se resimte în ceea ce privește încălzirea, în timp ce ceilalți parametri de funcționare nu variază sensibil cu raportul ν. Rezultă din cele precedente că debitele reale se pot

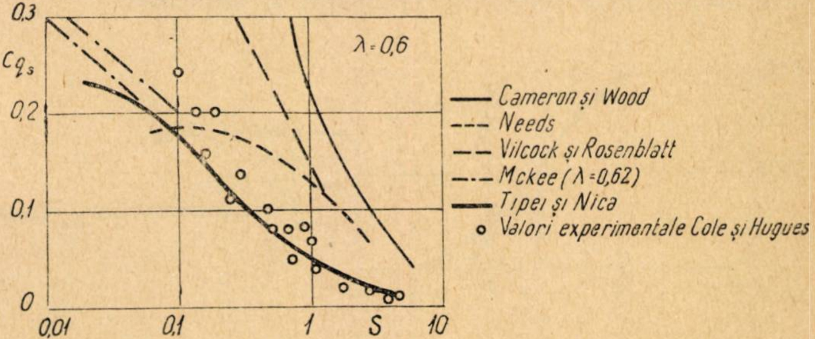


Fig. 13

calcula din debitele teoretice pentru $\nu = 0{,}5$ corectate, ținînd seama de presiunea de alimentare și poziția orificiului respectiv, după relația

$$c_{q_s}\,\text{real} = 2\nu c_{q_s}. \tag{9}$$

Cu această formulă s-au trasat curbele din figurile 13—15 în care se observă un bun acord al acestora cu datele experimentale.

În concluzie :

1. Cele mai apropiate de realitate și mai satisfăcătoare din punct de vedere teoretic și practic, la presiuni normale de alimentare, sînt condițiile 1).

2. Rezultatele prezentate în [1] și [2] pe baza teoriei hidrodinamice sînt verificate practic în ceea ce privește condițiile pe frontiere, suprafețele reale de frecare și coeficienții de debit, cantități legate prin parametrii α, ζ teoretici și S de valorile experimentale.

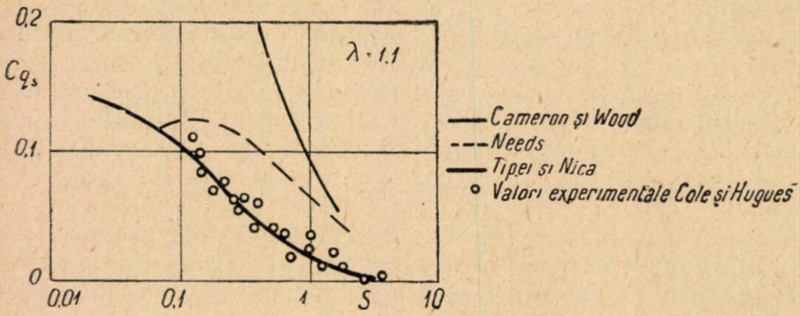


Fig. 14

3. Debitele sînt direct proporționale cu lungimea fantei de alimentare dacă aceasta este corect dimensionată în adîncime.

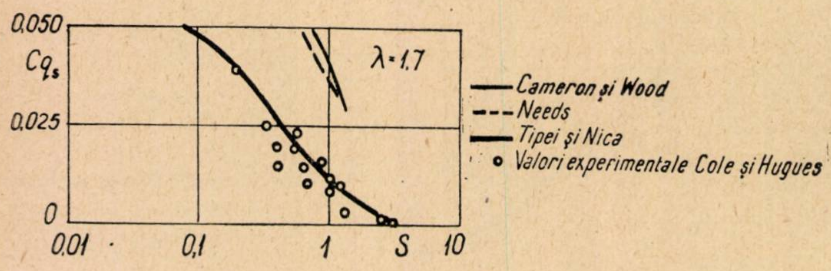


Fig. 15

4. Presiunile de alimentare pot varia practic în limite destul de largi, fără a influența substanțial valorile globale caracteristice ζ, α deduse teoretic prin admiterea unei suprapresiuni nule în punctul de grosime maximă a filmului lubrifiant.

Primită la redacție la 5 iulie 1956.

О ПРЕДЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ СМАЗКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Излагаются гипотезы о предельных условиях для круглых подшипников с сплошным вкладышем и сравниваются с результатами опытов, произведенных Колем и Юзом [3], а также и авторами, относящихся к пределам зоны сверхдавлений, к общей площади смачиваемой смазкой, и к величине расхода смазки. Подтверждается гипотеза, что зона давлений начинается в точке максимальной толщины и оканчивается в точке минимальной толщины пленки смазочного вещества, причем результаты, приведенные в [1] и [2], наиболее приближаются к данным опытов. Констатируется, что расход пропорционален длине щели питания и что давления питания могут изменяться достаточно широко без серьезного влияния на значения, выведенные теретическим путем, при предположении нулевого сверхдавления в точке максимальной толщины пленки.

SUR LES CONDITIONS AUX LIMITES DANS LE PROBLÈME DE LA LUBRIFICATION

(RÉSUMÉ)

On présente les hypothèses, en ce qui concerne les conditions aux limites, pour les paliers circulaires à coussinet complet et on les compare avec des expériences concernant les limites de la couche de lubrifiant, la surface totale baignée par le lubrifiant et les valeurs du débit de lubrifiant, effectuées par Cole et Hughes [3] et par les auteurs. L'hypothèse que la zone des pressions commence au point de la plus grande épaisseur et finit au point de l'épaisseur minimum de la couche de lubrifiant est confirmée, les résultats présentés dans [1] et [2] étant les plus proches des données expérimentales. On constate que le débit est proportionnel à la longueur de la fente d'alimentation et que les pressions d'alimentation du lubrifiant peuvent varier entre des limites suffisamment larges, sans influencer essentiellement les valeurs déduites théoriquement, en admettant une surpression nulle au point de la plus grande épaisseur.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mişcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafeţe de dimensiuni finite*. Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951.
2. — *Consideraţii asupra calculului lagărelor cu alunecare*. Buletin ştiinţific, Secţiunea de ştiinţe tehnice şi chimice, t. IV, nr. 1—2, 1952.
3. Cole and Hughes, *Oil Flow and Film Extent in Complete Journal Bearings*. The Engineer, 16-23 martie 1956.
4. Gümbel-Everling, *Reibung und Schmierung in Maschinenbau*. *M.* Kraijn, Berlin, 1925.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

UNGERE–FRECARE–UZURĂ

STUDIUL COEFICIENTULUI DE FRECARE ÎNTR-UN LAGĂR CIRCULAR CU AJUTORUL CURBELOR $p = g\ (V)$

DE

GH. VASILCA

Într-o lucrare precedentă [1] s-a arătat cum pot fi utilizate la proiectarea lagărelor circulare cu alunecare, caracteristicile funcţionale experimentale $p = g(V)$, determinate pentru diferite temperaturi t_c, constante ale cuzinetului.

La proiectarea lagărelor este necesar să se cunoască de asemenea şi coeficientul de frecare, pentru a se determina la nevoie regimul de funcţionare cu frecări minime, precum şi puterea absorbită de lagăre în regimul de exploatare ales.

În regimul hidrodinamic de ungere, calculele arată [2], că pentru aceleaşi elemente geometrice ale lagărului şi acelaşi lubrifiant, coeficientul de frecare variază cu viteza şi cu sarcina. Ipotezele mai vechi simplificatoare, asupra constanţei coeficientului de frecare, admise în trecut la proiectare, au fost astfel infirmate. Variaţia coeficientului de frecare cu viteza şi cu sarcina poate fi scoasă în evidenţă şi cu ajutorul unor elemente experimentale, cum sînt de exemplu caracteristicile $p = g(V)$.

Variaţia coeficientului de frecare cu presiunea şi cu viteza, cînd şi temperatura variază, este cunoscută. Caracteristicile $p = g(V)$ permit studierea variaţiei coeficientului de frecare şi în ipoteza de funcţionare a lagărului în regim de funcţionare continuu şi termic stabil.

Echilibrul termic în regim de funcţionare continuu a unui lagăr circular cu alunecare poate fi exprimat prin relaţia

$$\frac{\mathrm{d}b}{427} f \cdot pV = K'q + Q_0, \tag{1}$$

sau

$$f \cdot pV = Kq + K_0\, Q_0, \tag{2}$$

în care partea stîngă a egalității reprezintă căldura produsă, $K'q$ căldura evacuată prin lubrifiant, iar Q_0 căldura transmisă către mediul exterior prin corpul lagărului și prin fus.

În relația (2) s-a notat cu

f — coeficientul de frecare ;

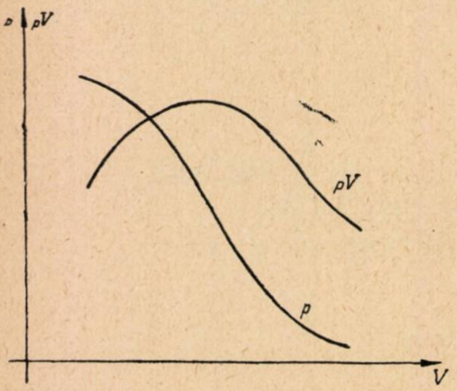


Fig. 1

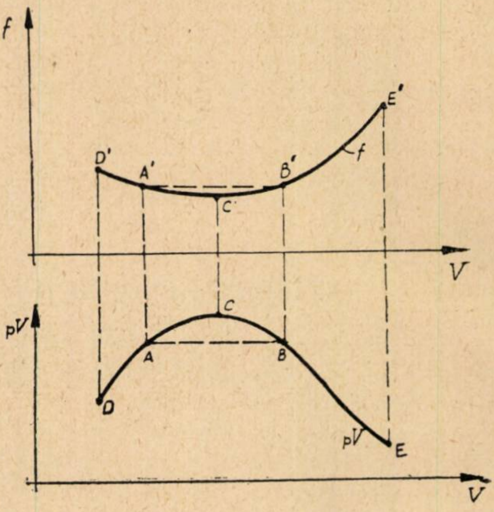


Fig. 2

p — presiunea specifică medie (pe suprafața proiectată a cuzinetului), kgf/cm^2 ;

V — viteza periferică a fusului, m/s ;

q — debitul total de ulei, care trece prin lagăr, l/h ;

$$K = \frac{427}{3600}\,\frac{1}{db}\,c\gamma\,(t_u - t_b)\,; \qquad (3)$$

db — suprafața proiectată a cuzinetului, cm^2 ;

c — căldura specifică a lubrifiantului, kcal/kg°C ;

γ — greutatea specifică a lubrifiantului la temperatura t_u, kgf/dm^3 ;

t_u — temperatura medie a lubrifiantului la ieșire din lagăr, °C ;

t_b — temperatura lubrifiantului la intrare în lagăr, °C ;

$$K_0 = \frac{427}{db}\,;$$

Q_0 — cantitatea de căldură transmisă prin corpul lagărului și prin fus către mediul exterior, kcal/h.

La un lagăr dat și în aceleași condiții de alimentare cu lubrifiant, repartiția temperaturii în cuzinet variază cu poziția zonei de temperatură maximă, în funcție la rîndul ei de excentricitatea relativă.

Cu excentricitatea relativă, adică cu încărcarea și viteza, linia centrelor putîndu-se roti cu un unghi pînă la aproximativ 30°, poziția temperaturii maxime în cuzinet se va deplasa în consecință.

La construcţiile de lagăre, cu suprafaţa de răcire concentrică cu focarul de căldură, prin varierea poziţiei temperaturii maxime, nu poate fi influenţată cedarea de căldură către mediul ambiant.

La aparatura experimentală cu care s-au determinat caracteristicile $p = g(V)$, suprafaţa de răcire a corpului lagărului este neregulată.

În consecinţă pare posibil că la anumite poziţii ale liniei centrelor repartiţia temperaturilor în corpul lagărului ar putea deveni favorabilă unei activări a cedării de căldură către mediul ambiant.

Făcînd unele măsurători de temperatură în diferite puncte ale suprafeţei de răcire, nu au putut fi constatate variaţii pentru diferite sarcini şi viteze dacă temperatura t_c, măsurată într-un punct al cuzinetului, a fost menţinută constantă.

Căldura evacuată prin fus poate fi păstrată constantă, prin menţinerea constantă a temperaturii lagărelor paliere în care se sprijină [3].

În lungul unei curbe $p = g(V)$, în regim de funcţionare continuu şi termic stabil, cantitatea de căldură evacuată prin corpul lagărului şi prin fus poate fi în consecinţă considerată practic constantă şi deci $K_0Q_0 = \text{const.}$ La un alt regim termic stabil, K_0Q_0 ia altă valoare.

Coeficientul K conţine ca parametrii variabili γ, t_u şi t_b. Greutatea specifică se determină cu relaţia $\gamma = \gamma_{15^\circ} - 0{,}00062\ (t_u - 15)$. Temperatura t_b a lubrifiantului la intrare în cuzinet poate fi menţinută constantă prin răcirea sau încălzirea băii din care este alimentat lagărul.

Temperatura medie t_u a uleiului la ieşire din lagăr este constantă de-a lungul unei curbe $p = g(V)$, căci altfel nu poate fi menţinută aceeaşi temperatură t_c a cuzinetului. Ea a putut fi măsurată, la aparatura experimentală utilizată, în vînă de lubrifiant imediat la ieşire din cuzinet şi a reieşit că este cu 2°C mai mică decît temperatura t_c. Temperatura t_c a fost măsurată în zona de încărcare maximă a lagărului.

Cu K şi $K_0\ Q_0$ constante, rezultă că produsul $f.pV$ din relaţia (2) este o funcţie liniară de debitul q de ulei care trece prin lagăr. Iar dacă se determină caracteristica $p = g(V)$ la $q = \text{const.}$, rezultă

$$f \cdot pV = \text{const.} \tag{4}$$

În cazul $p = g(V)$ cu debitul variabil, q este cantitatea totală de lubrifiant care trece prin lagăr, cînd presiunea şi orificiul de alimentare sînt menţinute constante; q creşte continuu cu viteza V [3]. La determinarea curbelor $p = g(V)$ cu $q = \text{const.}$, menţinerea debitului constant, cînd viteza şi sarcina variază, se obţine prin modificarea secţiunii conductei de alimentare, presiunea lubrifiantului rămînînd şi în acest caz constantă.

Cunoscînd caracteristica $p = g\ (V)$ la t_c constant şi q variabil sau constant, precum şi K_0Q_0 se obţine $pV = g_1(V)$ şi în consecinţă poate fi studiat coeficientul de frecare f.

Dacă se extind suficient de mult limitele experimentale la determinarea unei caracteristici $p = g(V)$ la t_c constant şi q constant, variaţia produsului $pV = g_1(V)$ se prezintă ca în figura 1.

La variaţia lui pV corespunde, după relaţia (4), o variaţie corespunzătoare a lui f. De-a lungul unei caracteristici $p = g\ (V)$, coeficientul de frecare nu este deci constant, ci variază cu toate că temperatura t_c a cuzinetului rămîne constantă.

Considerînd coeficienții de frecare în punctele A și B (fig. 2)

$$f_A = \frac{K^\circ}{(p\,V)_A} \quad \text{și} \quad f_B = \frac{K^\circ}{(p\,V)_B} \tag{5}$$

raportul lor are expresia

$$\frac{f_B}{f_A} = \frac{(p\,V)_A}{(p\,V)_B} \tag{6}$$

și deci la $(pV)_A = (pV)_B$, rezultă $f_A = f_B$.

Din

$$\frac{f_E}{f_D} = \frac{(p\,V)_D}{(p\,V)_E} \tag{7}$$

mai rezultă de asemenea, că variația coeficientului de frecare se menține în limitele variației lui pV.

Din relația (2) se obține prin derivare în raport cu V

$$\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{K\dfrac{\partial q}{\partial V} - (Kq + K_0Q_0)\dfrac{\partial(pV)}{\partial V}}{(pV)^2}. \tag{8}$$

La $q = \text{const.}$, curba $f = g_2(V)$ prezintă un minim pentru $\dfrac{\partial(pV)}{\partial V} = 0$. Coeficientul de frecare minim corespunde deci la valoarea maximă a lui pV, adică C și C' se obține la aceeași viteză.

Luînd punctul de plecare în D și pentru f_D o valoare arbitrară, cu ajutorul relației

$$f = f_D \frac{(p\,V)_D}{(p\,V)} \tag{9}$$

se poate construi curba D' C' E', care reprezintă variația coeficientului de frecare în lungul caracteristicii $p = g(V)$, la t_c și q constante.

În cazul caracteristicii $p = g(V)$ cu q variabil, coeficientul de frecare este dat de relația

$$f = \frac{Kq}{pV} + \frac{K_0\,Q_0}{pV} = \frac{1}{pV}(\mathrm{K}q + K_0Q_0). \tag{10}$$

Coeficientul de frecare nu mai variază deci după o curbă riguros reciproc cu pV, ca în cazul $q = \text{const}$. Debitul de lubrifiant variind însă după o curbă continuu crescătoare cu V (fig. 3a, b, c) [3], alura generală a curbei $f = g_2(V)$ este dată de $\dfrac{1}{pV}$.

Dacă se derivă relația (8) în raport cu V, se obține

$$\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} = \frac{K\frac{\partial^2 q}{\partial V}(pV)^2 - \frac{\partial^2 (pV)}{\partial V^2}(Kq+K_0Q_0)(pV)^2 + 2pV\left(\frac{\partial pV}{\partial V}\right)^2(Kq+K_0Q_0) - K\frac{\partial q}{\partial V}\cdot\frac{\partial pV}{\partial V}(1+2\,pV)}{(pV)^4}. \tag{11}$$

Curba $pV = g_1(V)$ prezentînd un maxim în C (fig. 3 b), derivata $\frac{\partial^2 pV}{\partial V^2} < 0$ și deci termenul respectiv este pozitiv. Sînt, de asemenea, pozitive expresiile $\frac{\partial q}{\partial V}$ și $\frac{\partial^2 q}{\partial V^2}$, dacă $q = g_3(V)$ prezintă o alură ca în figură, cum apare de obicei. Numărătorul de la ultimul termen devine de asemenea, pozitiv pentru porțiunea de curbă $pV = g_1(V)$ situată la dreapta lui C, unde $\frac{\partial pV}{\partial V} < 0$. Prin aceasta $\frac{\partial^2 f}{\partial V^2} > 0$ și în consecință coeficientul de frecare f prezintă un minim.

Din relația (8) se vede că la dreapta punctului C, avînd $\frac{\partial pV}{\partial V} < 0$ rezultă $\frac{\partial f}{\partial V} > 0$ și deci coeficientul de frecare crește. Mai rezultă de asemenea că f_{minim} nu corespunde cu (pV) maxim, deoarece $\frac{\partial f}{\partial V}$ nu se anulează cînd $\frac{\partial pV}{\partial V} = 0$.

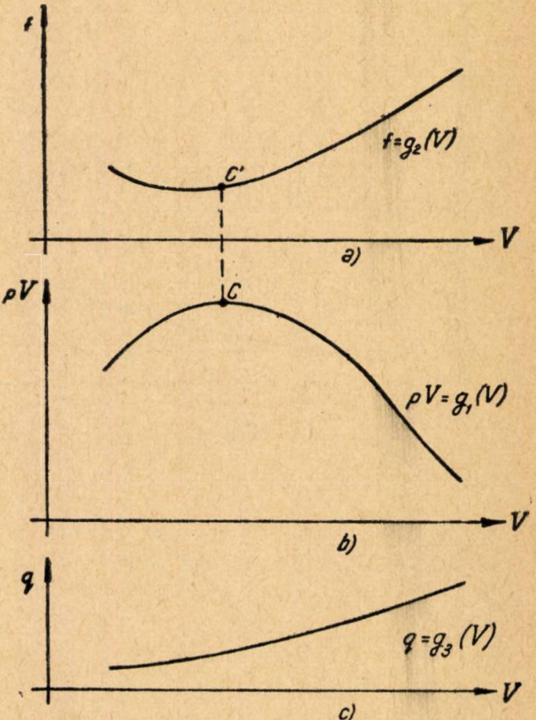


Fig. 3

La stînga punctului C, $\frac{\partial pV}{\partial V} > 0$ și în consecință, din relația (8) nu se mai poate deduce cu ușurință variația lui f.

Aspectul variației coeficientului de frecare la q variabil poate fi examinat și cu ajutorul curbei $p = g_2(V)$ la $q = \text{const.}$ și același t_c.

Notînd cu p^c, $(pV)^c$, f^c și q^c parametrii care se referă la curbele cu debit constant, se poate determina o curbă $p^c = g(V)$ astfel ca $q^c = q_0$. Poziția reciprocă a curbelor p, p^c, pV, $(pV)^c$ și q, q^c se poate prezenta în acest caz ca în figura 4.

În punctul M, parametrii t_c, q și V_0 avînd aceleași valori, rezultă $p_0 = p_0^c$. La viteza V' presiunea p_1^c trebuie să fie mai mică decît p_1,

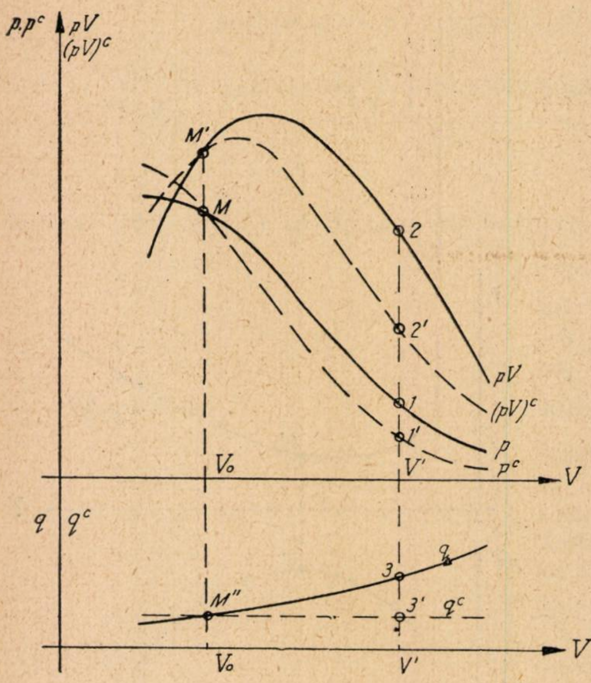


Fig. 4

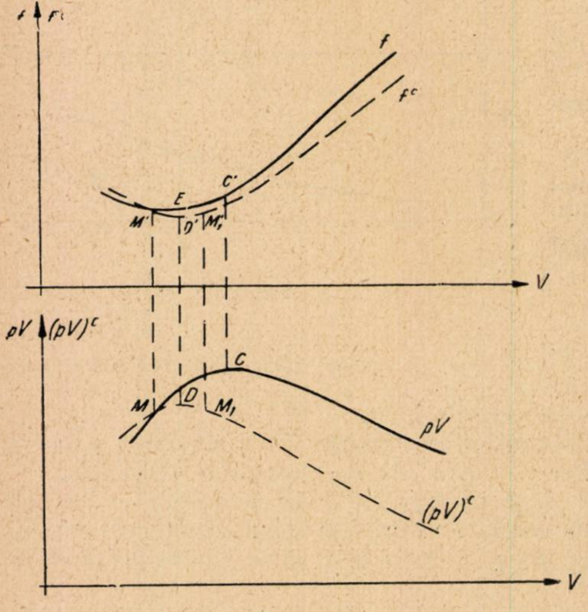


Fig. 5

deoarece la același t_c, cu debitul $q^c < q_3$ poate fi evacuată o cantitate de căldură mai redusă. La stînga punctului M, p^c va fi mai mare decît p, deoarece $q^c > q$.

Curbele $(pV) = g(V)$ se vor intersecta în M'; corespunzînd aceleiași viteze V_0. La dreapta lui M' și la aceeași viteză, $(pV)^c < pV$, iar pe ramurile din stînga $(pV)^c > pV$.

Curba f^c poate fi construită ca reciprocă curbei $(pV)^c$ (fig. 5).

Temperatura de regim t_c pentru curbele pV și $(pV)^c$ fiind aceeași și ținînd seama de relația (10), se poate scrie

$$\frac{f}{f^c} = \frac{(pV)^c}{pV} \frac{Kq + K_0 Q_0}{Kq^c + K_0 Q_0}. \tag{12}$$

În punctul M, fiind $q_0 = q^c$ și $(pV)_0 = (pV)_0^c$, rezultă $f_0 = f_0^c$ și deci curbele f și f^c se intersectează într-un singur punct M'.

Poziția curbei f față de f^c poate fi ca în figura 5, cu $f > f^c$ la dreapta punctului M', sau invers, aceasta depinzînd de variațiile debitelor și a produselor pV.

La aceeași viteză, relația (12) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{f}{f^c} = \frac{p^c}{p} \frac{Kq + K_0 Q_0}{Kq^c + K_0 Q_0}. \tag{13}$$

Expresia $\frac{Kq + K_0 Q_0}{Kq^c + K_0 Q_0}$ este o curbă de aceeași alură ca și $q = g(V)$, deoarece $K_0 Q_0$ și $Kq^c + K_0 Q_0$ sînt constante.

Raportul $\frac{p^c}{p}$ fiind variabil, curba $\frac{f}{f^c}$ va varia după o curbă ca în figura 6. Punctul M reprezentînd intersecția caracteristicilor $p = g(V)$ la q variabil și la $q = \text{const.}$, rezultă că la stînga acestui punct $p^c > p$ și în consecință

$$\frac{f}{f^c} > \frac{Kq + K_0Q_0}{Kq^c + K_0Q_0}. \qquad (14)$$

La dreapta punctului M, presiunea $p^c < p$ și deci

$$\frac{f}{f^c} < \frac{Kq + K_0Q_0}{Kq^c + K_0Q_0}. \qquad (15)$$

În M coeficienții de frecare pe cele două caracteristici fiind egali, rezultă $V_0M = 1$.

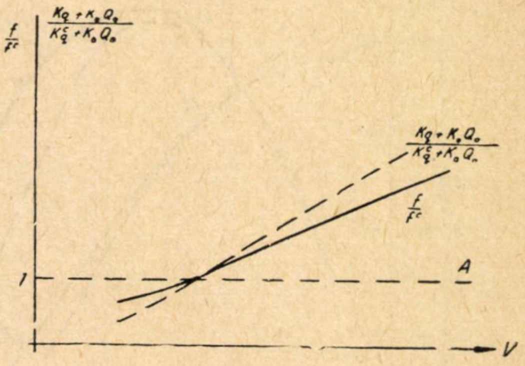

$\frac{f}{f^c}$
$\frac{Kq + K_0Q_0}{Kq^c + K_0Q_0}$
$\frac{Kq + K_0Q_0}{Kq^c + K_0Q_0}$
$\frac{f}{f^c}$
A
1
V

Fig. 6

Poziția curbei $\frac{f}{f^c}$ față de dreapta A arată și cum se situează f față de f^c în figura 5, obținîndu-se astfel în final $f = g(V)$, în comparație cu $f^c = g(V)$.

Dacă printr-o metodă oarecare se determină K_0Q_0, variația coeficientului de frecare poate fi obținută pe această cale și cantitativ. Constanta K_0Q_0 poate fi obținută prin determinarea puterii absorbite de lagăr, prin măsurarea căldurii evacuate prin elementele de construcție ale lagărului, sau prin măsurarea momentului de frecare direct. Cum rezultă din relațiile (9) și (10) este suficient să se determine K_0Q_0 într-un singur punct al caracteristicilor $p = g\ (V)$, sau cel mult în două pentru verificare.

În figura 7*a* și *b* sînt arătate diagramele p, pV și f la q variabil și $q = \text{const.}$ Momentul de frecare s-a măsurat în punctul $q = 1{,}4$ l/h și $V = 2{,}70$ m/s. Curbele se referă la un lagăr cu cuzinet din bronz de plumb în formă de bucșe și fusul din oțel. Coeficientul de frecare măsurat are valoarea $f = 9{,}14 . 10^{-3}$ din care a rezultat pentru constantă valoarea $K_0Q_0 = 0{,}044$.

Aparatura și condițiile generale experimentale au fost identice cu acelea descrise în [3].

În concluzie, se poate spune că de-a lungul unei caracteristici $p = g\ (V)$, în regimuri de funcționare continui și termic stabile, la lagărele circulare cu alunecare, coeficientul de frecare nu este constant, ci variază. Prezentînd în această variație și un minim, rezultă că din punctul de vedere al frecării, deci al puterii absorbite, există un regim în care lagărele funcționează mai avantajos. Acest rezultat a fost obținut de asemenea și prin calcul teoretic [2].

Primită la redacție la 5 iulie 1956.

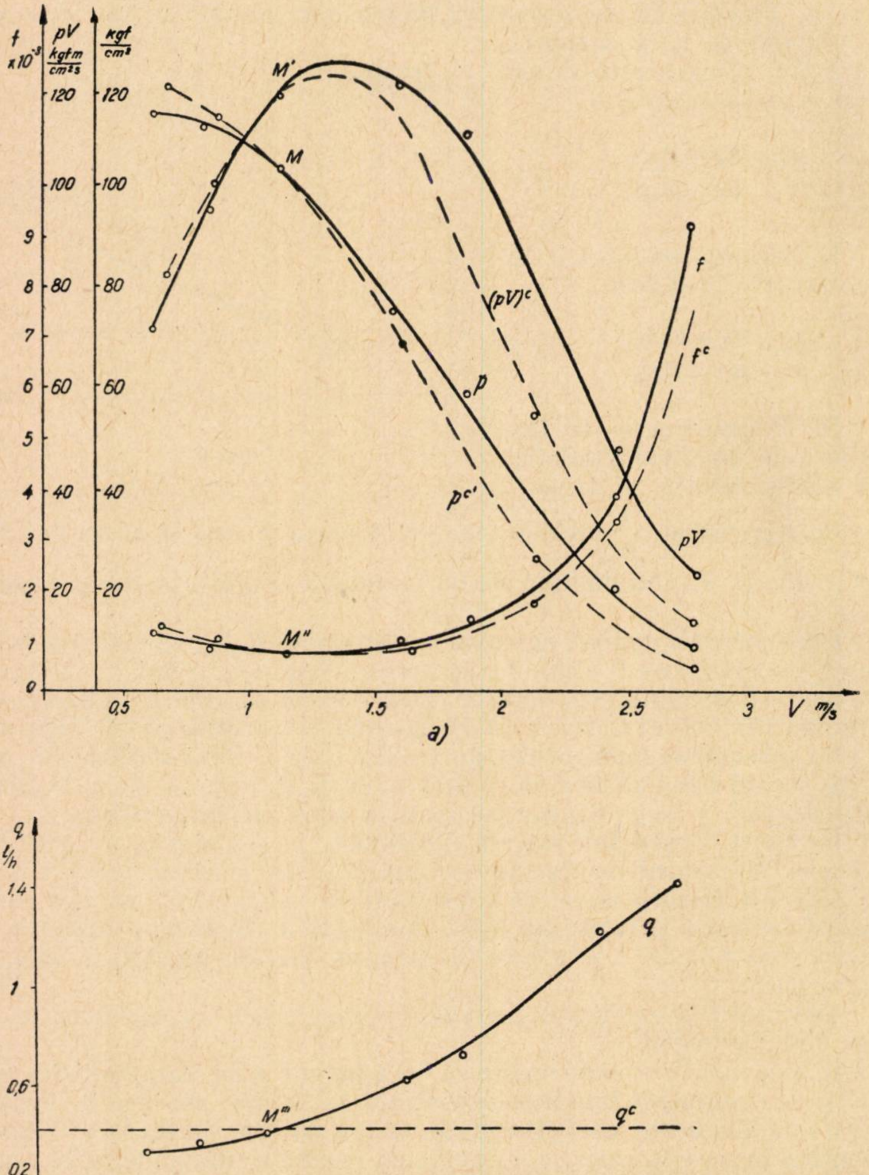

f ×10⁻³
pV kgfm/cm²s
kgf/cm²
120
100
80
60
40
20
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
M'
M
M''
(pV)ᶜ
p
pᶜ'
pV
f
fᶜ
0,5
1
1.5
2
2.5
3
V m/s
a)
q l/h
1,4
1
0,6
0,2
M'''
q
qᶜ
b)

Fig. 7

ИЗУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ В КРУГЛОМ ПОДШИПНИКЕ ПРИ ПОМОЩИ КРИВЫХ $p=g(V)$

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Из равновесия тепла, которое устанавливается в круглом подшипнике скольжения во время работы при непрерывном режиме и при постоянной температуре в некоторой точке вкладыша, вытекают соотношеция (1), (2) и (10).

В характеристике $p=g\ (V)$ при постоянном q диаграмма $f=\frac{C}{pV}$ является взаимной по отношению к кривой, данной соотношением $pV=g_1\ (V)$ (рис. 2).

В характеристиках $p=g(V)$ с переменным q, f меняется по измененной кривой $\frac{1}{pV}$. Из соотношения (11) вытекает, что f представляет собой минимум, а из соотношения (8) вытекает, что минимальное уже не соответствует максимальному (pV). Ход кривой f может быть определен также путем применения характеристики $p=g(pV)$ при $q=$ const. и при тех же t_c (рис. 4, 5 и 6).

Для количественного определения изменения коэффициента трения достаточно изменить его в одной точке кривой $p=g(V)$.

Следовательно вдоль характеристики $p=g\ (V)$ одновременно с $p(V)$ изменяется и коэффициент трения f, причем существует режим работы, при котором в подшипнике устанавливается место минимума трения, а значит и минимум потребления мощности. Это подтверждает результаты, полученные путем гидродинамического изучения смазки [2].

ÉTUDE DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT DANS UN PALIER CIRCULAIRE, AU MOYEN DES COURBES $p=g(V)$

(RÉSUMÉ)

De l'équilibre de chaleur qui s'établit dans un palier circulaire lisse, en un point quelconque du coussinet, fonctionnant en régime continu et à une température constante, résultent les relations (1), (2) et (10).

Pour la caractéristique $p=g(V)$ à $q=$ constante, le diagramme $f=\frac{C}{pV}$ est une réciproque de la courbe donnée par la relation $pV=g_1(V)$, fig. 2.

Pour les caractéristiques $p=g(V)$ à $q=$ variable, f varie suivant une courbe $\frac{1}{pV}$ modifiée. Il résulte de la relation (11) que f présente un minimum et de la relation (8), que f minimum ne correspond plus à (pV) maximum. L'allure de la courbe f peut être établie également en faisant

usage d'une caractéristique $p = g(pV)$ à q = constante et le même t_c (fig. 4, 5, et 6).

Pour la détermination quantitative de la variation du coeficient de frottement, il suffit de mesurer ce coefficient en un seul point de la courbe $p = g(V)$.

On conclut que, le long d'une caractéristique $p = g(V)$, en même temps que pV, varie également le coefficient de frottement f et qu'il existe un régime de fonctionnement dans lequel le palier présente un minimum de frottement, partant, de consommation de puissance. Ceci confirme les résultats obtenus par l'étude hydrodynamique de la lubrification [2].

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vasilca, *Asupra utilității caracteristicii funcționale $p = f(V)$ la lagărele circulare de alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, 1956, p. 499.
2. N. Tipei, *Considerații asupra calculului lagărelor prin alunecare.* Bul. științ. Acad. R.P.R., Secțiunea de științe tehnice și chimice, t. IV, nr. 3-4, 1952, p. 291.
3. Gh. Vasilca, și P. Freund, *Studii experimentale asupra unor materiale antifricțiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, 1956, p. 773.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

UNGERE — FRECARE — UZURĂ

CONSIDERAȚII ASUPRA UZURII ANSAMBLURILOR DE FRECARE ÎN PERIOADA DE RODAJ

DE

L. ROZEANU și O. PREOŢESCU

1. Generalități

1.1. La primul contact cu problema uzurii motoarelor se deosebesc trei aspecte, depinzînd de starea mecanică a acestor motoare :

1) uzura inițială — uzura de rodaj a motoarelor noi.

2) uzura-normală — uzura de regim a motoarelor în stare mecanică optimă.

3) uzura finală — uzura accelerată a motoarelor uzate.

În lucrarea de față se analizează primul aspect : uzura inițială sau uzura de rodaj.

Trebuie subliniat că în această privință nu există o tehnică unanim acceptată pentru că nu există nici o înțelegere profundă a fenomenelor care intervin.

Recomandațiile care se fac sînt deseori contradictorii și datele experimentale sînt interpretate mai mult subiectiv.

Singurul fapt unanim acceptat este că suprafețele chiar fin prelucrate fac contact prin intermediul unei foarte mici părți din intinderea lor [1] și că variația uzurii în funcție de timp are reprezentarea grafică din figura 1.

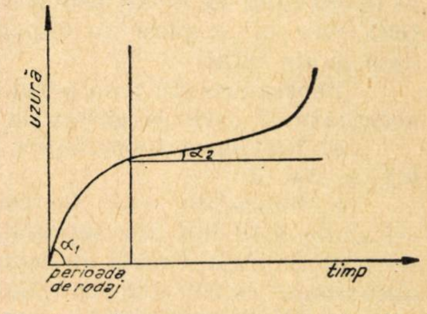


Fig. 1. — Reprezentarea convențională a curbei de uzură.

2. Ce se întîmplă în timpul rodajului

2.1. În lucrările de specialitate, atunci cînd se face vreo mențiune asupra proceselor mecanice care însoțesc rodajul, se manifestă tendința de a le prezenta ca procese de ameliorare a calității suprafețelor în vederea suportării unor sarcini mai mari.

Pentru exemplificare ne vom limita la o lucrare de sinteză recentă [2], în care se afirmă textual : „Procesul de rodaj reprezintă o netezire progresivă a suprafețelor conducînd la o capacitate superioară de rezistență sub sarcină și la o uzura mai mică".

Aceste păreri sînt generate de constatarea amintită [1] că, chiar cele mai fin rectificate suprafețe reprezintă întinderi reale de contact de numai 1/10 000 din suprafața aparentă de contact, în timp ce după rodaj acest raport crește la aproximativ 1/200.

Dacă se asociază această observație cu forma caracteristică a curbei de uzură din figura 1, părerea pare justificată. Bineînțeles aceasta nu exclude intervenția altor procese, dar le atribuie un rol secundar.

O astfel de imagine are însă un efect practic imediat prin aceea că îndreaptă atenția specialiștilor în mod insistent spre calitatea suprafețelor, ceea ce pare să nu fie prea corect, dacă se are în vedere diversitatea contradictorie a recomandărilor care se fac în această privință. Astfel, în literatură [3] se arată că : „în ultimul timp a existat tendința de a realiza suprafețe foarte netede, cu asperități sub 0,15 μ ceea ce a mărit tendința de gripare și a dus la un rodaj îndelungat . . . Astăzi se tinde către o limitare a netezirii suprafețelor pînă la asperități de 0,4 . . . 0,6 μ". În același timp alți autori [2] afirmă că uzura este cu atît mai mică cu cît suprafețele sînt mai netede, tinzînd chiar către o superfinisare.

Toate aceste opinii sînt bazate pe dovezi experimentale, așa că ele nu pot fi integral contestate ci doar considerate valabile în domeniul de condiții în care s-au executat experiențele respective.

Pentru a aduce îmbunătățiri metodelor actuale de rodaj, trebuie să înțelegem mai bine fenomenele care se produc în cursul acestui proces și să le orînduim într-o ordine care să exprime mai fidel importanța contribuției lor.

2.2. De la început trebuie să analizăm ipoteza că principalul rol al operațiunii de rodaj este acela de a ameliora calitatea suprafeței, ipoteză care ni se pare incompatibilă cu recomandările contradictorii pe care le-am citat.

Pentru aceasta vom porni de la următoarele date care sînt în general acceptate și care se găsesc în majoritatea lucrărilor de specialitate :

a) Înălțimea asperităților la suprafețele rectificate fin variază între 0,1 și 3,6 μ.

b) Suprafața reală de contact a suprafețelor rectificate fin este cel mult 1/10 000 din suprafața aparentă de contact.

c) Suprafața reală de contact a pieselor rectificate fin și rodate este aproximativ 1/200 din suprafața aparentă de contact.

d) Distribuția înălțimilor asperităților este conformă curbei lui Gauss (distribuție normală).

Pornind de la aceste date vom căuta să aflăm :

— care este adîncimea de rodaj necesară pentru a trece de la o suprafață reală de contact de 1/10 000 din suprafața aparentă de contact la una de 1/200 ;

— care este greutatea materialului pierdut prin uzură de către suprafețele de frecare în timpul rodajului pînă la adîncimea necesară realizării unei suprafețe reale de contact de 1/200 din cea aparentă.

Pentru aceasta să presupunem că asperitățile sînt obținute prin procese obișnuite de așchiere (chiar rectificarea fiind un proces de așchiere [2]). Asperitățile vor avea în acest caz forma unor prisme culcate, cu muchia superioară mai mult sau mai puțin teșită, iar contactul între suprafețe este evident că se va face la început prin muchiile celor mai înalte asperități. Prin rodaj, în locul muchiilor asperităților celor mai înalte se vor forma platouri din ce în ce mai întinse, planul de contact coborîndu-se pînă la nivelul asperităților următoare în ceea ce privește înălțimea, și așa mai departe.

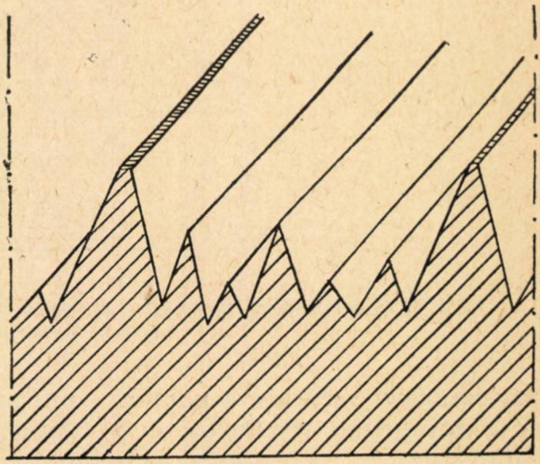


Fig. 2. — Reprezentarea schematică a microgeometriei suprafețelor prelucrate prin așchiere.

Pentru a putea aprecia întinderea suprafeței totale de sprijin, va trebui să cunoaștem numărul asperităților de fiecare înălțime (fig. 2).

Curba lui Gauss arată că față de o înălțime medie a asperităților obținute prin prelucrare, înălțimile mai mari sau mai mici, ale căror abateri față de aceasta le notăm cu x, sînt distribuite simetric, funcția care dă această distribuție fiind

$$\varphi\ (x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}}. \tag{1}$$

În relația (1) și în cele ce vor urma se vor folosi notațiile :

x_{max} — abaterea maximă,

x — abaterea curentă,

N — numărul total de asperități de pe o suprafață dată,

n — numărul de asperități ale căror înălțimi au abateri față de înălțimea medie, cuprinsă în intervalul (a, b),

z — adîncimea de rodaj,

ζ — adîncimea curentă variind de la 0 la z,

l — baza unei asperități cu secțiune triunghiulară,

L — lungimea unei asperități avînd baza l (înălțimea prismei),

S — secţiunea plană rezultată prin rodajul unei asperităţi,
σ — abaterea medie patratică.

La început, pentru motive de simplitate, vom considera că $\sigma = 1$, urmînd ca ulterior să considerăm cazul unei dispersii $\sigma \neq 1$. Dacă N este numărul total de asperităţi, unui anumit interval de abateri (a,b) îi va corespunde un număr n de asperităţi

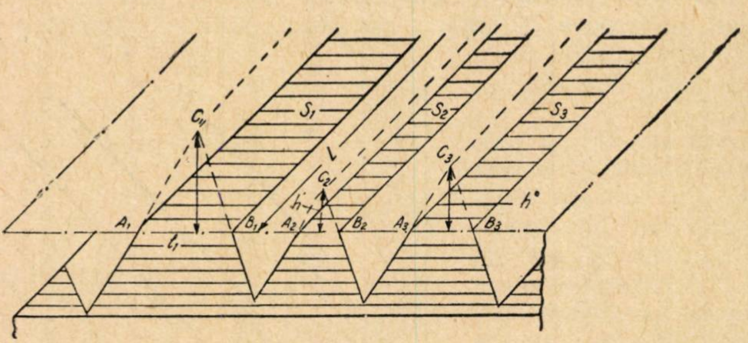


Fig. 3. — Formarea platourilor portante prin retezarea asperităţilor în procesul de uzură.

$$\overset{b}{\underset{a}{n}} = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_a}^{x_b} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = N \frac{[\Phi(b) - \Phi(a)]}{2}, \tag{2}$$

unde

$$\Phi(b) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_b} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x \tag{3}$$

şi

$$\Phi(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_a} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x, \tag{4}$$

ale căror valori se găsesc în tabelele publicate în formularele de matematică.

Pentru a calcula suprafaţa totală de contact, vom proceda astfel: vom admite că asperităţile au forma unor prisme triunghiulare culcate, avînd înălţimile paralele, fiind asemenea şi de egală lungime — ceea ce este corect, date fiind condiţiile prelucrării mecanice.

Astfel, în loc de S_1, S_2, S_3, vom putea pune l_1, l_2, l_3 (fig. 3), iar dacă considerăm înălţimea prismelor L egală cu unitatea, S şi l vor avea numeric aceleaşi valori.

Vom considera apoi un interval elementar dx de abscisa x (fig. 4). Numărul asperităților care se află în acest interval va fi :

$$\mathrm{d}n = N\varphi(x)\mathrm{d}x. \tag{5}$$

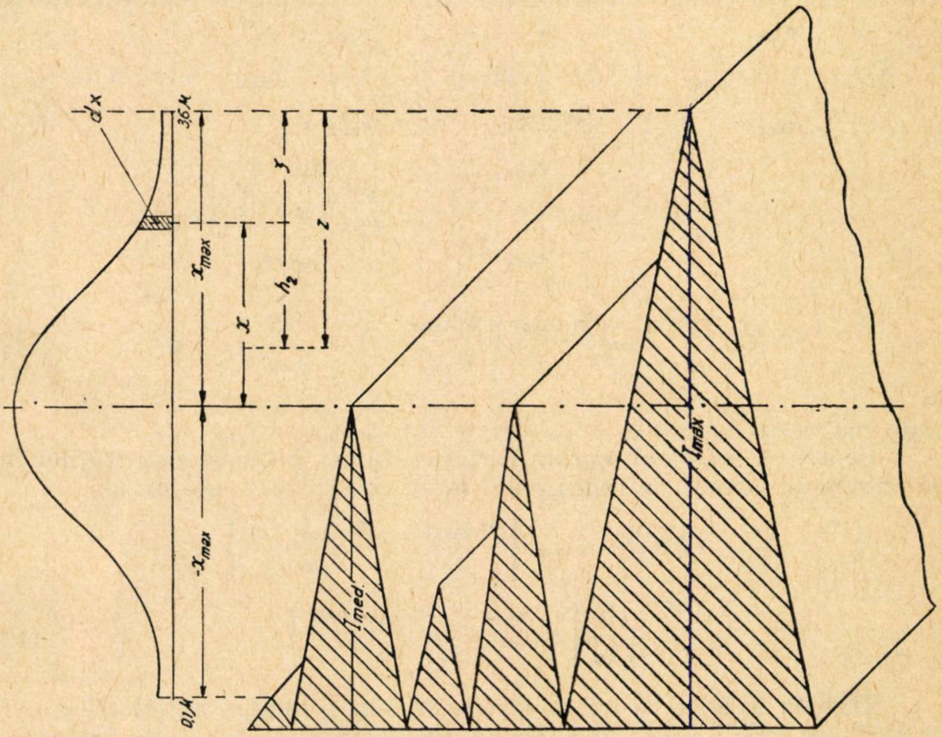


Fig. 4. — Reprezentarea schematică a distribuției normale a microasperităților.

Bazele tuturor triunghiurilor asemenea $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ etc. sînt proporționale cu înălțimea respectivă, adică

$$l = kh. \tag{6}$$

La o adîncime de rodaj z, pentru o asperitate corespunzătoare abscisei x

$$l_z = kh_z. \tag{7}$$

Suma bazelor celor dn asperități va fi deci

$$l_z\mathrm{d}n = kh_zN\varphi(x)\mathrm{d}x, \tag{8}$$

h_z se poate exprima în funcție de x (fig. 4) punînd

$$h_z = z - \zeta \text{ și } \zeta = x_{\max} - x,$$

deci

$$h_z = z - x_{\max} + x. \tag{9}$$

În aceste condiţii relaţia (8) se poate scrie :

$$l_z \,\mathrm{d}n = (z - x_{\max} + x)\, kN\varphi(x) \;\mathrm{d}x \;. \tag{10}$$

Integrînd între limitele $x_{\max} - z$ şi $x_{\max}$ se obţine suma bazelor tuturor asperităţilor ale căror înălţimi au abaterea cuprinsă în acest interval

$$\sum l_z = \int\limits_{x_{\max}-z}^{x_{\max}} (z - x_{\max} + x)\, kN\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{kN}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_{\max}-z}^{x_{\max}} (z - x_{\max} + x)\, e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{kN}{\sqrt{2\pi}} (z - x_{\max}) \int\limits_{x_{\max}-z}^{x_{\max}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x + \frac{kN}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_{\max}-z}^{x_{\max}} x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x =$$

$$= kN(z - x_{\max}) \frac{\Phi(x_{\max}) - \Phi(x_{\max} - z)}{2} - \frac{kN}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{x_{\max}-z}^{x_{\max}} , \tag{11}$$

unde z ia valori de la 0 la $2x_{\max}$ sau de la 0 la $I_{\max} - I_{\min} = 3{,}5\ \mu$.

Pentru a construi curba variaţiei sumei bazelor asperităţilor în funcţie de adîncimea de rodaj, vom folosi relaţia (11) sub forma

$$\sum l_z = kN(z - x_{\max}) \left\{ \frac{\Phi(x_{\max})}{2} - \frac{\Phi(x_{\max} - z)}{2} \right\} -$$

$$- \frac{kN}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{x_{\max}}{2}} - e^{-\frac{(x_{\max}-z)^2}{2}} \right\} . \tag{12}$$

Trebuie însă să avem în vedere că am presupus iniţial că $\sigma = 1$. În realitate $\sigma \neq 1$. Vom fi suficient de aproape de realitate dacă vom considera că numărul asperităţilor cu înălţime mai mică decît 0,1 μ sau mai mare decît 3,6 μ nu depăşeşte 1%.

Din această condiţie vom putea determina uşor coeficientul σ care reprezintă abaterea medie patratică.

Condiţia impusă înseamnă că suprafaţa de sub curba lui Gauss corespunzătoare intervalului $(x_{\max}, \infty)$ sau $(-x_{\max}, \infty)$ este $\leqslant 1\%$. Cu ajutorul tabelelor se găseşte uşor că pentru $\sigma = 1$, $x_{\max} = 2{,}35$; deoarece abaterea maximă reală $x_{\max}$ este în cazul nostru $x_{\max 1} = 1{,}75$, vom putea spune că $x_{\max} = \frac{x_{\max 1}}{\sigma}$, sau în general că $x = \frac{x_1}{\sigma}$.

Rezultă imediat că

$$\sigma = \frac{x_{\max 1}}{x_{\max}} = \frac{1{,}75}{2{,}35} = 0{,}75 \, . \tag{13}$$

Folosind relaţia (12), valoarea $\sigma = 0{,}75$ şi ipoteza că înălţimea triunghiurilor $A_1B_1C_1$; $A_2B_2C_2$ etc. este egală cu baza lor, s-au putut construi curbele căutate, prezentate în figurile 5 şi 6.

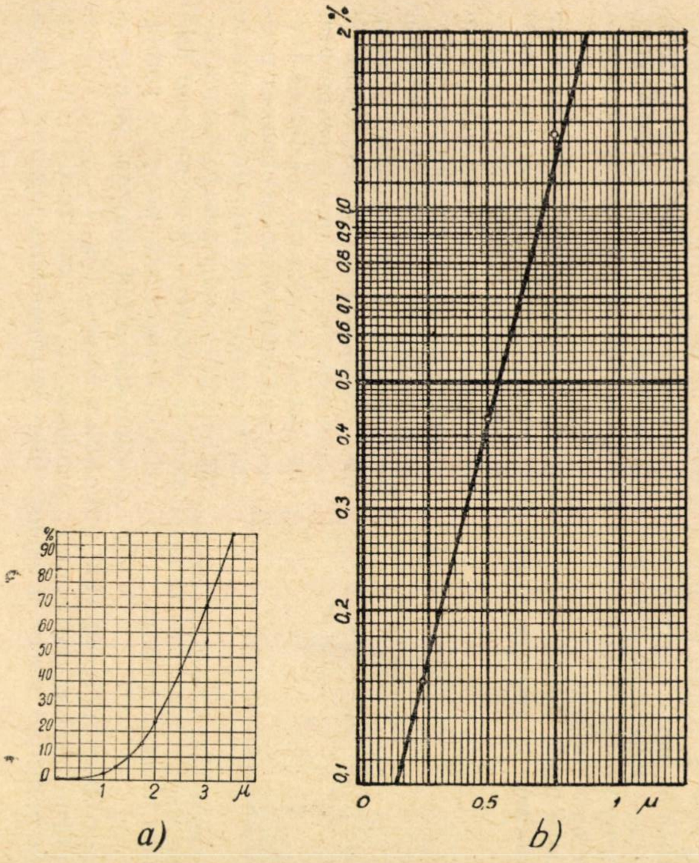


Fig. 5. — Suprafaţa portantă, în procente, în funcţie de adîncimea uzurii în ipoteza unei distribuţii normale a înălţimii microasperităţilor : *a*) diagrama de ansamblu ; *b*) domeniul util la scară mărită.

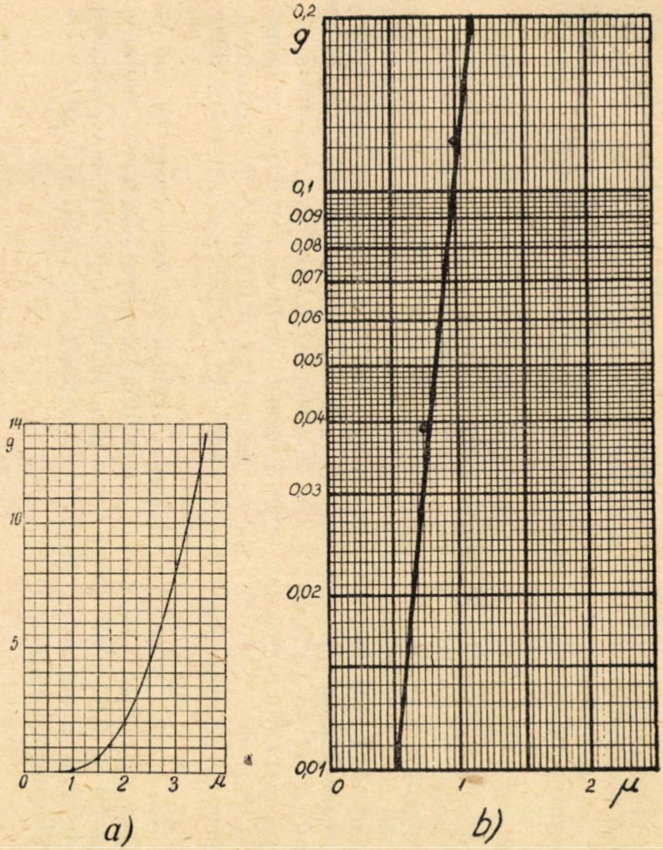


Fig. 6. — Cantitatea de fier, în grame, desprinsă de pe suprafeţele de frecare, în funcţie de adîncimea uzurii, pentru o suprafaţă de $1 m^2$, în ipoteza unei distribuţii normale a înălţimii microasperităţilor : *a*) diagrama de ansamblu ; *b*) domeniul util la scară mărită.

S-a adoptat ipoteza că baza prismelor este egală cu înălțimea ($k = 1$), din motive de simplitate, fără a dăuna generalității; este evident că în cazul $k \neq 1$, suprafața acoperită de prisme se obține înmulțind cu k suprafața corespunzătoare aceluiași număr de prisme, care a fost stabilit pentru $k = 1$.

Curba din figura 6 a fost construită în ipoteza că suprafața totală este 1 m^2 și că tot materialul este oțel cu greutatea specifică 7,85.

Concluzia interesantă la care ajungem este că, pentru a realiza o mărire a suprafeței reale de contact de la 1/10 000 la 1/200 din suprafața aparentă de contact, trebuie să realizăm un rodaj adînc de 0,4 μ căruia îi corespunde în cazul unei suprafețe aparente de 1 m^2 o pierdere de material reprezentînd $\approx$ 9 mg Fe. Este evident că nici o metodă actuală de control industrial nu va indica astfel de diferențe. Deci dacă admitem ca reală forma curbei de uzură din figura 1, este evident că porțiunea de uzură rapidă din perioada de rodaj nu se datorează procesului de netezire a asperităților în vederea măririi suprafeței de contact, ci cu totul altor cauze.

2.3. În cursul procesului de rodaj trebuie să mai avem în vedere posibilitatea distrugerii efective a asperităților prin ciocnirea, sudarea și ruperea lor sau prin alt proces mecanic violent; și această părere este oarecum unanim acceptată găsindu-și exprimarea în condiția bine cunoscută la calcularea lagărelor ca

$$\delta_2 \geqslant 3h, \qquad (14)$$

în care δ_2 este grosimea minimă a peliculei de ulei în regim hidrodinamic, iar h, înălțimea medie a asperităților de prelucrare a suprafețelor de frecare.

Această prescripție presupune că, curentul laminar urmărește foarte fidel microgeometria suprafețelor de frecare, ceea ce pare adevărat numai în prima aproximație.

Există unele date teoretice și experimentale a căror interpretare ar putea conduce la ipoteza (formulată pentru prima dată de Coulomb) că, în prezența rugozităților, în anumite condiții de microgeometrie, se formează în adîncituri zone stagnante de lichid în care se stabilesc presiuni ridicate și care preiau astfel o parte din sarcinile ce s-ar concentra pe vîrful asperităților mai proeminente. De aici ar rezulta că acestea se turtesc mai puțin decît este necesar pentru formarea unei suprafețe portante suficient de întinsă pentru sarcina respectivă, deoarece, la un moment dat, rezultă o suprafață portantă combinată metal-lichid stagnant pe care se realizează o distribuție oarecum uniformă a sarcinii (fig. 7).

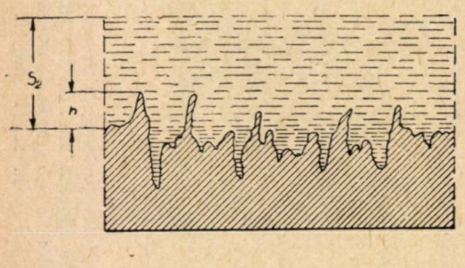


Fig. 7. — Reprezentarea schematică a zonelor de lubrifiant stagnant sub stratul de lubrifiant în curgere laminară.

Conform ipotezei menționate, urmează că h, din relația (14), nu reprezintă înălțimea medie a asperităților de prelucrare, măsurată de la baza lor, ci înălțimea medie a asperităților în momentul considerat, măsurată de la suprafața portantă combinată metal-lichid stagnant (fig. 7). În condiții statice, se pare că formarea suprafeței portante combinate are loc întotdeauna, după cum s-a putut dovedi și experimental (punctul 4.3).

Realizarea unor experiențe similare care să permită obținerea unor rezultate directe în condiții de mișcare relativă nu s-a putut face încă. Deși unele rezultate experimentale (punctul 4. 4) sînt în acord cu această ipoteză, nu se pot trage concluzii definitive în această privință.

Ceea ce trebuie reținut este faptul că această prescripție (14) este, dacă nu arbitrară, cel puțin discutabilă. Pe de o parte este probabil că se realizează sporadic contact metal-metal chiar dacă condiția (14) este îndeplinită, iar pe de altă parte este posibil ca la perete să se realizeze un strat de natură mixtă metal-lichid stagnant, cu o mare capacitate portantă, strat care include asperități a căror înălțime poate fi neglijată.

2.4. Rodajul este însă legat strîns de comportarea ulterioară a mașinii, de aceea este cazul să menționăm un alt aspect al microgeometriei suprafețelor : continuitatea acestora. Rebinder și colaboratorii săi (citat după [4]) au arătat că suprafețele prelucrate sînt brăzdate de microfisuri, care sub efectul de pană al lichidelor polare, pot crea zone afînate, ușor de pătruns, denumite de ei ,,zone de predistrugere”.

Chiar în absența lichidelor polare, în condițiile unor solicitări alternative, aceste microfisuri devin centre de concentrare a unor forțe considerabile. În aceste condiții este foarte probabil, ca simultan, să se producă distrugerea materialului la suprafață și în adîncime.

Distrugerea la suprafață va avea probabil caracterul unei exfolieri, determinată de prelungirea microfisurilor pînă la întretăierea lor, coroziunea în substrat, cavitația și distrugerea mecanică, ansamblul efectelor acestora apărînd ca fenomen natural de uzură.

Distrugerea în adîncime va avea caracterul tipic al oboselii materialului, amorsată de astfel de microfisuri care pentru oricare din motivele de mai sus, se propagă în adîncime.

Fenomenele descrise nu pot fi urmărite prea ușor, deși concluziile care se trag se pot dovedi foarte fructuoase.

Aceste concluzii pun în discuție :

— necesitatea de a prelucra suprafețele conservîndu-le continuitatea, ceea ce nu se poate face decît prin superfinisare și prin acoperirea cu straturi de protecție ;

— pericolul decapării și al tratamentelor cu substanțe agresive sau polare, care pot lărgi și adînci microfisurile, accelerînd distrugerile prin oboseală.

2.5. Prin considerațiile făcute pînă aici, am ajuns la concluzia că microgeometria suprafețelor nu are contribuția cea mai importantă la desfășurarea procesului de rodaj, deși în acest proces microgeometria suprafețelor se poate schimba.

Desigur, sînt mulți alți parametri care pot interveni, de exemplu, defectele de suprafață, alinierile, strîngerile, vibrațiile, cavitația, coroziunea, abraziunea etc. Se vede ușor că cei mai mulți nu au specificitate pentru procesul de rodaj fiind la fel de activi în tot timpul funcţionării agregatului. Rămîn pentru a fi analizate numai : defectele de suprafaţă şi defectele de montaj.

Prin defecte de suprafaţă trebuie să înţelegem : ondulaţiile suprafeţelor care practic nu pot fi evitate în procesul de prelucrare, abaterile de la forma nominală a suprafeţelor lucrătoare prin manipularea neglijentă, precum şi orice defecte de fabricare cu dimensiuni de acelaşi ordin de mărime cu pelicula lubrifiantă în condiţii de solicitare excesivă.

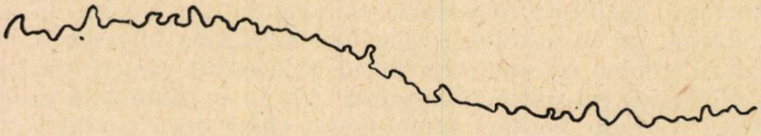


Fig. 8. — Aspectul normal al microprofilului suprafeţelor.

Cele mai inevitabile sînt ondulaţiile suprafeţelor a căror lungime de undă este de zeci şi chiar de sute de ori mai mare decît lungimea de undă a microasperităţilor (fig. 8).

Uneori, datorită manipulării neîngrijită a pieselor, peste aceste ondulaţii care — după cum s-a menţionat — provin din procesul de prelucrare, se suprapun deformaţiile provocate de lovituri, defectele de turnare, sgîrieturile profunde etc. Toate acestea împiedică funcţionarea în regim normal a ansamblului de frecare, favorizînd uzuri locale anormale cu supraîncălzire, curgerea plastică a materialului antifricţiune şi după caz, fie realizarea unor noi condiţii normale de funcţionare, fie distrugerea suprafeţei cu urmări uneori ireparabile pentru maşină.

Demonstrarea acestui fapt nu este practic necesară. Atît experienţa cît şi teoria sînt de acord în această privinţă. De cele mai multe ori, situaţia devine necorespunzătoare unui regim hidrodinamic de ungere în condiţiile respective de sarcină şi viteză. Calculul hidrodinamic al ansamblurilor nu poate ţine seama de astfel de defecte. Sarcina principală a rodajului este aceea de a înlătura defectele, înlesnind agregatului să revină la un regim de echilibru apropiat de cel stabilit la proiectare. Revenirea la un regim de echilibru se poate face atît prin acţiuni directe cît şi prin acţiuni indirecte, de aceea noţiunea de rodaj înseamnă mult mai mult decît netezirea suprafeţelor organelor lucrătoare.

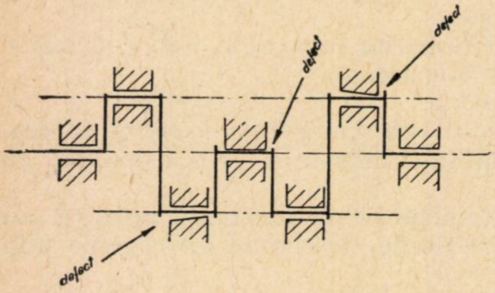


Fig. 9. — Strîngeri excesive şi pierderea coaxialităţii în cazul montajului defectuos al unui arbore cotit.

Dacă sîntem de acord cu acest punct de vedere nu ne rămîne decît să ne însuşim aceleaşi concluzii şi pentru imperfecţiunile de montaj.

Într-adevăr, la montaj se ridică unele probleme excesiv de greu de rezolvat. Astfel sînt : realizarea unui contur și a unei alinieri perfecte a cuzineților, asigurarea unor jocuri egale la toate lagărele identice, centrarea desăvîrșită a pistoanelor în raport cu manivela, strîngerea identică a tuturor șuruburilor unei piese simetrice ș.a.m.d.

Este evident că o situație ca cea din figura 9 nu poate fi avantajoasă. Din păcate, imperfecțiunile de montaj sînt încă foarte frecvente și puține întreprinderi sînt înzestrate cu utilajul necesar evitării defectelor semnalate, ca de exemplu chei dinamometrice, dispozitive optice de verificare a alinierii etc.

3. Concluzii teoretice în legătură cu rodajul

3.1. Cele arătate pot conduce la unele concluzii interesante nu numai pentru înțelegerea corectă a fenomenelor care se petrec în procesul de rodaj ci și pentru dezvoltarea unei tehnici de rodaj cu rezultate optime.

În fond, condițiile ca un rodaj să poată fi considerat optim se reduc la următoarele :

— să evite gripajele,

— să nu lase urme care să afecteze durata sau performanța ulterioară a angrenajului,

— să dureze cît mai puțin.

Analiza diferitelor procese care se pot petrece în perioada de rodaj a condus la o anumită clasificare a fenomenelor care însoțesc rodajul și la o precizare a consecințelor unora dintre ele.

Chiar dacă ne limităm numai la frecările directe între suprafețele metalice, consecințele sînt pe cît de variate pe atît de greu de anticipat. Complexitatea acestui fapt este bine cunoscută. Mulți cercetători au afirmat că în cazul frecării, la punctele de contact temperatura se ridică foarte mult, ceea ce inevitabil are ca urmări : formare de „solzi (cruste), crăpături fine și o suprafață *mult mai susceptibilă la coroziune și la distrugere prin oboseală*"[1].

Am citat această observație deoarece subliniază cu deosebită tărie preocuparea pe care trebuie să o avem pentru executarea unei operațiuni îngrijite de rodaj îndepărtînd efectele geometrice și dimensionale printr-un proces care să implice o cît mai redusă solicitare a materialului.

Din păcate, tehnica straturilor acoperitoare constituie o soluție scumpă și cu eficacitate limitată în funcție de timp, temperatură sau de alți factori.

3.2. Evitarea gripajelor se poate face reducînd temperatura și viteza la punctele de contact [5]. Prin aceasta nu numai că se evită accidentarea locală a suprafețelor de lucru dar totodată se reduce dimensiunea particulelor de uzură, care ulterior pot vagabonda multă vreme cu uleiul, provocînd distrugeri ale materialului (rizuri profunde) pe suprafețe foarte întinse.

Evitarea defectelor infime care pot genera în timp defecte mult mai mari și care pot creea condiții favorabile distrugerii materialului prin oboseală, coroziune etc. se poate realiza reducînd sarcina care solicită suprafețele în care există defecte incipiente sau creînd suprafețe lipsite de astfel de defecte.

Grăbirea procesului se poate realiza prin reducerea defectelor de suprafață sau montaj, care trebuie înlăturate și prin acționarea mai energică asupra acestor defecte, fără urmări pentru restul suprafeței.

Toate metodele actuale de rodaj se limitează la evitarea gripajelor, realizînd rodajul în condiții de exploatare cît mai blînde. S-a văzut însă că, chiar în aceste condiții, resturile abrazive datorite spălării imperfecte a motorului provoacă uzuri mai mult sau mai puțin profunde, care vor influența toată viața ulterioară a mașinii.

Unele metode de prelucrare au încercat să înlăture și defectele infime de prelucrare și să realizeze continuitatea suprafeței. Astfel, se știe că Hispano-Suiza (citat după [6]) a superfinisat unele piese prin polisaj electrolitic. Tot cu acest efect se pot cita operațiile mai puțin radicale de fosfatare, nitrurare, cromare etc. cuprinse în tehnica straturilor acoperitoare.

În sfîrșit, foarte puține metode încearcă grăbirea procesului de rodaj prin mijloace speciale. În acest sens, se poate cita prescripția de rodaj din standardul B. S. nr. 1905/1952 care prevede folosirea — pe un timp limitat — a unei pulberi abrazive „Bon ami'' cu diametrul particulelor de la 1 la ~ 90 μ.

Este clar că metodele adoptate nu au beneficiat de o fundamentare științifică. În acest sens, este semnificativă dilema specialiștilor între profil rugos și superfinisaj.

Considerăm că această dilemă este justificată numai de natura diferită a condițiillor locale în care s-au efectuat cercetările experimentale și se poate explica după cum urmează :

— Argumente în favorea unei oarecare rugozități superficiale.

Prescrierea unei rugozități superficiale ar părea nejustificată. Întradevăr este lipsit de sens, în mod absolut, să prescrii suprafețele rugoase dacă se are în vedere că ulterior, cu timpul, acestea se netezesc. Cei care au constatat totuși că este mai avantajos și mai rapid să rodeze suprafețele rugoase, este probabil că au lucrat cu piese cu defecte de suprafață și de montaj relativ importante. Este clar (fig. 10) că procesul de corectare al defectelor de suprafață, pentru a crea condiții de echilibru în situația particulară în care s-a executat montajul, este mai ușor realizabil în cazul unui profil mai rugos al suprafeței (fig. 10 *a*). Mai mult încă, în văile ondulațiilor suprafețelor, în cazul unui număr suficient de microasperități de înălțimi convenabile, se pot crea zone stagnante, așa cum s-a arătat la punctul 2.3, care ameliorează capacitatea portantă a suprafeței.

Dimpotrivă, în cazul unei suprafețe cu microasperități cu înălțimi foarte mici (fig. 10 *b*) lubrifiantul nu poate fi imobilizat, iar văile respective se comportă întocmai unor canale prost plasate.

— Argumente în favoarea netezirii foarte înaintate, eventual prin superfinisare.

Cei care au constatat că este mai avantajos să dispună de suprafețe cu o microgeometrie foarte fină este probabil că au dispus de suprafețe lipsite de ondulații și alte defecte de suprafață precum și de o montare desăvîrșită, cu alinieri perfecte, jocuri corecte etc.

În aceste condiții o microgeometrie rugoasă este evident că va impune un proces de netezire, care este practic inutil în cazul unei geometrii fine. În ceea ce privește capacitatea portantă, este evident că aceasta se poate realiza și în acest caz, chiar în condiții superioare, dar numai cu condiția unui montaj corect al organelor de frecare. Calitatea suprafeței nu va putea niciodată compensa imperfecțiunea montajului. Totodată este clar că un contact direct, metal-metal, între suprafețe foarte netede, este mult mai periculos — în ceea ce privește riscul gripării — decît între suprafețe rugoase.

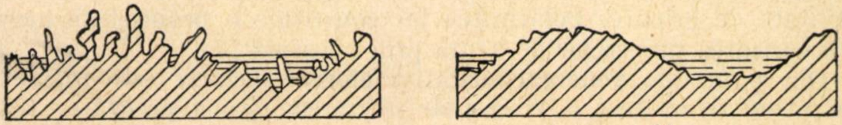

a) b)

Fig. 10. — Formarea zonelor stagnante de lubrifiant la suprafețe prelucrate diferit : *a*) suprafețe rugoase ; *b*) suprafețe superfinisate.

3.3. Admițînd anumite condiții specifice de prelucrare și montaj, se pune problema realizării unui rodaj optim.

În mod schematic rezolvarea problemei se poate face așa după cum se arată în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Condiția	Soluția propusă
1) *Evitarea gripajului.* Fenomenul constă în topirea materialelor ansamblurilor de frecare pe întinderi mari datorită unei produceri de căldură mai mari decît se poate disipa. Impune : intensificarea disipării căldurii, împiedicarea contactului direct între suprafețele metalice, alegerea unor perechi de materiale cu coeficienți de frecare minimi.	— Circulație abundentă de ulei. — Pelicule lubrifiante rezistente. — Straturi acoperitoare (bisulfură de molibden, indiu, grafit, politetrafluoretilen).
2) *Evitarea degradării materialelor.* După prelucrare, materialul este brăzdat de microfisuri invizibile în care pătrund moleculele polare de lubrifiant care provoacă creșterea microfisurilor, acționînd ca reducători de duritate. Tratamentele mecanice de suprafață (bătaie cu alice, vălțuire etc.) „vindecă" uneori microdefectele și întotdeauna măresc rezistența la oboseală. Impune : evitarea proceselor de prelucrare care favorizează formarea microfisurilor și a substanțelor polare (acizi organici și anorganici etc.), care le intensifică.	— Îndepărtarea stratului fisurat. — Acoperirea cu un strat continuu de mare rezistență (metalizare) — Solicitarea moderată a pieselor pînă la realizarea unei suficiente suprafețe de sprijin.
3) *Grăbirea procesului de rodaj.* De fapt o intensificare a procesului de uzură dimensională, autoreglată, limitată în timp și spațiu. Impune : abraziune controlată, coroziune limitată la punctele calde.	— Rodaj cu abrazivi. — Rodaj cu aditivi activi din punct de vedere chimic.

Din acest tablou se desprinde necesitatea de a realiza rodajul în prezența unor antigripanți și a unor agenți activi din punct de vedere chimic, în condiții adecvate de exploatare pentru a obține „așezarea" pieselor cu o solicitare cît mai redusă a materialului.

Din tehnica ungerii angrenajelor sever încărcate se știe că există numeroși aditivi antigripanți a căror acțiune se bazează în același timp pe polaritatea lor și pe reacția pe care o dau cu particulele de metal amenințate de gripare. Polaritatea lor constituie o proprietate negativă prin favorizarea proceselor de uzură prin oboseală [7].

Din punct de vedere cantitativ, efectul negativ este foarte mic, reprezentînd o creștere a vitezei de uzură cu cîteva procente. Aceasta înseamnă, de exemplu că față de un timp de exploatare optim de 5000 de ore se va ajunge la un timp de exploatare de 4500—4800 de ore. Accidentele care se pot produce din cauza defectelor în absența lubrifianților polari și antigripanți pot reduce timpul de exploatare la numai cîteva sute de ore ceea ce este incomparabil mai grav.

Se știe că sub acțiunea sarcinii, pe vîrful asperităților care constituie suprafața reală de contact, se concentrează forțe considerabile; este probabil că acestea determină deformarea plastică a materialului și contactul direct al suprafețelor pe întinderi mai mari. În prezența unui lichid sarcina se repartizează mult mai uniform, iar deformarea probabil nu depășește domeniul elastic; ca urmare suprafața suferă în mai mică măsură efectul solicitărilor alternative și rezistă un timp mai îndelungat.

Dar un lichid oarecare este relativ ușor sfîșiat de îndată ce grosimea peliculei este mai mică decît înălțimea asperităților, iar sub presiune este ușor expulzat dintre suprafețe. Prezența unor molecule polare în lichid permite tapisarea suprafețelor cu un strat de lubrifiant subțire dar puternic aderent și greu de străpuns. Totuși, la punctele de contact care se pot produce ocazional, după cum se știe, se pot dezvolta temperaturi foarte ridicate.

Dacă în prezență se află și molecule suficient de active, care la acele temperaturi să reacționeze cu metalul, o oarecare parte din metal trece în săruri anorganice (cloruri, sulfuri, fosfați etc.), sau săruri organometalice (săpunuri) și gripajul este evitat.

În astfel de condiții se îmbină avantajul prezenței lichidului care, realizînd o suprafață mai mare de contact, nu permite deformații brutale în domeniul plastic, cu avantajul îndepărtării ireversibile al surplusului de material prin reacția chimică a agentului activ cu metalul, în punctele amenințate cu griparea.

În plus, materialul astfel îndepărtat apare sub o formă nepericuloasă (neabrazivă) în timp ce, dacă înderpărtarea lui s-ar fi făcut prin retezare mecanică, particulele desprinse ar fi format un agent dăunător. Acest fapt, prin el însuși , are o mare importanță; în cazul îndepărtării surplusului de material prin reacții chimice, procesul de uzură încetează de îndată ce s-a obținut o suprafață de contact suficient de mare pentru a suporta sarcina, în timp ce, în prezența agentului abraziv procesul de uzură se desfășoară în continuare fără întrerupere.

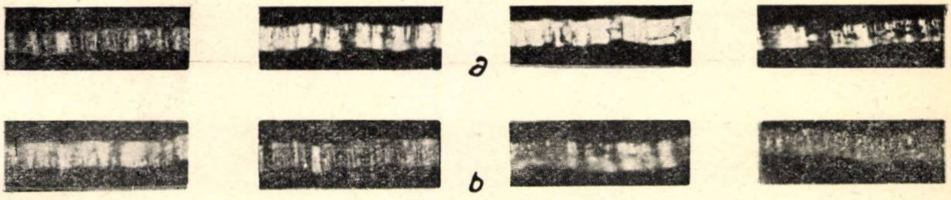


Fig. 11. — Microfotografii ale asperităţilor suprafeţelor de frecare, executate cu profilograful Schmaltz, înainte (*a*) şi după (*b*) rodaj.

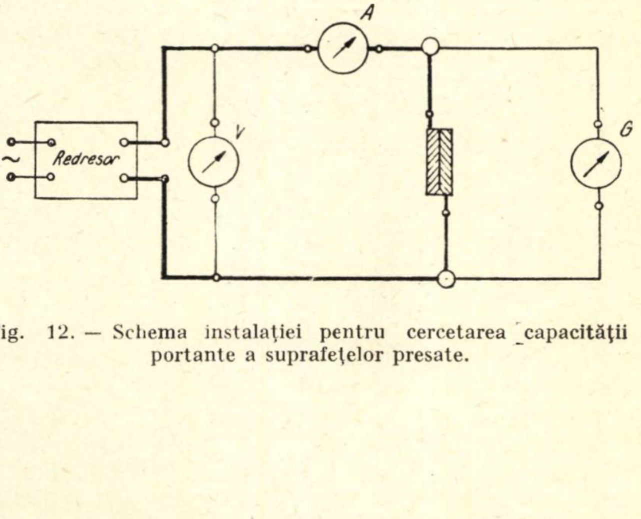


Fig. 12. — Schema instalaţiei pentru cercetarea capacităţii portante a suprafeţelor presate.

4. Verificări experimentale

4.1. Analiza fenomenelor care se produc în cursul procesului de rodaj a condus la cîteva concluzii care se cer verificate. Aceste concluzii sînt :

a) Rodajul nu este în principal un proces de ameliorare a calității suprafețelor.

b) Înălțimea asperităților de prelucrare nu constituie o condiție limitativă pentru grosimea peliculei de lubrifiant, decît dacă asperitățile depășesc înălțimea la care zonele lichide sînt imobilizate de diferitele forțe de atracție superficială.

c) În cazul rodajului cu lichide active din punct de vedere chimic, prin absența particulelor abrazive suprafața de uzură este mai redusă și limitată la realizarea unei suprafețe suficiente de contact, în timp ce în cazul rodajului obișnuit suprafața de uzură crește în mod continuu.

d) Defectele de montaj și de microgeometrie sînt cauzele determinante ale rodajului.

4.2. Verificarea rolului secundar al procesului de ameliorare a calității suprafeței s-a realizat prin rodarea a 6 motoare, în diferite condiții, făcîndu-se profilograme înainte și după rodaj.

După cum se vede din cele patru perechi de reproduceri (fig. 11), microgeometria suprafețelor nu pare influențată de rodaj, fie că acesta s-a realizat cu un agent chimic activ, fie că s-a realizat prin tehnica obișnuită.

Chiar încercarea de a evalua înălțimea asperităților prin procedura indicată pentru profilograful Schmaltz arată valori sensibil egale.

Un mare număr de experiențe de rodaj făcute în diferite condiții de sarcină, ungere, turație, au dovedit că suprafețele își modifică foarte puțin aspectul general, chiar cînd în unele locuri, pe zone limitate, se observă clar ameliorarea microgeometriei.

O confirmare a acestei ipoteze o găsim în datele publicate de N. P. Voinov [8] referitoare la starea suprafețelor de frecare ale motorului GAZ-51 înainte și după rodajul la rece. Rezultă din aceste date că prin rodaj calitatea suprafețelor, în general, se înrăutățește, cu excepția segmenților la care se constată o îmbunătățire. Excepția semnalată se poate explica prin rugozitatea inițială excesivă a suprafeței segmenților și accesul mai anevoios al particulelor abrazive în zona de lucru a acestora ; într-adevăr ungerea cilindrului se face cu ceață de ulei, deci cu un ulei relativ curat, la care se pot adăuga numai particulele abrazive cele mai fine rămase în suspensie în picăturile de ulei din ceață sau scăpate dincolo de filtrul de aer.

4.3. Pentru verificarea rolului microgeometriei suprafețelor asupra posibilității menținerii unei pelicule între ele, s-au executat experiențe cu plăcuțe de dimensiuni identice, cu suprafețele paralele. În figura 12 se prezintă schița instalației folosită la verificarea efectuată.

Înainte de experiență plăcuțele au fost degresate și montate între fălcile unei prese Schopper. Suprafața de contact s-a măsurat numai comparativ, considerînd că este proporțională cu conductivitatea electrică la interfaţa de contact. La fiecare plăcuţă s-a sudat lateral un fir de cupru cu $\varnothing = 2$ mm şi un fir de cupru cu $\varnothing = 0{,}5$ mm. Firele groase s-au legat la un redresor care furniza curent continuu sub tensiune de ~ 2 V şi intensitate de ~ 5 A.

Deşi prin acest montaj se scurtcircuitau bornele redresorului, totuşi o mică cantitate de curent rămînea să treacă printr-un circuit secundar în care era intercalat un galvanometru foarte sensibil (10^{-9} A). Evident, curentul care trecea prin galvanometru era cu atît mai mic cu cît cele două plăcuţe realizau un contact mai intim, ceea ce se întîmpla la creşterea presiunii.

Lucrînd cu plăcuţe din OL 38, rectificate grosolan, cu suprafaţa aparentă de contact de 10 cm^2 şi presînd aceste plăcuţe pînă la 3750 kg, s-a obţinut rezultatul prezentat în figura 13. Din această figură se vede că suprafaţa de contact a crescut exponenţial cu sarcina (progresiv) pînă la 3750 kg, cînd indicaţiile galvanometrului au juns la 0 (ceea ce de altfel este exact numai la scara de precizie respectivă). În acest timp microasperităţile au suferit o deformare elastică şi peste o anumită valoare, o deformare plastică. Aceasta se pare că a survenit pe la 3000 kg, deoarece la descărcare, după cum se vede din porţiunea orizontală a curbei din figura 13, suprafaţa a rămas constantă pînă la 3000 kg, după care a început revenirea elastică pînă la descărcarea completă cînd, totuşi, suprafaţa de contact era apreciabil mai mare decît la început.

Încercarea a doua s-a făcut cu epruvete similare, după ce între ele s-a intercalat un strat de apă distilată. S-a considerat că, conductivitatea apei distilate este neglijabilă. Pentru a evita eventualele reacţii, suprafeţele au fost curăţate cu grijă fără a le modifica rugozitatea.

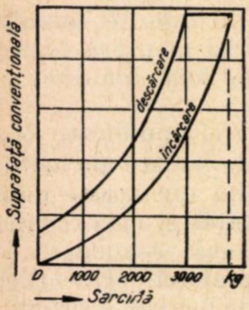


Fig. 13. — Variaţia suprafeţei portante în condiţii statice, în funcţie de încărcare, în lipsa vreunui strat de lubrifiant.

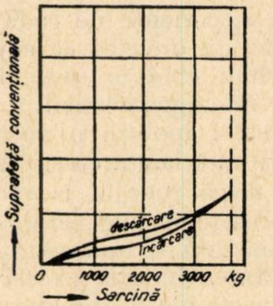


Fig. 14. — Variaţia suprafeţei portante în condiţii statice, în funcţie de încărcare, în prezenţa unui strat intermediar de apă distilată.

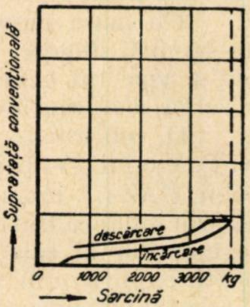


Fig. 15. — Variaţia suprafeţei portante în condiţii statice, în funcţie de încărcare, în prezenţa unui strat intermediar de lubrifiant activ din punct de vedere chimic.

După cum se vede din figura 14, în prezenţa apei încărcarea a determinat o mai redusă creştere a suprafeţei metalice de sprijin, dînd o curbă relativ regulată a deformației în funcție de sarcină, fără a atinge valoarea maximă la 3750 kg, ca la experiența anterioară. După cum era de așteptat, lichidul contribuia la realizarea unei mari suprafețe de sprijin (constituită din porțiuni metal-lichid), împiedicînd trecerea la deformații plastice, întocmai cum s-a anticipat la punctul 2.3.

A treia încercare s-a făcut în același mod introducînd între epruvete un strat de ulei conținînd un aditiv antigripant convențional. Capacitatea portantă a crescut și mai mult (de aproape două ori) față de situația de la experiența precedentă (cu apă distilată), dînd o curbă la fel de regulată a deformației în funcție de sarcină (fig. 15). Alura curbei la descărcare ar arăta că deformația a trecut în domeniul plastic. În realitate este probabil că la punctele cele mai înalte, concentrarea presiunilor a determinat ridicarea temperaturii pînă la un nivel la care aditivul a reacționat cu metalul care astfel părăsea suprafața respectivă. Prin aceasta se realiza o suprafață de contact mai mare, ceea ce făcea ca o porțiune a curbei de descărcare să rămînă orizontală, iar la terminarea descărcării, contactul dintre plăcuțe să rămînă mult mai bun decît la început. În acest timp este probabil că a avut loc o aplatisare a suprafețelor care însă nu s-a mai datorat deformării plastice ci „dizolvării" proeminențelor pînă la realizarea suprafeței portante necesare.

Această experiență a dovedit : 1) proprietatea aditivului antigripant de a crea pelicule rezistente a căror străpungere se face numai la sarcini foarte mari ; 2) proprietatea lichidului de a mări suprafața de sprijin, împiedicînd deformarea dincolo de domeniul elastic ; 3) proprietatea substanței active de a „dizolva" vîrfurile asupra cărora — datorită depășirii înălțimii suprafeței portante — se concentrează sarcini foarte mari. Este ușor de înțeles că în absența substanței active din aditivul antigripant, aceste vîrfuri ar fi determinat frecarea uscată cu toate consecințele dăunătoare ale acesteia.

Această experiență deosebit de semnificativă, care nu a fost analizată aici decît sub aspectul ei calitativ în legătură cu problema uzurii suprafețelor rugoase, a fost completată cu următoarele două verificări auxiliare.

În prima verificare după spălare și uscare, două plăcuțe au fost încărcate și descărcate în cicluri succesive (fig. 16) observîndu-se că, chiar de la al doilea ciclu, deformațiile rămîn cam aceleași. Ori de cîte ori s-a mai repetat ulterior încărcarea pînă la aceeași sarcină, situația a rămas neschimbată. Reprezentarea grafică a fenomenului s-a făcut ca în experiențele anterioare dar cu ciclurile desfășurate. În paralel s-a adăugat o reprezentare schematică la care însă suprafața convențională apare în abscisă, punînd în evidență dinamica suprafeței, în funcție de sarcină, la cicluri succesive.

A doua verificare (fig. 17) a urmărit să scoată în evidență caracterul specific al acțiunii de „dizolvare" a microasperităților mai proeminente, observată la lichidul cu conținut activ din punct de vedere chimic. În acest scop s-au folosit două plăcuțe noi între care s-a intercalat un strat de ulei mineral cu conținut de aditiv antigripant. Încercarea a constat în cicluri de încărcare și descărcare în trepte de cîte 675 kg. Reprezentarea grafică a fenomenului s-a făcut ca în experienţa anterioară. Fiecare serie de cicluri s-a considerat încheiată în momentul cînd observaţiile făcute la două cicluri consecutive erau identice. În reprezentarea din figura 17 s-au reţinut numai cîte trei cicluri din fiecare serie, respectiv ciclul iniţial, un ciclu intermediar şi ciclul final.

La presarea suprafeţelor unse, deoarece iniţial contactul se realizează numai într-un număr redus de asperităţi, asupra acestora se concentrează sarcini excesive care determină străpungerea stratului intermediar de ulei plus aditiv. Totodată aceste vîrfuri se deformează elastic şi eventual, în oarecare măsură plastic. Ca urmare se produce contact direct în unele puncte, ridicarea temperaturii şi reacţia chimică dintre agentul activ şi metal, mărirea suprafeţei de contact în mod ireversibil, precum şi deformarea elastică pînă cînd suprafaţa, formată din platourile rezultate şi lichidul imobilizat, poate să suporte sarcina respectivă. La reducerea sarcinii în perioada de descărcare, microasperităţile cu înălţimi mai mici rămîn la oarecare distanţă de cele de pe suprafaţa conjugată. Suprafaţa lor se acoperă cu aditivul antigripant care reface pelicula limită foarte rezistentă, izolînd electric cele două plăcuţe. Contactul la sarcina iniţială se face pe un număr de vîrfuri mereu acelaşi (care se

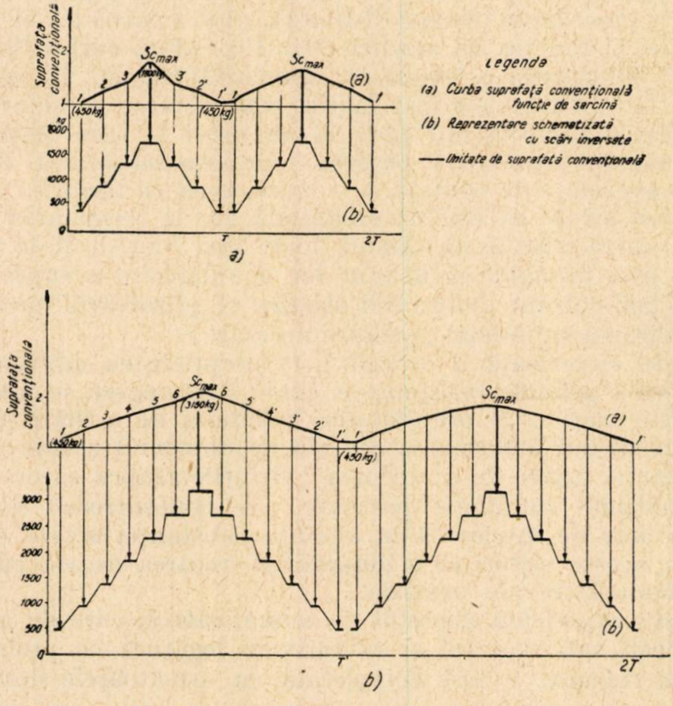


Fig. 16. — Variaţia suprafeţei portante în condiţii statice, în absenţa lubrifiantului, în cursul unor cicluri repetate de încărcare-descărcare.

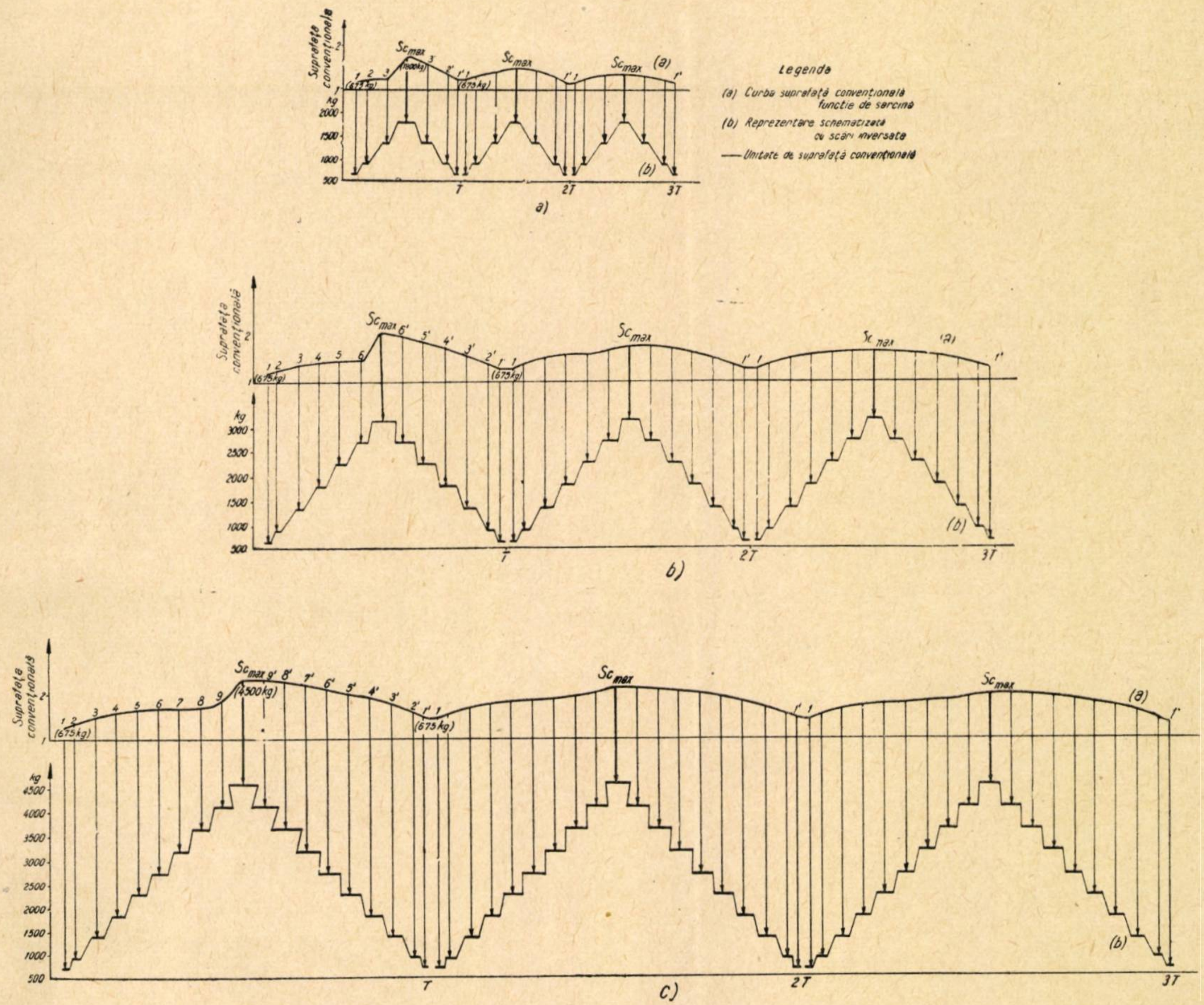


Fig. 17 — Variaţia suprafeţelor portante, în condiţii statice, în prezenţa unui lubrifiant activ din punct de vedere chimic, în cursul unor cicluri repetate de încărcare-descărcare.

deformează numai elastic) și pe lichidul aflător în văile microprofilului celor două suprafețe. La repetarea ciclului, în perioada de încărcare, vîrfurile asperităților sînt deformate elastic proporțional cu înălțimea lor, iar cele care anterior reușiseră să străpungă stratul lubrifiant izolat, stabilind contactul electric, prin dizolvarea lor parțială și reacoperirea cu pelicula aderentă, se deformează elastic fără a mai putea străpunge pelicula izolantă. De aceea, la repetarea încercării, suprafața de contact direct metal-metal este mai mică și cantitatea de curent care trece prin circuitul galvanometrului este mai mare. Mai departe însă, situația se stabilizează. Ori de cîte ori am repeta încercarea la sarcina maximă corespunzătoare ciclului respectiv, același număr de vîrfuri vor străpunge pelicula lubrifiantă și aceleași vîrfuri se vor deforma elastic în contact direct metal-metal, același număr de vîrfuri se vor deforma elastic sub pelicula lubrifiantă și aceeași cantitate de lichid va completa suprafața reală de contact pentru a putea suporta sarcina respectivă.

La reluarea ciclului cu o sarcină maximă mai mare, deformarea asperităților, care anterior străpungeau pelicula lubrifiantă rămînînd în domeniul elastic, trece în domeniul plastic, temperatura se ridică foarte mult, se realizează un contact direct pe o suprafață mai mare ; asperitățile următoare ca înălțime, care anterior se deformau elastic sub peliculă, străpung la rîndul lor pelicula de lubrifiant și se deformează elastic în contact direct, iar asperitățile următoare ca înălțime care anterior nu aveau nimic de suferit, încep să se deformeze sub pelicula de lubrifiant. La descărcare, procesul se repetă ca la prima descărcare a seriei de cicluri anterioare, din ce în ce mai amortizat, pînă cînd se ajunge la o nouă situație stabilă pentru acea serie de cicluri.

Privind toate aceste cicluri de încărcare-descărcare, cu sarcină maximă crescîndă, se constată că se produce o mărire treptată a suprafeței la sarcina minimă, datorită interpunerii stratului onctuos, care de fapt echivalează cu o creștere infimă dar regulată a sarcinilor următoare.

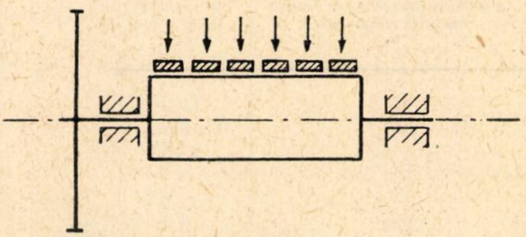


Fig. 18. — Schema aparatului pentru variația suprafeței portante în condiții dinamice.

4.4. Verificarea comportării lichidelor active din punct de vedere chimic a fost făcută și în condiții dinamice.

Experiențele de la punctul 4.2 au arătat avantajele utilizării lubrifianților antigripanți în condiții statice. Lubrifianții antigripanți, după cum s-a văzut, posedă în același timp o bună onctuozitate și proprietatea de a reacționa cu metalul în condiții foarte severe. Aceste însușiri conduc la o capacitate portantă mai mare în domeniul elastic și o dizolvare a asperităților dăunătoare.

Din punctul de vedere al studiului întreprins de noi era interesant să verificăm aceste însușiri ale lubrifianților antigripanți, în condiții de frecare sub sarcini de același ordin de mărime cu cele din exploatare.

În acest scop, s-a folosit un aparat de uzură reprezentat schematic în figura 18.

Tamburul a fost confecționat din oțel, iar epruvetele din bronz de staniu. S-au făcut două încercări de cîte trei epruvete fiecare, cu tamburul învîrtit cu ~ 600 rot/min. Sarcina pe fiecare epruvetă a fost 100 kg, iar durata încercării 6 ore.

Înainte de fiecare încercare epruvetele au fost cîntărite cu precizie de 0,0002 g. Dispozitivul, care era antrenat cu o curea trapezoidală, avea șaiba de transmisie cuplată cu axul tamburului printr-un sistem de roată liberă. Prin aceasta, la oprirea motorului de antrenare, tamburul continua să se rotească în contul energiei acumulate de un volant masiv. Timpul cît continua să se rotească tamburul după oprirea motorului de acționare s-a considerat că se poate adopta ca măsură a frecării între epruvete și tambur.

La prima încercare s-a folosit ca lubrifiant un ulei pentru motoare de un tip standardizat, iar la a doua încercare s-a folosit același ulei amestecat cu un aditiv antigripant (EP) tip convențional.

Rezultatele obținute au fost trecute în tabloul nr. 2.

După cum se observă în fotografiile din figura 19 *a* și *b*, reprezentînd epruvetele 1, 2, 4 și 5 (epruvetele 3 și 6 nu au fost fotografiate fiind utilizate în alt scop), în cazul încercării cu ulei mineral curat, s-a observat o suprafață de uzură neclar desenată, reprezentînd ~ 64 % din suprafața totală și care nu are tendința să se limiteze. Dimpotrivă, în cazul încercării cu lubrifiant antigripant, suprafața de uzură reprezentînd ~ 43 % din suprafața totală, apare ca o insuliță bine conturată. Totodată se observă că uleiul mineral dă o pierdere de greutate pe cît de mare, pe atît de neregulată, în timp ce lubrifiantul antigripant dă o pierdere de greutate uniformă și apreciabil mai mică. Faptul acesta confirmă în condiții dinamice concluziile obținute în condiții statice, la punctul 4.2.

Tabloul nr. 2

Epruveta nr.	Ulei	Continuarea rotirii aparatului la sfîrşitul încercării în contul energiei acumulate S	Pirderea de greutate după 6 ore mg
1	305	236	11,2
2			6,9
3			45,6
4	305 + aditiv antigripant	350	2,7
5			3,4
6			2,5

În cazul lubrifiantului antigripant, insula observată reprezintă suprafața de contact pe care se produc deformații elastice sub o peliculă rezistentă (onctuoasă) de lubrifiant. La aceasta se ajunge în mod inevitabil deoarece dacă ar mai exista frecare uscată la unele puncte izolate, acestea

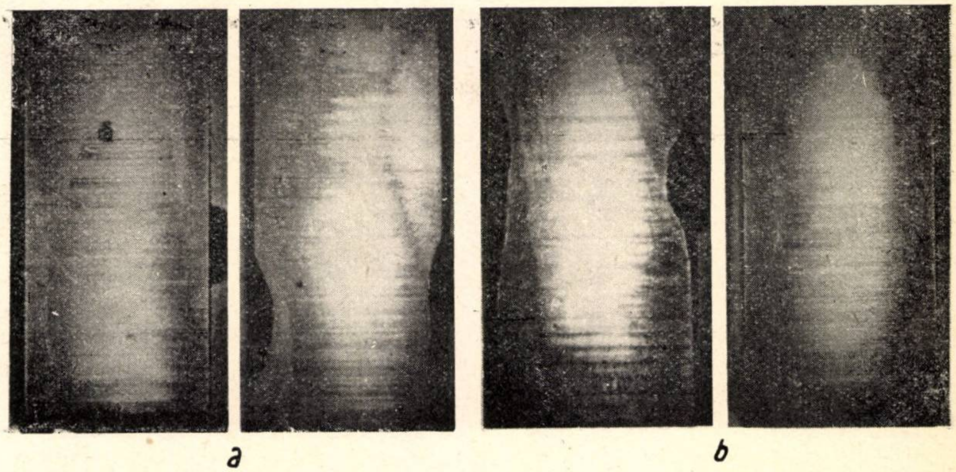


Fig. 19. — Variaţia suprafeţei portante în condiţii dinamice: *a*) în prezenţa unui lubrifiant inert; *b*) în prezenţa unui lubrifiant activ din punct de vedere chimic.

ar intra imediat în reacție cu agentul activ, netezindu-se și dînd un săpun care aderă la suprafață, suficient de puternic pentru a nu mai putea fi îndepărtat. În cazul uleiului mineral curat, această dizolvare nu se produce ; vîrfurile și produsele abrazive ale uzurii străpung ocazional pelicula de lubrifiant dînd contact direct metal-metal cu consecințele brutale pe care acest contact le are asupra suprafeței.

4.5. Verificarea ipotezei că defectele de suprafață și de montaj sînt cele care determină în primul rînd necesitatea rodajului s-a făcut prin cercetarea pierderilor de greutate și a uzurilor dimensionale ale cuzineților palieri și cuzineților de bielă de la 6 motoare Diesel rapide, în timpul unui rodaj controlat de 150 de ore.

Dacă uzura din primele momente ar fi avut un caracter uniform măcar de-a lungul unei generatoare, ar fi trebuit să existe o relație oarecare între modificarea dimensională și pierderea de greutate. În realitate, după cum se vede din tabloul nr. 3 (întocmit pe baza datelor furnizate de ICEP) nu există o astfel de relație, fie că se consideră procesul de uzură în primele 150 de ore fie în următoarele 500 de ore.

Uzurile negative se explică prin aceea că la punctul la care s-au făcut măsurătorile au existat un aport de material dinafară sau chiar din piesa respectivă, prin curgere plastică.

Astfel, de exemplu, în cazul cuzinetului de bielă nr. 2 de la motorul 1, după primele 150 de ore la o uzură dimensională medie de 7,5 μ s-a constatat o pierdere de greutate de 4,99 g, iar după 500 de ore, la o uzură dimensională de 32,5 μ, pierderea de greutate a fost numai de 0,43 g. La fel la cuzinetul de bielă nr. 3 al aceluiași motor, după primele 150 de ore la o uzură dimensională de 6,25 μ corespunde o pierdere de greutate de 0,98 g iar după 500 de ore, la o uzură dimensională de 23,75 μ, corespunde o pierdere de greutate de numai 0,21 g. Invers, la lagărul de bielă nr. 1 de la motorul 6, în primele 150 de ore la o uzură dimensională de 15 μ, pierderea de greutate nici nu este perceptibilă, în timp ce după 500 de ore, deși nu se constată uzură dimensională,

Tabloul nr. 3

Motorul	Cuzinetul		Uzură în rodaj (primele 150 de ore)		Uzură în exploatare (următoarele 500 de ore)		Observații
nr.	felul	nr.	g	μ	g	μ	
1	bielă	1	0,13	15,75	0,42	27,50	Din peste 100 măsurători s-au ales numai cele mai semnificative
1	bielă	2	4,99	7,50	0,43	32,50	
3	bielă	3	−0,77	1,75	0,71	8,75	
3	palier	4	−0,07	−3,75	+0,10	25,00	
4	palier	5	0,00	139,75	0,24	−2,50	
5	bielă	3	−0,11	10,00	0,24	0,00	
5	palier	3	0,02	82,50	0,02	13,75	
6	bielă	1	0,00	15,00	0,29	0,00	
6	palier	3	−0,04	37,50	−0,14	7,50	

pierderea de greutate este de 0,29 g. În general se constată că atît uzurile dimensionale cît și pierderile de greutate au valori mult mai variate în perioada inițială de funcționare, decît în cea ulterioară. Acest fapt este de altfel evident și nu necesită sublinieri.

Poate chiar că este atît de evident încît nici nu trebuia dovedit practic. Confirmarea practică a acestei ipoteze s-a făcut pentru a întări o foarte importantă concluzie :

În perioada inițială de funcționare, în afară de proprietățile lubrifiantului, considerat ca mediu hidrodinamic, interesează în mod deosebit comportarea acestuia în condiții de ungere imperfectă, în condiții în care local se produce frecare uscată, pe timp îndelungat, angajînd suprafețe relativ mari.

De altfel, se știe că în perioada uzurii inițiale se realizează condiții deosebit de propice pentru distrugerea mai mult sau mai puțin profundă a suprafețelor, ceea ce va influența toată viața ulterioară a mașinii.

4.6. Reconsiderînd datele practice prezentate, putem accepta ca dovedite următoarele :

— Calitatea suprafețelor nu se modifică apreciabil în timpul rodajului decît pe zone limitate pe care are loc frecarea în regim onctuos sau uscat.

— Aplatisarea generală a suprafețelor necesară pentru a se realiza o suprafață reală de contact suficient de întinsă, are loc în principal pe seama elasticității materialului și numai în mică măsură printr-un proces de reducere a înălțimii asperităților.

— Înălțimea asperităților nu constituie o condiție absolută de proiectare a ansamblului de frecare, dacă se realizează o suprafață care să poată reține lubrifiantul formînd cu aceasta o întinsă zonă combinată de contact. Prin aceasta, recomandarea consacrată că

$$\delta_2 \geqslant 3\ h$$

trebuie interpretată așa cum s-a arătat la punctul 2. 3.

— Principalele procese care au loc în timpul uzurii inițiale sînt în legătură cu corectarea defectelor locale provenite din prelucrarea neîngrijită sau cu mașini unelte neprecise, manipularea brutală sau montarea greșită a ansamblurilor de frecare. Ca urmare, se pot produce zgîrieturi, antrenări de material, deformări plastice, gripări și eventual chiar topiri de lagăre.

— Pentru fiecare ansamblu de condiții locale de montaj există o rugozitate optimă. În cazul unui montaj desăvîrșit se recomandă suprafețe foarte netede, superfinisate. În cazul unui montaj defectuos se recomandă suprafețe rugoase.

— La manipulare-montaj este avantajos ca suprafețele să fie acoperite cu o peliculă de ulei, preferabil activ din punct de vedere chimic, care le mărește rezistența la lovituri sau alte solicitări brutale.

— În perioada de uzură inițială lubrifianții activi din punct de vedere chimic sînt superiori, deoarece grăbesc procesul de înlăturare a asperi-

tăților care străpung pelicula de lubrifiant, dau produși solubili care nu mai intervin ca particule abrazive și au o acțiune limitată la suprafața minimă necesară pentru a suporta sarcina respectivă.

Primită la redacție la 4 iulie 1956.

ОБ ИЗНОСЕ УЗЛОВ ТРЕНИЯ В ПЕРИОД ОБКАТКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Хотя износ машин является следствием большого количества систематических воздействий, но в частности он зависит от некоторых главных факторов, преобладающих в условиях эксплуатации.

Начальный период, период обкатки, имеет свои специфические условия, к которым относятся:

— качество поверхностей,

— полумикроразмерные и макроразмерные отклонения от указаний проекта,

— смазочное вещество.

Обследование показывает, что между первыми двумя факторами должна существовать строгая зависимость, причем очень гладкие поверхности особенно требовательны и опасны.

Доказывается также, что в период обкатки следует применять масло, препятствующее заеданию, относительно агрессивное с химической точки зрения.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Условное изображение кривой износа.

Рис. 2. — Схематическое изображение микрогеометрии поверхностей, обработанных строганием.

Рис. 3. — Образование несущих площадок путем срезывания неровностей в процессе износа.

Рис. 4. — Схематическое изображение нормального распределения микронеровностей.

Рис. 5. — Несущая поверхность в процентах в зависимости от глубины износа в предположении нормального распределения высоты микронеровностей. *а* — общая диаграмма; *в* — область полезного применения.

Рис. 6. — Количество железа в граммах, отделившееся от трущихся поверхностей в зависимости от глубины износа, на одном м^2 в предположении нормального распределения высоты микронеровностей. *a)* общая диаграмма; *b)* область полезного применения.

Рис. 7. — Схематическое изображение зон застойной смазки под слоем ламинарно текущей смазки.

Рис. 8. — Нормальный вид микропрофиля поверхностей.

Рис. 9. — Сверхзатяжка и потеря соосности при неправильной установке коленчатого вала.

Рис. 10. — Образование застойных зон смазки на поверхностях, обработанных различным образом. *a)* шероховатые поверхности, *b)* сверхзачищенные поверхности.

Рис. 11. — Микрофотографии шероховатостей трущихся поверхностей, снятые профилографом доктора Шмальца. *а)* до обкатки; *в)* после обкатки.

Рис. 12. — Схема установки для исследования несущей способности поверхностей под давлением.

Рис. 13. — Изменение несущей поверхности в статических условиях в зависимости от нагрузки при отсутствии слоя смазки.

Рис. 14. — Изменение несущей поверхности в статических условиях в зависимости от нагрузки при наличии промежуточного слоя дистиллированной воды.

Рис. 15. — Изменения несущей поверхности в статических условиях в зависимости от нагрузки при наличии промежуточного слоя смазки, активной с химической точки зрения.

Рис. 16. — Изменение несущей поверхности в статических условиях при отсутствии смазки во время повторных циклов нагрузки и разгрузки.

Рис. 17. — Изменение несущих поверхностей в статических условиях при наличии смазки, активной с химической точки зрения, во время повторных циклов нагрузки и разгрузки.

Рис.18. — Схема прибора для изменения несущей поверхности в динамических условниях.

Рис. 19. — Изменение нсущей поверхности в динамических условиях: *а)* при наличии инертной смазки; *в)* при наличии смазки, активной с химической точки зрения.

CONSIDÉRATIONS SUR L'USURE DES ENSEMBLES DE FROTTEMENT À LA PÉRIODE DE RODAGE

(RÉSUMÉ)

Bien qu'elle soit la conséquence d'un très grand nombre d'actions systématiques, l'usure des machines dépend tout particulièrement de certains facteurs principaux prédominants dans les conditions d'exploitation.

La période initiale — de rodage — a ses conditions spécifiques, soit :

— la qualité des surfaces,

— les déviations semi- micro- et macrodimensionnelles, par rapport aux prévisions du projet,

— le lubrifiant.

Les recherches ont montré qu'il doit exister une étroite dépendance entre les deux premiers facteurs, les surfaces très lisses étant particulièrement exigeantes et dangereuses.

Elles démontrent également que, à la période de rodage, une huile antigrippante, relativement agressive au point de vue chimique, est particulièrement recommandée.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Représentation conventionnelle de la courbe d'usure.

Fig. 2. — Représentation schématique de la microgéométrie des surfaces usinées par détachement en copeaux.

Fig. 3. — Formations des plateaux portants par nivellement des aspérités pendant le processus d'usure.

Fig. 4. — Représentation schématique de la distribution normale des microaspérités.

Fig. 5. — Surface portante — en pourcents — fonction de la profondeur de l'usure, dans l'hypothèse d'une distribution normale de la hauteur des microaspérités : *a*) diagramme d'ensemble ; *b*) le domaine utile à plus forte échelle.

Fig. 6. — Quantité de fer — en grammes — détachée des surfaces de frottement, fonction de la profondeur de l'usure, pour une surface de 1 m^2, dans l'hypothèse d'une distribution normale de la hauteur des microaspérités : *a*) diagramme d'ensemble ; *b*) le domaine utile à plus forte échelle.

Fig. 7. — Représentation schématique des zones de lubrifiant stagnant sous la couche de lubrifiant en écoulement laminaire.

Fig. 8. — Aspect normal du microprofil des surfaces.

Fig. 9. — Serrage excessif et manque de coaxialité dans le cas du montage défectueux d'un vilebrequin.

Fig. 10. — Formation de zones de stagnation du lubrifiant sur des surfaces différement usinées : *a*) surfaces rugueuses ; *b*) surfaces parfaitement finies.

Fig. 11. — Photomicrographies des aspérités des surfaces de frottement, exécutées au profilographe du Dr. Schmaltz, avant le rodage *a*) et après *b*).

Fig. 12. — Schéma de l'installation pour l'étude de la capacité portante des surfaces pressées.

Fig. 13. — Variation de la surface portante, en fonction de la charge, dans des conditions statiques, en l'absence de toute couche de lubrifiant.

Fig. 14. — Variation de la surface portante, en fonction de la charge, dans des conditions statiques, en présence d'une couche intermédiaire d'eau distillée.

Fig. 15. — Variation de la surface portante, en fonction de la charge, dans des conditions statiques, en présence d'une couche intermédiaire de lubrifiant actif au point de vue chimique.

Fig. 16. — Variation de la surface portante dans des conditions statiques, en l'absence de lubrifiant, au cours de cycles répétés de charge et de décharge.

Fig. 17. — Variation des surfaces portantes, dans des conditions statiques, en présence d'un lubrifiant actif au point de vue chimique, au cours de cycles répétés de charge et de décharge.

Fig. 18. — Schéma de l'appareil qui fait varier la surface portante dans des conditions dynamiques.

Fig. 19. — Variation de la surface portante dans des conditions dynamiques : *a*) en présence d'un lubrifiant inerte ; *b*) en présence d'un lubrifiant actif au point de vue chimique.

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowdena, D. Tabor, *The Area of Contact between Slinding and between Moving Surfaces.* Proc. Roy. Soc. London, 1939, vol. 159, A, p. 391.
2. G. A. Gladman, *Quelques perfectionnements étrangers sur le fini des surfaces.* Microtecnic, 1955, nr. 5.
3. S. P. Lane, *Wear of Automotive Engine Cylinders and Piston Rings.* Mechanical Wear, Ed. Am. Soc. for Metals, New York, 1951, p. 25.
4. I. V. Kudriațev, *Rolul lubrifiantului în procesul de tăiere a cuprului.* Ed. tehnică, București, 1953.
5. I. Ia. Alșiț, *Kravintelinaia ofenka vliania truscihsia materialov i sorta masla na zaedanie.* Vestnik Mașinostroenie, Mașghiz, Moscova, 1952, nr. 7.
6. R. Mondon, *Le polissage électrolytique industriel.* Technique et Science Aéronautiques, 1949, nr. 4.
7. H. A. Anbrose a. J. E. Taylor, *Wear, Scuffing and Spalling in Passenger-Car Engines.* SAE, Transactions, New York, 1955.
8. N. P. Voinov, *Issledovanie pritirki dvigatelei. Trenie i iznos v mașinah.* Moscova Leningrad, 1949.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENȚA MATERIALELOR—ELASTICITATE

TORSIUNEA UNEI BARE CILINDRICE NEOMOGENE

DE

L. DUMITRESCU și C. STĂNESCU

1. Considerații generale

Ne propunem să studiem torsiunea unei bare în formă de cilindru circular, formată prin sudura a două bare cu secțiune semicirculară, din materiale omogene și izotrope, avînd constante elastice diferite.

Vom nota cu D_j $(j = 1,2)$ domeniile semicirculare ocupate de cele două materiale, într-o secțiune normală pe axa Oz, aceasta din urmă fiind paralelă cu generatoarele barei (figura 1).

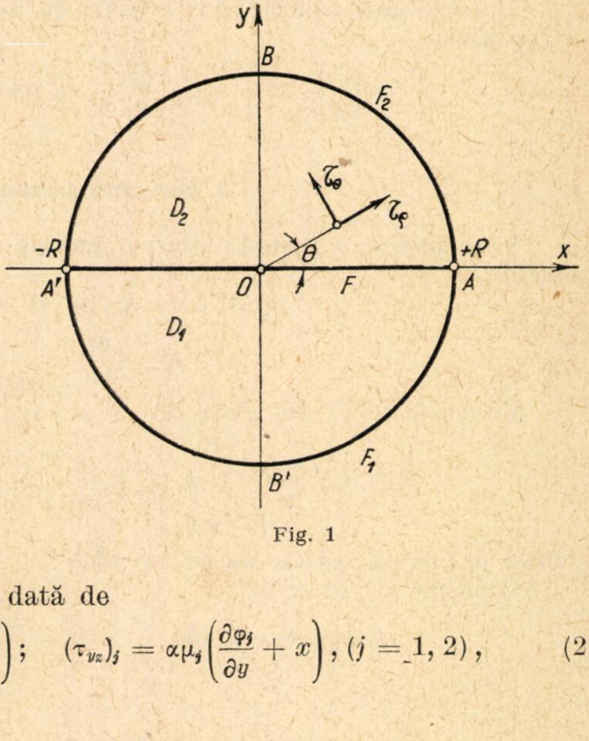


Fig. 1

Fie $\overline{w}_j$ vectorul definind deplasările elastice în domeniul D_j, de componente

$$u_j = -\alpha z y,\ v_j = \alpha z x,$$

$$w_j = \alpha\, \varphi_j\,(x, y),$$

α fiind unghiul cu care se răsucește unitatea de lungime a barei.

Ecuația echilibrului elastic, în absența forțelor masice, se reduce la [1]

$$\Delta\ \varphi_j(x, j) = 0. \qquad (1)$$

Distribuția tensiunilor este dată de

$$(\tau_{xz})_j = \alpha\mu_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} - y\right); \quad (\tau_{yz})_j = \alpha\mu_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + x\right), (j = 1, 2), \qquad (2)$$

celelalte componente ale tensiunii fiind nule ; μ_j este modulul de elasticitate transversal al materialului ce ocupă domeniul D_j.

Dacă M este momentul de torsiune, constanta α se determină din condiția

$$M = \alpha \mathfrak{D}\,, \tag{3}$$

unde $\mathfrak{D}$ este rigiditatea la torsiune a întregii bare

$$\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^{2} \mu_j \iint\limits_{D_j} \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y. \tag{4}$$

2. Condițiile la limite

Fie F_1 și F_2 frontierele distincte ale domeniilor D_1 și D_2 ; ele determină în ansamblu conturul secțiunii barei torsionate.

Dacă se pune

$$f_j(\zeta) = \varphi_j(x, y) + i\, \psi_j(x, y), \quad (\zeta = x + iy)$$

condiția ca suprafața laterală a barei să fie liberă de tensiuni se reduce la

$$\psi_j(x, y) = 0 \quad \text{pe frontiera } F_j \quad (j = 1,\ 2). \tag{5}$$

Pe frontiera comună F condițiile sînt :

a) continuitatea deplasării elastice, ceea ce impune

$$\varphi_1(x, 0) = \varphi_2(x, 0) \text{ pe frontiera } F \tag{6}$$

b) echilibrarea eforturilor interne de pe o față și alta a suprafeței de separație

$$\mu_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + x \right) = \mu_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + x \right) \text{ pe frontiera } F. \tag{7}$$

3. Rezolvarea problemei

Vom utiliza o metodă dintr-o lucrare anterioară [2]. Introducem notațiile

$$\psi_j(x, 0) = h_j(x) \quad (j = 1, 2), \tag{8}$$

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{9}$$

Funcțiile $f_j(\zeta)$ sînt date de

$$f_j(\zeta) = \frac{(-1)^j}{\pi} \int_{-R}^{+R} h_j(\xi) \left[\frac{1}{\xi - \zeta} + \frac{\zeta}{\zeta\xi - R^2} \right] \mathrm{d}\xi\,, \tag{10}$$

ξ fiind un punct curent pe axa reală.

Condiția (7) se scrie

$$m\, h_2(x) - h_1(x) = \frac{1}{2}(m - 1)(x^2 - R^2), \tag{11}$$

iar condiția (6) impune $h_2(x) = -h_1(x)$. Rezultă

$$f_j(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{m-1}{m+1}\left[\frac{2R(\zeta^2+R^2)}{\zeta} + \frac{(R^2-\zeta^2)^2}{\zeta^2}\ln\frac{R-\zeta}{R+\zeta} + (-1)^{j+1}\, i\pi(R^2-\zeta^2)\right]. \tag{12}$$

4. Determinarea tensiunilor maxime

Fie τ_θ și τ_ρ componentele tensiunii în coordonate polare (vezi figura). Avem

$$(\tau_\theta)_j + i(\tau_\rho)_j = \alpha\,\mu_j\, e^{i\theta}\left[i\frac{\mathrm{d}f_j}{\mathrm{d}\zeta} + \bar{\zeta}\right]. \tag{13}$$

Punctele unde valoarea absolută a tensiunii este maximă se află pe contur [1], [3]. Remarcînd că $(\tau_\rho)_j = 0$ pe F_j, se obține

$$(\tau_\theta)_2 = \alpha\mu_2 R\left[1 - \frac{m-1}{\pi(m+1)}\left(4\sin\theta + 2\sin 2\theta\ln\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} + \pi\cos 2\theta\right)\right] \tag{14}$$

și o formulă analogă pentru $(\tau_\theta)_1$.

În punctele A și A' tensiunile sînt :

$$\tau_A = \tau_{A'} = \frac{2\alpha\mu_1\mu_2 R}{\mu_1+\mu_2}. \tag{15}$$

În afară de aceste puncte, tensiunile sînt maxime în B și B' (vezi figura)

$$\tau_B = \frac{2\alpha\mu_2 R(\pi m - 2m + 2)}{\pi(m+1)}; \quad \tau_{B'} = \frac{2\alpha\mu_1 R(\pi + 2m - 2)}{\pi(m+1)}. \tag{16}$$

Se constată că pentru materialul mai elastic tensiunea maximă este la extremitățile suprafeței de separație, iar pentru materialul mai rigid pe o direcție perpendiculară față de prima.

5. Calculul rigidității la torsiune

Aplicînd în relația (4) formula lui Green, obținem

$$\mathfrak{D} = \sum_{j=1}^{2}\mu_j\iint\limits_{D_j}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \sum_{j=1}^{2}\mu_j\int\limits_{C_j}\varphi_j\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y),$$

C_j fiind conturul care delimitează domeniul D_j.

Remarcînd că

$$\sum_{j=1}^{2}\mu_j\int\limits_{C_j}\varphi_j\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) = (\mu_2-\mu_1)\int_{-R}^{+R}\varphi_2\,(x, 0)\,x\,\mathrm{d}x,$$

se obține final

$$\mathfrak{D} = \frac{R^4\mu_1}{1+m}\left[\frac{\pi}{2}(1+m^2) - \frac{4}{\pi}(m-1)^2\right]. \tag{17}$$

Se constată că $\mathfrak{D}$ este o cantitate nenegativă.

Primită la redacție la 5 iulie 1956.

КРУЧЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы рассматривают кручение двух стержней в форме полукруглых цилиндров из различных материалов, сваренных вдоль плоских поверхностей. Функция кручения, удовлетворяющая уравнению (1), дается реальной частью выражения (12). Далее устанавливаются максимальные напряжения и сопротивление кручению (17).

TORSION D'UNE BARRE CYLINDRIQUE NON HOMOGÈNE

(RÉSUMÉ)

Les auteurs étudient la torsion de deux barres ayant la forme de cylindres demi-circulares, soudés le long de leurs surfaces planes, leurs constantes élastiques étant différentes. La fonction de torsion, satisfaisant à l'équation (1), est donnée par la partie réelle de l'expression (12). Sont établies ensuite les valeurs des tensions maxima et la rigidité en torsion (17).

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Mushelisvili, *Nekotorie zadaci teorii uprugosti.* I. A. N. SSSR, Moscova, 1935.
2. C. Stănescu și L. Dumitrescu, *Mișcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafață plană.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 4, 1956, p. 891.
3. I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity.* Mc. Graw-Hill, New York, 1946.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

ASUPRA CALCULULUI GRINZILOR PEREŢI CU O SINGURĂ DESCHIDERE

DE

P. P. TEODORESCU

1. Introducere. O primă clasificare a elementelor de construcţie, după raportul dimensiunilor pe care le au, ne permite să distingem între grinzi, plăci şi blocuri. În această lucrare ne ocupăm de plăci, elemente de construcţie bidimensionale, cu o dimensiune (grosimea) foarte mică în raport cu celelalte două dimensiunii, care sînt comparabile între ele. Ele sînt mărginite de două plane paralele şi sînt acţionate de sarcini cuprinse în planul lor median (echidistant la cele două feţe). Aceste plăci poartă numele de grinzi pereţi. În cele ce urmează se face ipoteza că sarcinile exterioare rămîn sub o anumită valoare critică, astfel încît să nu se producă deformări în afara planului median.

Printre elementele de construcţie de care ne ocupăm intră şi grinzile obişnuite de secţiune dreptunghiulară.

Dacă cele două dimensiuni ale unei grinzi sînt $2a$ şi $2b$ (fig. 1), vom considera raportul laturilor $\lambda = a/b$. În cazul grinzilor pereţi avem, în mod obişnuit, $0{,}5 \leqq \lambda \leqq 2$.

Dacă $\lambda > 2$ avem de-a face cu grinzi de lungime medie [7], pentru care rezultatele date de rezistenţa materialelor ne dau o aproximaţie suficient de bună, în ceea ce priveşte starea de tensiune. Din punctul de vedere al stării de deformaţie trebuie făcute calcule mai exacte. Dacă $\lambda < 0{,}5$ am arătat [41] că influenţa încovoierii devine neglijabilă în raport cu influenţa forţei tăietoare, iar rigiditatea grinzii devine proporţională numai cu aria secţiunii transversale. În orice caz, rezultatele pe care le dă această lucrare sînt valabile oricare ar fi λ.

Grinda perete, avînd o grosime constantă $h \ll a$; b, o putem considera supusă la o stare de tensiune plană. De aceea, din punctul de vedere al teoriei elasticităţii, studiul se reduce la rezolvarea problemei plane a elasticităţii pentru un contur dreptunghiular, cu anumite condiţii pe contur date. Din punct de vedere matematic (în lipsa forţelor masice) problema se reduce la determinarea unei funcţii biarmonice, care verifică anumite condiții date pe un contur dreptunghiular. Modul de rezolvare a problemei în cazul unor forțe masice oarecare a fost indicat într-o comunicare anterioară [40].

Eforturile unitare vor fi date de

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \tag{1}$$

funcția $F(x, y)$ trebuind să verifice ecuația

$$\Delta\Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \tag{2}$$

Deplasările vor fi date de

$$\begin{aligned} Eu &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dx - \mu\,\frac{\partial F}{\partial x} + f_1(y) + E(-\,\omega_0 y + u_0), \\ Ev &= \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy - \mu\,\frac{\partial F}{\partial y} + f_2(x) + E(\omega_0 x + v_0) \end{aligned} \tag{3}$$

unde E este modelul de elasticitate longitudinală, μ coeficientul lui Poisson, iar u_0, v_0, ω_0 sînt deplasările, respectiv rotația mișcării în plan ca un corp rigid ; funcțiile $f_1(y)$ și $f_2(x)$ sînt determinate de ecuația cu variabile separate

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}\,dx + \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\,dy + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{df_1(y)}{dy} + \frac{df_2(x)}{dx} = 0. \tag{4}$$

De obicei, se folosesc metode de calcul aproximative. Acestea sînt de două feluri :

— Metode numerice sau grafice, care dau valori numerice ale funcției în diverse puncte ale corpului (de pildă metoda diferențelor finite — metoda rețelelor).

— Metode variaționale, care dau o expresie analitică aproximativă pentru funcția căutată, expresie valabilă pentru toate punctele corpului. În cadrul acestei lucrări ne referim la un aspect particular al acestor metode : la metoda lui Gauss de minimare a sumei patratelor erorilor.

2. **Istoric.** Un prim pas important pentru rezolvarea problemei plane în eforturi a fost făcut în 1863 de G.B. Airy [1], prin introducerea funcției biarmonice F a eforturilor, funcție ce-i poartă numele.

La sfîrșitul secolului al XIX-lea a început să se studieze grinda dreaptă cu secțiune dreptunghiulară, cu ajutorul seriilor simple Fourier cu coeficienți variabili, adică cu ajutorul funcțiilor exponențialo-trigonometrice sau iperbolico-trigonometrice. Asemenea soluții, valabile pentru grinzi lungi, puneau condiții stricte pe latura de sus și de jos a grinzii și condiții globale pe fețele de capăt. Ribière [33] ia ca funcție a eforturilor

$$F(x,y) = (A\,\mathrm{ch}\,ky + B\,\mathrm{sh}\,ky + Cy\,\mathrm{ch}\,ky + Dy\,\mathrm{sh}\,ky)\cos kx. \tag{5}$$

N.G. Filon [12] folosește o funcție analogă, în care înlocuiește pe „cosinus" prin „sinus". Prima soluție corespunde mai bine grinzii dublu încastrate, iar a doua grinzii simplu rezemate.

Căutînd să extindă calculul la grinzi scurte (grinzi pereţi), Ribière [34], [35] a ajuns la rezultate inadmisibile din punct de vedere fizic. Astfel el afirmă că în dreptul încastrării, la o grindă scurtă dublu încastrată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, apar numai eforturi unitare de compresiune, după axa grinzii, ceea ce nu se poate. Aceste lucrări constituie totuşi o etapă importantă în studiul grinzilor pereţi.

Ulterior au apărut studii care trec de la problema grinzii lungi la problema grinzii perete pe o infinitate de reazeme. Cităm astfel lucrările lui A. Timpe [43] F. Bleich [4], H. Bay [3], Bortsch [5], [6], H. Craemer [8], [9], F. Seewald [38]. Bortsch şi Craemer [8] folosesc coordonate polare — metodă de calcul neadecvată; de aceea, ei ajung ca şi Ribière anterior, la rezultate nereale în privinţa distribuţiei eforturilor unitare σ_x în dreptul reazemului. După ei avem eforturi σ_x de compresiune pe toată înălţimea grinzii, datorită încovoierii, ceea ce dă naştere unei forţe axiale în grindă. În realitate, această forţă axială nu există şi suma eforturilor τ_x de compresiune este egală cu suma eforturilor σ_x de întindere. Seewald [38] scrie eforturile unitare în grindă sub forma unei sume între soluţia dată de Navier şi eforturi unitare suplimentare. El consideră însă că aceste eforturi suplimentare nu depind de raportul λ, ceea ce nu este just. Totuşi soluţia dată este suficientă pentru $\lambda > 2$.

Un studiu important în domeniul grinzilor pereţi îl constituie un articol publicat de Fr. Dischinger [10], în 1932. El face un calcul al grinzilor pereţi de înălţime finită cu ajutorul dezvoltărilor în serie simplă Fourier. Autorul întabulează unele funcţii, în cazuri particulare de încărcare mai importante, ceea ce simplifică calculul. Astfel s-a rezolvat problema grinzii perete cu condiţii în eforturi pe contur. Pe laturile de sus şi de jos s-au pus condiţii exacte (în fiecare punct). Pe laturile din dreapta şi din stînga s-au pus condiţii globale de echilibru (echilibru pe panou pentru a obţine o funcţie Airy univoc determinată).

H. Bay [2] publică un interesant studiu bazat pe metoda diferenţelor finite. J. Fadle [11] dă o soluţie complicată din punct de vedere matematic pentru semibandă; folosind principiul lui B. de St. Venant, această soluţie este valabilă şi pentru grinzile pereţi patrate ($\lambda=1$).

I. A. Wojtaszak [46], apoi G. Pickett [30] şi P. Lardy [23] studiază cazul unei grinzi perete sau plăci cu o singură deschidere, acţionată de sarcini pe două laturi opuse. Ei folosesc dezvoltări în serie simplă Fourier pe una din direcţii şi trec la dezvoltarea în serie pe cealaltă direcţie, cu ocazia punerii condiţiilor pe contur.

K. Girkmann [13] expune într-un tratat al său (1946—1948—1954) o metodă de a pune condiţii pe toate cele patru laturi ale conturului. Aceasta se bazează pe dezvoltarea în serie simplă Fourier a liniilor iperbolice ce intră în componenţa integralelor (5) ale ecuaţiei biarmonice. Girkmann dezvoltă acest calcul pentru două cazuri de încărcare. H. Parkua [29] foloseşte această metodă în disertaţia sa, în legătură cu problema grinzii perete pe trei reazeme. Considerăm că aceste lucrări constituie o nouă etapă importantă după studiile lui Fr. Dischinger. Ideile pe care se bazează această metodă au fost folosite de noi în această lucrare, făcînd încă o sistematizare personală a calculului.

Un studiu publicat în Statele Unite arată [25] că, pentru alcătuirea de tabele de calcul al stării de tensiune la grinzi pereţi, în diverse cazuri de încărcare şi cu diverse valori pentru λ (0,5; 1;2), se foloseşte metoda diferenţelor finite. Recent, E. Hampe [18] a arătat cum se pot folosi diverse sisteme de coordonate pentru studiul grinzilor pereţi mărginite de conture mai complicate (colţuri de cadru, arce de pod etc.).

În Uniunea Sovietică s-au publicat studii importante în acest domeniu, în special în ultimii 15 ani, în care s-a căutat să se rezolve problema nu numai pentru condiţii în eforturi pe contur ci şi pentru condiţii în deplasări (cînd unele laturi sînt încastrate).

În 1936, V.A. Lazarian [24] publică la Kiev un studiu deosebit de important asupra unei grinzi perete dublu încastrată, încărcată cu o sarcină uniform distribuită. Este prima lucrare pe care o cunoaştem în care se pun explicit condiţii de încastrare totală pe contur (componenta u a deplasării este nulă pe latura încastrată). El foloseşte o metodă aproximativă de calcul, bazîndu-se pe dezvoltări în serie simplă Fourier.

În 1940, I.I. Goldenblat [14], publică o lucrare în care studiază problema grinzilor pereţi prin diferite metode (polinoame biarmonice, dezvoltări în serie, diferenţe finite). De remarcat faptul că se dă forma generală a funcţiei Airy, ca o dezvoltare în serie, cu ajutorul a patru funcţii arbitrare. Goldenblat indică şi o metodă aproximativă de calcul, pornind de la o funcţie de forma

$$F(x,y) = F_1(x,y) + F_2(x,y), \tag{6}$$

unde F_1 corespunde la o primă aproximaţie a funcţiei eforturilor (de obicei cu ajutorul polinoamelor biarmonice), iar F_2 se determină astfel ca F să verifice cît mai bine condiţiile pe contur.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

P. M. Varvak [44] publică la Kiev studii privind rezolvarea problemei plane în general şi a problemei grinzilor pereţi în particular, cu ajutorul metodei diferenţelor finite.

În 1940 P.F. Papkovici [28] dă o metodă generală de rezolvare a problemei plane a elasticităţii, pornind de la integrale de forma

$$F(x,y) = \sum_k f_k(y)\ e^{s_k x}\ ;\ \overline{F}(x,y) = \sum_k \overline{f}_k(y)\ e^{-s_k x} \tag{7}$$

ale ecuaţiei biarmonice. A. I. Lurie [26] şi G. A. Grinberg [15], [16] continuă aceste studii. De asemenea, K. A. Kitover [21] dă unele aplicaţii ale acestei metode, pornind de la o integrală de forma

$$F(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx + Cx \cos kx + Dx \sin kx)\ e^{ky}, \tag{8}$$

care se încadrează în soluţia generală (7). Diferenţa dintre această integrală şi cele care se folosesc în mod obişnuit constă în aceea că variabila care intră sub formă de factor este cea de sub linia trigonometrică şi nu cea exponenţială sau de sub linia iperbolică. În felul acesta el rezolvă problema semibandei şi a penei cu condiţii pe contur în eforturi şi deplasări (asemănător cu studiul [11] al lui Fadle). Din punct de vedere matematic dificultatea constă în rezolvarea unui număr de ecuaţii transcendente. Pe aceeaşi cale, V. K. Prokopov [32] se ocupă de o grindă dublu încastrată, încărcată cu o sarcină unitară (deplasarea u este nulă în lungul axei grinzii).

Kitover [22] face un studiu aproximativ al unei grinzi perete patrate ($\lambda = 1$) încărcată cu o sarcină uniform distribuită sau cu o sarcină concentrată în mijlocul laturei de sus şi cu două reacţiuni concentrate pe latura de jos ; folosind o metodă aproximativă de calcul (unele condiţii globale pe contur, metoda celor mai mici patrate etc.), el dă diagramele eforturilor unitare pentru diverse secţiuni. M. F. Pîhtunov [31] atacă problema plană într-un caz mai general, pentru un contur format din două drepte paralele cu axa Oy, ale căror capete sînt unite prin curbele $y = f_1(x)$ şi $y = f_2(x)$; el foloseşte o metodă aproximativă de calcul, bazată pe extremarea lucrului mecanic de deformaţie. G. A. Grinberg, N.N. Lebedev şi I. S. Ufliand [17] determină ecuaţiile liniilor izopahe (pentru care $\sigma_x + \sigma_y = \text{const.}$) într-o grindă perete. Ruppeneit [36] [37], într-un studiu analog, este primul care ţine seama de faptul că deformaţia laterală este împiedicată în cazul unei grinzi pe o infinitate de reazeme, ceea ce introduce un efort suplimentar de compresiune.

Un pas important înainte îl constituie studiile întreprinse [19], [20] de A.S. Kalmanok asupra plăcilor solicitate normal pe planul lor. El extinde apoi metoda folosită, la plăcile solicitate de sarcini cuprinse în planul lor, adică la grinzi pereţi. Kalmanok observă că funcţia eforturilor verifică ecuaţia (2) corespunzătoare ecuaţiei lui Lagrange pentru plăcile subţiri în lipsa încărcărilor normale. Deci $z = F(x,y)$ este suprafaţa medie deformată a acestei plăci, încărcată cu anumite deformaţii pe contur. Considerînd gradele de libertate de mişcare ale unui element infinit mic, lipit de conturul exterior al plăcii dreptunghiulare, putem vedea că fiecare element are două grade de libertate : deplasarea şi unghiul de rotaţie relativ la secţiunea de contur ; exceptează colţurile dreptunghiului unde sînt trei grade de libertate : deplasarea şi cele două unghiuri de rotaţie relative la cele două feţe perpendiculare ale conturului. Astfel, suprafaţa elastică a plăcii rezolvă univoc problema ordonatelor şi a derivatelor lor normale pe întreg conturul. Kalmanok foloseşte aceste reprezentări geometrice la construcţia soluţiei problemei cu metoda generală a lui Filon. El ia o integrală de forma (5) în sinus, la care adaugă o soluţie de aceeaşi formă în care se schimbă rolurile lui x şi y. Pentru ca aceste integrale să corespundă numai la încărcări ce se echilibrează pe fiecare latură, Kalmanok foloseşte şi polinomul biarmonic

$$P(x,y) = a_{20}\, x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}\, x^3 + a_{21}\, x^2y + a_{12}\, xy^2 + a_{03}y^3 + a_{31}x^3y + a_{13}xy^3 \tag{9}$$

Pentru a pune condiţii pe cele patru laturi ale conturului, Kalmanok (ca şi Girkmann de altfel) dezvoltă liniile iperbolice în serie simplă Fourier introducînd unele notaţii şi funcţii care simplifică scrierea şi care, prin întabulare, dau posibilitatea unui calcul mai rapid. Kalmanok nu foloseşte proprietăţile de simetrie şi antisimetrie ale grinzii perete. Studiile lui sînt însă foarte interesante, prin faptul că a căutat să ajungă la o formă practică de calcul.

La noi s-au întreprins destul de puţine studii în acest domeniu. Remarcăm lucrarea lui P. Vernescu [45] asupra grinzilor încărcate cu pereţi elastici şi lucrarea lui D. Moraru

[27] asupra consolelor scurte. O altă metodă de calcul, bazată pe punerea condiţiilor pe contur într-un număr finit de puncte a fost indicată de noi într-o lucrare anterioară [41]. Am arătat de asemenea [42] cum se poate rezolva problema în unele cazuri particulare importante cînd între eforturile unitare normale există o relaţie liniară. De asemenea, am indicat*) [39] o metodă de calcul pentru grinzile pereţi cu o singură deschidere şi cu o rezemare oarecare (simplă rezemare, încastrare etc.).

Cercetări multiple, întreprinse mai ales în ultimii ani și din care noi am menționat numai o parte, ne arată că problema calculului grinzilor pereți în caz general este o problemă actuală. Se fac studii în două direcții :

— un calcul exact (sau mai bine-zis un calcul care poate fi oricît de exact vrem, după numărul termenilor pe care-i luăm în dezvoltarea în serie) ;

— un calcul aproximativ (care are avantajul că poate fi mai rapid).

Noi vom prezenta în cele ce urmează o metodă de calcul care se încadrează în prima categorie de metode.

3. **Metoda generală de calcul.** Se iau ca axe de coordonate axele de simetrie geometrică ale grinzii perete (fig. 1). Aceste axe pot să nu fie axe de simetrie din punctul de vedere al modului de rezemare. Din punctul de vedere al condițiilor pe contur, vom numi rezemare numai încastrările

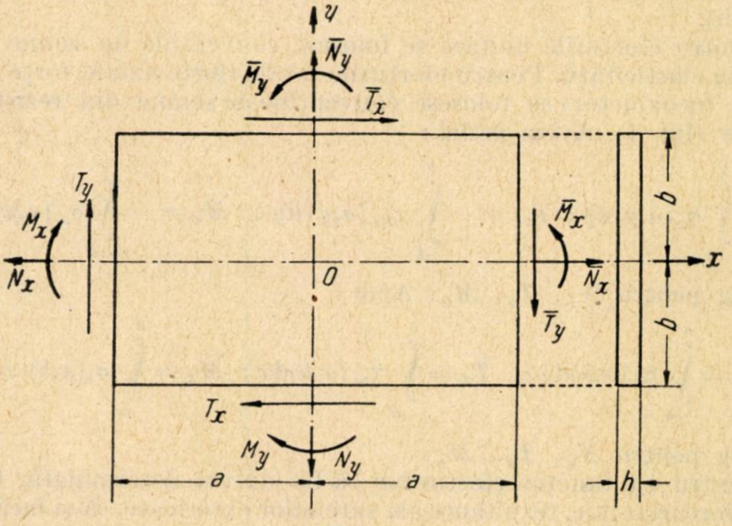


Fig. 1

pe contur ; în această lucrare nu ne vom ocupa de aceste cazuri. Celelalte reazeme (reazeme punctuale sau reazeme late) le vom transforma în eforturi pe contur, iar condițiile de rezemare le vom pune numai pentru calculul deplasărilor. Deci axele de coordonate vor fi și axe de simetrie mecanică.

---

* Recent am luat cunoştinţă de un studiu analog cu al nostru, publicat tot în 1955 de B. L. Abramian în Dokl. A. N. Arm. S. S. R., vol. 21, nr. 5, p. 193 ; acest studiu priveşte un singur caz de încărcare (simetric în raport cu axele de simetrie ale grinzii perete) fără a pune condiţii în deplasări pe contur.

Vom face distincție între încărcare normală și încărcare tangențială.

Apoi fiecare caz de încărcare se poate descompune în alte patru cazuri de încărcare, după proprietățile de simetrie și antisimetrie în raport cu cele două axe de coordonate:

— încărcare simetrică în raport cu ambele axe de coordonate;

— încărcare simetrică în raport cu axa Oy și antisimetrică în raport cu axa Ox;

— încărcare antisimetrică în raport cu axa Oy și simetrică în raport cu axa Ox;

— încărcare antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate.

Se studiază astfel 12 cazuri de încărcare: 4 cazuri pentru încărcări normale, 4 cazuri pentru încărcări tangențiale (pe două laturi opuse ale grinzii perete), 4 cazuri pentru încărcări compuse (alcătuite numai din încărcări normale sau numai din încărcări tangențiale sau și din încărcări normale și din încărcări tangențiale. care își fac echilibru pe cele pentru laturi ale grinzii). Acestea sînt cazurile elementare de încărcare care nu se pot descompune în alte cazuri mai simple. Orice caz de încărcare a grinzii perete se poate obține prin suprapunerea efectelor din cazurile de încărcare elementare (care țin seama de proprietățile de simetrie și antisimetrie ale încărcării).

Pentru eforturile unitare se folosesc convențiile de semne obișnuite din teoria elasticității. Pentru eforturile totale (forțe axiale, forțe tăietoare, moment încovoietor) se folosesc convențiile de semne din rezistența materialelor (fig. 1). Avem astfel:

$$\overline{N}_x = \int_{-b}^{b} \sigma_x(a,y)\mathrm{d}y\,;\quad \overline{T}_y = -\int_{-b}^{b} \tau_{xy}(a,y)\,\mathrm{d}y\,;\quad \overline{M}_x = -\int_{-b}^{b} \sigma_x(a,y)\; y\mathrm{d}y \tag{10}$$

și analog pentru N_x, T_y, M_x. Apoi

$$\overline{N}_y = \int_{-a}^{a} \sigma_y(x,b)\mathrm{d}x\,;\quad \overline{T}_x = \int_{-a}^{a} \tau_{yx}(x,b)\mathrm{d}x\,;\quad \overline{M}_y = \int_{-a}^{a} \sigma_y(x,b)\; x dx \tag{10'}$$

și analog pentru N_y, T_x, M_y.

Pentru ca funcția eforturilor să fie univoc determinată, trebuie ca aceste eforturi totale, rezultante ale sarcinilor exterioare, să-și facă echilibru pe contur.

Pentru a putea pune cu ușurință condițiile pe contur, se dezvoltă sarcinile exterioare în serii simple Fourier. În felul acesta se poate reprezenta cu ajutorul unei singure expresii o încărcare — în general — discontinuă. Cu ajutorul seriilor Fourier putem astfel reprezenta încărcări normale sau tangențiale (distribuite, forțe concentrate, momente concentrate). În cazul sarcinilor concentrate, seriile Fourier corespunzătoare nu mai sînt convergente; totuși, cu excepția punctelor de aplicație ale acestor sarcini, fenomenul fizic este bine reprezentat prin aceste dezvoltări în serie; iar seriile care ne reprezintă eforturile unitare în interiorul grinzii vor fi convergente.

Forma generală a funcției eforturilor cu care se lucrează este

$$
\begin{gathered}
F(x,y) = F\,(\text{par } x, \text{ par } y) + F\,(\text{par } x, \text{ impar } y) + F\,(\text{impar } x, \text{ par } y) + \\
+ F\,(\text{impar } x, \text{ impar } y) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2}\,(A_n \operatorname{ch} \gamma_n y + \gamma_n y B_n \operatorname{sh} \gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\
+ \sum_m \frac{1}{\delta_m^2}\,(C_m \operatorname{ch} \delta_m x + \delta_m x D_m \operatorname{sh} \delta_m x) \cos \delta_m y + \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2}\,\big(A_n' \operatorname{sh} \gamma_n y + \\
+ \gamma_n y B_n' \operatorname{ch} \gamma_n y\big) \cos \gamma_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2}\,\big(C_m' \operatorname{ch} \beta_m x + \beta_m x D_m' \operatorname{sh} \beta_m x\big) \sin \beta_m y + \\
+ \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2}\,\big(A_n'' \operatorname{ch} \gamma_n y + \gamma_n y\, B_n'' \operatorname{sh} \gamma_n y\big) \sin \gamma_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2}\,\big(C_m'' \operatorname{sh} \beta_m x + \qquad (11) \\
+ \beta_m x D_m'' \operatorname{ch} \beta_m x) \cos \beta_m y + \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2}\,(A_n''' \operatorname{sh} \gamma_n y + \gamma_n y B_n''' \operatorname{ch} \gamma_n y) \sin \gamma_n x + \\
+ \sum_m \frac{1}{\delta_m^2}\,(C_m''' \operatorname{sh} \delta_m x + \delta_m x\, D_m''' \operatorname{ch} \delta_m x) \sin \delta_m y + \\
+ \frac{1}{2} K_1 x^2 + K_0 xy + \frac{1}{2} K_2 y^2.
\end{gathered}
$$

Uneori, pentru ușurința punerii condițiilor pe contur, se pot folosi alte sume și anume

$$
\begin{gathered}
\sum_n \frac{1}{\alpha_n^2}\,(A_n \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y B_n \operatorname{sh} \alpha_n y) \cos \alpha_n x + \sum_m \frac{1}{\beta_m^2}\,(C_m \operatorname{ch} \beta_m x + \\
+ \beta_m x D_m \operatorname{sh} \beta_m x) \cos \beta_m y + \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2}\,\big(A_n' \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y B_n' \operatorname{ch} \alpha_n y\big) \cos \alpha_n x + \qquad (11') \\
+ \sum_m \frac{1}{\delta_m^2}\,\big(C_m' \operatorname{ch} \delta_m x + \delta_m x\, D_m' \operatorname{sh} \delta_m x\big) \sin \delta_m y
\end{gathered}
$$

pentru a avea alte perioade. S-a notat

$$
\begin{aligned}
\gamma_n &= \frac{n\pi}{a} \;; \quad \delta_m = \frac{m\pi}{b}, \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots), \\
\alpha_n &= \frac{n\pi}{2a} \;; \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2b}, \qquad (n, m, = 1, 3, 5, \ldots).
\end{aligned} \qquad (12)
$$

În cazul unor proprietăți de simetrie sau antisimetrie ale încărcării, vom folosi numai unele din aceste sume, după paritatea lor în raport cu cele două variabile. În acest caz condițiile pe contur se pun simultan pe două laturi opuse și sînt de forma :

$$
\begin{aligned}
&- \text{pentru } x = a &&: \sigma_x(a, y) = \bar{p}'(y)\,; \ \tau_{xy}(a,y) = \bar{t}'(y),\\
&- \text{pentru } x = -a &&: \sigma_x(-a,y) = p'(y)\,; \ \tau_{xy}(-a,y) = t'(y),\\
&- \text{pentru } y = b &&: \sigma_y(x,b) = \bar{p}(x)\,; \ \tau_{yx}(x,b) = \bar{t}(x),\\
&- \text{pentru } y = -b &&: \sigma_y(x, -b) = p(x)\,; \ \tau_{yx}(x, -b) = t(x). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Deoarece fiecare membru al unei condiții pe contur este dat de o dezvoltare în serie Fourier, vom identifica cele două dezvoltări, respectiv vom egala coeficienții liniilor sinus și cosinus trigonometric. În felul acesta fiecare condiție pe contur ne dă două sisteme de ecuații liniare cu un număr infinit de necunoscute. Obținem astfel 16 sisteme de ecuații liniare, care ne determină cele 16 șiruri de coeficienți din funcția eforturilor (11).

Vom pune întîi cîte o condiție pe fiecare latură, astfel aleasă funcție de perioadă, încît relația care se obține să nu conțină vreo variabilă ca argument al unei linii iperbolice. Aceasta ne dă 8 sisteme de relații finite între cele 16 șiruri de parametri care trebuie determinați. Exprimăm apoi eforturile unitare și deplasările în funcție de numai 8 parametri care rămîn de determinat. Punînd celelalte condiții pe contur, obținem 4 relații, care conțin variabila ca argument al liniilor iperbolice. Vom dezvolta aceste linii iperbolice în serii simple Fourier, alegînd perioadele astfel ca să nu avem puncte de discontinuitate (deci funcția lui Airy apare sub forma unei serii duble Fourier, care prezintă particularitatea că nu fiecare termen al seriei este o integrală a ecuației biarmonice ci numai suma seriei aproximează o integrală a acestei ecuații). În felul acesta, condițiile pe contur vor fi — de pildă — de forma

$$\sum_n \sum_m f(n, m) \sin \beta_m x = \sum_m \bar{f}(m) \sin \beta_m x. \qquad (14)$$

Această serie dublă este absolut convergentă, ceea ce se poate verifica în fiecare caz în parte. Putem deci inversa ordinea de sumare ; relația (14) ne va da

$$\sum_n f(n, m) = \bar{f}(m). \qquad (15)$$

Obținem astfel 8 sisteme de ecuațiii liniare infinite. Vom putea elimina cîte un șir de necunoscute între două ecuații. Rămînem cu 4 sisteme de ecuații liniare care trebuie rezolvate. Putem alege parametrii de determinat astfel ca aceste sisteme de ecuații liniare să fie simetrice în raport cu diagonala principală. În acest caz calculul coeficienților sistemelor este mai simplu și ele se pot rezolva folosind algoritmul lui Gauss. Pe de altă parte, coeficienții necunoscutelor de pe diagonala principală sînt mult mai mari decît ceilalți coeficienți. Condiția suficientă de convergență a lui Wittmeyer este îndeplinită. Fiecare sistem de ecuații se poate rezolva prin metode iterative. În general nu este nevoie de mai mult de 2—3 aproximații, sistemul fiind rapid convergent din acest punct de vedere. Obținem astfel toți parametrii care trebuie determinați.

În cazul cînd avem o axă de simetrie sau antisimetrie, rămîn numai 8 șiruri de constante de determinat, deci două sisteme de ecuații infinite de rezolvat. Dacă avem două axe de simetrie sau antisimetrie, rămîn numai 4 șiruri de constante de determinat și un singur sistem de ecuații infinite de rezolvat. De remarcat că, în cazul general, cele 4 sisteme de ecuații nu sînt independente unele de altele și nu se pot rezolva separat. Descompunînd încărcările în cîte 4 cazuri de încărcare, după proprietățile de simetrie și antisimetrie, obținem tot 4 sisteme de ecuații infinite de rezolvat, care sînt însă independente unele de altele, referindu-se fiecare la cîte un singur șir de parametri.

4. **Modul practic de lucru.** În primul rînd se stabilesc cazurile de încărcare elementare, care prin suprapunerea efectelor ne dau încărcarea totală din problema de studiat, reprezentîndu-se cu ajutorul seriilor simple Fourier. Se calculează apoi coeficienții sistemelor de ecuații infinite și se rezolvă aceste sisteme prin iterație. De remarcat că, în general, este suficient să luăm 4—5 necunoscute, de pildă necunoscutele B_1, B_2, B_3, B_4. Cu ajutorul relațiilor care leagă unele necunoscute de altele putem calcula $D_i = f(B_1, B_2, B_3, B_4)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ de pildă. Dacă avem nevoie de mai mulți parametri, calculăm $B_5 = f(D_1, D_2, D_3, D_4)$ apoi $D_5 = f(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ și așa mai departe, din aproape în aproape. Procedeul este suficient de exact. O dată calculate șirurile de coeficienți ai funcției eforturilor, putem obține eforturile unitare și deplasările. Problema este astfel complet rezolvată.

Pentru o rapiditate mai mare de calcul se introduc unele funcții raționale și iperbolice care se repetă și se pot întabula. Ele depind, în general, de raportul λ și de poziția funcției în cadrul dezvoltării în serie.

5. **Exemplu de calcul.** Vom da ca exemplu modul în care se calculează

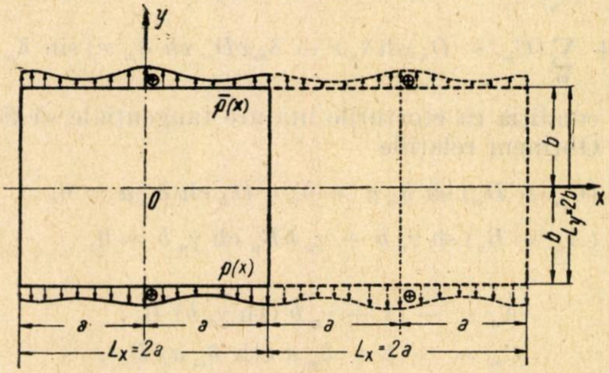


Fig. 2

cazul de încărcare nr. 1 : încărcare normală, simetrică în raport cu ambele axe de coordonate (reprezentăm încărcarea generic, printr-o sarcină distribuită — fig. 2).

Alegem ca perioade $L_x = 2a$ şi $L_y = 2b$ pentru cele două direcţii. Folosind notaţia (12), reprezentăm încărcarea sub forma

$$\overline{p}\,(x) = p(x) = b_0 + \sum_n b_n \cos \gamma_n x. \tag{16}$$

Condiţiile la limită (13) se scriu sub forma

$$\begin{aligned} x = \pm\, a : \ \sigma_x = 0\,;\ \tau_{xy} = 0, \\ y = \pm\, b : \ \sigma_y = \overline{p}\,(x)\,;\ \tau_{xy} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

Echilibrul global al grinzii perete se verifică.

Alegem o funcţie a eforturilor de forma

$$\begin{aligned} F(x, y) = \sum_n \frac{1}{\gamma_n^2} (A_n \operatorname{ch} \gamma_n y + \gamma_n y B_n \operatorname{sh} \gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\ + \sum_m \frac{1}{\delta_m^2} (C_m \operatorname{ch} \delta_m x + \delta_m x D_m \operatorname{sh} \delta_m x) \cos \delta_m y + \frac{1}{2} (K_1 x^2 + K_2 y^2) \end{aligned} \tag{18}$$

pară în raport cu ambele variabile. Rezultă eforturile unitare

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sum_n [(A_n + 2B_n) \operatorname{ch}\gamma_n y + \gamma_n y B_n \operatorname{sh} \gamma_n y] \cos\gamma_n x - \\ - \sum_m (C_m \operatorname{ch} \delta_m x + \delta_m x D_m \operatorname{sh} \delta_m x) \cos \delta_m y + K_2\,, \\ \sigma_y = - \sum_n (A_n \operatorname{ch} \gamma_n y + \gamma_n y B_n \operatorname{sh} \gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\ + \sum_m [(C_m + 2D_m) \operatorname{ch} \delta_m x + \delta_m x D_m \operatorname{sh} \delta_m x] \cos \delta_m y + K_1\,, \\ \tau_{xy} = \sum_n [(A_n + B_n) \operatorname{sh} \gamma_n y + \gamma_n y B_n \operatorname{ch} \gamma_n y] \sin \gamma_n x + \\ + \sum_m (C_m + D_m) \operatorname{sh} \delta_m x + \delta_m x D_m \operatorname{ch} \delta_m x] \sin \delta_m y. \end{aligned} \tag{19}$$

Punem condiţia ca eforturile unitare tangenţiale să fie nule pe cele patru laturi. Obţinem relaţiile

$$\begin{aligned} (C_m + D_m) \operatorname{sh} \delta_m a + \delta_m a D_m \operatorname{ch} \delta_m a = 0, \qquad (a) \\ (A_n + B_n) \operatorname{sh} \gamma_n b + \gamma_n b B_n \operatorname{ch} \gamma_n b = 0, \end{aligned}$$

care ne dau

$$\begin{aligned} A_n = - (1 + \gamma_n b \operatorname{cth} \gamma_n b)\, B_n\,, \\ C_m = - (1 + \delta_m a \operatorname{cth} \delta_m a)\, D_m\,. \end{aligned} \tag{20}$$

În acest caz vom putea scrie

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sum_n B_n[(1 - \gamma_n b \operatorname{cth} \gamma_n b) \operatorname{ch} \gamma_n y + \gamma_n y \operatorname{sh} \gamma_n y] \cos \gamma_n x + \\ + \sum_m D_m[(1 + \delta_m a \operatorname{cth} \delta_m a) \operatorname{ch} \delta_m x - \delta_m x \operatorname{sh} \delta_m x] \cos \delta_m y + K_2\,, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sum_n B_n[(1+\gamma_n b \operatorname{cth}\gamma_n b)\operatorname{ch}\gamma_n y - \gamma_n y \operatorname{sh}\gamma_n y]\cos\gamma_n x + \\ &+ \sum_m D_m[(1-\delta_m a\operatorname{cth}\delta_m a)\operatorname{ch}\delta_m x + \delta_m x\operatorname{sh}\delta_m x]\cos\delta_m y + K_1\,, \\ \tau_{xy} &= -\sum_n B_n(\gamma_n b\operatorname{cth}\gamma_n b\operatorname{sh}\gamma_n y - \gamma_n y\operatorname{ch}\gamma_n y)\sin\gamma_n x - \\ &- \sum_m D_m(\delta_m a\operatorname{cth}\delta_m a\operatorname{sh}\delta_m x - \delta_m x\operatorname{ch}\delta_m x)\sin\delta_m y.\end{aligned} \tag{21}$$

Punînd în (21) condițiile pentru eforturile unitare normale, obținem relațiile

$$\begin{gathered}\sum_n B_n\cos n\pi\,[(1-\gamma_n b\operatorname{cth}\gamma_n b)\operatorname{ch}\gamma_n y + \gamma_n y\operatorname{sh}\gamma_n y] + \\ + \sum_m D_m\left(\operatorname{ch}\delta_m a + \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right)\cos\delta_m y + K_2 = 0, \\ \sum_n B_n\left(\operatorname{ch}\gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}\gamma_n b}\right)\cos\gamma_n x + \sum_m D_m\cos m\pi\,[(1-\delta_m a\operatorname{cth}\delta_m a)\operatorname{ch}\delta_m x + \\ + \delta_m x\operatorname{sh}\delta_m x] + K_1 = b_0 + \sum_n b_n\cos\gamma_n x.\end{gathered} \tag{b}$$

Dezvoltăm în serie liniile iperbolice. Relațiile de mai sus se vor scrie sub forma

$$\begin{gathered}\frac{4}{b}\sum_n B_n\gamma_n\cos n\pi\operatorname{sh}\gamma_n b\sum_m\frac{\delta_m^2\cos m\pi\cos\delta_m y}{(\gamma_n^2+\delta_m^2)^2} + \\ + \sum_m D_m\left(\operatorname{ch}\delta_m a + \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right)\cos\delta_m y + K_2 = 0, \\ \sum_n B_n\left(\operatorname{ch}\gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}\gamma_n b}\right)\cos\gamma_n x + \\ + \frac{4}{a}\sum_m D_m\delta_m\cos m\pi\operatorname{sh}\delta_m a\sum_i\frac{\gamma_n^2\cos n\pi\cos\gamma_n x}{(\gamma_n^2+\delta_m^2)^2} + K_1 = b_0 + \sum_n b_n\cos\gamma_n x.\end{gathered} \tag{c}$$

Inversînd ordinea de sumare, coeficienții seriilor trigonometrice obținute ne vor da

$$\begin{gathered}\frac{4\delta_m^2}{b}\cos m\pi\sum_i B_i\cos i\pi\operatorname{sh}\gamma_i b\frac{\gamma_i}{(\gamma_i^2+\delta_m^2)^2} + D_m\left(\operatorname{ch}\delta_m a + \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}\delta_m a}\right) = 0, \\ B_n\left(\operatorname{ch}\gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}\gamma_n b}\right) + \frac{4\gamma_n^2}{a}\cos n\pi\sum_l D_l\cos l\pi\operatorname{sh}\delta_l a\,\frac{\delta_l}{(\gamma_n^2+\delta_l^2)^2} = b_n\end{gathered} \tag{d}$$

și condițiile

$$K_1 = b_0\,;\quad K_2 = 0. \tag{22}$$

Vom introduce notațiile

$$\overline{B}_n = B_n \cos n\pi \frac{\operatorname{sh} \gamma_n b}{\gamma_n b}\,; \quad \overline{D}_m = D_m \cos m\pi \frac{\operatorname{sh} \delta_m a}{\delta_m a}\,. \tag{23}$$

Obținem următorul sistem de ecuații cu o dublă infinitate de necunoscute

$$\begin{gathered} 4\delta_m^2 \sum_i \overline{B}_i \frac{\gamma_i^2}{(\gamma_i^2 + \delta_m^2)^2} + \overline{D}_m \left(\operatorname{cth} \delta_m a + \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh}^2 \delta_m a} \right) \delta_m a = 0, \\ \overline{B}_n \left(\operatorname{cth} \gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh}^2 \gamma_n b} \right) \gamma_n b + 4\gamma_n^2 \sum_l \overline{D}_l \frac{\delta_l^2}{(\gamma_n^2 + \delta_l^2)^2} = b_n \cos n\pi, \end{gathered} \tag{e}$$

care se poate scrie sub forma*)

$$\begin{aligned} &\sum_i \mu_{mi}^2 \overline{B}_i + \varkappa_2'(m\lambda) \overline{D}_m = 0 &&(m, i = 1, 2, 3, \ldots), \\ &\chi_2'(n\lambda') \overline{B}_n + \sum_l \mu_{ln}^2 \overline{D}_l = (-1)^n b_n &&(n, l = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned} \tag{24}$$

De aici scoatem

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{\chi_2'(n\lambda')} \left[(-1)^n b_n - \sum_l \mu_{ln}^2 \cdot \overline{D}_l \right], \\ \overline{D}_m &= -\frac{1}{\chi_2(m\lambda)} \sum_i \mu_{mi}^2 \overline{B}_i \,. \end{aligned} \tag{25}$$

Introducînd în prima ecuație (24), obținem sistemul

$$\sum_l a_{ml} \overline{D}_l = c_m \tag{26}$$

cu

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\mu_{mi}^2 \mu_{li}^2}{\chi_2'(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm},\ m \neq l), \\ a_{mm} &= \chi_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^4}{\chi_2'(i\lambda')}\,; \\ c_m &= -\sum_k (-1)^k b_k \frac{\mu_{mk}^2}{\chi_2'(k\lambda')} \,. \end{aligned} \tag{26'}$$

---

*) Aici și în cele ce urmează vom folosi funcțiile raționale și iperbolice introduse și date în Anexă ; aceste funcții se găsesc intabulate pentru diverse valori ale variabilei și ale raportului λ în lucrarea [39], depusă la biblioteca Institutului de construcții, București.

Introducînd în a doua ecuație (24), obținem sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n \tag{27}$$

cu

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\mu_{ln}^2 \mu_{li}^2}{\chi_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in}, \; n \neq i),$$

$$b_{nn} = \chi_2'(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^4}{\chi_2(l\lambda)}, \tag{27'}$$

$$d_n = (-1)^n b_n .$$

Se observă că ambele sisteme sînt simetrice în raport cu diagonala principală.

Folosind coeficienții $\overline{B}_n$, $\overline{D}_m$ dați de sistemele de ecuații de mai sus, putem scrie funcția eforturilor sub forma

$$F(x, y) = -\sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_7(\gamma_n y) \cos \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_7'(\delta_m x) \cos \delta_m y + \frac{b_0}{2} x^2 \tag{28}$$

Luînd

$$\overline{B}_n = (-1)^n \frac{b_n}{\chi_2'(n\lambda')} \; ; \quad \overline{D}_m = 0, \tag{29}$$

ceea ce corespunde cu a doua ecuație din sistemul (24), obținem — ca un caz particular — rezultatele cunoscute pentru grinda perete pe o infinitate de reazeme. Această soluție verifică toate condițiile pe contur, afară de condițiile pentru eforturi unitare normale σ_x pe laturile $x = \pm a$ (se verifică numai condițiile globale de echilibru : forță axială și moment încovoietor, deci echilibrul pe panou). Aceasta este aproximația care se face, folosind rezultatele de mai sus la grinzile pereți cu o singură deschidere ; principiul lui B. de St. Venant ne arată că rezultatele pot fi admise numai pentru $\lambda > 2$.

Eforturile unitare vor fi date de

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_9(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_7'(\delta_m x) \cos \delta_m y, \\ \sigma_y &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_7(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_9'(\delta_m x) \cos \delta_m y + b_0, \\ \tau_{xy} &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_8'(\delta_m x) \sin \delta_m y. \end{aligned} \tag{30}$$

Folosind relațiile (3) și ținînd seama de faptul că în cazul unei funcții a eforturilor de forma aleasă de noi se pot lua integralele particulare ale ecuației (4) egale cu zero, obținem componentele deplasării sub forma

$$
\begin{aligned}
Eu &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{9-7}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{6-8}(\delta_m x) \cos \delta_m y - \mu b_0 x, \\
Ev &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{6-8}(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{9-7}(\delta_m x) \sin \delta_m y + b_0 y.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Dezvoltările în serie (30) care ne dau eforturile unitare $\sigma_x(x, \pm b)$; $\sigma_y(\pm a, y)$ sînt lent convergente pe contur. Într-adevăr relațiile (21) ne dau

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x, \pm b) &= \sum_n B_n \left(\operatorname{ch} \gamma_n b - \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh} \gamma_n b} \right) \cos \gamma_n x + \\
&+ \sum_m D_m \cos m\pi \, [(1 + \delta_m a \operatorname{cth} \delta_m a) \operatorname{ch} \delta_m x - \delta_m x \operatorname{sh} \delta_m x).
\end{aligned}
\tag{f}
$$

Ținînd seama de a doua condiție (*b*), de dezvoltarea (16) și de notațiile (23) vom putea scrie

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x, \pm b) &= \overline{p}(x) - b_0 - 2 \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \left(\frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh} \gamma_n b} \right)^2 \cos \gamma_n x + \\
&+ 2 \sum_m \overline{D}_m \frac{\delta_m a}{\operatorname{sh} \delta_m a} (\delta_m a \operatorname{cth} \delta_m a \operatorname{ch} \delta_m x - \delta_m x \operatorname{sh} \delta_m x).
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Analog obținem

$$
\begin{aligned}
\sigma_y(\pm a, y) &= b_0 + 2 \sum_n \overline{B}_n \frac{\gamma_n b}{\operatorname{sh} \gamma_n b} (\gamma_n b \operatorname{cth} \gamma_n b \operatorname{ch} \gamma_n y - \gamma_n y \operatorname{sh} \gamma_n y) - \\
&- 2 \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \left(\frac{\delta_m a}{\operatorname{sh} \delta_m a} \right)^2 \cos \delta_m y,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

ambele dezvoltări fiind rapid convergente. Dacă ne situăm în cazul relațiilor (29) și ținem seama de expresia funcției $\chi'_2(n\ \lambda')$ obținem

$$
\sigma_x(x, \pm b) = \overline{p}(x) - b_0 - \sum_n b_n \frac{4\gamma_n b}{\operatorname{sh} 2\gamma_n b + 2\gamma_n b} \cos \gamma_n x
\tag{34}
$$

rezultat dat de Fr. Dischinger [10] pentru grinzile pereți pe o infinitate de reazeme.

După cum se poate ușor verifica, pentru $\lambda < 1$ dezvoltările în serie din relațiile (33) și (34) pot fi practic neglijate și obținem

$$
\sigma_x(x, \pm b) \cong \overline{p}(x) - b_0 ; \quad \sigma_y(\pm a, y) \cong b_0,
\tag{35}
$$

rezultate analoge cu cele de la grinzile pereți pe o infinitate de reazeme. Acest rezultat se explică de altfel cu ușurință prin aplicarea principiului lui B. de St. Venant pentru sarcinile $\overline{p}(x) - b_0$ a căror rezultantă este nulă pe laturile $y = \pm b$.

Cu ajutorul formulelor (28), (30), (31), (32) și (33) se poate rezolva orice problemă care intră în cazul de încărcare nr. 1.

Analog se studiază și celelalte 11 cazuri de încărcare, pentru care vom da numai rezultatele finale.

ANEXĂ

1. **Funcții raționale.** Vom introduce următoarele funcții

$$\mu_{mn} = \frac{2\gamma_n \delta_m}{\gamma_n^2 + \delta_m^2} \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\mu'_{mn} = \frac{2\alpha_n \beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \qquad (n, m = 1, 3, 5, \ldots),$$

$$\nu_{mn} = \frac{2\alpha_n \delta_m}{\alpha_n^2 + \delta_m^2} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots ;\ m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

$$\nu'_{mn} = \frac{2\gamma_n \beta_m}{\gamma_n^2 + \beta_m^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots ;\ m = 1, 3, 5, \ldots).$$

Raportul laturilor va fi dat de

$$\lambda = \frac{a}{b} \quad ; \quad \lambda' = \frac{1}{\lambda} = \frac{b}{a} \cdot \tag{2}$$

Observăm că toate funcțiile (1) sînt de forma

$$f(m, n, \lambda) = \frac{2mn\lambda}{n^2 + m^2\lambda^2} = \frac{2mn\lambda'}{n^2\lambda'^2 + m^2} \tag{1'}$$

pentru diverse valori ale întregilor m, n. Dacă notăm

$$\omega = \frac{m}{n}\lambda \quad ; \quad \omega' = \frac{n}{m}\lambda = \frac{1}{\omega} \tag{3}$$

funcția (1′) se va scrie sub forma

$$f(\omega) = \frac{2\omega}{1 + \omega^2} \cdot \tag{1''}$$

Graficul acestei funcții (fig. 3) ne arată că tinde asimptotic către zero. Este satisfăcută următoarea relație funcțională

$$f(\omega') = f\left(\frac{1}{\omega}\right) = f(\omega), \tag{4}$$

ceea ce ne arată că este suficient să întabulăm valorile funcției pentru $\omega \leqq 1$.

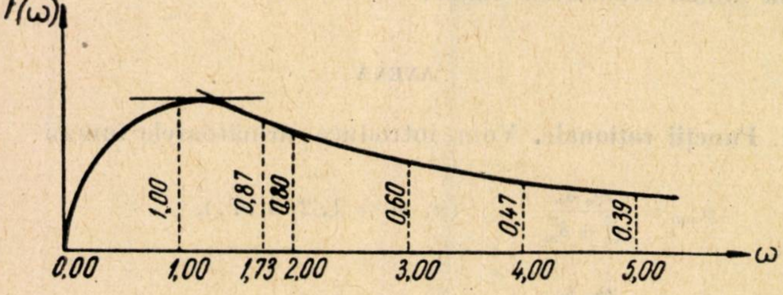


Fig. 3

2. **Funcții iperbolice.** Vom introduce următoarele funcții

$$\Theta_1(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}\vartheta\pi}\left[(2 + \vartheta\pi \operatorname{th}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_2(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}\vartheta\pi}\left[(1 + \vartheta\pi \operatorname{th}\vartheta\pi)\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_3(\vartheta\pi\zeta) = -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}\vartheta\pi}(\vartheta\pi \operatorname{th}\vartheta\pi \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta), \tag{5}$$

$$\Theta_4(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}\vartheta\pi}\left[(1 - \vartheta\pi \operatorname{th}\vartheta\pi)\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_5(\vartheta\pi\zeta) = -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}\vartheta\pi}\left[(2 - \vartheta\pi \operatorname{th}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta\right].$$

$$\Theta_6(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}\left[(2 + \vartheta\pi \operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_7(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}\left[(1 + \vartheta\pi \operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_8(\vartheta\pi\zeta) = -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}(\vartheta\pi \operatorname{cth}\vartheta\pi \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta - \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta), \tag{5'}$$

$$\Theta_9(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}\left[(1 - \vartheta\pi \operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta\right],$$

$$\Theta_{10}(\vartheta\pi\zeta) = -\frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}\left[(2 - \vartheta\pi \operatorname{cth}\vartheta\pi)\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta + \vartheta\pi\zeta \operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta\right].$$

$$\begin{aligned}\Theta_{11}(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta}{\operatorname{ch}\vartheta\pi} \quad ; \quad \Theta_{12}(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta}{\operatorname{ch}\vartheta\pi},\\ \Theta_{13}(\vartheta\pi\zeta) &= \frac{\operatorname{ch}\vartheta\pi\zeta}{\operatorname{sh}\vartheta\pi} \quad ; \quad \Theta_{14}(\vartheta\pi\zeta) = \frac{\operatorname{sh}\vartheta\pi\zeta}{\operatorname{sh}\vartheta\pi}.\end{aligned} \tag{5''}$$

Fie coordonatele reduse

$$\xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{b}. \tag{6}$$

Notăm ($i = 1, 2, \ldots, 14$)

$$\begin{aligned}\Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Phi_i(\gamma_n y) \text{ pentru } \vartheta = n\lambda' \quad (n = 1,2,3,\ldots)\,;\ \zeta = \eta,\\ \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Phi_i'(\delta_m x) \text{ pentru } \vartheta = m\lambda \quad (m = 1,2,3,\ldots)\,;\ \zeta = \xi,\\ \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Psi_i(\alpha_n y) \text{ pentru } \vartheta = \frac{n}{2}\lambda' \quad (n = 1,3,5,\ldots)\,;\ \zeta = \eta,\\ \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) &= \Psi_i'(\beta_m x) \text{ pentru } \vartheta = \frac{m}{2}\lambda \quad (m = 1,3,5,\ldots)\,;\ \zeta = \xi.\end{aligned} \tag{7}$$

De asemenea, introducem notațiile

$$\Theta_{i-j}(\vartheta\pi\zeta) = \Theta_i(\vartheta\pi\zeta) - \mu\Theta_j(\vartheta\pi\zeta), \tag{8}$$

unde μ este coeficientul lui Poisson ; analog pentru $\Phi_{i-j}(\gamma_n y)$; $\Phi'_{i-j}(\delta_m x)$; $\Psi_{i-j}(\alpha_n y)$; $\Psi'_{i-j}(\beta_m x)$.

Pentru ușurința calculului, remarcăm relațiile diferențiale

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_1(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} &= \Theta_2(\vartheta\pi\zeta) \quad ; \quad \frac{d\Theta_2(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = -\Theta_3(\vartheta\pi\zeta),\\ \frac{d\Theta_3(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} &= \Theta_4(\vartheta\pi\zeta) \quad ; \quad \frac{d\Theta_4(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = -\Theta_5(\vartheta\pi\zeta).\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_6(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} &= \Theta_7(\vartheta\pi\zeta) \quad ; \quad \frac{d\Theta_7(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = -\Theta_8(\vartheta\pi\zeta),\\ \frac{d\Theta_8(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} &= \Theta_9(\vartheta\pi\zeta) \quad ; \quad \frac{d\Theta_9(\vartheta\pi\zeta)}{d(\vartheta\pi\zeta)} = -\Theta_{10}(\vartheta\pi\zeta).\end{aligned} \tag{9'}$$

Vom nota

$$\begin{aligned}\Theta_4(\vartheta\pi) &= \varphi(\vartheta\pi) = \left(\operatorname{th}\vartheta\pi + \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2\vartheta\pi}\right)\vartheta\pi,\\ \Theta_2(\vartheta\pi) &= \psi(\vartheta\pi) = \left(\operatorname{th}\vartheta\pi - \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2\vartheta\pi}\right)\vartheta\pi,\\ \Theta_7(\vartheta\pi) &= \chi(\vartheta\pi) = \left(\operatorname{cth}\vartheta\pi - \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2\vartheta\pi}\right)\vartheta\pi,\\ \Theta_9(\vartheta\pi) &= \varkappa(\vartheta\pi) = \left(\operatorname{cth}\vartheta\pi + \frac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2\vartheta\pi}\right)\vartheta\pi.\end{aligned} \tag{10}$$

De asemenea, introducem notațiile

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(m\lambda) &= \left(\operatorname{th} \beta_m a + \frac{\beta_m a}{\operatorname{ch}^2 \beta_m a}\right) \beta_m a \qquad (m = 1,3,5,\ldots),\\
\varphi_2(m\lambda) &= \left(\operatorname{th} \delta_m a + \frac{\delta_m a}{\operatorname{ch}^2 \delta_m a}\right) \delta_m a \qquad (m = 1,2,3,\ldots),\\
\varphi_1'(n\lambda') &= \left(\operatorname{th} \alpha_n b + \frac{\alpha_n b}{\operatorname{ch}^2 \alpha_n b}\right) \alpha_n b \qquad (n = 1,3,5,\ldots),\\
\varphi_2'(n\lambda') &= \left(\operatorname{th} \gamma_n b + \frac{\gamma_n b}{\operatorname{ch}^2 \gamma_n b}\right) \gamma_n b \qquad (n = 1,2,3,\ldots)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

și cele analoge pentru funcțiile ψ, χ, $\varkappa$.

Vom folosi, de asemenea, notațiile

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}(\vartheta\pi) &= \frac{\operatorname{th} \vartheta\pi}{\left(\operatorname{th} \vartheta\pi + \dfrac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2 \vartheta\pi}\right) \vartheta\pi},\\
\bar{\psi}(\vartheta\pi) &= \frac{\operatorname{th} \vartheta\pi}{\left(\operatorname{th} \vartheta\pi - \dfrac{\vartheta\pi}{\operatorname{ch}^2 \vartheta\pi}\right) \vartheta\pi},\\
\bar{\chi}(\vartheta\pi) &= \frac{\operatorname{cth} \vartheta\pi}{\left(\operatorname{cth} \vartheta\pi - \dfrac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2 \vartheta\pi}\right) \vartheta\pi},\\
\bar{\varkappa}(\vartheta\pi) &= \frac{\operatorname{cth} \vartheta\pi}{\left(\operatorname{cth} \vartheta\pi + \dfrac{\vartheta\pi}{\operatorname{sh}^2 \vartheta\pi}\right) \vartheta\pi}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

și cele analoge conform notațiilor (11)*).

Primită la redacție la 2 august 1956.

О РАСЧЕТЕ ОДНОПРОЛЕТНЫХ БАЛОК-СТЕНОК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

После краткого исторического обзора автор излагает общий метод для решения плоской задачи теорий упругости в прямоугольной области при некоторых условиях для усилий по контуру. Применяется интеграл бигармонического уравнения в форме двойного ряда Фурье, отли-

---

*) Notațiile din Anexă vor servi și pentru partea a doua a articolului, care urmează a fi publicat în numărul viitor al acestei reviste.

чающегося тем, что только сумма (а не каждый член) этого ряда приближается к бигармонической функции.

В этой первой части работы автор приводит пример расчета для балки-стенки, загруженной симметрично по отношению к своим двум осям. Результаты для других случаев нагрузки будут даны в дальнейшем.

SUR LE CALCUL DES POUTRES-PAROIS À UNE SEULE OUVERTURE

(RÉSÚMÉ)

Après un petit aperçu historique, l'auteur expose une méthode générale pour résoudre le problème plan de la théorie de l'élasticité dans le cas d'un domaine rectangulaire, pour des conditions quelconques dans les efforts aux limites. On emploie une intégrale de l'équation biharmonique sous la forme d'une double série Fourier, ayant la particularité que seule la somme (et non chaque terme) de la série est l'approximation d'une fonction biharmonique.

Dans cette première partie du travail, l'auteur donne un exemple de calcul pour une poutre-paroi, symétriquement chargée par rapport aux deux axes. Les résultats pour d'autres cas de chargement suivront.

BIBLIOGRAFIE

1. Airy G. B., *On the Strains in the Interior of Beams*. Phil. Trans., 1863, vol. 153,p. 49
2. Bay H., *Ueber den Spannungszustand in hohen Trägern und die Bewehrung von Eisebetontragwänden*. Dissertation, Stuttgart, 1931.
3. — *Der wandartige Träger auf unendlich viele Stüzten*. Ing. Arhiv, 1932, t. 3, p. 435.
4. Bleich F., *Der gerade Stab mit Rechteckquerschnitt als ebenes Problem*. Der Bauing 1923, an 4, caietul 9, p. 255 ; caietul 10, p. 304.
5. Bortsch *Sitzungsberichte der Akad. der Wissenschaften in Wien*, 1929.
6. — *Spannungen in Silowänden*, Festschrift zum 70 Geburtstag von Melan, 1929.
7. Cişmigiu A., *Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte şi a bolţilor cilindrice*. Ind. constr. şi a mat. de constr., 1955, t. VI, nr. 6, p. 332.
8. Craemer H., *Spannungen in hohen wandartigen Trägern unter besondere Berücksichtigung des Bunkerbaues*. Kongr. für Brücken u. Hochbau, 1929.
9. — *Spannungen in durchlaufenden Scheiben bei Vollbelastung sämtlicher Felder*. Beton u. Eisen, 1933, vol. 32, p. 237.
10. Dischinger Fr., *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens*, Abh. Intern. Ver. fur Brückenbau u. Hochbau, 1932, vol. I, p. 69.
11. Fadle J., *Die Selbstspannungs-Eigenwertfunktionen der quadratischen Scheibe*. Ing. Arcbiv. 1940, t. 11, p. 125.
12. Filon N. G., *On an Approximate Solution for the Bending of a Beam of Rectangular Cross-Section under any System of Load*. Phil. Trans, A. 1903, vol. 206, p. 63.
13. Girkmann K., *Flächentragwerke*. Viena, 1946—1948—1954—1956.
14. Goldenblat I. I., *Rasciot i konstruirovanie jelezobetonnîh balok-stenok*. Stroiizdat narkomstroia, Moscova, 1940.
15. Grinberg G.A., *O reşenii ploskoi zadaci teorii uprugosti i zadaci ob izghibe tonkoi plitî zakreplennîm konturom* DAN. SSSR, 1951, t. LXXVI, nr. 5, p. 661.
16. — *O metode predlojennom P.F. Papkovicem dlia reşenia ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia priamougolnoi oblasti i zadaci izghiba priamougolnoi tonkoi plitî*

s dvumia zakreplennîmi kronkami i o nekotorîh evgo obobşceniah. Prikl. mat. meh, 1953, t. XVII, nr. 2, p. 211.

17. Grinberg G.A., Lebedev N.N. i Ufliand I. S., *Metod reşenia obşcei bigarmoniceskoi zadaci dlia priamougolnoi oblasti pri zadanii na konture znacenii funkţii i eio normalnoi proizvodnoi.* Prikl. mat. i meh, 1953, t. XVII, vol. I. p. 73.
18. Hampe E., *Zur Berechnung beliebig begrenzten Scheiben* (Rahmenecken, Bogenscheibenbrüken u.s.w.) *mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.* Baupl. u. Bautechnik, martie 1955, an. 9, caiet 3, p. 127.
19. Kalmanok A. S., *K reşeniu zadaci o ploskom napriajennom sostoianii priamougolnoi plastinki.* Konstr. i mat. v. gorodskom stroitelstve, 1950, nr. 6, p. 70.
20. — *Stroitelnaia mehanika plastinok.* Maşstroiizdat, Moscova, 1950.
21. Kitover K.A., *Ob ispolzovanii spaţialnîh sistem bigarmoniceskih funkţii dlia reşenia nekotorîh zadaci teorii uprugosti.* Prikl. mat. i meh., 1952, t. XVI, nr. 6, p. 739.
22. — *Izghib vîsokih balok.*. Inj. sbornik, 1953, t. XVI, p. 199.
23. Lardy P., *Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte.* Schweitz. Bauz., 1949, vol. 67, nr. 15, p. 207; nr. 31, p. 419.
24. Lazarian V.A. *Ob odnom sluciae ploskogo izghiba korotkoi balki.* Tr. Kievskogo inj.— stroit. inst., 1936. vol. III, p. 289.
25. Li Chov, Conway H. D. a. Winter G., *Stresses in Deep Beams.* Proc. Amer. Soc. of Civ. Engr., mai 1952, nr. 127.
26. Lurie A. I., *K teorii tolstîh plit.*,, Prikl. mat. i meh., 1942, t. VI, nr. 2 – 3.
27. Moraru D., *Discuţii asupra unghiului optim de aşezare şi dimensionare a armăturii ridicate în console scurte conform S T A S 1546—50.* Standardizarea, 1955, t.VII, nr. 8, p. 15.
28. Papkovici P. F., *Ob odnoi forme reşenia ploskoi zadaci teorii uprugosti,* DAN SSSR, 1940, t. XXVII, nr. 4.
29. Parkus H., *Der wandartige Träger auf drei Stützen. Dissertation,* Oesterreichische Ing. Archiv, 1948, vol. II, caiet 3, p. 185.
30. Pickett G., Journ of. Appl. Mech, 1944, vol. II, A. p. 176.
31. Pîhtunov M. F., *Variaţionnî metod reşenia ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia odnosviaznoi oblasti, ogranicennoi, dvumia proizvodnîmi krivîmi i dvumia parallelnîmi priamîmi.* Inj. sbornik, 1953, t. XV, p. 43.
32. Prokopov V.K., *Ob odnoi ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia priamougolnoi oblasti.* Prikl. mat. i meh, 1952, t. XVI. nr. 6, p. 739.
33. Ribière, *Sur divers cas de la flexion des prismes rectangles. Thése.* Paris, 1889.
34. — *Sur la flexion des pièces épaisses.* C. R. Acad. Sci. Paris, 1898, t. 126, p. 402.
35. — *Sur la résistance des massifs épais.* C.R. Acad. Sci. Paris, 1898, t. 126, p. 1190.
36. Ruppeneit K.V., *Proverka procinosti potolocin kamer.* IAN SSSR, OTN, 1951, nr. 4, p. 579.
37. — *Nekotorie voprosî mehaniki gornîh porod.* Ugletehizdat, Moscova, 1954.
38. Seewald F., *Die Spannungen und Formänderungen von Balken mit Rechteckigem Querschnitt.* Abh. aus dem Aerodyn. Inst. Aachen, 1927,.
39. Teodorescu P. P., *Calculul grinzilor pereţi cu o singură deschidere în caz general de rezemare şi încărcare.* (autoreferatul disertaţiei pentru obţinerea titlului de cand. în ştiinţe tehnice Bucureşti, 1955.
40. — *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 2, februarie 1956, p. 285
41. — *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, 1956, p. 655.
42. — *Quelques considerations concerhant le problème plan de la théorie de l'élasticité,* Bull. Math, 1957, nr. 1.
43. Timpe A., *Probleme der Spannungsverteilung in ebenen Systemen, einfach gelöst mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.* Z. math. u. Phys, Dissertation, 1905, vol. 52, p. 348.
44. Varvak P.M., *Razvitie i prilojenie metodî setok k rascio tu plastinok.* IAN Ukr. SSR, Kiev, 1952, vol. II.
45. Vernescu P., *Determinarea solicitărilor grinzilor încărcate cu pereţi elastici.* Bul. ştiinţ. Inst. constr. 1953, an I. nr. 1, p. 14.
46. Wojtaszak, I.A., *The Calculation of Maximum Deflection, Moment and Shear for Uniformly Loaded Rectangular Plate with Clamped Edges.* Journal of Appl. Mech., 1937, vol. 4. A. nr. 4, p. 173.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

ASUPRA COMPORTĂRII BAREI DREPTE SUPUSĂ LA SARCINI DINAMICE AXIALE

DE

S. RĂUTU şi FL. DINCĂ

În lucrarea de faţă se studiază comportarea unei bare cilindrice, articulată la capete, supusă la o sarcină axială $P(t)$, mărginită în intervalul $[0,\tau]$ şi nulă în afara acestui interval. Se acceptă următoarele ipoteze :

1) Sarcina se transmite instantaneu, deci sarcina axială este funcţie numai de timp nu şi de punct. Avînd în vedere că viteza reală de transmitere a efortului axial este de 5 000 m/s la oţel, pentru barele întîlnite curent în construcţii (care au o lungime relativ mică), aproximaţia este acceptabilă.

2) Se presupune că fenomenul este perfect elastic. Se neglijează deformaţiile plastice de contact, iar toate rezultatele obţinute sînt valabile numai pentru acele forţe, care dau naştere la deformaţii elastice.

3) Se presupune că deformaţiile sînt astfel încît curbura C se poate aproxima prin $\frac{d^2y}{dx^2}$.

4) Se neglijează influenţa forţelor tăietoare şi a momentelor de inerţie datorite rotaţiei.

5) Se presupune că $P(t)$ este o funcţie analitică într-un domeniu ce conţine originea.

Aproximaţiile introduse de ipotezele 2), 3) şi 4) fac ca săgeţile să fie mai mari decît cele reale. În consecinţă, calculul este acoperitor.

★

Ecuaţia diferenţială a mişcării se obţine din condiţia de echilibru, pe direcţia normalei la axa grinzii. Aceasta este

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

unde $y(x, t)$ este săgeata transversală a barei, E modulul de elasticitate al materialului barei, I momentul de inerție al secțiunii barei, $P(t)$ sarcina axială, m masa barei pe unitatea de lungime. În cazul barei de lungime l, alegînd sistemul de axe ca în figura 1, condițiile de rezemare sînt

$$\begin{aligned} y(0, t) &= y(l, t) = 0, \\ M(0, t) &= M(l, t) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

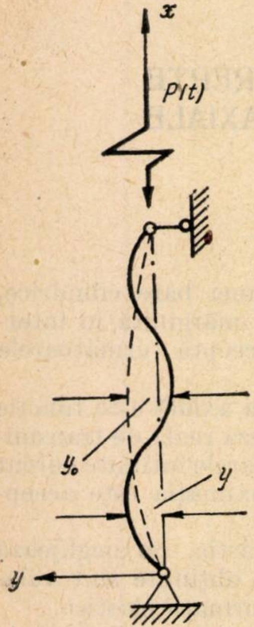


Fig. 1

Dacă se presupune că la $t = 0$ grinda este în echilibru, atunci viteza fiecărui punct va fi nulă. Se presupune de asemenea, că inițial bara are o deformație cunoscută. Deci condițiile inițiale ale mișcării sînt

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= Y(x), \\ y'(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Se caută soluții particulare ale ecuației (1) de forma

$$y_i(x, t) = f_i(t) \sin \lambda_i x. \tag{4}$$

Aceste soluții vor fi soluții particulare ale ecuației (1) dacă funcțiile $f(t)$ vor satisface ecuația diferențială

$$f_i''(t) + \omega_i^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{cr}^i}\right) f_i(t) = 0. \tag{5}$$

S-a notat

$$\omega_i = \lambda_i^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \tag{6}$$

$$P_{cr}^i = \lambda_i^2 EI. \tag{7}$$

Dacă se ia

$$y(x, t) = \sum_1^{\infty} y_i(x, t) \tag{8}$$

și dacă funcțiile $f(t)$ satisfac condițiile inițiale

$$\begin{aligned} f_i(0) &= A_i \\ f_i'(0) &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

unde A_i sînt coeficienții Fourier ai funcției $Y(x)$, dezvoltată în serie impară în intervalul $[-l, l]$. Dacă în plus se aleg λ_i de forma

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{l}, \tag{10}$$

atunci seria (8) satisface formal toate condițiile problemei. Dacă seria (8) este convergentă într-un anumit domeniu, atunci ea va reprezenta în acel domeniu tocmai soluția căutată.

Convergența va rezulta ca o consecință a următoarelor proprietăți ale soluției ecuației diferențiale (5) în condițiile la limită (9).

a) În condițiile inițiale $f(0) = f'(0) = 0$ ecuația (5) admite soluția banală $f(t) = 0$ (în domeniul de analiticitate al funcției $P(t)$).

Considerînd soluția ecuației (5) dezvoltată în serie de puteri în jurul originei

$$f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_i^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{11}$$

și ținînd seama de ecuația diferențială și condițiile inițiale se obține $f^n(0) = 0$.

b) Dacă $P(t)$ este analitică în $[0, \tau]$, atunci funcțiile $f(t)$ sînt egal mărginite.

Să facem mai întîi în ecuația (5) schimbarea de funcție

$$f_i(t) = A_i \, \varphi_i(t).$$

Ecuația diferențială și condițiile la limită devin

$$\varphi_i''(t) + \omega_i^2 \left(1 - \frac{P(t)}{P_{cr}^i}\right) \varphi_i(t) = 0,$$

$$\varphi_i(0) = 1 \quad \varphi_i'(0) = 0.$$

Înmulțind ecuația diferențială cu $\varphi'_i(t)$ și integrînd de la 0 la τ obținem

$$\frac{\varphi_i'^2(\tau)}{2} + \frac{\omega_i^2 \varphi_i^2(\tau)}{2} = \frac{\omega_i^2}{2} + \frac{\omega_i^2}{P_{cr}^i} \left\{ \left| \frac{P(\tau)\varphi_i^2(\tau)}{2} \right|_0^{\tau} - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} P'(t) \varphi_i^2(t) \, \mathrm{d}t \right\}.$$

Luînd în membrul doi al egalității de mai sus în loc de $P(\tau)$ și $P'(t)$, $M = \max P(t)$ în intervalul $[0, \tau]$ și $M' = \max |P'(t)|$ în $[0, \tau]$, apoi luînd modulele în membrul doi și renunțînd la $\varphi_i'^2(t)$ în membrul întîi, egalitatea de mai sus se transformă în inegalitatea (după simplificare cu ω_i^2)

$$\varphi_i^2 \leqslant \frac{P_{cr}^i}{P_{cr}^i - M} \left(1 + \frac{M'}{P_{cr}^i} \int_0^{\tau} \varphi_i^2 \, \mathrm{d}t\right); \; P_{cr}^i > M.$$

Vom folosi mai departe următoarea lemă [1] *).

Dacă o funcție $\psi(x)$ verifică inegalitatea

$$\psi(x) \leqslant L\left(1 + k \int_0^x |\psi(\xi)| \, |\chi(\xi)| \, d\xi\right)$$

---

*) p. 10.

cu $\chi(\xi)$ continuă, L și K constante pozitive, atunci $\psi(x)$ satisface inegalitatea

$$|\psi(x)| \leqslant L e^{kL\int_0^\infty |\chi(\xi)|\, d\xi}.$$

Comparînd se obține

$$\varphi_i^2(t) \leqslant \frac{P_{cr}^i}{P_{cr}^i - M} e^{\frac{M'\tau}{P-M}};$$

ținînd seamă că

$$P_{cr}^i = P_{cr}^1 i^2$$

rezultă că luînd i = primul termen pentru care primul factor este pozitiv se obține mărginirea căutată. Ținînd seama și de schimbarea de funcție făcută, rezultă proprietatea enunțată inițial. Mai mult, rezultă că funcțiile $f_i(t)$ tind către zero cînd i crește nemărginit.

Să revenim la problema convergenței seriei (8). Dacă în ecuația (5) introducem schimbarea de funcție

$$f_i(t) = A_i\, \varphi_i(t)$$

(conform proprietății a) această schimbare este posibilă oricare ar fi i). Fie $\mathfrak{M}$ marginea superioară din proprietatea precedentă, avem deci

$$\varphi_i(t) \leqslant \mathfrak{M} \tag{12}$$

pentru orice i. Atunci seria (8) este majorată de seria convergentă cu termen general $\mathfrak{M}\,|A_i|$. Însemnînd cu S suma seriei cu termen general $A_i|$ rezultă că pentru orice t avem inegalitatea

$$|y(x, t)| \leqslant S\,\mathfrak{M}, \tag{13}$$

adică, săgeata obținută în ipotezele adoptate este totdeauna mărginită. De asemenea rezultă că seria (8) este uniform convergentă pentru orice x și t în domeniul închis $0 \leqslant x \leqslant l$; $0 \leqslant t \leqslant \tau$, deci, această serie reprezintă tocmai soluția problemei.

Determinarea efectivă a funcției $f_i(t)$ se face simplu prin reprezentarea în serie

$$f_i(t) = \sum_0^\infty \frac{f_i^n(0)}{n!} t^n. \tag{14}$$

Coeficienții se obțin ținînd seama de condițiile inițiale și de ecuația (5)

$$\begin{aligned} &f_i(0) = A_i, \\ &f_i'(0) = 0, \\ &f_i''(0) = -\,\omega_i^2\left(1 - \frac{P(0)}{P_{cr}^i}\right) f_i(0). \\ &\vdots \end{aligned} \tag{15}$$

În cazul considerat ($P(t)$ analitică într-un domeniu ce conține origine) $f(t)$ este o funcție analitică complet determinată de valorile ei și ale derivatelor ei luate în origine, în tot domeniul de analiticitate al lui $P(t)$. Dacă în particular $P(t)$ este o funcție întreagă, rezultă că seria (8) are raza de convergență infinită.

Soluția problemei va fi

$$y(x, t) = \sum_{1}^{\infty} \sum_{1}^{\infty} \frac{f_i^{(J-1)}(0)}{(j-1)!} t^{J-1} \sin \frac{i\pi}{l} x. \tag{16}$$

După îndepărtarea bruscă a forței la $t = t_0$ ecuația diferențială a mișcării este

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0, \tag{1'}$$

condițiile (2) rămîn aceleași, condițiile (3) se modifică corespunzător valorilor lui $y_{t=t_0}(x, t)$ și $y'_{t=t_0}(x, t)$. Rezultă că soluția pentru $t > t_0$ va fi de forma

$$y = \sum_{1}^{\infty} (A \cos \omega_i t + B \sin \omega_i t) \sin \frac{i\pi}{l} x. \tag{17}$$

Constantele A și B sînt determinate de ecuațiile

$$A_i \cos \omega_i t_0 + B_i \sin \omega_i t_0 = \sum_{1}^{\infty} \frac{f_i^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} t_0^{n-1}, \tag{18}$$

$$- A_i \omega_i \sin \omega_i t_0 + B_i \omega_i \cos \omega_i t_0 = \sum_{1}^{\infty} \frac{f_i^{n}(0)}{(n-1)!} t_0^{n-1},$$

și bara vibrează propriu după ecuația (17).

Exemplu de calcul

Fie $P(t) = 4 M_1 \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t^2}{\tau^2} \right)$,

unde M_1 este valoarea maximă a forței de șoc și

$$Y(x) = 4 \sigma \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right),$$

unde s-a notat prin σ săgeata parabolei inițiale ; notînd încă

$$\frac{M_1}{P^1_{cr}} = n^2$$

se obține

$$f_{2i-1} \leqslant 1{,}03\, \sigma \frac{1}{(2i-1)^2} \frac{1}{\sqrt{(2i-1)^2 - n^2}} e^{\frac{2n}{i^2-n^2}}.$$

Dacă în seria (8) considerăm numai primii cinci termeni, atunci notînd prin R ceea ce se neglijează, se obține prin evaluarea de mai sus

$$R \leqslant 0,007\ \sigma$$

dacă

$$n^2 = 3\,; \quad \omega_1 = 50.$$

Pe de altă parte, seria care reprezintă pe $f\,(t)$ este

$$f_i\,(t) = A_i\,(\cos \omega_i\, t + \frac{i^2 4 n^2}{\omega_i \tau}\,\frac{(\omega_1\, t)^3}{3\,!} + \ldots).$$

Termenii acestei serii descrescînd foarte rapid, se poate, de la caz la caz, evalua $f\,(t)$ printr-un număr oarecare de termeni de la început.

Primită la redacție la 19 octombrie 1956.

О ПОВЕДЕНИИ ПОДВЕРГНУТОГО ОСЕВЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ НАГРУЗКАМ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе рассматривается поведение стержня, лежащего на двух опорах и подвергнутого действию осевого удара.

Для решения проблемы предположено, что изменение осевой нагрузки во времени может быть представлено аналитической функцией в области, в которой происходит явление.

Для этого случая дается точное решение.

SUR LE COMPORTEMENT DE LA BARRE DROITE SOUMISE À DES EFFORTS DYNAMIQUES AXIAUX

(RÉSUMÉ)

Ce travail s'occupe de l'étude du comportement d'une barre simplement appuyée, sous l'action d'une charge de choc axial.

Pour arriver à la solution, on a admis que la variation avec le temps de la charge axiale peut-être représentée par une fonction analytique, dans le domaine où a lieu le phénomène.

On a donné la solution exacte de ce cas.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Halanay, *Introducere in teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale* Ed. tehnică, București, 1956.
2. I. I. Goldenblat, *Sovremennîie problemî Kolebanii i usteicivesti inginernî soorujenii.* Stroiizdat, Moscova, 1947.
3. E. A. Beilin, i G. In. Djanelidze, *Obzor robot po dinamiceskoi ustoicivosti uprughih sistem.* P.M.M., 1952, vol. XVI.
4. N. J. Hoff, *Buckling and Stability.* Journal of the Royal Aeronautical Society, 1954, vol. 58.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

ASUPRA DEFORMĂRII TRANSVERSALE A UNEI BARE SOLICITATE PRIN ŞOC AXIAL

DE

E. PROCOPOVICI

În lucrarea de față se examinează problema comportării dinamice a unei bare svelte elastice, solicitate printr-un șoc axial. În prima parte, problema este tratată cu ajutorul teoriei elementare a încovoierii barelor sub sarcină axială, examinîndu-se cazul unei bare dublu articulate. Se obțin soluții pentru cazul unor șocuri de formă dreptunghiulară și triunghiulară. Concluziile ce rezultă din analiza soluțiilor obținute ridică necesitatea de a se cerceta problema pe baza unei teorii mai complete a încovoierii barelor, care să țină seama de efectele inerției de rotație și a forțelor tăietoare, lucru care se face în partea a doua a lucrării.

În încheiere se propune o metodă aproximativă de rezolvare pentru cazul unui șoc de formă oarecare, bazată pe soluțiile particulare obținute.

NOTAŢII

y — deformaţia transversală a barei
y_0 — deformaţia transversală iniţială a barei
EJ — rigiditatea la încovoiere a barei
ρ — densitatea materialului barei
A — secţiunea transversală a barei
ν — coeficientul de frecare între bară şi mediul exterior
k — constanta elastică a mediului exterior
L — lungimea barei
P — forţa axială ce solicită bara
φ — unghiul tangentei la fibra neutră datorită încovoierii
ψ — unghiul tangentei la fibra neutră datorită forfecării
$\frac{GA}{R'}$ — rigiditatea la forfecare transversală a barei
λ — gradul de svelteţe $\lambda = L/\sqrt{J/A}$
λ_n — gradul de svelteţe redus $\lambda_n = \lambda/\pi^2 n^2$.

1. Teoria elementară

Admițîndu-se ipotezele uzuale și în plus faptul că forța axială se transmite instantaneu în lungul barei, se obține ecuația diferențială

$$EJ\frac{\partial^4(y-y_0)}{\partial x^4}+P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\nu\frac{\partial y}{\partial t}+ky=0, \tag{1}$$

în care am ținut seama de reacțiunea elastică și frecarea datorită unui mediu exterior barei.

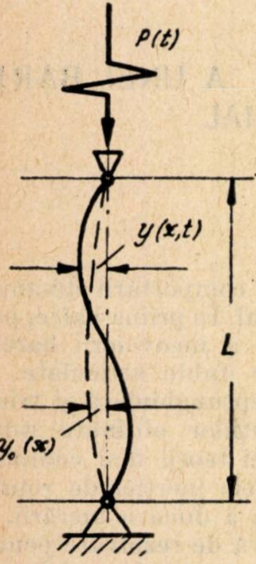


Fig. 1

Condițiile inițiale și cele la limită corespund cazului unei bare dublu articulate (fig. 1) și sînt respectiv

$$\left.\begin{aligned}
&y\ (0,t)=y_0\,(0,t)=0,\\
&y\ (L,t)=y_0\,(L,t)=0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y\,(0,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y_0\ (0,t)=0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y\,(L,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,y_0\,(L,t)=0,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&y\ (x,\ 0)=y_0\,(x),\\
&\frac{\partial}{\partial t}\,y\,(x,0)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Operînd transformata Fourier [*]

$\overline{y}=\int_0^L y\,(x,t)\sin\frac{\pi n x}{L}\,dx$ asupra funcției $y\,(x,t)$ în ecuațiile (1), (2), (3) și ținînd seama de notațiile

$$\frac{\nu}{\rho A}=\mu,\ EJ\frac{\pi^2 n^2}{L^2}=P_n,\ \frac{kL^2}{\pi^2 n^2}=k_n,\ \frac{\pi^2 n^2}{\rho AL^2}=\gamma_n, \tag{4}$$

se obține ecuația diferențială a funcției transformate

$$\overline{y}''+\mu\,\overline{y}'+\gamma_n^2\,(k_n+P_n-P\,(t))\,\overline{y}=\gamma_n^2\,P_n\,\overline{y}_0 \tag{5}$$

cu condițiile (3) transformate

$$\overline{y}=\overline{y}_0,\ \overline{y}'=0\quad (\text{pentru}\ t=0). \tag{6}$$

Integrarea chiar aproximativă a ecuației (5) pentru $P\,(t)$ oarecare este dificilă. Menționăm că această ecuație pentru cazul $\mu=0$ este cercetată pe larg în lucrările [1] și [8], iar un număr mare de soluții pentru diferite forme ale funcției $P\,(t)$ se găsesc în lucrarea [5]. În cele ce urmează ne vom mărgini la cîteva cazuri simple ale funcției $P\ (t)$ arătate în figura 2 *a*, *b* și *c*.

---

[*] Vezi pentru detalii [10].

Cazul *a*). În acest caz, în intervalul $t > 0$ ecuația (5) devine o ecuație cu coeficienți constanți, a cărei soluție se scrie direct, obținîndu-se pentru condițiile (6) soluția

$$\bar{y}\ (t) = \frac{\bar{y}_0}{k_n + P_n - P_0}\left\{(k_n - P_0)\, e^{-\frac{1}{2}\mu t}\left[\frac{\mu}{-\Gamma}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\,\Gamma\, t + \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\Gamma t\right] + P_n\right\}. \qquad (7)$$

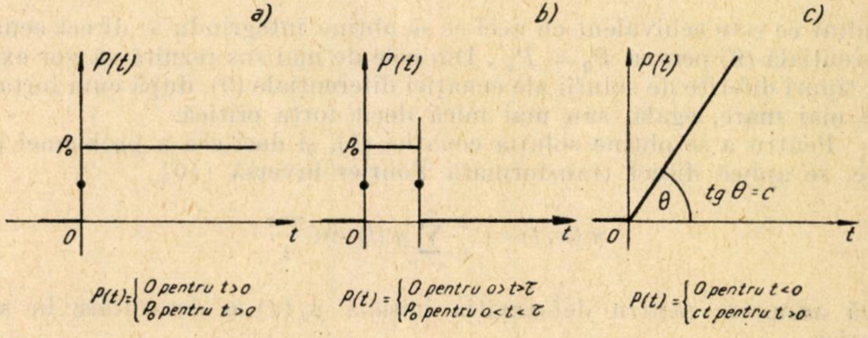

a)
b)
c)
P(t)
P(t)
P(t)
P₀
P₀
θ
tg θ = c
0
t
0
t
0
t
P(t) = { 0 pentru t>o ; P₀ pentru t >o
P(t) = { 0 pentru o> t>τ ; P₀ pentru o< t < τ
P(t) = { 0 pentru t<o ; ct pentru t >o

Fig. 2

Dacă se renunță la acțiunile mediului exterior se obțin următoarele cazuri :

1) Pentru $\mu = 0,\ k = 0$,

$$\bar{y}\ (t) = \frac{\bar{y}_0}{P_n - P_0}\left\{P_n - P_0 \cos \gamma_n\, (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}\, t\right\}. \qquad (7')$$

2) Pentru $\mu = 0,\ k \neq 0$,

$$\bar{y}\ (t) = \frac{\bar{y}_0}{k_n + P_n - P_0}\left\{(k_n + P_n) \cos \gamma_n\, (k_n + P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}\, t + P_n\right\}. \qquad (7'')$$

3) Pentru $\mu \neq 0,\ k = 0$,

$$\bar{y}\ (t) = \frac{\bar{y}_0}{P_n - P_0}\left\{-\, P_0\, e^{-\frac{1}{2}\mu t}\left[\frac{-\mu}{\Gamma^\star}\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}\Gamma^\star\, t + \mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\,\Gamma^\star\, t\right] + P_n\right\}, \qquad (7''')$$

unde

$$\Gamma = \sqrt{\mu^2 - 4\,\gamma_n^2\,(k_n + P_n - P_0)}\,,\ \Gamma^\star t = \sqrt{\mu^2 - \gamma_n^2\,(P_n - P_0)}. \qquad (8)$$

Analizînd soluțiile (7), (7′), (7″), (7‴) se poate urmări efectul frecării și acel al reacțiunii elastice a mediului exterior. În cele ce urmează ne vom referi în special la cazul soluției (7′) a ecuației diferențiale corespunzătoare

$$\bar{y}'' + \gamma_n^2\, (P_n - P_0)\, \bar{y} = \gamma_n\, P_n\, \bar{y}_0\,, \qquad (9)$$

deoarece influența mediului exterior nu contribuie esențial la specificul fenomenului. Se vede ușor că există un șir de valori critice $P_0 = P_n$

în jurul cărora soluția (7′) își schimbă calitativ aspectul, devenind periodică pentru $P_0, < P_n$ și aperiodică pentru $P_0, > P_n$. În cazul particular cînd $P_0 = P_n$ se obține o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$ pentru soluție.

Ridicîndu-se nedeterminarea se obține

$$\lim_{P_0 \to P_n} \frac{y_0}{P_n - P_0} \left\{ P_n - P_0 \cos \gamma_n (P_n - P_0)\, t^{\frac{1}{2}} \right\} = \bar{y}_0 \left(\frac{1}{2}\, \gamma_n^2\, P_n t^2 + 1 \right), \qquad (9')$$

rezultat ce este echivalent cu acel ce se obține integrîndu-se direct ecuația diferențială (9) pentru $P_0 = P_n$. Din cele de mai sus rezultă că vor exista trei tipuri diferite de soluții ale ecuației diferențiale (9), după cum forța P_0 este mai mare, egală, sau mai mică decît forța critică.

Pentru a se obține soluția ecuației (1), și deci cea a problemei propuse, se aplică direct transformata Fourier inversă [10]

$$y\,(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} y\,(t) \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

Dacă admitem pentru deformația inițială $y_0\,(x)$ o dezvoltare în serie Fourier

$$y_0\,(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \sin \frac{\pi m x}{L},$$

se vede ușor că transformata Fourier a funcției $\bar{y}_0$ va fi

$$\bar{y}_0 = \int_0^L y_0 \sin \frac{\pi n x}{L}\, dx = \sum_m^{\infty} \int_0^L f_m \sin \frac{\pi m x}{L} \sin \frac{\pi n x}{L}\, dx = \begin{cases} 0 \text{ pentru } m \neq n \\ \dfrac{f_m L}{2} \text{ pentru } m = n, \end{cases}$$

În acest caz soluția ecuației (1) va avea forma

$$y\,(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{P_n - P_0} \left\{ P_n - P_0 \cos \gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}\, t \right\} \sin \frac{\pi n x}{L}. \qquad (10)$$

Soluțiile ecuației (1), corespunzătoare celorlalte cazuri, soluțiile (7′), (7″), (7‴), se obțin în mod analog.

Din cele de mai sus rezultă că în soluție vor exista numai acele „forme“ *) care sînt conținute în deformația inițială a barei. Comportarea dinamică a barei este în mare măsură influențată de deformarea sa inițială în sensul arătat mai sus. Analizînd soluția (10) pentru P_0 dat se vede că aceasta se compune din două părți. Prima parte, în care $P_0 > P_n$ conține un număr finit de termeni și constituie partea aperiodică a soluției, iar partea a

---

*) Prin formă înțelegem deformația barei corespunzătoare unui termen $\frac{f_n}{P_n - P_0} (P_n - P_0 \cos P_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}\, t) \sin \frac{\pi n x}{L}$ al soluției (10), n fiind indicele formei.

doua, în care $P_0 < P_n$, conține un număr infinit de termeni și constituie partea periodică a soluției,

$$y(x,t) = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{f_n \sin \frac{\pi n x}{L}}{P_n - P_0} \left(P_n - P_0 \operatorname{ch} \gamma_n (P_0 - P_n)^{\frac{1}{2}} t\right)}_{\text{Soluţie aperiodică}} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{f_m \sin \frac{\pi m x}{L}}{P_m - P_0} \left(P_m - P_0 \cos \gamma_m (P_m - P_0)^{\frac{1}{2}} t\right)}_{\text{Soluţie periodică}}.$$

Soluția aperiodică corespunde unei mișcări în care amplitudinea diferitelor forme crește continuu, deoarece $\cos \gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}} t$ se transformă în $\operatorname{ch} \gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}} t$. Partea periodică corespunde vibrației barei după diferite forme.

Soluția (10) obținută este convergentă *), coeficienții seriei Fourier descrescînd ca $\frac{1}{n^4}$:

$$\frac{f_n P_0}{P_n - P_0} \sim \frac{1}{n^4}, \text{ deoarece } f_n \sim \frac{1}{n^2} \text{ și } P_n \sim n^2.$$

Se vede destul de ușor că într-un interval de timp suficient de mic după aplicarea șocului termenii cei mai importanți ai seriei sînt aceia pentru care P_0 este cel mai apropiat de P_n. Dacă P_0 este apropiat de P_n prin lipsă, termenul important va fi al n-lea și va aparține soluției periodice. Invers, dacă P_0 este cu puțin mai mare decît P_n, termenul predominant va aparține soluției aperiodice. Se poate vorbi de un fel de „rezonanță", deoarece amplitudinea unei „forme" este cu atît mai mare cu cît P_0 este mai apropiat de P_n, forța critică corespunzătoare. Pe măsură însă ce trece timpul „formele" inferioare cu n mic (pentru care P_0 este mult diferit de P_n care aparțin soluției aperiodice) se dezvoltă foarte repede, deoarece frecvența unghiulară $\gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}$ este foarte mare la acestea, în timp ce formele inițial predominante se dezvoltă încet deoarece frecvența unghiulară $\gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}$ este foarte mică.

Din cele de mai sus rezultă deci că există posibilitatea, de altfel verificată de experiență, ca bara să se deformeze plastic după forme superioare **) (fig. 3). Acest rezultat cere să cercetăm influența unor efecte ca acel al inerției de rotație și al forței tăietoare, care se manifesta puternic în cazul formelor superioare și pe care teoria elementară a încovoierii le neglijează.

---

*) Vezi pentru demonstraţie anexa I.

**) Vezi de asemenea [2].

Cu aceste probleme ne vom ocupa în partea a doua a lucrării.

Cazul *b*). Acest caz corespunde unui șoc de formă dreptunghiulară (fig. 2 *b*). Soluția în acest caz se poate obține pe baza soluției (7), care

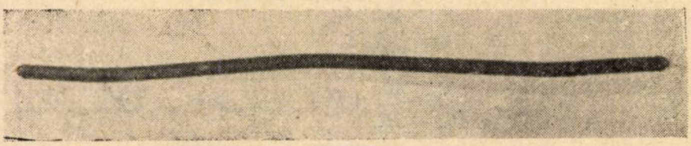


Fig. 3

este valabilă în intervalul $0-\tau$. Calculăm deformația și viteza de deformație pentru $t=\tau$, care vor fi condițiile inițiale pentru calcularea soluției în intervalul $t>\tau$ unde, $P_0=0$, ce se obține foarte ușor. Procedînd în modul arătat se obține în cele din urmă

$$y=\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{L}\left\{\frac{P_0}{\gamma_n^2 P_n (P_n-P_0)}\left[(1-\cos\gamma_n(P_n-P_0)^{1/2}\tau)\cos\gamma_n P_n^{1/2}(t-\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_n^2(P_n^2-P_0P_n)^{1/2}\sin\gamma_n(P_n-P_0)^{1/2}\tau\sin\gamma_n P_n)^{1/2}(t-\tau)\right]-1\right\}, \tag{11}$$

soluție care descrie vibrația ce apare după aplicarea șocului de durată τ.

Cazul *c*). În acest caz vom rezolva ecuația

$$\bar{y}''+\gamma_n^2(P_n-ct)\bar{y}=\gamma_n^2 P_n\bar{y}_0$$

sau

$$\bar{y}''+\alpha_n^2(\tau_n-t)\bar{y}=\alpha_n\tau_n\bar{y}_0, \tag{12}$$

unde

$$\tau_n=P_n/c,\ \alpha_n^2=\gamma_n^2 c.$$

Dacă se fac schimbările de variabilă și de funcție

$$\tau_n-t=\theta_n^{\frac{2}{3}},\ \bar{y}=\theta_n^{\frac{1}{3}}z, \tag{13}$$

ecuația se produce la o ecuație tip Bessell

$$z''+\frac{1}{\theta_n}z'+\left(\varkappa_n-\frac{1}{9\theta_n^2}\right)z=\frac{\alpha_n\tau_n y_0}{\theta_n}, \tag{13'}$$

unde $\varkappa_n = \frac{4}{9}\,\alpha_n^2$. Soluţia ecuaţiei omogene va fi

$$z = C_1\, J_{\frac{1}{3}}(\varkappa_n\, \theta_n) + C_2\, J_{\frac{1}{3}}(\varkappa_n\, \theta_n) \tag{13''}$$

sau

$$\bar{y} = C_1\,(\tau_n - t)^{\frac{1}{2}}\, J_{\frac{1}{3}}\, \varkappa_n\,(\tau_n - t)^{\frac{3}{2}} + C_2\,(\tau_n - t)^{\frac{1}{2}}\; J_{-\frac{1}{3}}\, \varkappa_n\,(\tau_n - t)^{\frac{3}{2}}, \tag{13'''}$$

iar soluţia ecuaţiei neomogene va fi

$$z = \varphi_2 \int \frac{\varphi_1\, \alpha_n\, \tau_n\, \bar{y}_0/\theta_n}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_2 \varphi_1'}\, dt - \varphi_1 \int \frac{\varphi_2\, \alpha_n\, \tau_n\, \bar{y}_0/\theta_n}{\varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2}\, dt + C_1\, \varphi_1 + C_2\, \varphi_2, \tag{14}$$

în care

$$\varphi_1 = (\tau_n - t)^{\frac{1}{2}}\, J_{\frac{1}{3}}\,[\varkappa_n\,(\tau_n - t)^{\frac{3}{2}}],$$

$$\varphi_2 = (\tau_n - t)^{\frac{1}{2}}\, J_{-\frac{1}{3}}\,[\varkappa_n\,(\tau_n - t)^{\frac{3}{2}}],$$

constantele C_1 şi C_2 determinîndu-se din condiţiile iniţiale (6).

2. Teoria completată cu efectul inerţiei de rotaţie şi al forţelor tăietoare

Pe baza concluziilor de la p. 148 să analizăm influenţa efectului inerţiei de rotaţie şi al forţelor tăietoare, asupra fenomenului pe care ne-am propus să-l studiem.

Să deducem ecuaţia diferenţială a încovoierii [3], [9], [11]. Izolînd un element diferenţial de lungime dx din bară (fig. 4) şi exprimînd tangenta la fibra neutră ca

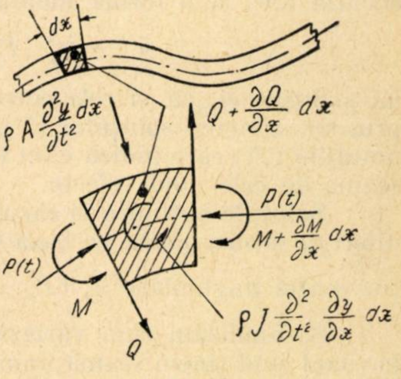
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi + \varphi_0 + \psi, \tag{15}$$

în care φ se datoreşte încovoierii

$$M = -EJ\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{16}$$

iar ψ se datoreşte forţelor tăietoare

$$Q = \frac{GA}{R'}\,\psi, \tag{17}$$



dx
$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$
$Q + \frac{\partial Q}{\partial x} dx$
P(t)
$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$
P(t)
M
$\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial x} dx$
Q

Fig. 4

ecuaţiile de echilibru, ţinînd seama de (16) şi (17), vor avea forma

$$\left.\begin{aligned} &\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{GA}{R'}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - (\varphi + \varphi_0)\right) + P\,(t)\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,\\ &-J\rho\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\frac{\partial y}{\partial x} + EJ\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{GA}{R'}\left(\frac{\partial y}{\partial x} - (\varphi + \varphi_0)\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial x} dx$ reprezintă momentul datorit inerției de rotație a elementului.

În literatură acest termen se ia sub forma *) $\rho J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi \, dx$.

Eroarea pe care o facem nu este mare și permite o eliminare mai ușoară a uneia din cele două funcții ale sistemului (18), obținîndu-se astfel după eliminarea funcției φ ecuația

$$\left(EJ - \frac{R'EJP(t)}{GA}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(\frac{R'EJ\rho}{G} + J\rho\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = EJ\frac{\partial^4 y_0}{\partial x^4}, \quad (19)$$

cu condițiile (2) și (3). Aplicînd o transformare Fourier asupra funcției y în ecuațiile (19), (2) și (3) în mod absolut analog ca și în cazul teoriei elementare, se obține, ținînd seama de notațiile (4) și în plus de notațiile

$$\beta = R'E/G, \ \lambda_n = L^2 A^2/n^2 \pi^2 J^2, \qquad (19')$$

ecuația

$$\left((\beta + 1)\frac{1}{\lambda_n^2} + 1\right)\bar{y}'' + \gamma_n^2\left(P_n - (\beta\frac{1}{\lambda_n^2} + 1)\, P\,(t)\right)\bar{y} = \gamma_n^2 P_n \bar{y}_0, \qquad (20)$$

cu condițiile inițiale (6). Dacă facem notațiile **)

$$\gamma_n'^2 = \frac{(\beta/\lambda_n^2 + 1)\,\gamma_n^2}{(\beta+1)/\lambda_n^2+1}, \ P_n' = \frac{P_n}{\beta/\lambda_n^2+1}, \qquad (21)$$

ecuația (20) ia o formă identică cu ecuația (9),

$$\bar{y}'' + \gamma_n'^2 \,(P_n' - P(t))\,\bar{y} = \gamma_n'^2 P_n' \bar{y}_0,$$

iar soluțiile ei, cît și cele corespunzătoare ecuației (19), se obțin direct prin transcrierea soluțiilor (7'), (10) etc., ținîndu-se seama bineînțeles de notațiile (21) care indică cum trebuie corectate γ_n și P_n în cazul cînd ținem seama de cele două efecte.

Soluțiile obținute în cazul cînd se ține seama de cele două efecte vor diferi de acelea găsite pe baza teoriei elementare numai în privința valorii frecvenței unghiulare $\gamma_n \,(P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}$.

Să analizăm cum variază eroarea în privința frecvenței unghiulare în cazul cînd ținem seama numai de efectul inerției de rotație. În acest caz $\beta = 0$ și frecvența unghiulară are expresia

$$(P_n - P_0)^{\frac{1}{2}} \gamma_n' = \frac{\gamma_n}{(1 + 1/\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}} (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}}.$$

---

*) Vezi anexa II.

**) În cazul considerării forțelor tăietoare forța critică este mai mică decît cea calculată după Euler, avînd expresia (21).

Eroarea va fi deci,

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{\gamma_n'}{\gamma_n}\right) 100\% = 1 - \frac{1}{\left(1 + 1/\lambda_n^2\right)^{\frac{1}{2}}} 100\%.$$

În figura 5 este redată variația erorii în funcție de n pentru gradele de sveltețe $\lambda_1 = 100$ și $\lambda_1 = 80$.

În cazul cînd se consideră și influența forțelor tăietoare frecvența unghiulară diferă mult de valoarea furnizată de teoria elementară a încovoierii. În figura 6 este redată variația frecvenței unghiulare în funcție de P_0 pentru $n = 2$, 5, 8, 10, atît în cazul cînd ținem seama de cele două efecte cît și în cazul teoriei elementare.

Diferența între $\gamma_n' \left(P_n' - P_0\right)^{\frac{1}{2}}$ și $\gamma_n \left(P_n - P_0\right)^{\frac{1}{2}}$ este cu atît mai mare cu cît P_0 se apropie de P_n și cu cît n este mai mare. Se vede clar că influența forțelor tăietoare și a inerției de rotație este deosebit de importantă și nu poate fi neglijată în calcule.

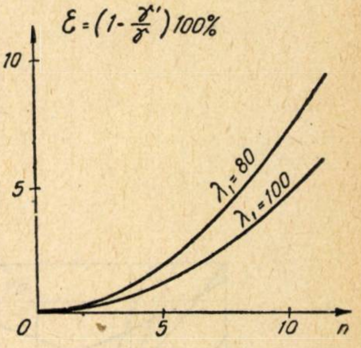


Fig. 5

O metodă aproximativă pentru rezolvarea problemei în cazul cînd $P(t)$ este oarecare (fig. 7) constă în a aproxima curba $P(t)$ printr-o curbă în trepte. În fiecare interval $\tau_j < t < \tau_{j+1}$ soluția este cunoscută. Se calculează soluția în primul interval, apoi se calculează valorile y și y' pentru τ_j, care vor fi condițiile inițiale pentru al doilea interval ș.a.m.d. Pentru a obține o soluție care să fie valabilă pe întregul interval în care se întinde șocul se poate recurge la integrala Fourier.

Dacă $\bar{y}_j(x, t)$ sînt soluțiile pentru intervalul $\tau_j < t < \tau_{j+1}$ obținute din condițiile

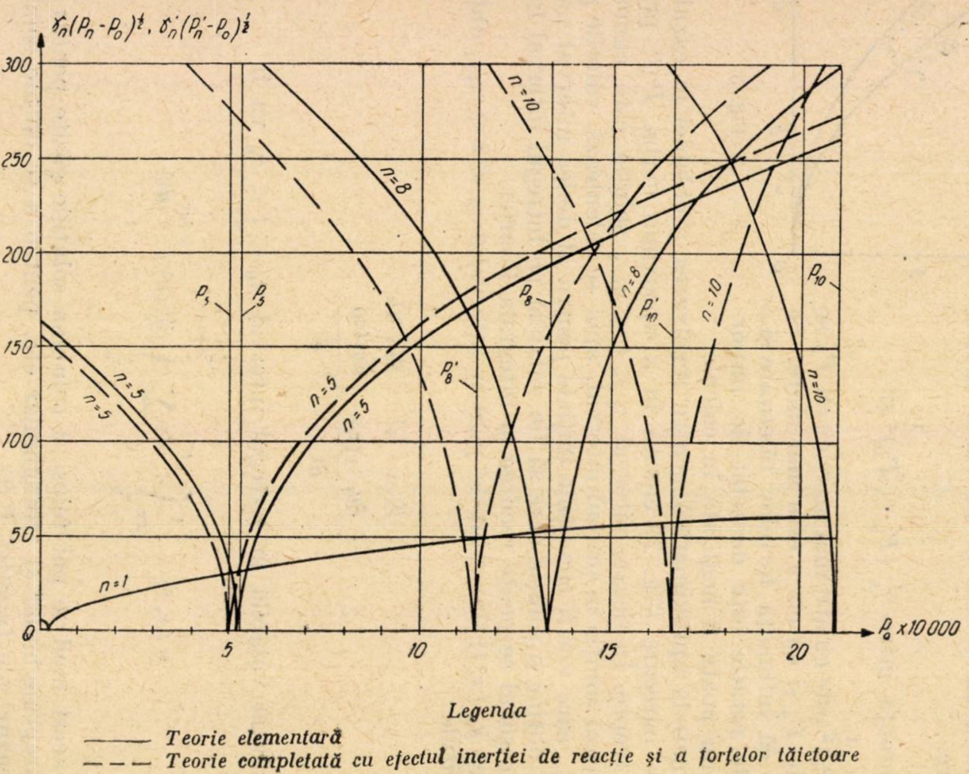
$$\bar{y}_{j-1}(\tau_j) = \bar{y}_j(\tau_j),$$

$$\frac{\partial y_{j-1}(\tau_j)}{\partial t} = \frac{\partial y_j(\tau_j)}{\partial t},$$

atunci soluția valabilă în întregul interval $\tau_0 < t < \tau_n$ va fi

$$y(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\, du \sum \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \bar{y}_j(v)\, e^{-iuv}\, dv.$$

În acest mod se pot folosi și combina soluțiile găsite pentru cazul șocului dreptunghiular și triunghiular etc. pentru a se obține soluția în diferite cazuri ale funcției $P(t)$.



——— Teorie elementară
– – – Teorie completată cu efectul inerției de reacție și a forțelor tăietoare

Fig. 6

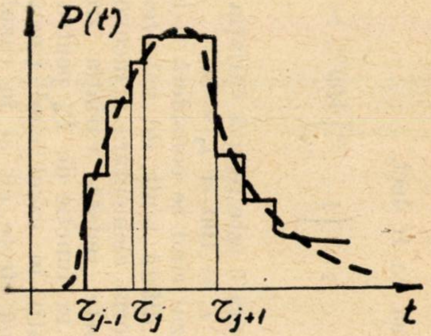

$P(t)$
τ_{j-1}
τ_j
τ_{j+1}
t

Fig. 7

ANEXA I

Pentru a demonstra convergenţa soluţiei este necesar să demonstrăm convergenţa părţii periodice a soluţiei (10)

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f_n}{P_n - P_0} (P_n - P_0 \cos \gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}} t) \sin \frac{\pi n x}{L}\cdot$$

Este suficient să demonstrăm convergenţa seriei coeficienţilor. Cazul cel mai dezavantajos este cînd

$$\cos \gamma_n (P_n - P_0)^{\frac{1}{2}} t = -1 \text{ (pentru orice } n).$$

Va trebui să arătăm deci că

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f_n}{P_n - P_0} (P_n + P_0) < \mathfrak{L}.$$

Este evident că

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{f_n}{P_n - P_0} (P_n + P_0) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{|f_n|}{P_n - P_0} (P_n + P_0) = \sum \frac{|f_n|}{an^2 - P_0} (an^2 + P_0),$$

deoarece $P_n \sim an^2$.

Seria $\Sigma \frac{2bM}{an^2 - P_0} + |f_n|$ este evident convergentă, $2\ b\ M$ fiind o constantă arbitrară , iar $\Sigma\,|f_n|$ este convergentă prin ipoteză. Comparînd termenii generali ai celor două serii este necesar ca

$$\frac{|f_n|}{an^2 - P_0} (an^2 + P_0) \leqslant \frac{2bM}{an^2 - P_0} + |f_n|$$

sau

$$|f_n| \cdot \frac{2\,P_0}{an^2 - P_0} \leqslant \frac{2bM}{an^2 - P_0},$$

ceea ce este întotdeauna adevărat.

ANEXA II

În cazul cînd se ia termenul datorit inerţiei de rotaţie sub forma $\rho J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx$, eliminarea funcţiei φ este mai grea. Se obţine în acest caz o ecuaţie asemănătoare cu cea a lui Timoshenko, completată cu efectul forţelor axiale

$$\left(EJ - \frac{EJR'P(t)}{GA}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(J\rho + \frac{R'\rho EJ}{GA}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{J\rho^2 R'}{G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4} +$$

$$+ \left(J\rho \frac{R'}{GA} P''(t) - P(t)\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Pentru $P = 0$ se obține chiar ecuația încovoierii lui Timoshenko,

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(J\rho + \frac{R'\rho\,EJ}{G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{J\,\rho^2 R'}{G}\frac{\partial^2 y}{\partial t^4} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{22}$$

față de ecuația (19) care dă pentru $P(t) = 0$

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left(J\rho + \frac{R'\rho EJ}{G}\right)\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2} + \rho A\frac{\partial y^2}{\partial t^2} = 0. \tag{23}$$

Ecuația (23) este mai simplă și suficient de exactă, după cum arată comparația între diferitele teorii de încovoiere (fig. 8), în privința variației raportului $\frac{c}{c_0}$ în funcție de $\frac{a}{\Lambda}$, c fiind viteza de fază a unei transversale $y = Y_0 \sin(pt - fx)$, de pulsație p, ce se propagă în lungul barei, $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, a raza secțiunii circulare a barei și Λ lungimea de undă.

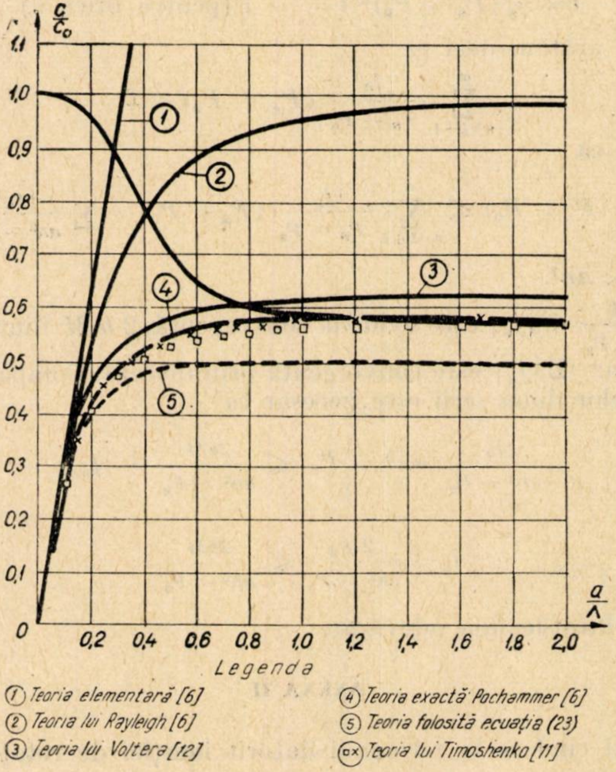


Fig. 8

În cazul $P(t) \neq 0$ forța axială influențează foarte puțin viteza de fază. Pentru ecuația

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

se obţine

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \left(\pi\frac{a}{\Lambda}\right)^2 - \varepsilon\,(t)$$

faţă de cazul $P\,(t) = 0$ care furnizează

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \left(\pi\frac{a}{\Lambda}\right)^2,$$

în care

$\varepsilon\,(t) = \frac{P\,(t)}{AE}$ a este raza secţiunii barei, iar Λ lungimea de undă.

Se vede că $\varepsilon\,(t)$ este neglijabil faţă de $\left(\pi\frac{a}{\Lambda}\right)^2$.

În cazul ecuaţiei (19) se obţine expresia

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \frac{1 + 2R\,(1 + \mu)\,\varepsilon\,(t) - \varepsilon\,(t)\cdot\left(\frac{\Lambda}{\pi a}\right)^2}{\left(\frac{1}{\pi a}\right)^2 + 2R\,(1 + \mu) + 1}$$

(unde μ este coeficientul lui Poisson).

О ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТЕРЖНЯ, ПОДВЕРГАЮЩЕГОСЯ ОСЕВОМУ УДАРУ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе рассматривается динамическое поведение стержней, подвергающихся осевому удару, на основе элементарной теории изгиба. Выводятся решения для нескольких простых случаев формы осевого удара, и на основе полученных решений предлагается приближенный метод для общего случая.

Кроме того, в работе явление рассматривается на основе более сложной теории изгиба и указывается влияние сдвигающих сил и инерции ротации.

SUR LA DÉFORMATION TRANSVERSALE D'UNE BARRE SOLLICITÉE PAR CHOC AXIALE

(RÉSUMÉ)

On examine dans ce travail, en vertu de la théorie élémentaire de la flexion, le comportement dynamique des barres soumises à un choc axial. On obtient des solutions pour quelques cas simples de la forme

du choc axial et, en raison des solutions obtenues, on propose une méthode approximative pour le cas général.

On étudie également le même phénomène, en vertu d'une théorie developpeé de la flexion, et l'on montre l'influence des efforts tranchants et de l'inertie de rotation.

BIBLIOGRAFIE

1. Belman P., *Teoria ustoicivosti reşenia diferenţialnih uravnenii.* I. L., Moscova, 1954.
2. Ghenea Nic., *Lucrare de dizertaţie.* Institutul de construcţii, Leningrad, 1953.
3. Hamburgher L. şi Buzdugan Gh., *Vibraţiile bielelor.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. II, 1951, p. 78.
4. Hoff N. J., *Buckling and Stability.* Journ. of Royal Aeronautical Society, 1954, vol. 58, p. 29.
5. Kamke E., *Supravocinik po obiknovenim diferentialnim uravneniam.* I. L., Moscova, 1951.
6. Kolsky H., *Volnî nepreajenia v tverdîh telah.* I. L., Moscova, 1955.
7. Köning C. u. Taub I., *Stossartige Knickbeanspruchung schlanker Stäbe im elastischen Bereich bei beiderseits gelenkiger Lagerung.* Luftfahrtforschung, 1933, vol. 10, nr. 2, p. 55.
8. Picard E., *Traité d'Analyse.* Gauthier-Villars, Paris, 1896.
9. Prescott John, *Elastic Waes and Vibrations of Thin Rods.* Philos. Mag., octombrie 1942, t. 33, nr. 225, p. 703—754.
10. Snedon Ian, *Preobrazovania Furie.* I. L., Moscova, 1955.
11. Timoshenko S. P., *On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross Section.*Philos. Mag., 1921, t. 41, nr, 6, p. 744—746.
12. Volterra E., *A One-Dimensional Theory of Wave-Propagation in Elastic Rods Based on the „Method of Internal Constraints".* Ingenieur Archiv., 1955, t. XXIII, p. 38.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENȚA MATERIALELOR — ELASTICITATE

FOLOSIREA LEMNULUI ALTERAT PENTRU CONSTRUCȚII ȘI INDUSTRIE

DE

GH. I. PANĂ

În prezent, importante cantități de materiale lemnoase alterate, într-un stadiu avansat (putregai „moale”), nu pot fi folosite, ieșind din circuitul economic.

Aceste materiale sînt inevitabile în pădurile îmbătrînite sau tratate în trecut necorespunzător*). În alte cazuri ele rezultă și din imposibilitățile momentane de transport, din cauza unor anumite situații de teren.

În toate cazurile materialele menționate, sub orice formă în care se găsesc în pădure sau depozite (arbori, trunchiuri, buşteni, lobde etc.) prezintă pe lîngă lemnul alterat și un procent, variabil, de lemn sănătos care se pierde o dată cu lemnul alterat.

Lemnul care prezintă putregai este principial exclus de la orice întrebuințare prin toate standardele noastre de produse lemnoase**). Aceeaşi situație există şi în alte țări, lemnul alterat fiind eliminat de la utilizările industriale și în construcții.

Din practică şi din literatură nu am putut constata o utilizare superioară a lemnului alterat, în stadii avansate, și nici studii privind unele proprietăți care l-ar face apt ca material cu o utilizare mai largă, încît cercetările și rezultatele în acest domeniu sînt noi.

Observațiile și cercetările pe care le-a făcut autorul pe teren şi în laborator au dus la concluzia că lemnul, într-un anumit stadiu de alterare ar putea fi utilizat pentru anumite produse industriale (miezuri pentru panele și uși plane, răcitoare, stupi, creioane etc) și în construcții (ca material izolant fonic și termic : pereți despărțitori, subplanșee, subacoperişuri, duşumele, căptuşeli interioare etc., sau numai ca izolant termic pentru camere reci, rezervoare și conducte de apă caldă, silozuri etc.).

---

*) La exploatarea pădurilor de rășinoase rezultă 2—5$^0/_0$ arbori cu lemn alterat.

**) Standardul pentru cheresteaua de rășinoase care admite la cl. V-*a*B putregaiul „moale” dacă „ține cuiul”, și standardul pentru lemn de foc care admite cel mult 3% lemn cu putregai moale, fac excepție.

Produsele din lemn alterat se pot prezenta, după diferitele trepte de prelucrare, sub formă de cherestea, plăci brute, panouri, panele etc.

★

Lemnul alterat poate fi folosit ca atare sau pentru anumite produse după o prealabilă ameliorare.

Cercetările au fost îndreptate către lemnul alterat care se găsește în abundență și prezintă o omogenitate în descompunere (molid și brad), sau către acela (tei și plop) care poate substitui lemnul din import pentru anumite produse.

Au fost studiate proprietățile fizico-mecanice ale lemnului alterat și au fost făcute experimentări care au stabilit comportarea la prelucrare a acestui nou material. Pe această bază a putut fi stabilită o parte a cîmpului de utilizare a lemnului alterat și tehonologia de fabricație a unor produse industriale.

CAPITOLUL I

Metode de lucru

Materialele utilizate pentru cercetări și experimentări au provenit din bușteni de molid, brad, tei și plop cu lemnul alterat pe cale naturală.

Ciupercile principale care au produs alterarea [1] și [2] au fost: ***Fomes annosus Fr.*** și ***Stereum abietinum Fr.*** pentru lemnul de molid, ***Fomes Hartigii Alesh.*** pentru lemnul de brad, ***Polyporus Sp.*** și ***Colybya velutipes*** pentru lemnul de tei și ***Fomes igniarius Fr.*** pentru lemnul de plop.

1. Clasificare. Alterarea lemnului poate prezenta diferite grade. Limita între diferitele grade de alterare nu este precizată în literatura noastră, iar în literatura străină sînt clasificări care variază de la o țară la alta.

În studiul care urmează, fiind necesară fixarea unei limite între gradele de alterare s-a luat drept criteriu de apreciere a diferitelor stadii de alterare aspectul, consistența și reziliența lemnului. Pentru lemnul de molid clasificarea se prezintă astfel:

Stadiul de alterare a lemnului	Aspectul lemnului alterat	Consistența lemnului alterat față de aceea a lemnului nealterat	Scăderea rezilienței față de lemnul nealterat
I	Schimbarea cromatică (în roz, roșu deschis)	Neschimbată	< 10%
II	Schimbare cromatică mai pronunțată (roșu, cafeniu deschis). Nu se observă discontinuități în masa lemnului.	Foarte puțin redusă	10—60%
III	Schimbare cromatică (roz-gălbui, roșu-brun deschis). Lemnul prezintă goluri lenticulare mici (4—6 mm lungime) rare și izolate în masa lemnului, în majoritate căptușite cu micelii (albe).	Puțin redusă	60—80%
IV	Schimbare cromatică accentuată (roșu-brun, roșu-brun închis). Lemnul prezintă goluri mari lenticulare (10—30 mm) numeroase și unele în continuare. Lemnul are aspectul spongios.	Accentuat redusă	> 80%

Alte criterii de apreciere a gradului de alterare a lemnului, luate în considerare, pentru a se stabili diferite domenii de utilizare, au fost : greutatea specifică aparentă, rezistența la tăiere prin așchiere și duritatea.

★

În afară de aspect, consistență și reziliență, lemnul alterat are modificate totalitatea proprietăților fizice, mecanice și chimice, într-o măsură diferită, după gradul de alterare. Aceste modificări îi scad sau îi măresc calitatea în raport cu o anumită utilizare.

Dacă este destinat ca material de rezistență este evident că are o calitate mai inferioară decît lemnul sănătos sau devine inutilizabil. Dacă însă este folosit ca material de izolație termică sau sonoră, la care rezistențele pot fi reduse fără inconveniente pînă la anumite limite, calitatea lemnului se mărește prin alterare. De asemenea, lemnul într-un anumit stadiu de alterare poate înlocui lemnul sănătos la fabricarea unor produse (ex. panele, miezuri de uși), avînd și avantajul unei greutății mai reduse.

Datorită rezistenței sale reduse la tăiere, lemnul alterat este indicat la fabricarea creioanelor.

Acestea au fost criteriile care au stat la baza fixării domeniilor de utilizare a lemnului alterat în diferite stadii.

Cercetările s-au extins numai asupra lemnului alterat în stadiul II, III și IV, considerînd că proprietățile lemnului alterat în stadiul I diferă prea puțin de acelea ale lemnului nealterat.

2. Metoda de încercare. Încercările pentru determinarea greutății specifice aparente, contragerii, modulelor de elasticitate, rezilienței, rezistenței la compresiune și încovoiere au fost făcute după metodele standardizate.

Încercările pentru determinarea absorbției de apă în atmosfera saturată de vapori și prin imersie și rezistenței la tăiere prin așchiere dinamică*), au fost făcute după metodele elaborate cu ocazia altor cercetări [3] și [4].

Duritatea Brinell a fost determinată după metodele clasice, cu sarcina de 50 kg și bila cu diametrul de 10 mm.

Coeficientul de conductivitate termică și coeficientul de absorbție sonoră**) au fost determinate respectiv prin metoda de încercare după dr. Bock (aparat K. Weiss) și prin metoda tubului cu proba rezemată pe un perete rigid.

Comportarea lemnului alterat la prelucrare s-a constatat pe baza experimentărilor de tăiere în gater, la fierăstrău circular cu pînze avînd diferite caracteristici (variația grosimii, unghiului de atac și numărului de dinți), de rindeluire (variația unghiului de tăiere a cuțitului), frezare și găurire. S-a constatat gradul de așchiere, în special în apropierea muchiilor piesei și s-a apreciat calitatea suprafeței prelucrate prin examinarea cu ochiul liber și la microscop.

---

*) Caracteristicile cuțitului : unghiul de atac (α) = 43°, unghiul piezișului (β) = 34°. Grosimea așchiei = 0,15 mm.

**) Încercare executată de Laboratorul de acustică al Societății de Radiodifuziune.

S-au făcut încleieri cu cleiuri colagenice şi cu cleiuri pe bază de răşini sintetice ; s-au făcut operaţii de finisare : şlefuire, colorare (băiţuire), lăcuire cu şelac şi nitrolac, vopsire, bitumizare şi tencuire.
Caracteristicile materialului încercat au fost analizate în comparaţie cu acelea ale lemnului sănătos, a plutei şi a plăcilor izolante din fibre de lemn.

3. Experimentări semiindustriale. Comportarea lemnului alterat la prelucrarea în produse finite a fost verificată în producţie prin fabricarea de panele (miezul), panouri, uşi plane şi creioane, urmărindu-se operaţiile respective ale procesului tehnologic (pentru panele, panouri şi uşi plane : rindeluirea şi debitarea în şipci de diferite grosimi şi lăţimi, asamblarea şi încleierea, presarea la cald şi la rece ; pentru creioane : aburirea, parafinarea, tăierea şanţurilor pentru mină, încleierea, şlefuirea şi lăcuirea).

CAPITOLUL II

REZULTATELE CERCETĂRILOR

A. Caracteristicile lemnului alterat (stadiul III şi IV) de molid în comparaţie cu lemnul nealterat

Lemnul alterat la materialul rotund ocupă partea interioară a buştenilor, lemnul nealterat formînd un inel exterior gros de 2—10 cm.

La aceeaşi buşteni se găseşte, în general, pe o anumită lungime, lemn într-un singur stadiu de alterare, astfel că la debitare, în mod practic, se va putea selecţiona lemnul alterat, pe stadii.

O neomogenitate de structură a pieselor ce vor rezulta din buşteni cu lemnul în stadiul IV de alterare se va datora prezenţei unei porţiuni înguste de lemn în stadiul III, la periferia zonei de lemn alterat în stadiul IV.

1. Proprietăţi fizico-mecanice. Valorile obţinute de autor pentru lemnul de molid alterat, în stadiul III şi IV şi pentru lemnul nealterat, sînt indicate în tabloul nr. 1 şi în diagramele din figurile 1 şi 2 .

Ele arată pentru lemnul în stadiul IV de alterare o scădere a greutăţii specifice cu 48%, a coeficientului de conductivitate termică cu 50%, a modulului de elasticitate cu 65,4%, a rezistenţei la compresiune axială cu 63—75,6%, a rezistenţei la încovoiere statică cu 42,6—76,8%, a durităţii cu 47% şi a rezilienţei cu 80%. Coeficientul de absorbţie sonoră este mai mare cu 127—190%, contragerea radială cu 30.8% (cea tangenţială egală), absorbţia de apă în atmosferă saturată şi prin imersie după 120 de zile mai mari respectiv cu 26% şi cu 82%.

Lemnul în stadiul III de alterare are valori intermediare între lemnul nealterat şi cel în stadiul IV, ceva mai apropiate de acelea ale lemnului în stadiul IV, cu excepţia coeficientului de absorbţie sonoră şi a durităţii ale căror valori sînt mai apropiate de acelea ale lemnului nealterat.

Se remarcă în mod deosebit scăderea mare a rezistenţei la lovire a lemnului alterat, motiv pentru care acest indice a fost luat drept unul din criteriile de apreciere a stadiului de alterare.

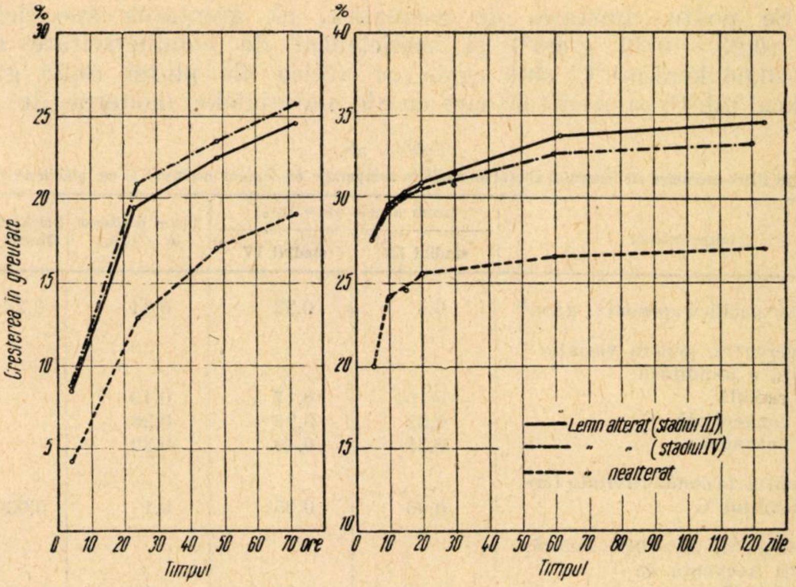


Fig. 1. — Creşterea procentuală în timp a greutăţii epruvetelor din lemn alterat şi nealterat de molid, prin absorbţia apei din atmosferă saturată de vapori ($\varphi = 100\,\%$).

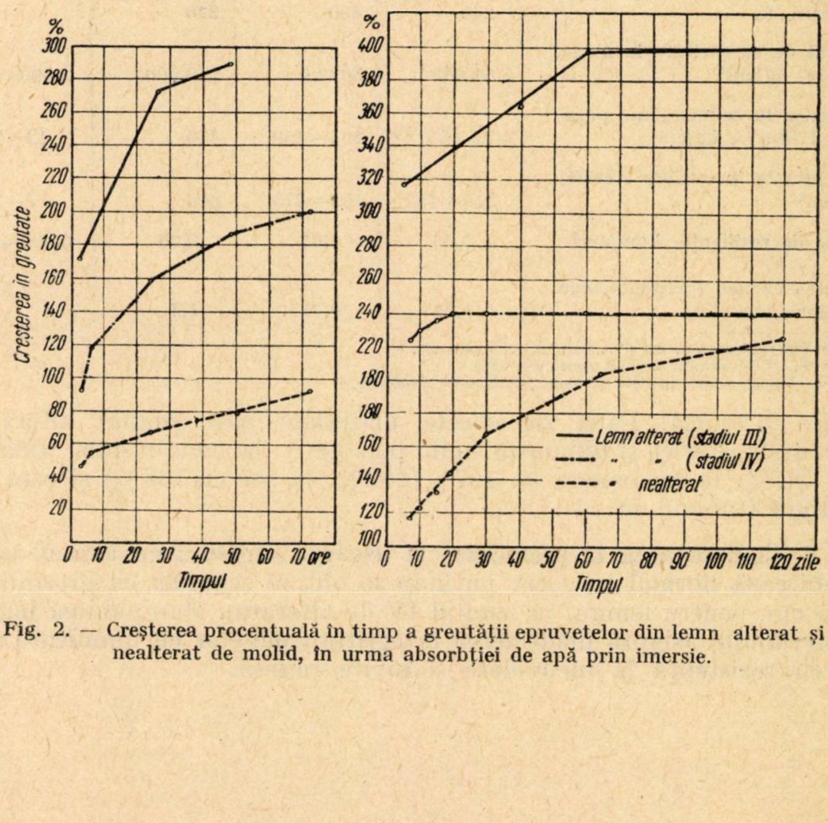


Fig. 2. — Creşterea procentuală în timp a greutăţii epruvetelor din lemn alterat şi nealterat de molid, în urma absorbţiei de apă prin imersie.

Se poate constata, de asemenea, că greutatea specifică aparentă (0,23 — 0,30 g/cm^3) și coeficientul de conductivitate termică (0,05—0,06 kcal/mh°C) sînt egale cu acelea ale plutei (0,25 g/cm^3 și 0,05 kcal/mh°C) și asemănătoare cu ale materialelor moderne de izolație termică și fonică. Față de aceste materiale însă lemnul alterat are rezistențele statice și dinamice mult mai mari (la compresiune axială cu 453—737%, la încovoiere cu 467—1242%, la șoc cu 733%) și este mult mai rigid (tabloul nr. 1).

Tabloul nr. 1

Proprietățile fizico-mecanice ale lemnului alterat de molid în comparație cu lemnul nealterat și cu plăcile din fibre de lemn

Caracteristici	Lemn alterat (u = 12%)		Lemn nealterat (u = 12%)	Plăci izolante din fibre*) de lemn
	stadiul III	stadiul IV		
Greutate specifică aparentă, g/cm^3	0,3	0,23	0,44	0,24—0,32
Contragerea**), pentru variația de 1% a umidității				
— radială	0,16	0,17	0,13	
— tangențială	0,22	0,26	0,26	—
— volumică	0,37	0,40	0,39	
Coeficientul de conductivitate termică, kcal/mh°C	0,06	0,05	0,1	0,03—0,04
Coeficientul de absorbție sonoră, pentru frecvența de				
— 500 Hz	0,13	0,25	0,11	
— 600 Hz	0,17	0,29	0,10	0,30—0,32
Punctul de saturație al fibrei, %	35	34	27	
Absorbția maximă de apă, prin imersie, %	240	400	220	
Modulul de elasticitate la încovoiere, kg/cm^2	51 000	38 000	110 000	2 000—4 000
Rezistența la compresiune paralel cu fibrele, kg/cm^2	167—195***)	105—159	430	12—26
Rezistența la încovoiere statică, kg/cm^2	319—452	153—373	660	17—37
Indicile de reziliență, kgm/cm^3	0,06	0,05	0,25	0,004—0,008
Duritatea Brinell (perpendicular pe fibre), kg/mm^2	1,18	0,75	1,4	—

*) Plăci poroase tip „Isorel”, „Masonit”, „Tronal” etc.

**) Punct de saturație al fibrei pentru u = 35%.

***) Valori pentru limitele stadiului de alterare respectiv.

2. Comportarea la prelucrare și uscare. Buștenii cu lemnul alterat se debitează normal în gater putîndu-se obține scînduri cu grosimi mici ($\approx$ 15 cm, pentru lemnul în stadiul IV de alterare). Manipularea îngrijită a materialului asigură menținerea integrității pieselor cu umiditate mare, deci cu rezistență la încovoiere și lovire redusă.

Uscarea artificială și naturală este mai rapidă ca la lemnul nealterat și nu produce crăpături materialului; deformațiile datorite tensiunilor interne și contragerii sînt asemănătoare cu acelea care se produc la debitarea și uscarea lemnului nealterat.

Durata de uscare poate fi scurtată prin aplicarea unui regim de uscare la temperaturi mai ridicate, fără pericol de producere a defectelor (crăpături, deformații etc).

Prin uscare artificială se obține și sterilizarea materialului, temperaturile la care se face uscarea fiind suficiente pentru distrugerea ciupercilor și insectelor xilofage*) [5] și [6].

Lemnul se prelucrează ușor în toate direcțiile, în raport cu fibrele, la mașinile unelte. Tăierea cu pînze de ferăstrău circular, rindeluirea frezarea, găurirea, se fac normal, fără așchii și cu suprafețe prelucrate, neted. Sînt necesare unelte excepționale de bine ascuțite. Uzura muchiilor tăietoare a uneltelor este redusă. Se recomandă pînze de ferăstrău circular și cuțite de rindeluit cu caracteristicile indicate în tablourile nr. 2 și 3,

Tabloul nr. 2

Caracteristicile dinților pînzelor de ferăstrău circular pentru tăierea longitudinală a lemnului alterat de rășinoase

Tipul de pînză	Nr. dinților	Pasul (p) mm	Unghiul de atac (α) pentru lemnul		Unghiul spatelui (β)	Unghiul de teșire al cefii	Înălțimea dintelui (h) mm	Lungimea cefii mm
			verde	uscat				
A	54	0,0581 Φ	25°	25°	20°	15°	0,5p	0,25p
B	66	0,0477 Φ	20°	15°	15°	10°	0,4p	0,25p

Observație. 1. $p = \Phi \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$,

în care: φ = diametrul pînzei și
n = numărul dinților.

2. Viteza periferică a pînzei se recomandă de 2900 – 3300 m/min.

Tabloul nr. 3

Unghiurile cuțitelor rotitoare de rindeluit și unghiurile de tăiere pentru lemnul alterat de rășinoase

Tipul	Unghiul piezișului	Unghiu contra -piezișului	Unghiul de atac	Unghiul spatelui	Unghiul de tăiere
A	35°	15°	15–20°	20–25°	70–75°
B	30°	25°	10–15°	20–25°	75–80°

Observație. Viteza periferică de tăiere se recomandă de 1700 – 2000 m/min.

---

*) Încălzirea lemnului la temperatura de 70°C produce distrugerea ciupercilor. Durata de încălzire este proporțională cu grosimea pieselor. Pentru piese cu grosimea de 2,5 cm este suficientă o oră, pentru cele cu secțiunea de 10/10 cm, 5 ore etc., dacă lemnul este umed.

Insectele xilofage sînt distruse la temperatura de 55°C și umiditatea relativă a aerului de 100 %. Durata de uscare este de două ore și jumătate pentru fiecare 2,5 cm grosime a piesei.

și anume tipul *A* de pînze sau cuțite pentru lemnul alterat în stadiile I, II și III, iar tipul *B*, pentru lemnul în stadiul IV.

Încleierea pieselor masive de lemn alterat sau de lemn alterat și nealterat și încleierea furnirului la confecționarea panelelor sau panourilor atît la rece cît și la cald se face normal și încleieturile prezintă rezistență suficientă.

Colorarea (lăcuirea) se face bine, însă lemnul este absorbant; operațiile de finisare a suprafeței sînt ușoare, se șlefuiește normal, cu o uzură mai mare decît la lemnul nealterat; se poate vopsi, prezentînd un aspect estetic datorit alveolelor (stadiul IV).

B. Caracteristicile lemnului alterat (stadiul II) de tei, plop, molid și brad în comparație cu lemnul nealterat de ienupăr (*Juniperus virginiana L.*).

Caracteristicile lemnului alterat al speciilor menționate au fost cercetate în vederea folosirii acestui lemn la fabricarea creioanelor.

În general, lemnul corespunzător pentru fabricarea creioanelor se caracterizează prin greutate specifică mijlocie, duritate și rezistență la tăiere reduse și suficientă rezistență mecanică spre a proteja mina. Aceste proprietăți le prezintă lemnul de ienupăr virginian*), care este considerat pînă în prezent ca cel mai bun lemn pentru creioane.

La experimentări a fost folosit lemn alterat (stadiul II) care nu prezintă discontinuități ale masei lemnoase și lemn alterat și tratat în vederea ameliorării calitative.

Au fost făcute două serii de experimentări cu tratamente diferite. Tratamentul aplicat în prima serie de experimentări**) a constat în aburire (abur saturat, temperatura 102°C, durata: 24, 44, 62, 84 ore), urmată de parafinare prin îmbăiere (temperatura: 200—220°C și 150—160°C, durata 30 s, 1, 3, 5, 10 min), iar pentru a doua serie***) executată cu cantități industriale (circa 10 m^3 lemn de tei) a constat în aburire (abur saturat, temperatura 90°C, durata 72 ore), urmată de colorare și impregnare după procedeul****) aplicat curent industrial.

1. Proprietăți fizico-mecanice. Din prima serie de experimentări în tabloul nr. 4 se prezintă valorile proprietăților care califică lemnul

---

*) Acest lemn exotic este greu de importat și de aceea a fost înlocuit la noi cu lemnul de tei căruia i se aplică un tratament special de ameliorare pentru a putea fi folosit la fabricarea creioanelor, însă calitatea rezultată nu este superioară și comparabilă cu aceea a lemnului de *Juniperus virginiana*.

**) Aburirea s-a făcut asupra plăcilor brute (700/70/10 mm), iar parafinarea asupra celor finite (190/60/7 mm).

***) Aburirea s-a făcut asupra materialului sub formă de cherestea (dulapi de 2000/150—200/8—10 mm) și lobde.

****) Tratamentul aplicat constă în introducerea plăcilor în cilindrii cu presiune într-o baie de ulei de ricin sulfonat, în care se amestecă și colorantul (baiț) dizolvat în apă. Baia este încălzită la o temperatură de circa 80°C. Pentru ca pătrunderea uleiului și a colorantului să se facă în profunzimea lemnului, se face în prealabil vacuum 10 min) se introduce abur (20 min), se face vacuum (10 min) apoi presiune (1,5 at); se evacuează lichidul și se face din nou vacuum (10 min). În total operațiile de încărcare și tratare durează circa 2 ore. După tratare plăcile sînt ținute 4—8 ore la 80°C în etuve cu circulație de aer cald pentru a se usca.

Tabloul nr. 4

Proprietățile fizico-mecanice ale lemnului alterat (stadiul II) de tei, plop, molid și brad în comparație cu lemnul nealterat de ienupăr virginian
(*Juniperus virginiana* L.) u = **12**%

Caracteristici	Specia lemnoasă									
	Tei		Plop		Molid		Brad		Ienupăr virginian	
	lemn nealterat	lemn alterat	lemn nealterat	lemn alterat	lemn nealterat	lemn alterat	lemn nealterat	lemn alterat	lemn nealterat	
									I*)	II**)
Greutatea specifică aparentă, g/cm^3	0,54	0,51	0,54	0,39	0,42	0,38	0,39	0,34	0,49	0,52
Duritatea Brinell (pe secțiune radială), kg/mm^2	2,20	1,4—1,60 1,80****)	2,00	1,20	1,30	0,94	1,10	0,82	2,10	1,94
Rezistența la tăiere dinamică, kgm/cm^2	0,024	0,020 (0,019)	0,020	0,017 (0,015***)	0,021	0,017 (0,013)	0,020	0,015 (0,012)	—	0,019

---

*) Date din literatură [7].
**) Lemn provenit (crescut) din țară
***) Valorile între paranteze sînt pentru lemnul aburit (62 ore) și parafinat (220° C, 5 minute), cu excepția lemnului de tei, care este neaburit.
****) Valorile obținute prin parafinarea lemnului la 150 —160° sînt cu circa 10 % mai mari.

Tabloul nr. 5

Variația durității lemnului alterat, prin aburire (n = **12**%)

Specia lemnoasă	Duritatea Brinell (pe fibre), kg/mm^2				
	Lemn neaburit	Lemn aburit ore			
		24	44	62	84
molid	0,94	1,32	1,20	0,98	0,96
brad	0,82	1,11	0,92	0,90	0,77
plop	1,20	—	—	0,86	1,00

pentru creioane, iar în tabloul nr. 5 variația durității lemnului alterat prin aburire.

Din examinarea valorilor se constată că prin alterare indicii pentru greutate specifică, duritate și rezistență la tăiere scad respectiv cu 5,6—13%, 25,1—40% și 15—25%, în raport cu lemnul nealterat.

Se poate remarca (tabloul nr. 5) o creștere a durității lemnului prin aburire pe un timp relativ scurt (20—40 de ore), fenomen care a fost observat și cu ocazia altor cercetări relative la rezistența lemnului [3].

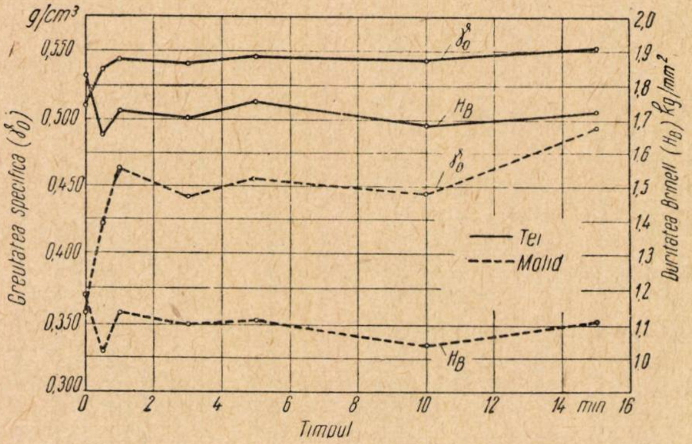


Fig. 3. — Variația greutății specifice și a durității lemnului alterat de molid și tei (stadiul II) în funcție de durata de fierbere în parafină, la 200°C.

Prin parafinare (fig. 3) greutatea specifică a lemnului crește (la lemnul alterat de tei cu 6% și la cel de molid cu 22%), iar duritatea în general scade cu 7% pentru tei și cu 7,7% pentru molid.

Tot din diagrama prezentată în figura 3 se poate constata că în primele 30 s de fierbere a lemnului în parafină greutatea specifică crește și duritatea scade brusc, după care ambele caracteristici cresc prezentînd variații asemănătoare. Variația durității este explicabilă prin influența contrară a creșterii greutății specifice prin parafinare și a scăderii rezistenței lemnului din cauza temperaturii ridicate de fierbere. Cu toată creșterea greutății specifice, ameliorarea lemnului se produce, rezistența la tăiere dinamică fiind mai mică (tabloul nr. 4) și ascuțirea creionului făcîndu-se mai ușor.

Parafinarea lemnului deci, făcută la temperatură ridicată (200—220°C) constituie și un tratament termochimic de ameliorare, nu numai de micșorare a frecării la tăiere.

Rezultatele obținute în seria a doua de experimentări cu privire la proprietățile lemnului sînt prezentate în tabloul nr. 6. Se constată și în acest caz o ameliorare calitativă asemănătoare cu cea obținută prin parafinare. Încercări suplimentare au arătat că aburirea obișnuită industrială (temp. 80—100°C, durata de 70—80 de ore) poate fi înlocuită cu același

Tabloul nr. 6

Duritatea şi rezistenţa la tăiere dinamică a lemnului de tei alterat în comparaţie cu lemnul de tei nealterat ($u \sim 6\%$)

Caracteristici	Lemn alterat (aburit 72 ore)		Lemn nealterat (neaburit)	
	tratat	netratat	tratat	netratat
Duritatea Brinell (medie pe secţiunile radiale şi tangenţiale), kg/mm^2	0,83...1,59 ...2,59	0,86...1,48... 2,09	1,48...1,86... 2,18	1,11...1,79... 2,38
Rezistenţa la tăiere dinamică kgm/cm^2	0,0137... 0,0171 ...0,0220	.0,0233...0,0234 ...0,0236	0,0209...0,0257 ...0,0295	0,0295...0,0307 ...0,0319

efect printr-o aburire, sub presiune, la temperatură ridicată pe durată scurtă (≅ 150°C, 50—60 min).

Observaţii. În afară de structură calitatea lemnului pentru creioane este determinată în mare măsură şi de substanţele conţinute de celule (răşini, gume etc.), care micşorează frecarea uneltei de ascuţire şi tăierea se face uşor. În cazul impregnării cu parafină, paceasta substitue substanţele menţionate din lemnul de ienupăr virginian.

Criteriile obişnuite de calificare a lemnului pentru creioane numai după greutate specifică, duritate şi rezistenţa la tăiere nu pot fi concludente. Lemnul de ienupăr virginian care are greutatea specifică şi duritatea mai mari ca lemnul de molid şi brad, şi egale cu acelea ale lemnului de tei şi plop, şi rezistenţa la tăiere asemănătoare cu a lemnului acestor specii, este totuşi mult superior.

Criteriile menţionate sînt valabile numai pentru cercetarea lemnului aceleiaşi specii. Calificarea principală este dată de comportarea lemnului la tăiere (ascuţire) şi la prelucrarea industrială.

2. Comportarea la prelucrare industrială. Experimentările au fost făcute cu lemn de tei, plop, molid şi brad alterat, netratat şi tratat.

Debitarea în plăci, tăierea şanţurilor pentru mină, încleierea şi fasonarea creioanelor din plăci, şlefuirea, lăcuirea şi ştampilarea s-au făcut în mod normal la lemnul de tei şi plop.

Rezultatele cele mai bune au fost obţinute cu lemnul alterat de plop, aburit timp de 62—84 de ore, fiert în parafină la 200—220°C, timp de 5 minute şi cu cel de tei alterat aburit 72 de ore.

La lemnul de brad şi molid alterat, aburit 44, 62, 84 de ore, tăierea şanţurilor pentru mină a provocat ruperea transversală a plăcilor în maşină, din cauza fragilităţii şi rezistenţei reduse la întindere axială. Operaţia de şlefuire mecanică s-a făcut defectuos, suprafaţa prezentînd mici aşchieri (asperităţi); operaţia a fost însă posibilă manual.

CONCLUZII

Rezultatele experimentărilor confirmă previziunile făcute pe baza caracteristicilor fizico-mecanice ale lemnului alterat, asupra posibilităţilor de folosire ale acestui nou material în construcţii şi în industrie.

Cantitățile mari de lemn alterat de rășinoase, în diferite stadii, sub formă de arbori în picioare, doborîturi și resturi de exploatare, lobde, bușteni în depozite etc., pot constitui materia primă pentru o serie de produse noi industriale, se pot utiliza ca materiale termo- și fono-izolante în construcții sau pot înlocui în multe cazuri lemnul nealterat.

Lemnul alterat de tei sau plop eventual de salcie și anin, cu valoare industrială redusă, poate înlocui lemnul de ienupăr virginian la fabricarea creioanelor.

Aplicarea industrială a tratamentului de parafinare la temperaturi înalte poate prezenta anumite dificultăți (pericol de aprindere) și un preț mai ridicat, cel mai indicat fiind procedeul de aburire la temperaturi înalte pe timp scurt.

Un alt aspect al posibilităților de folosire a lemnului alterat îl constituie reutilizarea cantităților mari de materiale ieșite din serviciu tot din cauza putrezirii (stîlpi, piloți, grinzi etc.).

Caracteristicile lemnului alterat în comparație cu lemnul nealterat sînt :

1. Greutatea specifică și rezistențele mecanice mai reduse (în special reziliența) ; contragerea și absorbția de apă mărite.

2. Coeficientul de conductivitate termică mai mic și coeficientul de absorbție sonoră mai mare (echivalenți cu acei ai plutei pentru lemnul de rășinoase în stadiul IV de alterare și cu acei ai plăcilor izolante din fibre de lemn).

3. Elasticitatea mărită.

4. Rezistența la tăiere dinamică prin așchiere mai redusă (lemnul de tei, plop și rășinoase, în stadiul II de alterare).

5. Comportarea la uscare artificială a lemnului alterat este superioară celui nealterat, printr-o viteză mai mare de uscare și prin capacitatea mai redusă de crăpare.

6. Comportarea la prelucrare (tăierea la mașini unelte, încleierea, finisarea suprafeței etc.) normală, în general mai ușoare ca a lemnului nealterat.

Aceste caracteristici ale lemnului alterat îl indică ca material izolant termic și fonic precum și ca amortizant de șocuri.

★

Problema extinderii cîmpului de utilizare a lemnului alterat în industrie și în construcții necesită cercetări în continuare și asupra altor proprietăți a acestui nou material și găsirea procedeelor de ameliorare a unor caracteristici.

Cercetările ar trebui să se îndrepte către studierea comportării materialului și produselor în medii umede, a deformațiilor, durabilității lemnului alterat, a rezistenței la atacurile insectelor xilofage etc., pentru găsirea procedeelor de mărire a rezistenței contra atacului agenților biologici, de reducere a higroscopicității și a deformabilității, de mărire a rezistențelor mecanice, de folosire combinată a lemnului alterat și nealterat etc.

De asemenea, cercetările ar trebui extinse și asupra lemnului alterat al altor specii, mai ales a lemnului de fag.

Primită la redacție la 27 aprilie 1956.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИСПОРТИВШЕЙСЯ ДРЕВЕСИНЫ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ И ПРОМЫШЛЕННОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В принципе существующие стандарты для изделий из дерева исключают всякое применение испортившейся древесины. Такое же положение существует и в других странах, где испортившаяся древесина не допускается для применения в промышленности и строительстве.

Рассматривая характеристики древесины в различных стадиях порчи по сравнению с здоровой древесиной, автор установил следующее:

1. Удельный вес и механическое сопротивление испортившейся древесины меньше (особенно ударная вязкоть); усушка и водопоглощение увеличены.

2. Коэффициент теплопроводности меньше, а коэффициент звукопоглощения больше (они эквивалентны коэффициенту пробки древесины хвойных пород в IV стадии порчи и коэффициенту изоляционных плит из древесных волокон).

3. Упругость повышена.

4. Сопротивление динамическому резанию путем строгания меньше (древесина тополя, липы и хвойных пород во II стадии порчи).

5. При искусственной сушке испортившаяся древесина высыхает быстрее и меньше трескается.

6. Обработка испортившейся древесины (резание на станках, склеивание, отделка поверхности и т. д.) легче, чем здоровой древесины.

Эти характеристики испортившейся древесины делют ее пригодной в первую очередь для термической и звуковой изоляции, а также и для амортизации ударов и многих других применений.

Исследования были сделаны для испортившейся древесины, встречающейся в больших количествах и находящейся в одинаковой степени разложения (сосна и ель), или древесины (тополь и липа), которая может заменить для некоторых изделий импортную древесину.

Лабораторные опыты и обследования в производственных условиях показали, что испортившаяся древесина (улучшенная в некоторых случаях различной обработкой) может применяться для некоторых промышленных изделий (прокаладок для панелей и дверей, холодильников, ульев, карандашей и т. д.) и в строительстве в качестве термоизоляционного и звукоизоляционного материала для перегородок, подшивки потолков, подшивки крыши, полов, внутренней обшивки и т. д. или как термоизоляционный материал для неотапливаемых помещений, резервуаров, трубопроводов горячей воды, хранилищ и т. д.)

В зависимости от степени обработки изделия из испорченной древесины могут иметь разную форму: пиломатериал, пластины, щиты, панели и т. д.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Процентное возрастание во времени веса проб из испортившейся и здоровой сосновой древесины при поглощении воды из атмосферы, насыщенной парами $\varphi = (100\%)$.

Рис. 2. — Процентное возрастание во времени веса проб из испортившейся и здоровой сосновой древесины при поглощении воды при погружени.

Рис. 3. — Изменение удельного веса и твердости испортившейся сосновой и липовой древесины (стадия II) в зависимости от продолжительности кипячения в парафине при 200°.

L'UTILISATION DU BOIS ALTÉRÉ DANS LE BÂTIMENT ET L'INDUSTRIE

(RÉSUMÉ)

Le bois altéré est, par principe, exclu de toute utilisation par tous les standards établis dans la R.P.R. pour les produits de bois. La même situation existe dans d'autres pays aussi, ce bois étant éliminé de l'industrie et du bâtiment.

L'auteur, étudiant les caractéristiques du bois altéré à différents stades, par comparaison au bois non altéré, constate que :

1. Le poids spécifique et les résistances mécaniques sont plus réduits (particulièrement la résilience) ; le retrait et l'absorption d'eau sont augmentées.

2. Le coefficient de conductivité thermique est plus petit et le coefficient d'absorption sonore est plus grand (étant équivalents à ceux du liège, pour le bois des résineux, au IVe stade d'altération, et à ceux des panneaux isolants en fibres de bois).

3. L'élasticité en est accrue.

4. La résistance à la coupe dynamique par détachement en copeaux est plus réduite (peuplier, tilleul et résineux au IIe stade d'altération).

5. Lors du séchage artificiel, le bois altéré a un comportement supérieur à celui du bois non altéré, grâce à une plus grande vitesse de séchage et à une plus faible tendance à se fendre.

6. Le comportement au travail (coupe aux machines-outils, encollage, finissage de la surface, etc.) est normal et, en général plus aisé que pour le bois non altéré.

Ces caractéristiques du bois altéré le désignent en premier lieu comme matériel isolant thermique et phonique, ainsi que comme amortisseur de chocs, outre d'autres multiples utilisations.

Les études ont été orientées vers le bois altéré, qu'on trouve en grandes quantités et qui présente de l'homogénéité dans sa décomposition (bois d'épicéa et sapin) ou vers celui (peuplier et tilleul) qui pourrait remplacer le bois d'importation utilisé pour certains produits.

Les expériences en laboratoire et dans les conditions de la production industrielle ont démontré que le bois altéré (amélioré dans certains cas par différents traitements) peut être utilisé pour certains produits industriels (âmes pour panneaux et portes planes, glacières, ruches, crayons, etc.) ainsi que dans le bâtiment (en tant que matériel isolant thermique et phonique : murs mitoyens, sous-plancher, voligeages, planchers, revêtements intérieurs, etc., ou simplement comme isolant thermique pour chambres froides, réservoirs et conduites d'eau chaude, silos, etc.).

Les produits en bois altéré peuvent, selon la forme d'usinage, se présenter comme bois d'oeuvre, plaques brutes, panneaux, placage à âme, etc.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1 — Accroissement, avec le temps, du pourcentage du poids des éprouvettes en bois d'épicéa altéré et non altéré, par absorption d'eau de l'atmosphère saturée de vapeurs ($\varphi = 100\%$).

Fig. 2. — Accroissement, avec le temps, du pourcentage du poids des éprouvettes en bois d'épicéa altéré et non altéré, par absorption d'eau par immersion.

Fig. 3 — Variations du poids spécifique et de la dureté du bois altéré d'épicéa et de tilleul (stade II), en fonction de la durée de la cuisson dans de la paraffine, à 200°C.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Manualul inginerului silvic.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1955.
2. S. I. Vanin, *Studiul lemnului.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
3. Gh. I. Pană, *Contribuţii la stabilirea influenţei diferitelor tratamente higro şi hidrotermice asupra proprietăţilor fizico-mecanice ale lemnului de fag.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 1—2, 1955, p. 162—180.
4. Gh. I. Pană şi N. Ghelmeziu, *Influenţa temperaturii şi a greutăţii specifice aparente a lemnului asupra rezistenţei lui la tăiere dinamică prin aşchiere.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţiunea de ştiinţe biologice, agronomice, geologice şi geografice, t. VI, 1954, p. 123—132.
5. * * * *Timber Decay and its Control. Forest Products Research Laboratory.* Leaflet nr. 39, H.M. Stationery Office, Londra, 1948.
6. — *The Kiln sterilisation of Lyctus Infested Timber. Forest Products Research Laboratory.* Leaflet nr. 13. H. M. Stationery Office, Londra, 1937.
7. L. Vorreiter — *Holztechnologisches Handbuch.* Fromme, Viena, 1949, vol. I.
8. Gh. I. Pană şi M. Dupu, *Proprietăţile fizice, mecanice şi tehnologice ale lemnului speciilor exotice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 4, 1956, p. 1057,
9. F. Kollmann, *Technologie des Holzes und der Holzwerkstoffe.* J. Springer, Berlin, 1951. ed. II, vol. I.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

MASE PLASTICE PE BAZĂ DE FURFUROL ŞI DERIVAŢI

IV. INFLUENŢA TRATAMENTULUI TERMIC ASUPRA UNOR REZISTENŢE LA EFORTURI PROGRESIVE LA RUPERE, ALE TEXTOLITULUI CU RĂŞINĂ FURFUROL-FENOLICĂ *)

DE

I. IONESCU, V. CALCAN şi N. GOLDENBERG

1. Unele consideraţiuni teoretice

Materialele plastice stratificate sînt sisteme eterogene anizotrope formate din două faze. Răşina formează o fază continuă dispersată în mod egal în toate direcţiile sistemului, sub forma unei pelicule de grosime variabilă, iar ţesătura se prezintă ca o fază discontinuă sub formă de straturi separate între ele prin pelicule de răşină şi avînd două axe de simetrie determinate de direcţia urzelii şi a bătelii.

Rezistenţa sistemului răşină-ţesătură este rezultanta mai multor forţe participante. După I. E. Barg [1] principalele forţe ale acestui sistem sînt forţele de coeziune intermoleculare şi intramoleculare ale răşinii şi ale fibrei textile şi forţele de adeziune răşină-ţesătură. La acestea considerăm necesar să adăugăm rezistenţa ţesăturii ca rezultat al tehnologiei de prelucrare a fibrelor. Bineînţeles că fiecare din aceste forţe sînt la rîndul lor dependente de alte condiţii, care le modifică într-un sens sau altul.

În cadrul sistemului răşină-ţesătură, rezultanta acestor forţe reprezintă rezistenţa materialului la un efort oarecare.

De asemenea, în cazul unui proces modificator al sistemului, cum este tratamentul termic, variaţia rezistenţelor materialului reprezintă variaţia forţelor participante, deci a rezistenţelor proprii ale răşinii şi ale țesăturii precum și variația forțelor de adeziune între aceste două componente.

---

*) Pentru realizarea acestei lucrări au fost necesare 25 kg răşină furfurol-fenolică, care au fost sintetizate de prep. Ileana Petruş sub conducerea prof. D. Isăcescu, cărora le exprimăm vii mulţumiri pentru concursul dat.

Din aceste motive, influența unui proces la care e supus materialul stratificat nu poate fi pusă pe seama variației rezistenței rășinii și țesăturii luate separat, ci trebuie luate în considerare aceste forțe în interdependența lor.

2. Rolul tratamentului termic

Practica tratamentului termic al maselor plastice termoreactive este azi larg răspîndită. Această răspîndire se datorește faptului că prin tratament se îmbunătățesc unele proprietăți fizico-mecanice ale materialului și se reduc tensiunile interne ce iau naștere la presarea plăcilor sau obiectelor.

Cu toată larga utilizare a tratamentului termic, pînă azi nu s-a ajuns la o soluție generală a problemei, care să permită cel puțin într-o aproximare să se prevadă condițiile optime de efectuare a lui (timpul și temperatura).

Această situație se datorește complexității problemei, tratamentul termic depinzînd de următorii factori care se influențează reciproc :

— natura rășinii și procedeul ei de fabricație ;
— natura materialului de umplutură și caracteristicile lui ;
— procedeul de fabricare al materialului stratificat.

Acest complex de factori a făcut ca pentru fiecare material să existe un regim optim de tratament termic. Varietatea materialelor experimentale explică și varietatea recomandărilor prezentate în literatură [2], [3], [4].

În general, literatura se ocupă cu tratamentul termic al stratificatelor cu rășină formaldehid-fenolică [5], [6], [7], [8], [9] și [10].

Un studiu al tratamentului termic al stratificatelor cu rășină furfurol-fenolică nu se cunoaște.

În lucrarea de față, s-a urmărit cunoașterea regimului optim pentru tratamentul termic al stratificatelor cu rășină furfurol-fenolică, fabricată după un procedeu original, folosind ca material de stratificare o țesătură de bumbac.

După cum se știe, procesele de fabricare ale maselor plastice obținute din rășini termoreactive, sînt procese termice (mai rar prin agenți chimici) care continuă reacțiile de policondensare a rășinilor.

Tratamentul termic are ca scop desăvîrșirea procesului de policondensare (mărirea rețelei tridimensionale) și deci creșterea unora din proprietățile fizico-mecanice și mărirea stabilității termice (reducerea deformațiilor termoplastice).

Presarea materialelor stratificate (care în general se face folosind încălzirea prin transfer — plăci încălzitoare — și răcirea bruscă cu apă) duce la formarea în materialul presat al unor tensiuni interne. Prin prelucrare mecanică, echilibrul intern al acestor tensiuni se strică și apar tensiunile libere. Existența tensiunilor interne și apariția lor este proprie și rășinii fără umplutură, fapt larg cunoscut din studiile de fotoelasticitate.

Tratamentul termic, prin încălzirea lentă și uniformă a materialului, aduce după sine reducerea tensiunilor interne. Ca urmare, are loc o mărire a stabilității obiectelor prelucrate, din punctul de vedere al dimensiunilor.

3. Materiile prime folosite

Pentru cercetare, a fost utilizat un material stratificat, realizat prin impregnarea unei țesături de bumbac cu o soluție de rășină furfurol-fenolică, cu punct de picurare, cuprins după Ubbelohde între 108—110°C. Pînza folosită a avut caracteristicile din tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Nr. crt.	Caracteristici	Unități de măsură	Valori
1	Sarcina la rupere pe urzeală	kg	36,7
2	Sarcina la rupere pe băteală	,,	41,05
3	Alungirea pe urzeală	%	10,49
4	Alungirea pe băteală	%	18,74
5	Desimea firelor pe urzeală pe fire 10 cm	cm	246
6	Desimea firelor pe băteală pe fire 10 cm	,,	184
7	Numărul metric al firului pe urzeală	—	38,4
8	Numărul metric al firului pe băteală	—	28,6
9	Greutatea pînzei pe m^2 (pînză condiționată la 24—25°C și 65% umiditate relativă)	g/m^2	143
10	Rezistența la plesnire și deformare	kg/cm	11,79
11	Deformarea	%	4,12

4. Caracteristicile materialului presat

Presarea plăcilor de textolit s-a făcut în următoarele condiții :

— presiune specifică	100 kg/cm^2 ;
— temperatura de presare	160±5°C ;
— timp de presare	4 min/mm.

Tabloul nr. 2)*

Nr. crt.	Felul încercării	Unități	Perpendicular pe stratur'	Paralel cu straturile
1	Compresiune	kg/cm^2	3251	1336
2	Încovoiere statică	,,	1684	1675
3	Încovoiere dinamică (șoc)	,,	67	54
4	Indice de despicare	kg	333	

---

*) Cifrele din tablou reprezintă valori medii.
Conținutul de rășină cuprins între 45 și 48%

Materialului presat, netratat termic, i s-au determinat rezistențele din tabloul nr. 2 la temperatura ambiantă (20 + 3°C).

5. Condițiile experimentale

Influența tratamentului termic asupra proprietăților mecanice poate fi pusă în evidență prin două metode [8], [9], [11], [12], [13] și [14]:

a) prin determinarea proprietăților mecanice la temperatura la care s-a efectuat tratamentul termic, în comparație cu materialul netratat termic;

b) prin determinarea proprietăților mecanice la temperatura camerii, în comparație cu materialul netratat termic.

Deoarece prin studiul de față s-a urmărit posibilitatea îmbunătățirii proprietăților mecanice ale stratificatelor pentru condițiile normale de folosire a lor, s-a ales cea de a doua alternativă.

Încercările efectuate s-au limitat la următoarele probe:

1) Determinarea rezistenței la rupere la compresiune.

2) Determinarea rezistenței la rupere la încovoiere statică,

3) Determinarea rezistenței la rupere la încovoiere dinamică,

4) Determinarea indicelui de rezistență la despicare.

Probele prevăzute la punctele 1, 2 și 3 au fost încercate perpendicular și paralel cu straturile.

Epruvetele au fost tăiate întotdeauna după direcția urzelii țesăturii, la o freză prevăzută cu o freză-fierăstrău.

Dimensiunile epruvetelor pentru compresiune au fost de 10 × 10 × 15 mm, pentru încovoiere statică și dinamică de 120 × 15 × 10 mm, iar pentru despicare de 15 × 15 × 10 mm.

Pentru fiecare determinare s-au utilizat cîte 5 epruvete.

Tratamentul termic a fost executat în termostate, epruvetele fiind așezate pe suporți din material izolant, pentru a le feri de contactul direct cu metalul, ceea ce ar fi dus la supraîncălziri în zona de contact.

S-au efectuat tratamente termice la următoarele temperaturi:

60, 90, 110, 130, 150, 170 și 200°C.

Ultimele două temperaturi au fost abandonate în cursul experiențelor, întrucît ele provoacă o distrugere rapidă a probelor. Tratamentul termic a fost făcut pentru intervalele de timp de:

24, 48, 96, 120 și 240 de ore.

Epruvetele au fost măsurate înainte și după tratamentul termic, în calculele de rezistență luîndu-se dimensiunile epruvetelor după tratamentul termic.

După scoaterea din termostat, probele au fost lăsate timp de 24 de ore să se răcească în exicator, apoi au fost încercate la temperatura camerii după metodele standardizate (GOST):

— pentru rezistența la compesiune GOST 4651—49;
— „ „ „ încovoiere statică „ 4648—49;
— „ „ „ încovoiere dinamică „ 4649—49.

Caracteristic materialelor stratificate este faptul că rezultatele încercărilor prezintă o mare dispersie a valorilor care, cu toate măsurile ce se iau în ceea ce privește epruvetele și condițiile experimentale, sînt totuși inevitabile [5].

6. Despre rezultatele obținute și interpretarea lor

În lumina considerațiilor făcute la punctele 1 și 2 de mai sus, se vor face unele ipoteze asupra influenței tratamentului termic asupra rășinii și țesăturii, participarea fiecăreia din ele în cadrul sistemului urmînd a fi prezentată mai jos, pentru fiecare efort în parte.

Vom alege din curbele care reprezintă influența tratamentului termic în funcție de temperatură pentru diferite intervale de timp, acele temperaturi pentru care rezistențele la rupere prezintă variații sensibile.

În zona de încălzire pînă la 90°C în structura rășinii se petrec unele schimbări care sînt în principal rezultatul creșterii dimensiunilor macromoleculelor.

Determinarea părților solubile în acetonă din materialul supus la tratamentul termic a arătat că procentul de părți solubile este aproximativ egal cu 4 în toate cazurile. Aceasta face să presupunem că în procesul presării, dimensiunile moleculelor au atins un grad de policondensare mai ridicat decît cel în care ele mai sînt solubile în acetonă și că la tratamentul termic reacțiile chimice cuprind în special moleculele mari, care continuă policondensarea lor. În sprijinul acestei ipoteze, ar putea fi pus și faptul că foarte mici cantități de hexametilen tetramină rămîn în material și după presare și începînd de la 80°C în sus se descompun lent, furnizînd grupe metilenice de legătură [15]. Teoria după care rășina ar avea o structură isogelică prezentată de Thum și Iacobi [16] nu contrazice rezultatele noastre.

În aceeași zonă de temperatură, celuloza fibrelor de bumbac din țesătură nu-și modifică practic proprietățile.

În jurul temperaturii de 90°C proprietățile fibrei de bumbac se modifică sub influența apei proprii și a apei aflată în rășină (apă de condensare și apă absorbită din aer). Modificarea constă într-un efect de plasticizare bine cunoscut și folosit în unele operații de finisaj textil (gauffage, moirage etc.). În acest interval, în rășină continuă probabil procesul de creștere al dimensiunilor macromoleculelor.

Temperatura de 110°C reprezintă o limită în care materialul a pierdut principala cantitate de apă conținută, ceea ce aduce după sine importante modificări în elasticitatea și plasticitatea sa [1] și [16].

Importante modificări ale rezistențelor materialului stratificat se produc în zona temperaturii de 130°C, care este foarte importantă pentru țesătură. Această temperatură reprezintă începutul degradării fizico-chimice a celulozei.

Creșterea ulterioară a temperaturii accelerează procesul de degradare a celulozei. Pentru rășină, ea reprezintă pînă la o anumită limită continuarea creșterii dimensiunilor macromoleculelor și mai departe descompunerea ei. Acest fapt, cunoscut din literatură [2], [3], a fost confirmat de experiențele noastre, însă pentru temperaturi mai coborîte.

Pentru o cît mai justă înțelegere a fenomenelor care se petrec în urma tratamentului termic, în interpretarea rezultatelor noastre, s-au avut în vedere următoarele condiții :

a) starea rășinii ;
b) starea fibrei textile ;
c) natura eforturilor ;
d) repartiția eforturilor ;
e) aportul fiecărei componente.

Fiecare rezistență a fost analizată în parte, privită prin prisma celor 5 criterii arătate mai sus.

În general, așa cum s-a arătat mai înainte, punctele *a*) și *b*) rămîn aceleași, indiferent de natura efortului la care e supusă epruveta. Celelalte puncte necomune, *c*), *d*) și *e*), prezintă aspecte diferite în funcție de natura efortului respectiv și vor fi analizate la fiecare încercare.

1) *Cazul rezistenței la compresiune* (⊥ și ∥)

c) compresiune pură

d) în cazul efortului aplicat perpendicular pe direcția stratificării, urzeala și băteala sînt solicitate în mod egal (fig. 1,*a*).

În cazul compresiunii paralel cu direcția stratificării, efortul este preluat în mod predominant de rășină, fibra țesăturii fiind o ,,umplutură'' potrivnică, care nu lucrează la compresiune. De aceea, cu cît materialul conține mai multă rășină și mai puțină pînză, rezistența sa se mărește [17] (fig. 1*b*).

În cazul aplicării forței perpendicular pe direcția stratificării, efortul de compresiune realizează în țesătură un efect de tracțiune, care este cu atît mai mare, cu cît posibilitatea straturilor de a aluneca unele față de altele este mai mare.

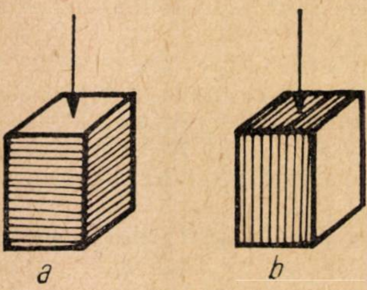


Fig. 1. — Aplicarea efortului de compresiune : *a*) ⊥ pe direcţia stratificării ; *b*) ∥ cu direcţia stratificării

Acțiunea simultană a ambelor componente, la efortul de compresiune aplicat perpendicular pe direcția stratificării, duce la o mărire importantă a rezistenței materialului și în același timp face ca influența raportului dintre ele să fie mai puțin netă [17].

e) În general însă, fie că este vorba de compresiune paralel sau perpendicular pe straturi, rășina este componenta care conferă materialului cea mai mare rezistență.

Diagramele din figura 2 *a* și *b*) arată o creștere a rezistenței la compresiune pînă îa temperatura de 60—70°C, ca urmare a faptului că țesătura textilă nu suferă modificări importante, elasticitatea ei se menține, în timp ce rășina continuă policondensarea în mod lent.

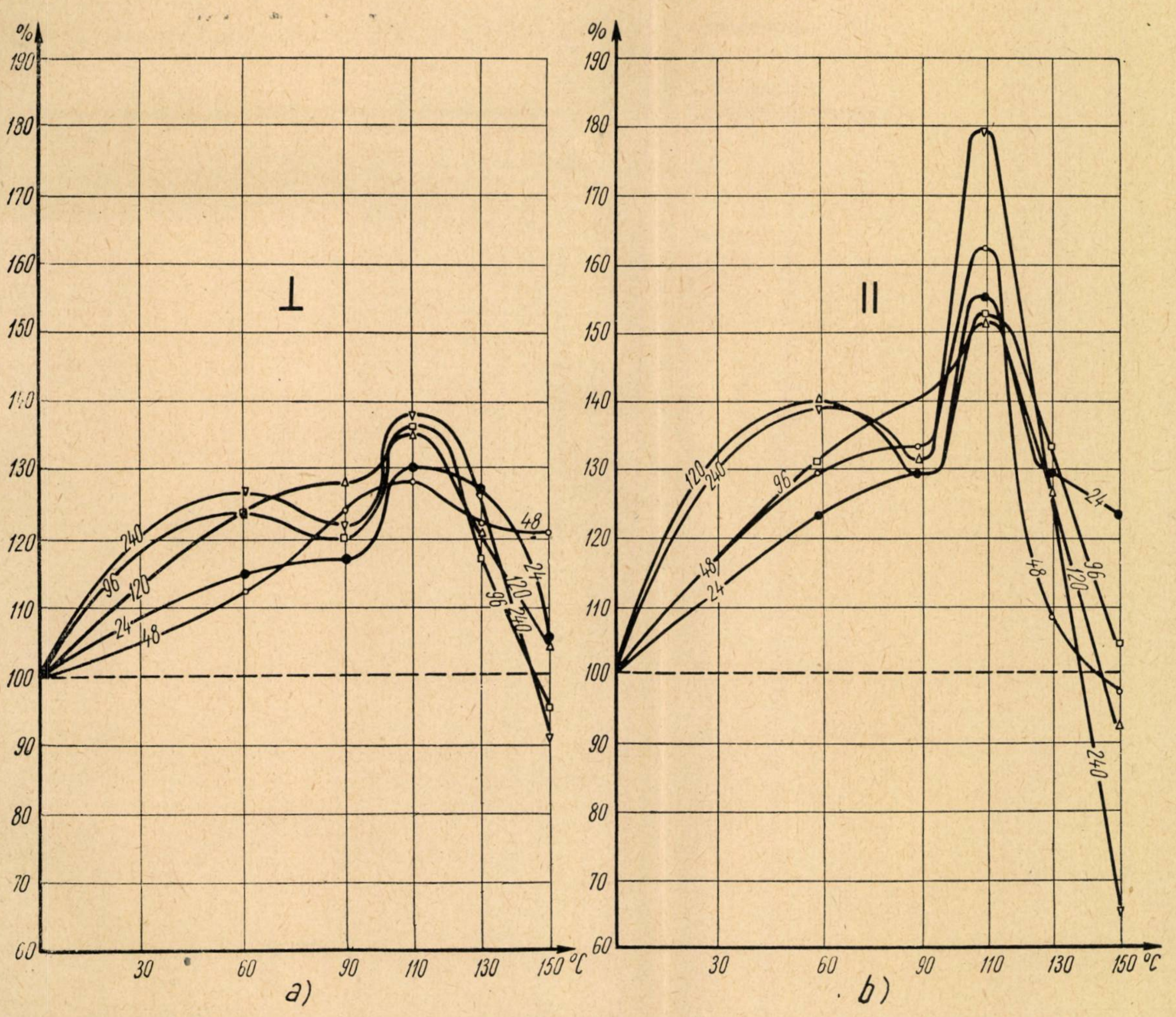


Fig. 2. – Variaţia rezistenţei la compresiune în funcţie de temperatura tratamentului termic la diferiţi timpi.

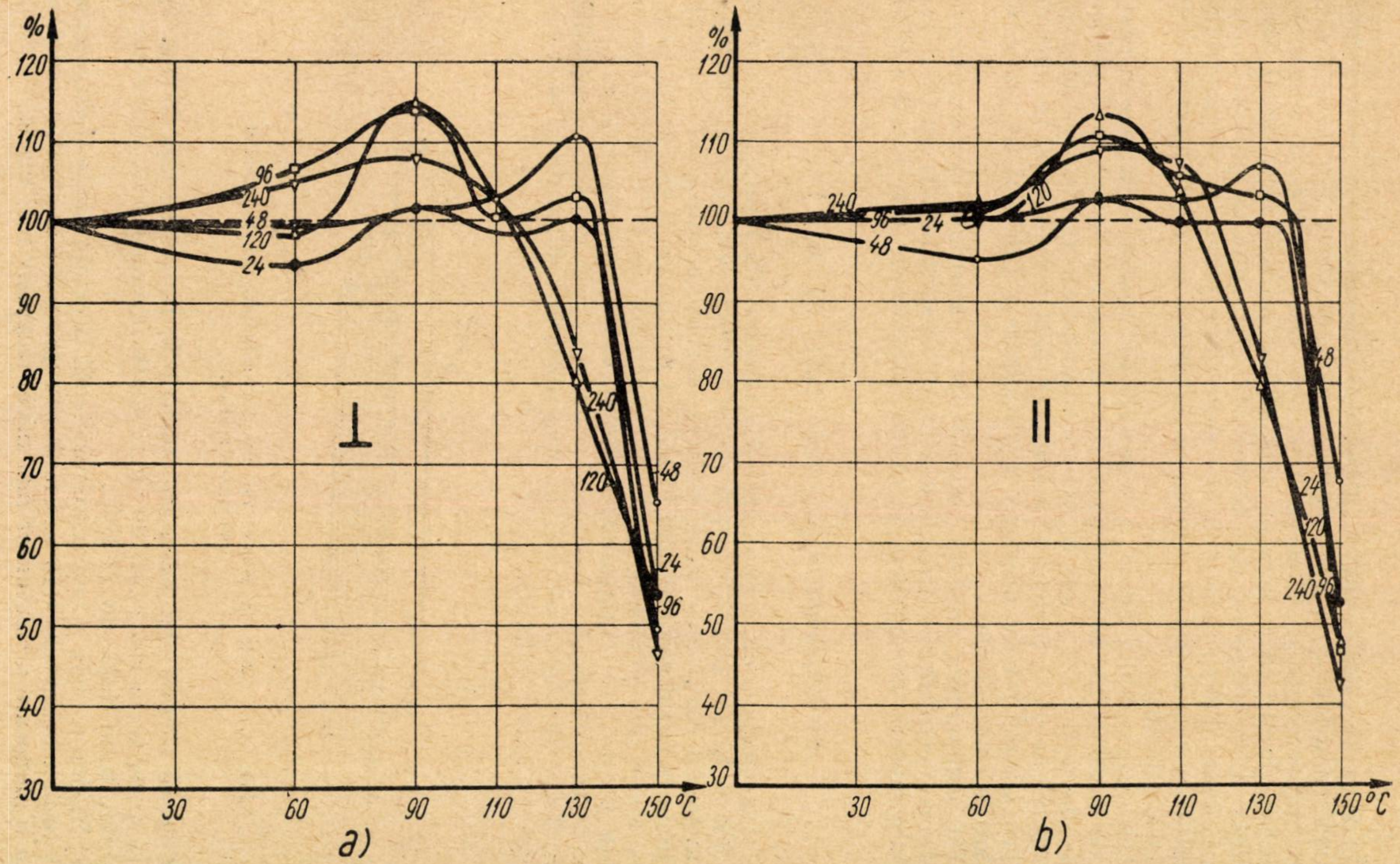


Fig. 3. — Variația rezistenței la încovoiere statică în funcție de temperatura de tratament termic la diverși timpi.

În zona 95—100°C, curbele prezintă o inflexiune care poate fi pusă pe seama fenomenului de plasticizare a celulozei. Peste 100°C, rezistența la compresiune crește și atinge un maximum pentru 110°C. El s-ar putea explica prin faptul că în această zonă efectul scăderii plasticității fibrei se însumează cu creșterea, mai accentuată a gradului de policondensare a rășinii. Peste 110°C, rezistența la compresiune paralel și perpendicular pe straturi începe să scadă repede, ca urmare a apariției procesului de degradare a fibrei.

Din diagrama din figura 2 *b* rezultă că ipoteza după care în cazul forței de compresiune aplicată paralel cu straturile, efortul ar fi preluat exclusiv de rășină [17], are o valoare discutabilă. Inflexiunea în jurul temperaturii de 90°C, precum și scăderea rapidă a rezistenței în zona de degradare a fibrei textile, dovedesc o participare a țesăturii la preluarea efortului de compresiune.

Din compararea creșterii procentuale a rezistenței la compresiune paralel și perpendicular cu direcția stratificării, rezultă însă că efortul în cea mai mare măsură este preluat de rășină (diagramele din fig. 2 *a* și *b*).

2) *Rezistența la încovoiere statică* (⊥ și ‖)

De la început, din compararea diagramelor din figura 2, *a*) și *b*) și figura 3 *a* și *b*, se poate observa că în prezența efortului la tracțiune (care apare în cazul încovoierii statice), curbele prezintă un minimum acolo unde în cazul compresiunii există un maximum și viceversa. Constatarea apare mai evidentă pentru temperatura de 90°C și mai puțin evidentă pentru 110 °C datorită, probabil, erorilor de măsurătoare.

c) Natura efortului aici este mai complexă : compresiune și tracțiune.

d) Toate fibrele de urzeală dintr-un plan sînt solicitate în mod egal în raport cu axa *U* (fig. 4).

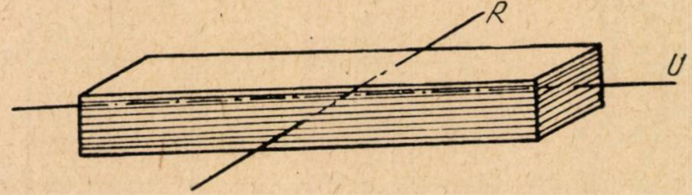


Fig. 4. — Axele în raport cu care sînt solicitate fibrele în cazul încovoierii statice.

Cele de bătează sînt solicitate simetric în raport cu axa *R* (fig. 4).

În plus, între straturile de pînză apare fenomenul de alunecare al straturilor, unul față de celălalt.

e) Rășina conferă o mai mare rezistență la compresiune și după cum gradul de policondensare este mai mult sau mai puțin avansat, avem de-a face cu o alunecare a straturilor mai mică, respectiv mai mare.

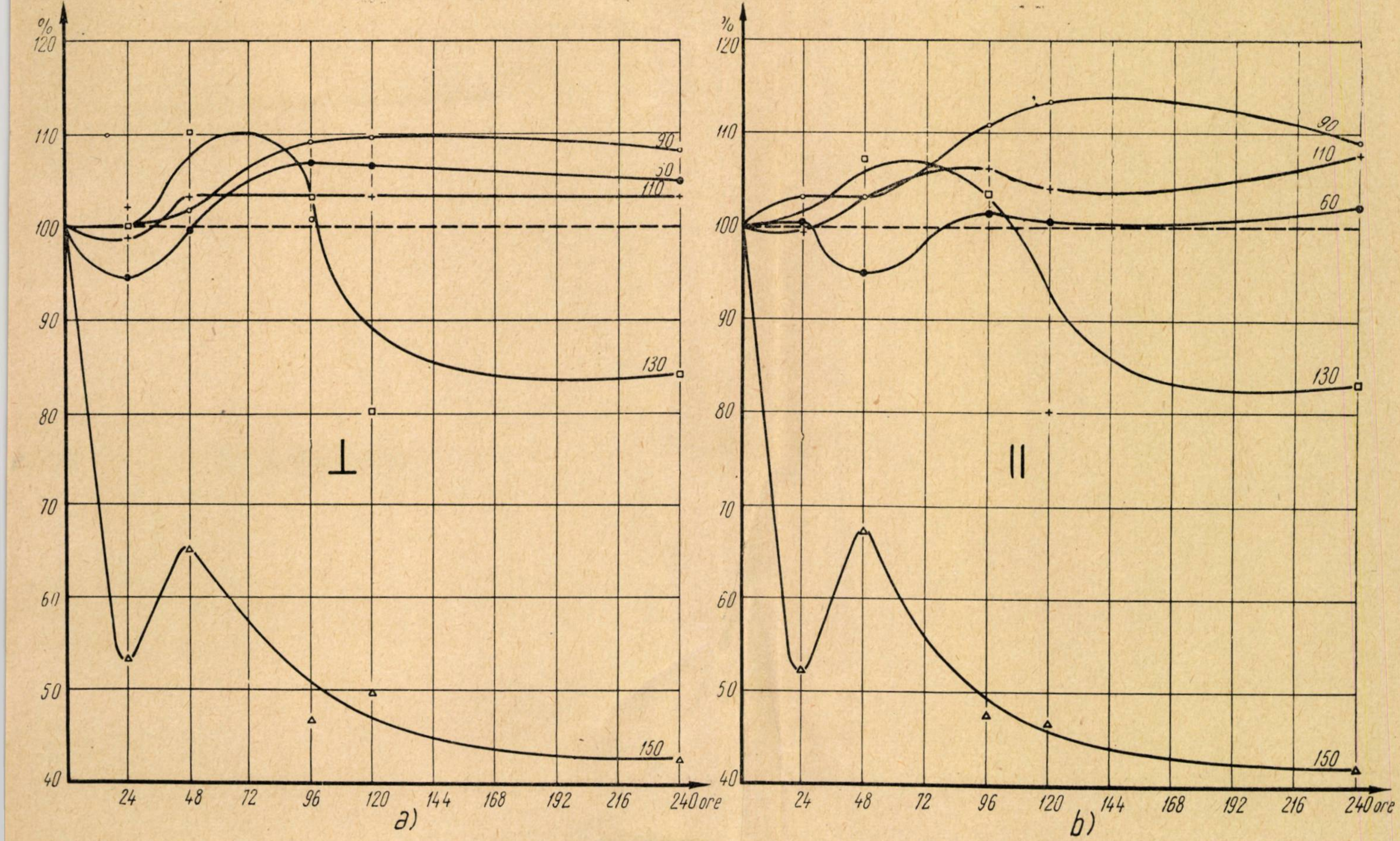


Fig. 5. — Variaţia rezistenţei la încovoiere statică în funcţie de timpul de tratament, la diferite temperaturi.

Țesătura preia mult mai bine efortul la tracțiune.

Creșterea gradului de policondensare a rășinii îi reduce capacitatea de curgere și deci de favorizare a alunecării, ceea ce face să crească solidaritatea straturilor de țesătură între ele. De aici rezistența care crește pînă la 90°C (diagrama din fig. 3 *a*).

După 90°C, rezistența la încovoiere începe să scadă și atinge un minimum la 110°C, care se poate explica prin pierderea apei legată fizic. În cazul epruvetelor tratate timp de 120 și 240 de ore, fenomenul nu mai apare din cauza începerii degradării materialului.

Mărind temperatura peste 110°C, este probabil că reacția de policondensare continuă mai repede și apare mai evidentă tendința de frînare a alunecării straturilor, manifestată practic prin creșterea rezistenței spre un maximum atins la 130°C pentru probele tratate 24 pînă la 96 de ore. La probele tratate timp de 120 și 240 de ore, efectul temperaturii este compensat de timp și degradarea apare mai devreme. Dincolo de temperatura de 130°C, rezistența la încovoiere scade brusc, ca urmare a accentuării puternice a procesului de degradare a țesăturii (diagramele din fig. 3 *a* și *b*).

Reprezentarea variației rezistenței la încovoiere în funcție de timp pentru diverse temperaturi (diagrama din fig. 5 *a* și *b*) vine în sprijinul celor arătate mai sus.

Se observă că după 24 de ore, curbele prezintă un minimum. Aceasta s-ar putea explica considerînd că echilibrul de forțe frînare-alunecare în rășină este favorabil alunecării straturilor și prin urmare rezistența scade.

O dată cu creșterea timpului însă, crește și gradul de policondensare al rășinii și în consecință apare mai puternică frînarea alunecării straturilor. Consecința acestui fenomen este creșterea rezistenței, care tinde spre un maxim între 96 și 120 de ore.

Ridicarea temperaturii de tratament termic peste 110°C duce la micșorarea rezistenței la încovoiere după un anumit timp, care este cu atît mai scurt cu cît temperatura este mai mare (de ex. : pentru 150°C scăderea bruscă începe în primele ore ; pentru 130°C abia după 72 ore. Diagramele din fig. 5 *a* și *b*).

3) *Rezistența la încovoiere dinamică* $\perp$ și $\parallel$

c) Ca și în cazul încovoierii statice și aici se deosebesc două eforturi care conlucrează antagonist : compresiune și tracțiune.

Rezistența la încovoiere dinamică prezintă unele aspecte deosebite, după cum solicitarea are loc paralel sau perpendicular cu direcția stratificării materialului.

d) Astfel, dacă solicitarea are loc perpendicular pe direcția stratificării, firele de urzeală din același plan sînt solicitate în mod egal, iar cele de bătealā simetric în raport cu axa *R* (vezi fig. 6 *a*).

Dacă solicitarea se face paralel cu direcția de stratificare, firele de urzeală sînt solicitate inegal în raport cu axa *U*, iar firele de bătează inegal în raport cu axa R. Firele din apropierea axei R sînt solicitate în special la compresiune, celelalte care sînt mai depărtate, la întindere (fig. 6 *b*).

e) Cît priveşte aportul fiecărei componente el este acelaşi ca şi în cazul încovoierii statice.

În general, prin tratament termic rezistenţa la şoc scade continuu şi indiferent de durata tratamentului. Pentru temperatura de 90°C (||) şi 110°C (⊥), are loc o inflexiune a curbelor urmată de scăderea rapidă a rezistenţei (diagramele din fig. 7 *a* şi *b*).

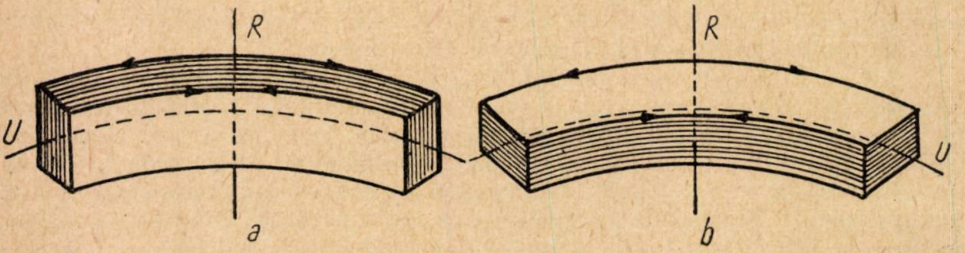


Fig. 6. — Axele în raport cu care sînt solicitate fibrele în cazul încovoierii dinamice.
a) Solicitare ⊥ pe direcţia stratificării;
b) ,, || cu ,, ,,

În cazul efortului aplicat perpendicular cu direcţia stratificării, pînă la 110°C are loc o scădere continuă a rezistenţei la şoc, ca urmare a creşterii fragilităţii răşinii. În acest interval, cum s-a arătat mai înainte, ţesătura nu a suferit modificări de natură a da naştere unor schimbări mari, astfel încît, se poate presupune că de scăderea rezistenţei este răspunzătoare în cea mai mare măsură răşina.

În intervalul 90—100°C, se constată o uşoară creştere a rezistenţei în cazul şocului perpendicular pe straturi şi o creştere mai accentuată, în cazul şocului paralel cu straturile. Acest lucru se poate explica dacă se ţine seama de efectul de plasticizarea celulozei. Un argument pentru această ipoteză, îl constituie scăderea mai mică a rezistenţei faţă de valoarea iniţială în cazul efortului aplicat paralel cu direcţia stratificării decît în cazul efortului aplicat perpendicular.

Dincolo de temperatura de 110°C rezistenţa la şoc scade foarte repede şi cu atît mai brusc cu cît temperatura este mai mare (diagramele din fig. 8 *a* şi *b*).

Fenomenul s-ar putea explica dacă se ţine seama că rezerva de plasticitate a răşinii a scăzut şi că fibra începe să se degradeze.

Ar trebui menţionat aportul negativ însemnat, pe care îl are încălzirea locală produsă prin şoc. Degradarea fibrei, care în mod normal trebuie să apară mai tîrziu, este grăbită de ridicarea temperaturii pe locul de ruptură. Efectul temperaturii se răsfrînge şi asupra răşinii, mărindu-i casanţa şi reducîndu-i capacitatea de a transmite eforturile, astfel că împreună cele două efecte negative se însumează şi conduc la scăderea rezistenţei pînă la aproximativ 20% din valoarea iniţială (material netratat termic) pentru temperatura de 130°C (diagrama din fig. 8 *a*).

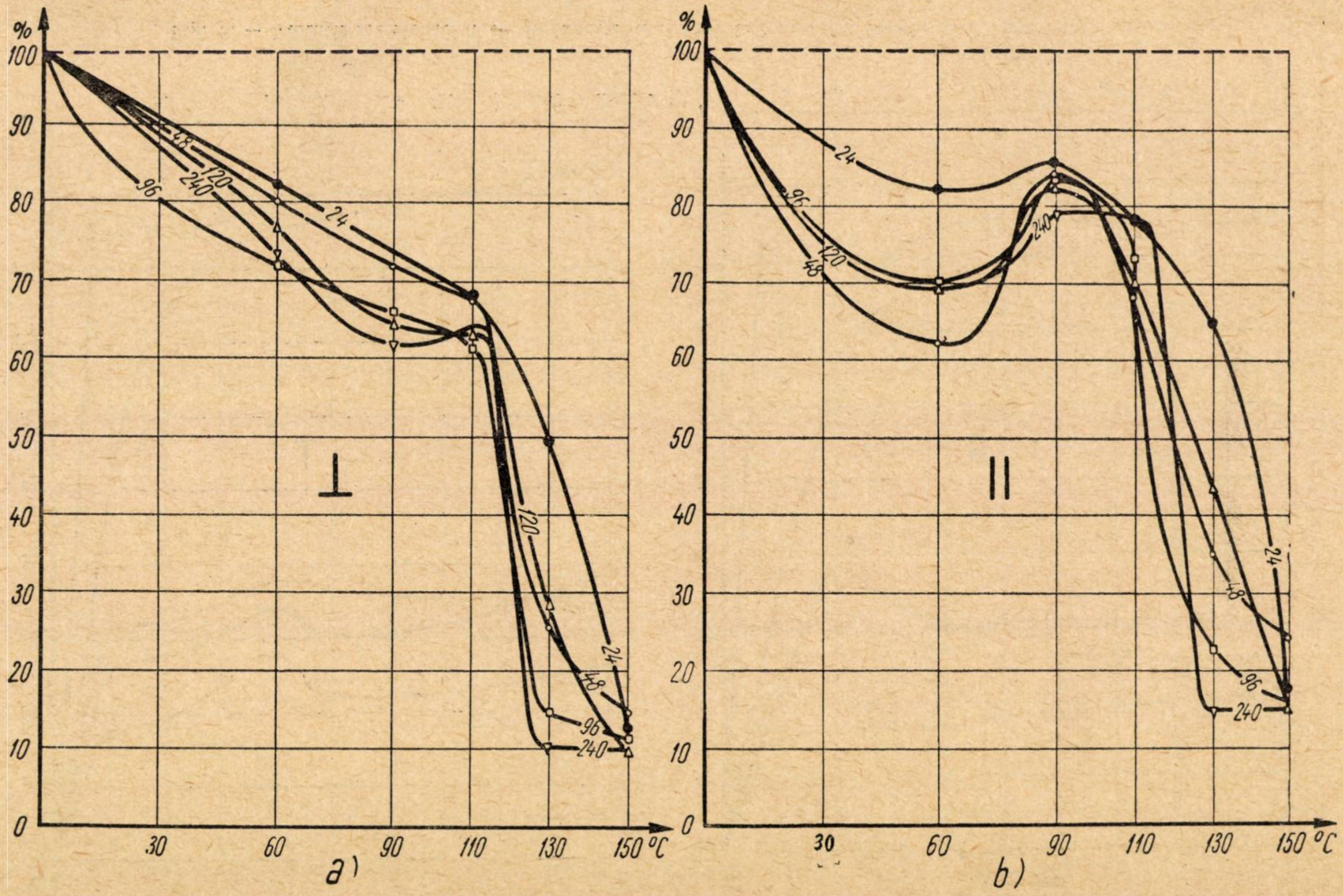


Fig. 7. — Variaţia rezistenţei la şoc în funcţie de temperatura de tratament termic, la diverşi timpi.

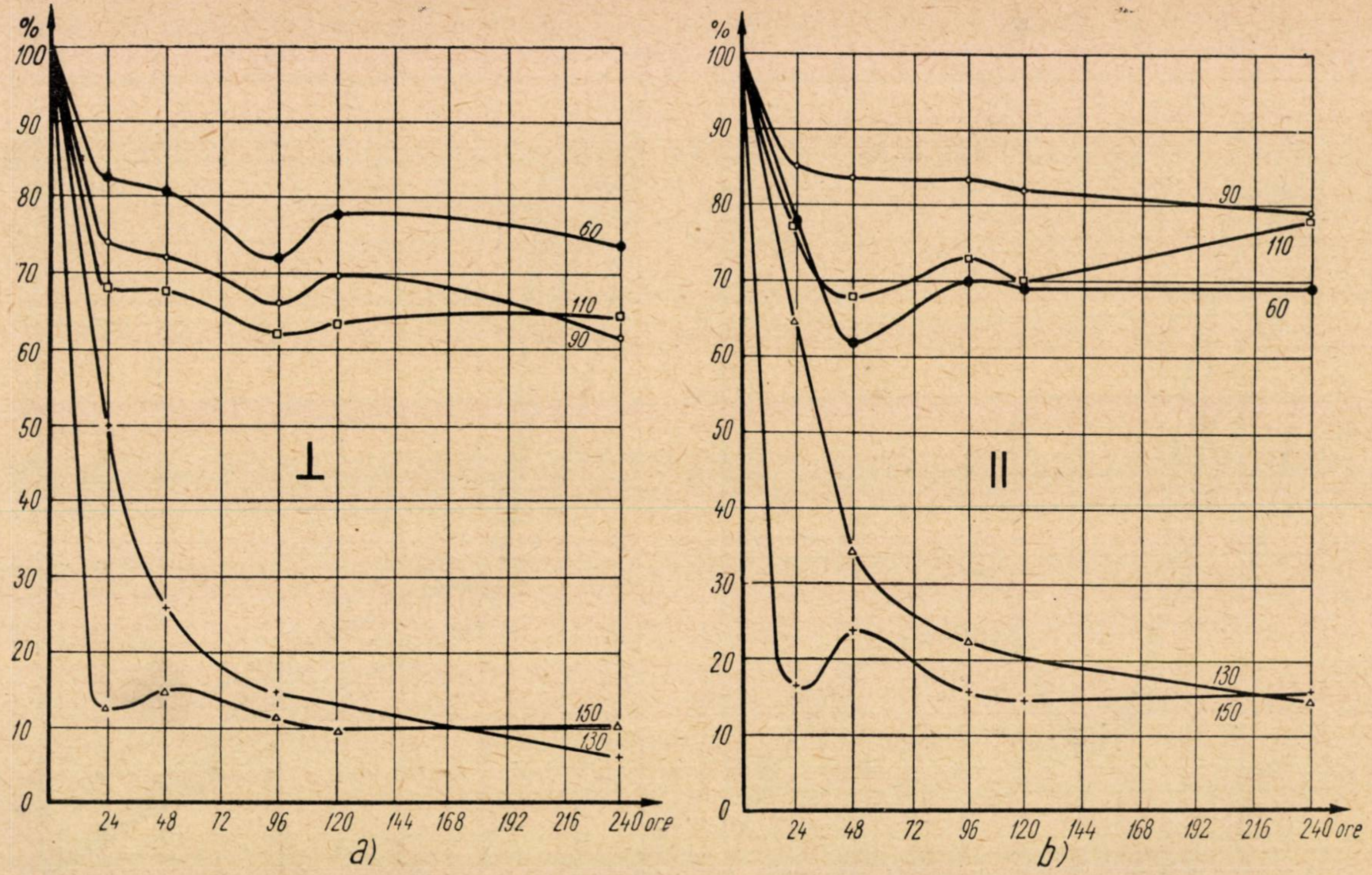


Fig. 8. — Variația rezistenței la șoc în funcție de timpul de tratament termic, la diverse temperaturi.

4) *Indicele de rezistență la despicare*

Trebuie menționat de la început că această încercare nu este amintită în literatură ca o rezistență, adică un raport între forța și suprafața pe care aceasta se exercită, ci o valoare numerică directă, valabilă pentru o anumită lățime a epruvetei și un unghi dat al penei de despicare.

c) *Fenomenul de despicare prezintă 3 momente* :

1° Muchia penei în momentul realizării contactului cu proba exercită un efort de compresiune.

2° Pana pătrunde în material și unghiul penei este egal cu unghiul despicării. Pana exercită două eforturi : un efort de compresiune pe suprafața de contact între muchia penei și muchia diedrului și un efort de împingere laterală pe laturile diedrului simetric în raport cu planul *P* (fig. 9).

3° Pana pătrunde în material, se pierde contactul între muchia penei și muchia diedrului, astfel că, asupra probei se exercită un efort de apăsare laterală. La această apăsare, cele două jumătăți ale epruvetei se comportă ca două grinzi simplu încastrate supuse la încovoiere simetric în raport cu planul *P*.

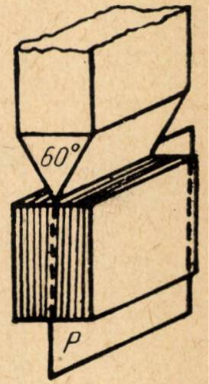


Fig. 9. — Despicare.

Bineînțeles, aceste momente, practic, sînt greu de diferențiat. De asemenea, pentru că este greu să se așeze pana perfect paralel cu unul din straturi, pe lîngă eforturile de mai sus, apar și alte eforturi secundare, greu de identificat.

d) Repartiția eforturilor se face simetric față de planul *P*.

e) Aportul fiecărei componente este diferit, în funcție de momentele despicării.

Solidarizarea prin rășină a celor două jumătăți ale epruvetei se transmite ca o reacțiune pe liniile de contact cu fețele penei. În aceste condiții, deși efortul principal este un efort de încovoiere, despicarea epruvetei nu este o rupere la încovoiere ci o rupere în funcție de momentul de încovoiere socotit în raport cu suprafața ce leagă cele două jumătăți.

Din considerentele expuse, s-a formulat ipoteza unei analogii a comportării la despicare cu comportarea la încovoiere statică. În sprijinul acestei ipoteze se poate lua în considerare alura curbelor indicelui de rezistență la despicare, în comparație cu cele de la încovoiere statică.

În lumina acestei ipoteze, se pot presupune următoarele :

Pînă la temperatura de 90° C, are loc o creștere a indicelui de rezistență la despicare ca urmare a creșterii gradului de policondensare a rășinii. Între 90 și 100°C, apariția fenomenului de plasticizare a celulozei coboară valoarea despicării, care atinge un minim pentru 110°C. În zona dintre 110 și 130°C, creșterea gradului de policondensare a rășinii are un efect predominant pozitiv în ansamblul rășină-țesătură, pentru ca după 130°C, în zona de degradare a țesăturii, să predomine acest ultim efect, ducînd la o scădere rapidă a indicelui de rezistență la despicare (diagrama din fig. 10).

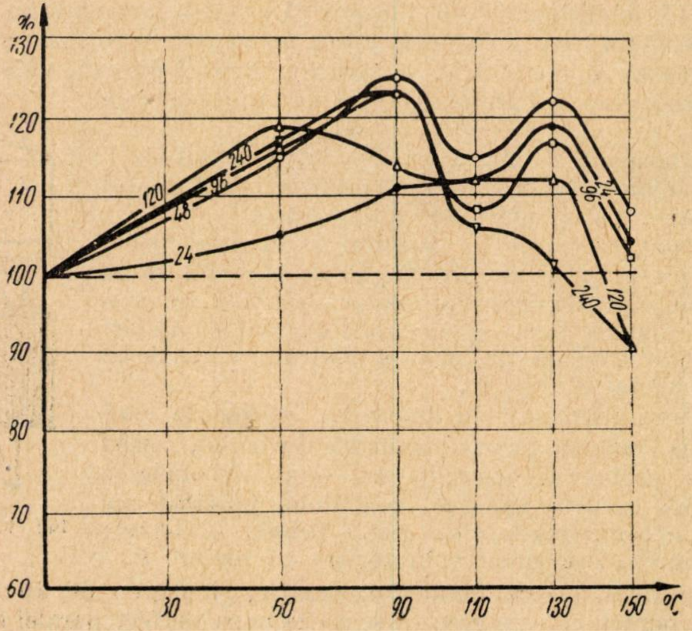


Fig. 10. — Variația indicelui de despicare în funcție de temperatura de tratament termic la diverși timpi.

CONCLUZII

Privitor la modul cum trebuie tratate termic materialele plastice stratificate cu rășină furfurol- fenolică și țesătura de bumbac, studiul de față a demonstrat următoarele :

a) Durata tratamentului termic dă rezultate utile din punct de vedere practic, numai la intervalul de aproximativ 90 de ore. După această limită, la toate temperaturile modificările sînt reduse. Cele mai pronunțate schimbări se produc în primele 24 de ore.

b) Pentru fiecare destinație, materialul ar trebui tratat diferit în funcție de principala solicitare la care va fi supus.

c) În cazul că se urmărește o îmbunătățire generală și nu valori maxime pentru solicitări precise, cel mai bun interval de temperatură este 90—110°C.

d) Pe baza rezultatelor obținute, în studiul de față au fost formulate unele ipoteze cu privire la comportarea materialului stratificat la solicitări mecanice.

Demonstrarea acestor ipoteze necesită continuarea cercetărilor.

Laboratorul de mase plastice al Centrului
de cercetări chimice al Academiei R.P.R.

Primită la redacție 25 iunie 1956.

ПЛАСТМАССЫ НА ОСНОВЕ ФУРФУРОЛА И ДЕРИВАТОВ

IV. ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА НЕКОТОРЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОГРЕССИВНЫМ УСИЛИЯМ НА ИЗЛОМ ТЕКСТОЛИТА С ФЕНОЛО-ФУРФУРОЛОВОЙ СМОЛОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе исследуется оптимальный режим для термической обработки слоистых материалов с феноло-фурфуроловой смолой, изготовленной особым способом.

Для исследований был применен слоистый материал, полученный путем пропитки хлопчатобумажной ткани раствором феноло-фурфуроловой смолы с точкой каплепадения между 108—110° по Уббелохде. Прессование производилось при 160° при удельном давлении 100 кг/см^2 с выдержкой в течение 4 мин/мм.

Были сделаны определения сопротивления на сжатие, статический изгиб, динамический изгиб и скалывание после термической обработки при температуре 60—200° и для промежутков времени 24—240 часов. Пробы были изготовлены согласно нормам ГОСТ и всегда разрезывались в направлении основы, причем для каждого испытания было взято 5 проб.

Путем определения механических свойств при комнатной температуре, по сравнению с материалом, не подвергнутым термической обработке, было выведено заключение, что термическая обработка приводит к результатам, полезным с практической точки зрения только для интервала примерно в 90 часов. Для общего улучшения значений механических сопротивлений наиболее благоприятной является обработка при 90—110°. Если материал предназначается для работы под нагрузкой, то термическая обработка производится в зависимости от этой нагрузки.

На основе полученных результатов были выведены некоторые гипотезы о поведении слоистых материалов под механическими нагрузками.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Применение усилия на сжатие. *a)* перпендикулярно направлению слоистости; *b)* параллельно направлению слоистости.

Рис. 2. — Изменение сопротивления на сжатие в зависимости от температуры термической обработки в различные моменты.

Рис. 3. — Изменение сопротивления на статический изгиб в зависимости от температуры термической обработки в различные моменты.

Рис. 4. — Оси, соответственно которым волокна подвергаются нагрузке при статическом изгибе.

Рис. 5. — Изменение сопротивления на статический изгиб в зависимости от времени обработки при различных температурах.

Рис. 6. — Оси, соответственно которым волокна подвергаются нагрузке при динамическом изгибе. *a)* нагрузка перпендикулярно направлению слоистости; *b)* нагрузка параллельно направлению слоистости.

Рис. 7. — Изменение сопротивления на удар в зависимости от температуры термической обработки в различные моменты.

Рис. 8. — Изменение сопротивления на удар в зависимости от момента термической обработки при различных температурах.

Рис. 9. — Расщепление.

Рис. 10. — Изменение показателя расщепления в зависимости от термической температуры в различные моменты.

MASSES PLASTIQUES À BASE DE FURFUROL ET DÉRIVÉS

IV. INFLUENCE DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR CERTAINES RÉSISTANCES À DES EFFORTS PROGRESSIFS À LA RUPTURE DU STRATIFIÉ À RÉSINE FURFUROL-PHÉNOLIQUE

(RÉSUMÉ)

On a esayé, dans le présent travail, de trouver le meilleur régime pour le traitement thermique des stratifiés à résine furfurol-phénolique, fabriquée suivant un procédé original.

Pour les essais, on a utilisé un matériel stratifié, réalisé par imprégnation d'un tissu de coton avec une solution de résine furfurol-phénolique, ayant un point de goutte suivant Ubbelohde compris entre 108 et 110°C. Le pressage a été exécuté à 160°, à une pression spécifique de 100 kg/cm^2 et en un temps de cuisson de 4 min/mm.

On a effectué des déterminations de résistance à la compression, à la flexion, au choc et au fendage, après traitement thermique allant de 60° à 200°C et pour des intervalles de temps de 24 à 240 heures. Les éprouvettes ont été confectionnées conformément aux normes GOST et découpées toujours suivant la trame, en utilisant 5 éprouvettes pour chaque essai.

La détermination des propriétés mécaniques, à la température de la chambre, en comparaison du matériel qui n'a pas subi de traitement thermique a conduit à la conclusion que le traitement thermique ne donne de résultats, utiles au point de vue pratique, que pour l'intervalle d'environ 90 heures. Si l'on poursuit une amélioration générale des valeurs des résistances mécaniques, le traitement le plus favorable se trouve entre 90 et 110°C. Si le matériel est destiné à résister à une certaine sollicitation, le traitement thermique doit être fait en fonction de cette dernière.

En vertu des résultats obtenus, on a élaboré quelques hypothèses concernant le comportement des stratifiés aux sollicitations mécaniques.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Application de l'effort de compression : *a*) perpendiculairement à la direction de la stratification ; *b*) parallèlement à la direction de la stratification.

Fig. 2. — Variation de la résistance à la compression en fonction de la température du traitement thermique à différents temps.

Fig. 3. — Variation de la résistance à la flexion en fonction de la température du traitement thermique à différents temps.

Fig. 4. — Les axes par rapport auxquels sont sollicitées les fibres, dans le cas de la flexion.

Fig. 5. — Variation de la résistance à la flexion , en fonction de la durée du traitement à des températures diverses.

Fig. 6. — Les axes par rapport auxquels sont sollicitées les fibres au choc : *a*) sollicitation ⊥ à la direction de la stratification ; *b*) sollicitation ∥ à la direction de la stratification.

Fig. 7. — Variation de la résistance au choc en fonction de la température du traitement thermique à différents temps.

Fig. 8. — Variation de la résistance au choc en fonction de la durée du traitement thermique à des températures diverses.

Fig. 9. — Fente.

Fig. 10. — Variation de l'indice de fente, en fonction de la température du traitement thermique à divers temps.

BIBLIOGRAFIE

1. I. E. Barg, *Tehnologia sinteticeskih plasticeskih mass.* Goshimizdat, Leningrad, 1954, p. 126.
2. I. A. Pic, *Mase plastice de presare și plastice laminate.* I.D.T., București, 1951.
3. A. I. A. Sugal i V.V. Baranovski, *Sloistîeplastiki,* Ghosimizdat, Moscova, 1953, p. 95-109.
4. H. Repprech t, Kunststoffe,1939, t. 29, nr. 10, p. 287.
5. C. Brinkmann, Kunststoffe, 1942, t. 32 nr. 7, p. 213.
6. — Ind. des plastiques, 1948, t. 4, nr. 3, p. 135.
7. P. Norelli, Kunststoffe, 1949, t. 39, nr. 7, p. 163—164.
8. R. Nitsche u E. Salewski, Kunststoffe, 1939, t. 29, nr. 8, p, 209—220.
9. — Kunststoffe, 1941, t. 31, nr. 11, p. 381—388.
10. F. I. Kanaveț, i V. A. Selion, Himiceskaia promîșlennost, 1954, nr. 3, p. 19 — 34.
11. M. G. Kline, Kunststoffe, 1952, t. 42, nr. 11 p. 399.
12. W. Kuntze u R. Nitsche, Kunststoffe, 1939, t. 29 nr. 2, p. 33.
13. W. Kuntze, R. Nitsche u H. Mertes, Kunststoffe, 1940, t. 30, nr. 7, p. 193.
14. I. I. Lamb, D. A. George, A. H. Baker u E. L. Siefert, Modern Plastics, 1952, t. 30, nr. 2, p. 164.
15. P. Dubois et L. Jacqué, Ind. des plastiques modernes, 1951, t. 3, nr. 10, p. 38.
16. Thum u Jacobi Mechanische Festigkeit von Phenol Formaldehid-Kunststoffe, V.D.I., 1936, nr. 2, caietul 396.
17. D. I. Avrasin i N. V. Ivanov, Himiceskaia promîslennosti, 1954, nr. 3, p. 149.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

CALCULUL CADRELOR TIP SHED PRIN ECUAŢII CU DIFERENŢE FINITE

DE

TEODOR CĂRARE şi CEZAR AMZULESCU

Cadrele tip shed au o largă răspîndire în construcţiile industriale, de aceea calculul lor printr-o metodă exactă merită o deosebită atenţie. Metodele generale de calcul static, metoda eforturilor şi metoda deplasărilor, conduc la calcule foarte laborioase datorită numărului mare de necunoscute (eforturi sau deplasări).

Metoda pe care o prezentăm înlocuieşte aceste dificultăţi. Din punct de vedere matematic ea se bazează pe rezolvări de ecuaţii cu diferenţe finite aşa cum apar şi în alte lucrări [1].

Pentru aplicarea acestei metode este necesar ca sistemul de bază să fie astfel ales, încît în fiecare ecuaţie a metodei eforturilor sau deplasărilor să nu intervină decît necunoscutele de ordinul n şi necunoscutele adiacente lor.

Aceste necunoscute trebuie să fie aceleaşi în fiecare panou şi în total să corespundă gradului de nedeterminare statică a structurii.

În metoda eforturilor, rezolvarea se simplifică dacă diagramele unitare se extind pe un singur panou.

În metoda deplasărilor, rotirile de nod îndeplinesc condiţiile de recurenţă datorită schemei statice formate din cadre ce se repetă, avînd aceeaşi structură geometrică, elastică şi mecanică; pentru deplasările barelor este indicat ca deplasarea specifică panoului n, să fie rotirea stîlpului n, numărul de stîlpi fiind egal cu numărul gradelor de libertate.

În metoda eforturilor se pot folosi forme de bază diferite pentru fiecare din necunoscutele panoului n, cu condiţia ca diagramele unitare să fie liniar independente [2].

Ecuațiile în panoul n pentru metoda eforturilor sau deplasărilor sînt de forma

$$\begin{aligned}
&\sum_{n-1}^{n+1} p_{x_n x_\mu} X_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n y_\mu} Y_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n z_\mu} Z_\mu = A_n \\
&\sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n x_\mu} X_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n y_\mu} Y_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n z_\mu} Z_\mu = B_n \qquad (1) \\
&\sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n x_\mu} X_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n y_\mu} Y_\mu + \sum_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n z_\mu} Z_\mu = C_n
\end{aligned}$$

în care X_n, Y_n și Z_n sînt necunoscutele statice căutate (deplasări sau eforturi după metoda întrebuințată), iar coeficienții au semnificația corespunzătoare.

Asupra sistemului de ecuații se fac observațiile :

— necunoscutele sînt funcții de n, deci sistemul de ecuații este funcțional ;

— prin particularizare, dînd lui n valorile $(1,2,\ldots,m)$ se obține întreaga serie de sisteme de ecuații ;

— soluțiile acestui sistem fiind și ele funcții de n, prin particularizare dau soluțiile întregii serii de sisteme de ecuații.

Sistemul de ecuații funcțional este de tipul ecuațiilor cu diferențe finite. Soluțiile funcțiilor vor fi de forma

$$W_n = C_i r^n \qquad (2)$$

unde r sînt rădăcinile reale ale ecuației caracteristice, iar C_i, constante arbitrare, aceleași pentru oricare din necunoscute, abstracție făcînd de un termen constant.

Pentru aflarea ecuației caracteristice se întrebuințează metoda de la sistemele de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți. Ecuația caracteristică este dată de determinantul principal egalat cu zero, în care funcțiile necunoscute au fost înlocuite prin soluțiile lor de tipul r^n

$$\Delta = r^{n-2} \begin{vmatrix}
r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n x_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n y_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n z_\mu} \\
r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n x_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n y_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n z_\mu} \\
r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n x_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n y_\mu}, & r^{0,1,2} \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n z_\mu}
\end{vmatrix} \qquad (3)$$

Dezvoltîndu-se determinantul se obține ecuația caracteristică a sistemului de ecuații funcționale, a cărei expresie este de forma

$$r^{n-2}(a + br + cr^2 + br^3 + ar^4) = 0. \qquad (4)$$

Ecuația caracteristică este, obișnuit, reciprocă ; în cazul cadrelor tip shed este de gradul 4.

Partea omogenă a ecuației funcționale într-o singură funcție, indiferent care ar fi ea, se deduce din ecuația caracteristică, trecînd de la soluțiile funcțiilor la funcții.

Forma acestor ecuații este

$$aW_{n-2} + bW_{n-1} + cW_n + bW_{n+1} + aW_{n+2} = 0\,, \tag{5}$$

în care W_n poate fi X_n, Y_n sau Z_n.

Faptul că partea omogenă a ecuațiilor este aceeași, arată că în structură există o stare de autosolicitare specifică, comună tuturor funcțiilor (eforturi sau deformații).

Reciprocitatea ecuației se explică prin faptul că legăturile elastice ale panoului n cu panourile adiacente sînt aceleași.

Ecuația funcțională (5) admite în general și o parte dreaptă, care se determină înlocuind în determinantul principal una dintre coloane și anume, aceea corespunzătoare funcției în care vrem să obținem ecuația, cu termenii liberi ai sistemului de ecuații (1), luați cu grade corespunzătoare funcțiilor înlocuite.

Determinantul care dă valoarea termenului liber al ecuației în X_n, este de forma

$$\text{T.L.} = \begin{vmatrix} A_{\mu(n-1,n,n+1)} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n y_\mu} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{x_n z_\mu} \\ B_{\mu(n-1,n,n+1)} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n y_\mu} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{y_n z_\mu} \\ C_{\mu(n-1,n,n+1)} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n y_\mu} & \sum\limits_{\mu=n-1}^{n+1} p_{z_n z_\mu} \end{vmatrix} = f(n) \tag{6}$$

Obținerea ecuației într-o singură funcție (5), din sistemul de ecuații scris în panoul n, se poate face și prin substituție, metodă întrebuințată în prezent în literatura cunoscută autorilor; metoda substituției este însă foarte laborioasă și, uneori, duce la dificultăți foarte mari în obținerea ecuației.

Soluția unei ecuații funcționale, de exemplu în X_n

$$aX_{n-2} + bX_{n-1} + cX_n + bX_{n+1} + aX_{n+2} = f(n), \tag{7}$$

va fi de forma

$$X_n = \sum_{i=1}^{4} C_i \vartheta^n(\gamma, 1/\gamma, \varepsilon, 1/\varepsilon) + \overline{X}_n, \tag{8}$$

în care γ, $1/\gamma$, ε, $1/\varepsilon$ sînt rădăcinile ecuației caracteristice (4), iar $\overline{X}_n$ este o soluție particulară ce se determină ca la ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți, ținînd seama de forma părții drepte a ecuației(7).

Pentru anumite scheme geometrice și încărcări, în metoda deplasărilor se obțin ecuații funcționale omogene, ceea ce are sens întrucît ecuațiile de margine sînt neomogene.

Din sistemul de ecuații scris în panoul n, relația (1), avînd expresia unei funcții, se pot determina expresiile celorlalte două funcții, care vor fi de forma

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{i=1}^{4} a_i C_i r^n(\gamma, 1/\gamma, \varepsilon, 1/\varepsilon) + f_1(n)\,, \\ Z_n &= \sum_{i=1}^{4} b_i C_i r^n(\gamma, 1/\gamma, \varepsilon, 1/\varepsilon) + f_2(n)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Întrucît legătura dintre funcții este liniară, expresiile funcțiilor deduse (9), vor diferi prin termenii constanți a_i și b_i față de funcția X_n, iar termenii liberi vor fi cei deduși din operațiile efectuate.

Determinarea constantelor se face din condițiile de margină. Obișnuit, condițiile de margină sînt ecuațiile primului și ultimului panou.

Punînd condiția ca soluțiile sistemului de ecuații funcționale (8) și (9), să fie în același timp și soluții ale ecuațiilor de margină, se determină valorile constantelor. În locul acestei condiții se poate folosi o alta, rezultată din combinația dintre ecuațiile de margină și ecuațiile panoului 1 și respectiv m, deduse din ecuațiile funcționale ale panoului n prin particularizare. Această combinație este permisă, întrucît se combină ecuații (ecuațiile de margină) cu identități (ecuații deduse prin particularizare din ecuațiile scrise în panoul n, ce sînt verificate identic de soluțiile funcțiilor, indiferent de valorile constantelor).

Drept condiții pentru determinarea constantelor se pot folosi și diferitele valori cunoscute ale funcțiilor.

Numărul condițiilor distincte este egal cu numărul constantelor.

Sistemul de ecuații din care se determină constantele este de tipul :

$$a_1C_1 + b_1C_2 + c_1C_3 + d_1C_4 = A_1, \tag{10}$$
$$a_2C_1 + b_2C_2 + c_2C_3 + d_2C_4 = A_2, \tag{10'}$$
$$a_3C_1\gamma^m + b_3C_2\gamma^{-m} + c_3C_3\varepsilon^m + d_3C_4\varepsilon^{-m} = A_3, \tag{10''}$$
$$a_4C_1\gamma^m + b_4C_2\gamma^{-m} + c_4C_3\varepsilon^m + d_4C_4\varepsilon^{-m} = A_4. \tag{10'''}$$

În cazul unui număr de panouri suficient de mare, determinarea valorilor constantelor se simplifică, deoarece din ecuațiile (10″) și (10‴) se neglijează termenii multiplicați cu γ^{-m} și ε^{-m}, care sînt mici în raport cu ceilalți ; din aceste ecuații se determină valorile constantelor C_1 și C_3 ($C_1 = a\gamma^{-m}$ și $C_3 = b\varepsilon^{-m}$).

Pentru determinarea constantelor C_2 și C_4 se folosesc ecuațiile (10) și (10′), unde se neglijează termenii ce conțin constantele C_1 și C_3, de asemenea foarte mici în raport cu ceilalți.

În cazul cînd numărul panourilor este mic, valorile găsite, așa cum s-a arătat mai sus, pot fi considerate determinate într-o primă aproximație, corectarea valorilor urmînd să se facă prin aproximări succesive din aceleași sisteme de ecuații. Obișnuit, valorile constantelor se obțin cu exactitate suficientă din două aproximări.

Prin determinarea constantelor problema este rezolvată.

La determinarea valorii funcțiilor se observă că efectul constantelor se resimte numai în primele 2—3 panouri de margine. În partea mediană a structurii este predominată soluția particulară a funcției.

Pentru cadrele unde rigiditățile sau schemele geometrice variază de la panou la panou după o anumită lege, se obțin ecuații funcționale cu coeficienți variabili. În acest caz se caută soluții particulare pentru funcții, ce dau o valoare suficient de exactă pentru partea mediană a cadrului, panourile de margine urmînd să fie rezolvate prin metodele obișnuite ale mecanicii construcțiilor.

EXEMPLU DE CALCUL

Pentru arătarea modului de aplicare a metodei se va rezolva cadrul shed arătat în figura 1.

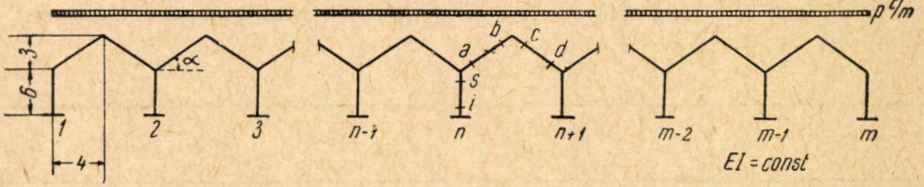

p t/m
3
6
α
b
c
a
d
s
i
4
1
2
3
n-1
n
n+1
m-2
m-1
m
EI = const

Fig. 1

A. METODA EFORTURILOR

1. Determinarea sistemului de ecuații funcționale

În figurile 2 și 3 sînt arătate două sisteme de bază, iar în tablourile nr. 1 și 2, deplasările corespunzătoare.

În figura 3 s-au luat sisteme de bază diferite.

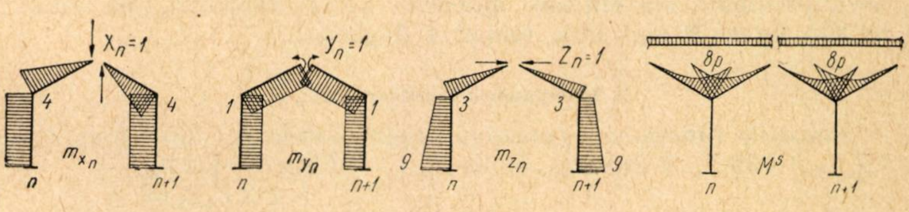

$X_n=1$
4
4
m_{x_n}
n
n+1
$Y_n=1$
1
1
m_{y_n}
n
n+1
$Z_n=1$
3
3
9
9
m_{z_n}
n
n+1
8p
8p
M^s
n
n+1

Fig. 2

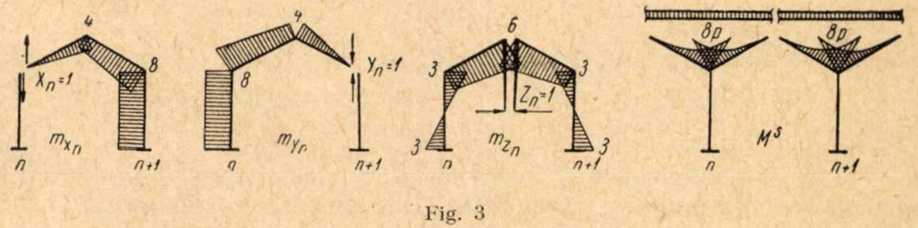

4
8
$X_n=1$
m_{x_n}
n
n+1
4
8
$Y_n=1$
m_{y_n}
n
n+1
6
3
3
$Z_n=1$
3
3
m_{z_n}
n
n+1
8p
8p
M^s
n
n+1

Fig. 3

În tabloul nr. 1 s-au calculat coeficienţii corespunzători sistemului de bază din figura 2 (în ecuaţia (1) coeficienţii sînt multiplicaţi cu 3).

Tabloul nr. 1

	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	Y_{n-1}	Y_n	Y_{n+1}	Z_{n-1}	Z_n	Z_{n+1}	T.L.
X_n	$\delta_{x_n x_{n-1}}$ 288	$\delta_{x_n x_n}$ 736	$\delta_{x_n x_{n+1}}$ 288	$\delta_{x_n y_{n-1}}$ 72	$\delta_{x_n y_n}$ 0	$\delta_{x_n y_{n+1}}$ —72	$\delta_{x_n z_{n-1}}$ —432	$\delta_{x_n z_n}$ 0	$\delta_{x_n z_{n+1}}$ 432	Δ_x^n 0
Y_n	$\delta_{y_n x_{n-1}}$ —24	$\delta_{y_n x_n}$ 0	$\delta_{y_n x_{n+1}}$ 24	$\delta_{y_n y_{n-1}}$ —6	$\delta_{y_n y_n}$ 22	$\delta_{y_n y_{n+1}}$ —6	$\delta_{y_n z_{n-1}}$ 36	$\delta_{y_n z_n}$ —87	$\delta_{y_n z_{n+1}}$ 36	Δ_y^n $\frac{80}{3}p$
Z_n	$\delta_{z_n x_{n-1}}$ 144	$\delta_{z_n x_n}$ 0	$\delta_{z_n x_{n+1}}$ —144	$\delta_{z_n y_{n-1}}$ 36	$\delta_{z_n y_n}$ —87	$\delta_{z_n y_{n+1}}$ 36	$\delta_{z_n z_{n-1}}$ —234	$\delta_{z_n z_n}$ 498	$\delta_{z_n z_{n+1}}$ —234	Δ_z^n $-\frac{180}{3}p$

În tabloul nr. 2 sînt daţi coeficienţii corespunzători sistemului de bază din figura 3.

Tabloul nr. 2

	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	Y_{n+1}	Y_n	Y_{n+1}	Z_{n-1}	Z_n	Z_{n+1}	T.L.
X_n	$\delta_{x_n x_{n-1}}$ 0	$\delta_{x_n x_n}$ 448	$\delta_{x_n x_{n+1}}$ 0	$\delta_{x_n y_{n-1}}$ 0	$\delta_{x_n y_n}$ —80	$\delta_{x_n y_{n+1}}$ 288	$\delta_{x_n z_{n-1}}$ 0	$\delta_{x_n z_n}$ 135	$\delta_{x_n z_{n+1}}$ 0	Δ_x^n 80 p
Y_n	$\delta_{y_n x_{n-1}}$ 288	$\delta_{y_n x_n}$ —80	$\delta_{y_n x_{n+1}}$ 0	$\delta_{y_n y_{n-1}}$ 0	$\delta_{y_n y_n}$ 448	$\delta_{y_n y_{n+1}}$ 0	$\delta_{y_n z_{n-1}}$ 0	$\delta_{y_n z_n}$ 135	$\delta_{y_n z_{n+1}}$ 0	Δ_y^n —80 p
Z_n	$\delta_{z_n x_{n-1}}$ 0	$\delta_{z_n x_n}$ 30	$\delta_{z_n x_{n+1}}$ 0	$\delta_{z_n y_{n-1}}$ 0	$\delta_{z_n y_n}$ —30	$\delta_{z_n y_{n+1}}$ 0	$\delta_{z_n z_{n-1}}$ 3	$\delta_{z_n z_n}$ 4	$\delta_{z_n z_{n+1}}$ 5	Δ_z^n $-\frac{50}{3}p$

Se observă că la sistemul din figura 3, prin modul de aranjare a necunoscutelor, s-a obţinut anularea a 14 deplasări, în timp ce la cel din figura 2 sînt nule numai 4 deplasări.

2. Determinarea funcţiilor X_n, Y_n şi Z_n

Ecuaţiile funcţionale corespunzătoare sistemului din figura 2 sînt:

$$288\,X_{n-1} + 736\,X_n + 288\,X_{n+1} + 72\,Y_{n-1} - 72\,Y_{n+1} - 432\,Z_{n-1} + \\ + 432\,Z_{n+1} = 0, \qquad (1)$$

$$-24\,X_{n-1} + 24\,X_{n+1} - 6\,Y_{n-1} + 22\,Y_n - 6\,Y_{n+1} + \\ + 36\,Z_{n-1} - 87\,Z_n + 36\,Z_{n+1} = \frac{80}{3}\,p, \qquad (1')$$

$$144\,X_{n-1} - 144\,X_{n+1} + 36\,Y_{n-1} - 87\,Y_n + \\ + 36\,Y_{n+1} - 234\,Z_{n-1} + 498\,Z_n - 234\,Z_{n+1} = -\frac{180}{3}\,p. \qquad (1'')$$

Ecuaţia caracteristică se obţine prin dezvoltarea determinantului principal al sistemului, a cărui formă este arătată în tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	Y_{n+1}	Y_n	Y_{n+1}	Z_{n-1}	Z_n	Z_{n+1}
r^{n-1}	r^n	r^{n+1}	r^{n-1}	r^n	r^{n+1}	r^{n-1}	r^n	r^{n+1}
288	736	288	72	0	−72	−432	0	432
−24	0	24	−6	22	−6	36	−87	36
144	0	−144	36	−87	36	−234	498	−234

Calculul ecuației caracteristice se poate schematiza așa cum se arată în tabloul nr. 4, în care Δ_1^z, Δ_2^z, Δ_3^z sînt determinanții minori ai coloanei z, din determinantul principal (tabloul nr. 3).

Pe prima linie, în dreptul fiecărui determinant minor. s-a scris expresia nedezvoltată a lui, iar dedesubt s-au scris valorile simplificate cu 8, rezultate din desfacerea parantezelor. Valorile rezultate din dezvoltare se așază pe coloane diferite, corespunzătoare puterii lui r.

Ecuația caracteristică rezultă din înmulțirea, după regulele de dezvoltare ale determinanților, a coloanei z din determinantul principal cu expresiile determinanților minori, așa cum se arată tot în tabloul nr. 4.

Tabloul nr. 4

	r^0	r	r^2	r^3	r^4	r^5
Δ_1^z	$8(18-18r^2)(-6+22r-8r^2)-8(-3+3r^2)(36-87r+36r^2)$					
	−108	396	−108			
			108	−396	108	
	108	−261	108			
			−108	261	−108	
	0	135	0	−135	0	
Δ_2^z	$8(18-18r^2)(72-72r^2)-8(36+92r+36r^2)(36-87r+36r^2)$					
	1296		−1296			
			−1296		1296	
	−1296	3132	−1296			
		−3312	8004	−3312		
			−1296	3132	−1296	
	0	−180	2820	−180	0	
Δ_3^z	$8(-3+3r^2)(72-72r^2)-8(36+92r+36r^2)(-6+22r-6r^2)$					
	−216		216			
			216		−216	
	216	−792	216			
		552	−2024	552		
			216	−792	216	
	0	−240	−1160	−240	0	

Tabloul nr. 4 *(continuare)*

	r^0	r	r^2	r^3	r^4	r^5
ECUAȚIA CARACTERISTICĂ	$(-432+432r^2)(27r-27r^3)-(36-87r+36r^2)(-36r+564r^2-36r^3)+(-234+498r-234r^2)(-48r-232r^2-48r^3)$					
		−11664		11664		
				11664		−11664
		1296	−20304	1296		
			−3132	49068	−3132	
				1296	−20304	1296
		11232	54288	11232		
			−23904	−115536	−23904	
				11232	54288	11232
		864	6948	−18084	6948	864

Simplificînd cu 12 valorile obținute în tabloul nr. 4, rezultă pentru ecuația caracteristică următoarea expresie:

$$72 + 579\, r - 507\, r^2 + 579\, r^3 + 72\, r^4 = 0. \tag{2}$$

Dezvoltîndu-se determinantul principal al sistemului de ecuații corespunzătoare schemei din figura 3, se obține aceeași ecuație caracteristică, ceea ce justifică cele afirmate în partea teoretică.

În continuare, calculul va fi făcut numai pentru sistemul din figura 2.

Din ecuația caracteristică se deduce partea omogenă a ecuației în Z_n, termenul liber se calculează așa cum s-a arătat în partea teoretică și are valoarea

$$-\frac{1}{12}\,\frac{80}{3}(-36+564-36)\,p-\frac{1}{12}\,\frac{180}{3}(-48-232-48)\,p=\frac{1640}{3}\,p. \tag{3}$$

Ecuația funcțională în Z_n este

$$72\, Z_{n-2} + 579\, Z_{n-1} - 1507\, Z_n + 579\, Z_{n+1} + 72\, Z_{n+2} = \frac{1640}{3}\,p. \tag{4}$$

Soluția acestei ecuații va fi de forma

$$Z_n = C_1\,\gamma^n + C_2\,\gamma^{-n} + C_3\,\varepsilon^n + C_4\,\varepsilon^{-n} + \bar{Z}_n, \tag{5}$$

în care, așa după cum s-a mai spus, γ și ε sînt rădăcinile ecuației caracteristice, $\bar{z}_n$ o soluție particulară și $C_{1,\,2,\,3,\,4}$ constante ce se vor determina din condiții de margină.

Ecuația caracteristică (2) este o ecuație reciprocă de gradul 4 și admite rădăcinile

$$\gamma = -\,10{,}175\,; \qquad \varepsilon = 1{,}611$$
$$1/\gamma = -\;0{,}098\,; \quad 1/\varepsilon = 0{,}621. \tag{6}$$

Soluția particulară în cazul de față, se caută sub forma unui polinom de gradul termenului liber $\bar{Z}_n = A$.

Avem deci

$$(72 + 579 - 1507 + 579 + 72)\, A = \frac{1640}{3}\, p\,,$$

de unde rezultă că

$$A = -\frac{8}{3}\, p = \bar{Z}_n. \qquad (7)$$

Necunoscutele X_n și Y_n, explicitate funcție de Z_n din ecuațiile scrise în panoul n, au expresiile

$$15\, Y_n = 6\, Z_{n-1} + 8\, Z_n + 6\, Z_{n+1} + \frac{100}{3}\, p\,, \qquad (8)$$

$$1840\, X_n = -348\, Z_{n-1} + 1507\, Z_n - 810\, Z_{n+1} - 144\, Z_{n+2} + \frac{1640}{3}\, p. \qquad (8')$$

Înlocuind în aceste ecuații (8) soluția funcției Z_n (5) se obțin soluțiile funcțiilor X_n și Y_n ale căror expresii sînt

$$X_n = -3{,}126\, C_1 \gamma^n + 3{,}126\, C_2 \gamma^{-n} - 0{,}237\, C_3\, \varepsilon^n + 0{,}237\, C_4\, \varepsilon^{-n} \qquad (9)$$

$$Y_n = -3{,}576\, C_1 \gamma^n - 3{,}576\, C_2 \gamma^{-n} + 1{,}426\, C_3\, \varepsilon^n + 1{,}426\, C_4\, \varepsilon^{-n} - \frac{4}{3}\, p \qquad (9')$$

3. Condițiile de margină

Ecuațiile scrise în panourile 1 și 15, care constituie ecuațiile de margină, sînt de forma

$$\left.\begin{aligned} 736\, X_1 + 288\, X_2 - 72\, Y_2 + 432\, Z_2 &= -576\, p \\ 24\, X_2 + 22\, Y_1 - 6\, Y_2 - 87\, Z_1 + 36\, Z_2 &= \frac{234}{3}\, p \\ -144\, X_2 - 87\, Y_1 + 36\, Y_2 + 498\, Z_1 - 234\, Z_2 &= -348\, p \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} 288\, X_{m-2} + 736\, X_{m-1} + 72\, Y_{m-2} - 432\, Z_{m-2} &= 576\, p \\ -24\, X_{m-2} - 6\, Y_{m-2} + 22\, Y_{m-1} + 36\, Z_{m-2} - 87\, Z_{m-1} &= \frac{234}{3}\, p \\ 144\, X_{m-2} + 36\, Y_{m-2} - 87\, Y_{m-1} - 234\, Z_{m-2} + 498\, Z_{m-1} &= -348\, p. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Așa cum s-a arătat în partea introductivă, scăzînd aceste ecuații din ecuațiile scrise în panoul n, în care n se egalează cu 1, respectiv cu $m - 1$, se obțin condițiile mai simple de mai jos

$$288\, X_0 + 72\, Y_0 - 432\, Z_0 = 576\, p \qquad (12)$$

$$-24\, X_0 - 6\, Y_0 + 36\, Z_0 = -48\, p \qquad (12')$$

$$144\, X_0 + 36\, Y_0 - 234\, Z_0 = 288\, p \qquad (12'')$$

$$288\, X_m - 72\, Y_m + 432\, Z_m = -576\, p \qquad (13)$$

$$24\, X_m - 6\, Y_m + 36\, Z_m = -48\, p \qquad (13')$$

$$-144\, X_m + 36\, Y_m - 234\, Z_m = 288\, p \qquad (13'')$$

Dintre acestea numai ecuațiile (12), (12″), (13) și (13″) sînt distincte. Aduse la o formă mai simplă ele au valorile

$$4X_0 + Y_0 - 6Z_0 = 8p \tag{14}$$

$$8X_0 + 2Y_0 - 13Z_0 = 16p \tag{14'}$$

$$4X_{16} - Y_{16} + 6Z_{16} = -8p \tag{14''}$$

$$-8X_{16} + 2Y_{16} - 13Z_{16} = 16p \tag{14'''}$$

Înlocuindu-se în ecuațiile (14) valorile necunoscutelor deduse prin particularizare din soluțiile funcționale (15) și (19) se obține sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}
&-22{,}079\,C_1 + 2{,}927\,C_2 - 5{,}520\,C_3 - 3{,}627\,C_4 = -\frac{20}{3}p\\
&-45{,}158\,C_1 + 4{,}854\,C_2 - 12{,}041\,C_3 - 8{,}255\,C_4 = -16p\\
&-2{,}927\,C_1\gamma^{16} + 22{,}079\,C_2\gamma^{-16} + 3{,}627\,C_3\varepsilon^{16} + 5{,}520\,C_4\varepsilon^{-16} = \frac{20}{3}p\\
&4{,}854\,C_1\gamma^{16} - 45{,}158\,C_2\gamma^{-16} - 8{,}255\,C_3\varepsilon^{16} - 12{,}041\,C_4\varepsilon^{-16} = -16p
\end{aligned} \tag{15}$$

Valorile constantelor calculate în prima aproximație sînt

$$C_1 = 0{,}459\,p\,\gamma^{-16}; \quad C_3 = 2{,}208\,p\,\varepsilon^{-16},$$

$$C_2 = 0{,}459\,p; \quad C_4 = 2{,}208\,p,$$

iar după a doua aproximație ele devin

$$C_1 = 0{,}459\,p\,\gamma^{-16}; \quad C_3 = 2{,}201\,p\,\varepsilon^{-16},$$

$$C_2 = 0{,}459\,p; \quad C_4 = 2{,}201\,p.$$

Înlocuind valorile constantelor în expresiile necunoscutelor funcționale (5), (9) și (9′), se obține

$$\begin{aligned}
X_n &= 1{,}435\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-16})\,p + 0{,}521\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-16})\,p,\\
Y_n &= -1{,}641\,(\gamma^{-n} + \gamma^{n-16})\,p + 3{,}138\,(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{n-16})\,p - \frac{4}{3}p,\\
Z_n &= 0{,}459\,(\gamma^{-n} + \gamma^{n-16})\,p + 2{,}201\,(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{n-16})\,p - \frac{8}{3}p.
\end{aligned} \tag{16}$$

Valorile eforturilor X_n, Y_n și Z_n sînt arătate în tabloul nr. 5.

Tabloul nr. 5

Panou / Efort	1	2	3	4	5	6	7	8
X_n	0,182	0,214	0,124	0,076	0,045	0,026	0,012	0,000
Y_n	0,778	−0,137	−0,574	−0,857	−1,028	−1,127	−1,180	−1,195
Z_n	−1,344	−1,812	−2,137	−2,334	−2,453	−2,523	−2,560	−2,571

Modul cum aceste necunoscute variază de la panou la panou, este arătat pe graficul din figura 4.

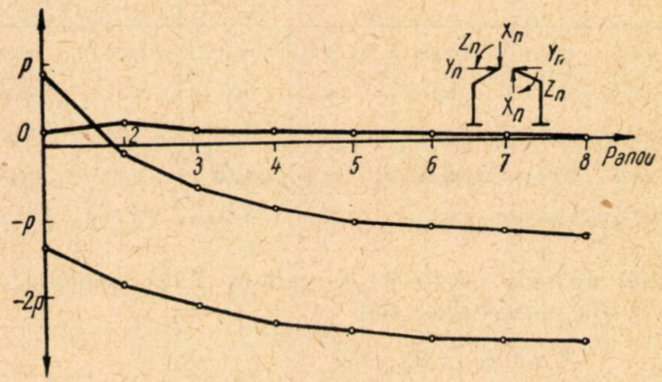


Fig. 4

4. Determinarea eforturilor din bare

Expresiile momentelor în panoul n, în secțiunile arătate în figura 1, funcție de necunoscute, sînt

$$\begin{aligned} M_n^i &= -4(X_{n-1}+X_n) - Y_{n-1} + Y_n + 9(Z_{n-1} - Z_n), \\ M_n^s &= -4(X_{n-1}+X_n) - Y_{n-1} + Y_n + 3(Z_{n-1} - Z_n), \\ M_n^a &= -4X_n + Y_n - 3Z_n - 8p, \\ M_n^b &= M_n^c = Y_n, \\ M_n^d &= 4X_n + Y_n - 3Z_n - 8p. \end{aligned} \tag{17}$$

Înlocuind expresiile (16) în (17) obținem, pentru momentele din panoul n, următoarele funcții

$$\begin{aligned} M_n^i &= -11{,}851\,\gamma^{-n}p + 11{,}851\,\gamma^{n-17}p + 4{,}751\,\varepsilon^{-n}p - 4{,}751\,\varepsilon^{n-17}p, \\ M_n^s &= 18{,}922\,\gamma^{-n}p - 18{,}922\,\gamma^{n-17}p - 3{,}322\,\varepsilon^{-n}p + 3{,}322\,\varepsilon^{n-17}p, \\ M_n^a &= -8{,}756\,\gamma^{-n}p + 2{,}720\,\gamma^{n-16}p - 5{,}547\,\varepsilon^{-n}p - 1{,}380\,\varepsilon^{n-16}p - \frac{4}{3}p, \\ M_n^b &= M_n^c = -1{,}641\,\gamma^{-n}p - 1{,}641\,\gamma^{n-16}p + 3{,}138\,\varepsilon^{-n}p + 3{,}138\varepsilon^{n-16}p - \frac{4}{3}p, \\ M_n^d &= 2{,}720\,\gamma^{-n}p - 8{,}756\,\gamma^{n-16}p - 1{,}380\,\varepsilon^{-n}p - 5{,}547\,\varepsilon^{n-16}p - \frac{4}{3}p \end{aligned} \tag{18}$$

În tabloul nr. 6 sînt date valorile momentelor în primele 8 panouri; datorită simetriei celelalte momente din panourile următoare au aceleași valori.

Tabloul nr. 6

Panou / Efort	1	2	3	4	5	6	7	8
M_n^l	4,11 p	1,71 p	1,14 p	0,69 p	0,42 p	0,26 p	0,13 p	0,04 p
M_n^s	−3,92 p	−1,09 p	−0,80 p	−0,48 p	−0,30 p	−0,17 p	−0,09 p	−0,03 p
M_n^a	−3,92 p	−3,56 p	−2,65 p	−2,16 p	−1,85 p	−1,66 p	−1,55 p	−1,49 p
$M_n^b = M_n^c$	0,78 p	−0,14 p	−0,58 p	−0,85 p	−1,03 p	−1,14 p	−1,19 p	−1,22 p
M_n^d	−2,46 p	−1,85 p	−1,68 p	−1,56 p	−1,49 p	−1,46 p	−1,48 p	−1,49 p

Expresiile forțelor tăietoare în panoul n, în aceleași secțiuni, în care au fost scrise momentele, sînt

$$\begin{aligned} T_n^i &= T_n^s = Z_n - Z_{n-1} \\ T_n^a &= X_n \cos\alpha + Z_n \sin\alpha + 4\,p\cos\alpha \\ T_n^b &= X_n \cos\alpha + Z_n \sin\alpha \\ T_n^c &= X_n \cos\alpha - Z_n \sin\alpha \\ T_n^d &= X_n \cos\alpha - Z_n \sin\alpha - 4\,p\cos\alpha \end{aligned} \tag{19}$$

Unghiul α este arătat în figura 1.

Înlocuind în expresiile (19) valorile necunoscutelor X_n și Z_n (16) obținem următoarele funcții

$$\begin{aligned} T_n^s &= 5{,}129\,p\,\gamma^{-n} - 5{,}129\,p\,\gamma^{n-17} - 1{,}345\,p\,\varepsilon^{-n} + 1{,}345\,p\,\varepsilon^{n-17} = T_n^i, \\ T_n^a &= 1{,}423\,p\,\gamma^{-n} - 0{,}872\,p\,\gamma^{n-16} + 1{,}737\,p\,\varepsilon^{-n} + 0{,}904\,p\,\varepsilon^{n-16} + 1{,}6\,p, \\ T_n^b &= 1{,}423\,p\,\gamma^{-n} - 0{,}872\,p\,\gamma^{n-16} + 1{,}737\,p\,\varepsilon^{-n} + 0{,}904\,p\,\varepsilon^{n-16} - 1{,}6\,p, \\ T_n^c &= 0{,}872\,p\,\gamma^{-n} - 1{,}423\,p\,\gamma^{n-16} - 0{,}904\,p\,\varepsilon^{-n} - 1{,}737\,p\,\varepsilon^{n-16} + 1{,}6\,p, \\ T_n^d &= 0{,}872\,p\,\gamma^{-n} - 1{,}423\,p\,\gamma^{n-16} - 0{,}904\,p\,\varepsilon^{-n} - 1{,}737\,p\,\varepsilon^{n-16} - 1{,}6\,p. \end{aligned} \tag{20}$$

În tabloul nr. 7 sînt date valorile numerice calculate cu expresiile (20).

Tabloul nr. 7

Panou / Efort	1	2	3	4	5	6	7	8
$T_n^{\text{stîlp}}$	−1,34 p	−0,47 p	−0,32 p	−0,20 p	−0,12 p	−0,07 p	−0,04 p	−0,01 p
T_n^a	2,54 p	2,28 p	2,02 p	1,86 p	1,76 p	1,71 p	−1,67 p	1,66 p
T_n^b	−0,66 p	−0,92 p	−1,18 p	−1,34 p	−1,44 p	−1,49 p	−1,53 p	−1,54 p
T_n^c	0,95 p	1,26 p	1,30 p	1,46 p	1,51 p	1,53 p	1,54 p	1,54 p
T_n^d	−2,25 p	−1,94 p	−1,82 p	−1,74 p	−1,69 p	−1,67 p	−1,66 p	1,66 p

Expresiile forțelor axiale în panoul n sînt

$$\begin{aligned} N_n^s &= X_{n-1} - X_n - 8\,p, \\ N_n^a &= Z_n \cos\alpha - X_n \sin\alpha - 4\,p \sin\alpha, \\ N_n^b &= Z_n \cos\alpha - X_n \sin\alpha, \\ N_n^c &= Z_n \cos\alpha + X_n \sin\alpha, \\ N_n^d &= Z_n \cos\alpha + X_n \sin\alpha - 4\,p \sin\alpha. \end{aligned} \tag{21}$$

Înlocuind expresiile (16) în (21) se obțin pentru forțele axiale din panoul n expresiile funcționale

$$\begin{aligned} N_n^s &= -16{,}032\,p\,\gamma^{-n} - 16{,}032\,p\,\gamma^{n-17} + 0{,}318\,p\varepsilon^{-n} + 0{,}318\,p\,\varepsilon^{n-17} - 8\,p, \\ N_n^a &= -0{,}494\,p\,\gamma^{-n} + 1{,}228\,p\,\gamma^{n-16} + 1{,}448\,p\,\varepsilon^{-n} - 2{,}073\,p\,\varepsilon^{n-16} - 4{,}533\,p, \\ N_n^b &= -0{,}494\,p\,\gamma^{-n} + 1{,}228\,p\,\gamma^{n-16} + 1{,}448\,p\,\varepsilon^{-n} + 2{,}073\,p\,\varepsilon^{n-16} - 2{,}133\,p, \\ N_n^c &= 1{,}228\,p\,\gamma^{-n} - 0{,}494\,p\,\gamma^{n-16} + 2{,}073\,p\,\varepsilon^{-n} + 1{,}448\,p\,\varepsilon^{n-16} - 2{,}133\,p, \\ N_n^d &= 1{,}228\,p\,\gamma^{-n} - 0{,}494\,p\,\gamma^{n-16} + 2{,}073\,p\,\varepsilon^{-n} + 1{,}448\,p\,\varepsilon^{n-16} - 4{,}533\,p. \end{aligned} \tag{22}$$

În tabloul nr. 8 sînt date valorile numerice calculate cu expresiile (22).

Tabloul nr. 8

Panou / Efort	1	2	3	4	5	6	7	8
$N_n^{\text{stîlp}}$	−4,18 p	−8,03 p	−7,91 p	−7,95 p	−7,97 p	−7,98 p	−7,99 p	−7,99 p
N_n^a	−3,58 p	−3,98 p	−4,18 p	−4,31 p	−4,38 p	−4,43 p	−4,45 p	−4,45 p
N_n^b	−1,18 p	−1,58 p	−1,78 p	−1,91 p	−1,98 p	−2,03 p	−2,05 p	−2,05 p
N_n^c	−0,96 p	−1,32 p	−1,63 p	−1,82 p	−1,93 p	−2,00 p	−2,04 p	−2,05 p
N_n^d	−3,36 p	−3,72 p	−4,03 p	−4,22 p	−4,33 p	−4,40 p	−4,44 p	−4,45 p

B. METODA DEPLASĂRILOR

1. Determinarea sistemului de ecuații funcționale

În această metodă necunoscutele sînt rotirile de nod (φ_n și ω_n) și rotirile de bară (θ_n) arătate în figura 5.

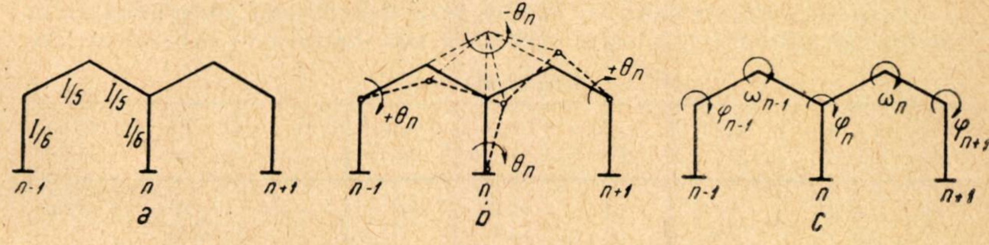


Fig. 5. — *a)* Rigidități; *b)* rotiri de bare; *c)* rotiri de nod.

Ecuațiile funcționale, scrise cu ajutorul schemelor de calcul arătate în figura 5 sînt de forma

$$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\omega_n + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_n + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_{n+1} = 0, \tag{23}$$

$$4\left(2\,\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\varphi_n + 2\,\frac{1}{5}\,\omega_{n-1} + 2\,\frac{1}{5}\,\omega_n - 12\,\frac{1}{5}\,\theta_{n-1} + 12\,\frac{1}{5}\,\theta_n - $$

$$- 6\,\frac{1}{5}\,\theta_{n-1} - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_n - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_{n+1} = 0, \tag{23'}$$

$$(6\,\varphi_{n-1} + 6\,\omega_{n-1} + 12\,\theta_{n-1} - 12\,\theta_n)\frac{1}{5}\,\theta_n - (6\,\omega_{n-1} + 6\,\varphi_n +$$

$$+ 12\,\theta_n - 12\,\theta_{n-1})\frac{1}{5}\,\theta_n - (6\,\varphi_n + 6\,\omega_{n+1} + 12\,\theta_n - 12\,\theta_{n+1}) \times \frac{1}{5}\,\theta_n +$$

$$+ (6\,\omega_{n-1} + 6\,\varphi_{n+1} - 12\,\theta_n + 12\,\theta_{n+1})\frac{1}{5}\,\theta_n + (6\,\varphi_n - 12\,\theta_n)\frac{1}{6}\,\theta_n = 0. \tag{23''}$$

Coeficienții necunoscutelor funcționale și valorile lor numerice sînt date în tabloul nr. 9.

Tabloul nr. 9

	φ_{n-1}	φ_n	φ_{n+1}	ω_{n-1}	ω_n	ω_{n+1}	θ_{n-1}	θ_n	θ_{n+1}	T.L.
φ_n	$r_{\varphi_n\varphi_{n-1}}$ —	$r_{\varphi_n\varphi_n}$ +34	$r_{\varphi_n\varphi_{n+1}}$ —	$r_{\varphi_n\omega_{n-1}}$ +6	$r_{\varphi_n\omega_n}$ +6	$r_{\varphi_n\omega_{n+1}}$ —	$r_{\varphi_n\theta_{n-1}}$ −18	$r_{\varphi_n\theta_n}$ +21	$r_{\varphi_n\theta_{n+1}}$ +18	$r^0_{\varphi_n}$ 0
ω_n	$r_{\omega_n\varphi_{n-1}}$ —	$r_{\omega_n\varphi_n}$ +1	$r_{\omega_n\varphi_{n+1}}$ +1	$r_{\omega_n\omega_{n-1}}$ —	$r_{\omega_n\omega_n}$ +4	$r_{\omega_n\omega_{n+1}}$ —	$r_{\omega_n\theta_{n-1}}$ —	$r_{\omega_n\theta_n}$ —	$r_{\omega_n\theta_{n+1}}$ —	$r^0_{\omega_n}$ —
θ_n	$r_{\theta_n\varphi_{n-1}}$ +6	$r_{\theta_n\varphi_n}$ −7	$r_{\theta_n\varphi_{n+1}}$ +6	$r_{\theta_n\omega_{n-1}}$ —	$r_{\theta_n\omega_n}$ —	$r_{\theta_n\omega_{n+1}}$ —	$r_{\theta_n\theta_{n-1}}$ +24	$r_{\theta_n\theta_n}$ −58	$r_{\theta_n\theta_{n+1}}$ +24	$r^0_{\theta_n}$ —

Se observă că, datorită schemei geometrice, încărcării și metodei de calcul, sistemul de ecuații este omogen.

Așa după cum s-a spus în partea introductivă, se va vedea că efectul încărcării exterioare este introdus de ecuațiile de margină.

2. Determinarea funcțiilor $\varphi_n, \omega_n, \theta_n$

Ecuația caracteristică se obține prin dezvoltarea determinantului principal al sistemului, a cărui structură este arătată în tabloul nr. 10.

Tabloul nr. 10

φ_{n-1} r^{n-1}	φ_n r^n	φ_{n+1} r^{n+1}	ω_{n-1} r^{n-1}	ω_n r^n	ω_{n+1} r^{n+1}	θ_{n-1} r^{n-1}	θ_n r^n	θ_{n+1} r^{n+1}
—	+34	—	+6	+6	—	−18	+21	−18
—	+ 1	+1	—	+4	—	—	—	—
+6	− 7	+6	—	—	—	+24	−58	+24

Ecuația caracteristică se obține așa cum s-a arătat la metoda eforturilor și are expresia

$$72 + 579\, r - 1507\, r^2 + 579\, r^3 + 72\, r^4 = 0.$$

Din ecuația caracteristică, care se observă că este aceeași ca la metoda eforturilor, se stabilește ecuația funcțională într-o singură necunoscută, așa cum s-a expus în prima parte.

Se va folosi ecuația funcțională în φ_n, a cărei expresie este

$$72\, \varphi_{n-2} + 579\, \varphi_{n-1} - 1507\, \varphi_n + 579\, \varphi_{n+1} + 72\, \varphi_{n+2} = 0. \qquad (24)$$

Sistemul funcțional fiind omogen și ecuația funcțională în φ_n este omogenă.

Rădăcinile ecuației caracteristice, găsite la rezolvarea prin metoda eforturilor, au valorile

$$\gamma = -10{,}175; \qquad \varepsilon = 1{,}611,$$
$$\gamma^{-1} = -\ 0{,}098; \qquad \varepsilon^{-1} = 0{,}621.$$

Soluția funcției φ_n este

$$\varphi_n = C_1\, \gamma^n + C_2\, \gamma^{-n} + C_3\, \varepsilon^n + C_4\, \varepsilon^{-n}. \qquad (25)$$

Funcțiile ω_n și θ_n explicitate în raport cu φ_n sînt de forma

$$4\, \omega_n = -\ \varphi_n - \varphi_{n+1}, \qquad (26)$$
$$90\ \theta_1 = 12\, \varphi_{n-1} + 103\, \varphi_n + 12\, \varphi_{n+1}. \qquad (26')$$

Înlocuind în aceste ecuații (26) soluția funcției φ_n (25) se obțin soluțiile funcțiilor ω_n și θ_n ale căror expresii sînt

$$\omega_n = 2{,}294\, C_1\, \gamma^n - 0{,}225\, C_2\, \gamma^{-n} - 0{,}653\, C_3\, \varepsilon^n - 0{,}405\, C_4\, \varepsilon^{-n}, \qquad (27)$$
$$\theta_n = -\ 0{,}225\, C_1\, \gamma^n - 0{,}225\, C_2\, \gamma^{-n} + 1{,}442\, C_3\, \varepsilon^n + 1{,}442\, C_4\, \varepsilon^{-n}. \qquad (27')$$

3. Condiții de margină

Pentru determinarea constantelor se folosesc ecuațiile de margină date de panoul 1 și m.

Deplasările panoului 1 sînt arătate în figura 6.

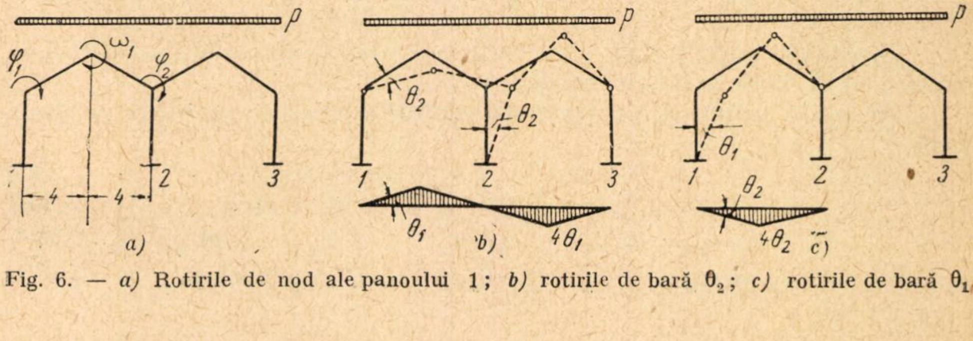


Fig. 6. — *a)* Rotirile de nod ale panoului 1; *b)* rotirile de bară θ_2; *c)* rotirile de bară θ_1.

Deplasările panoului m sînt arătate în figura 7.

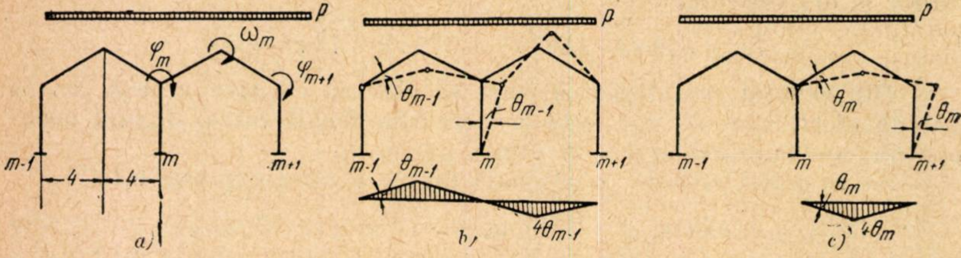


Fig. 7. — *a)* Rotirile de nod ale panoului m; *b)* rotirile de bară ale panoului m; (θ_{m-1}); *c)* rotirile de bază ale panoului m (θ_m).

Ecuațiile de margină ale panoului 1, scrise pe baza schemelor de calcul arătate în figura 6 sînt

$$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\varphi_1 + 2\,\frac{1}{5}\,\omega_1 - 6\,\frac{1}{6}\,\theta_1 + 6\,\frac{1}{5}\,\theta_1 - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_2 - \frac{4}{3}\,p = 0, \tag{28}$$

$$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\omega_1 + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_1 + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_2 = 0, \tag{28'}$$

$$(6\,\varphi_1 - 12\,\theta_1)\,\frac{1}{6}\,\theta_1 - (6\,\varphi_1 + 6\,\omega_1 + 12\,\theta_1 - 12\,\theta_2)\,\frac{1}{5}\,\theta_1 + (6\,\omega_1 +$$
$$+ 6\,\omega_2 - 12\,\theta_1 + 12\,\theta_2)\,\frac{1}{5}\,\theta_1 - 16\,p = 0. \tag{28''}$$

Ecuațiile de margină ale panoului m, scrise pe baza schemelor de calcul, arătate în figura 7, sînt

$$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\varphi_m + 2\,\frac{1}{5}\,\omega_{m-1} - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_m - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_m - 6\,\frac{1}{5}\,\theta_{m-1} + \frac{4}{3}\,p = 0, \tag{29}$$

$$4\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)\omega_{m-1} + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_{m-1} + 2\,\frac{1}{5}\,\varphi_m = 0, \tag{29'}$$

$$(6\,\varphi_m - 12\,\theta_m)\,\frac{1}{6}\,\theta_m - (6\,\varphi_m + 6\,\omega_{m-1} + 12\,\theta_m - 12\,\theta_{m-1})\,\frac{1}{5}\,\theta_m +$$

$$+ (6\,\varphi_{m-1} + 6\,\omega_{m-1} - 12\,\theta_m + 12\,\theta_{m-1})\,\frac{1}{5}\,\theta_m - 16\,p = 0. \tag{29''}$$

Condițiile (28′) și (29) sînt verificate identic de soluțiile funcțiilor, oricare ar fi valorile constantelor.

Se obțin următoarele 4 ecuații distincte pentru condițiile de margină

$$22\,\varphi_1 + 6\,\omega_1 + 3\,\theta_1 - 18\,\theta_2 = 20\,p, \tag{30}$$
$$-\,\varphi_1 + 6\,\varphi_2 - 34\,\theta_1 + 24\,\theta_2 = 80\,p, \tag{30'}$$
$$22\,\varphi_m - 6\,\omega_{m-1} - 18\,\theta_{m-1} + 3\,\theta_m = -\,20\,p. \tag{30''}$$
$$6\,\varphi_{m-1} - \varphi_m + 24\,\theta_{m-1} - 34\,\theta_m = -\,80\,p. \tag{30'''}$$

Pe considerentul arătat în expunerea teoretică și așa cum s-a procedat și în metoda eforturilor, se vor folosi și aici, drept condiții de margină, combinații ale ecuațiilor (30) cu ecuațiile panoului 1 și *m* deduse din cele ale panourilor *n* (23), prin particularizare.

Ecuațiile ce se obțin prin particularizare au expresiile :

— pentru panoul 1

$$34\,\varphi_1 + 6\,\omega_0 + 6\,\omega_1 - 18\,\theta_0 + 21\,\theta_1 - 18\,\theta_2 = 0, \tag{31}$$

$$6\,\varphi_0 - 7\,\varphi_1 + 6\,\varphi_2 + 24\,\theta_0 - 58\,\theta_1 + 24\,\theta_2 = 0\,; \tag{31'}$$

— pentru panoul *m*

$$34\,\varphi_m + 6\,\varphi_{m-1} + 6\,\omega_m - 18\,\theta_{m-1} + 21\,\theta_m - 18\,\theta_{m+1} = 0, \tag{31''}$$

$$6\,\varphi_{m-1} - 7\,\varphi_m + 6\,\varphi_{m+1} + 24\,\theta_{m-1} - 58\,\theta_m + 24\,\theta_{m+1} = 0. \tag{31'''}$$

Din combinațiile acestor ecuații (30) și (31), în condițiile arătate, se obțin pentru condițiile de margină ecuații mai simple a căror expresie este

— pentru panoul 1

$$2\,\varphi_1 + \omega_0 - 3\,\theta_0 + 3\,\theta_1 = -\frac{10}{3}\,p, \tag{32}$$

$$\varphi_0 - \varphi_1 + 4\,\theta_0 + 4\,\theta_1 = -\frac{40}{3}\,p\,; \tag{32'}$$

— pentru panoul *m*

$$2\,\varphi_m + \omega_m + 3\,\theta_m - 3\,\theta_{m+1} = \frac{10}{3}\,p, \tag{32''}$$

$$-\varphi_m + \varphi_{m+1} - 4\,\theta_m + 4\,\theta_{m+1} = \frac{40}{3}\,p. \tag{32'''}$$

Constantele se determină, punînd condiția ca soluțiile funcțiilor (25) și (27) să verifice ecuațiile (32).

Procedîndu-se astfel, se obține sistemul de ecuații

$$-10{,}500\,C_1 + 0{,}321\,C_2 + 5{,}215\,C_3 - 0{,}805\,C_4 = -\frac{10}{3}\,p, \tag{33}$$

$$1{,}100\,C_1 + 0{,}108\,C_2 - 4{,}138\,C_3 + 2{,}568\,C_4 = -\frac{40}{3}\,p, \tag{33'}$$

$$-3{,}263\,C_1\,\gamma^{16} + 1{,}032\,C_2\,\gamma^{-16} - 1{,}298\,C_3\,\varepsilon^{16} + 3{,}236\,C_4\,\varepsilon^{-16} = \frac{10}{3}\,p, \tag{33''}$$

$$-1{,}100\,C_1\gamma^{16} - 0{,}108\,C_2\gamma^{-16} + 4{,}138\,C_3\,\varepsilon^{16} - 2{,}568\,C_4\,\varepsilon^{-16} = \frac{40}{3}\,p. \tag{33'''}$$

Valorile constantelor rezultate din rezolvarea sistemului de ecuații (33) sînt

$$C_1 = 21{,}207\,p\,\gamma^{-17}\,; \quad C_3 = 4{,}298\,p\,\varepsilon^{-17},$$

$$C_2 = -21{,}207\,p\,; \quad C_4 = -4{,}298\,p. \tag{34}$$

Datorită simetriei geometrice, elastice și mecanice a structurii și a simetriei încărcării, constantele sînt egale în valoare absolută, abstracție făcînd de multiplicatorii γ^{-17} și ε^{-17}.

Înlocuind valorile constantelor (34) în expresiile funcțiilor φ_n, ω_n, și θ_n (25) și (27) se găsesc expresiile recurente ale acestor funcții

$$\varphi_n = -21{,}207\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-17}) - 4{,}298\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-17}), \tag{35}$$

$$\omega_n = 4{,}780\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-16}) + 1{,}741\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-16}), \tag{35'}$$

$$\theta_n = 4{,}780\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-17}) - 6{,}197\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-17}). \tag{35''}$$

Valorile numerice ale rotirilor de nod (φ_n și ω_n) și ale rotirilor de bază (θ_n) sînt arătate în tabloul nr. 11.

Tabloul nr. 11

n DEPLASĂRILE	1	2	3	4	5	6	7	8
φ_n	−0,581	−1,857	−1,002	−0,631	−0,381	−0,223	−0,116	−0,036
ω_n	0,610	0,715	0,407	0,252	0,151	0,084	0,037	0,000
θ_n	−4,313	−2,336	−1,478	−0,550	−0,550	−0,321	−0,167	−0,052

Diagramele de variație ale rotirilor de nod și bară de la panou la panou sînt arătate în figura 8.

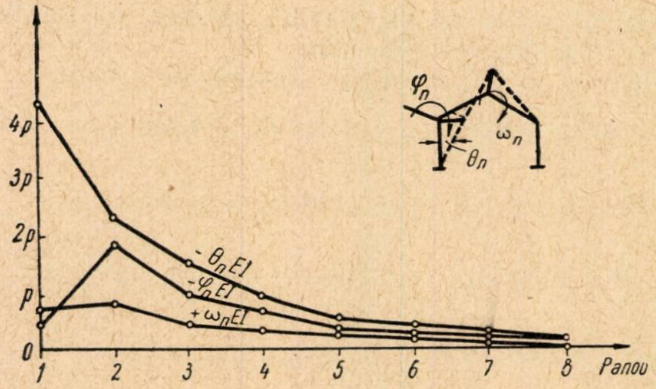


Fig. 8

Se observă că influența cea mai mare o au rotirile barelor. Rotirile maxime sînt în primul sau al doilea panou.

4. Determinarea eforturilor din bare

Expresiile momentelor încovoietoare, în funcție de deplasări, sînt :

$$\begin{aligned}
M_n^s &= \frac{1}{3}\,\varphi_n - \theta_n,\\
M_n^i &= \frac{2}{3}\,\varphi_n - \theta_n,\\
M_n^a &= 0{,}8\,\varphi_n + 0{,}4\,\omega_n + 1{,}2\,\theta_n - 1{,}2\,\theta_{n+1} - \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^b &= 0{,}4\,\varphi_n + 0{,}8\,\omega_n + 1{,}2\,\theta_n - 1{,}2\,\theta_{n+1} + \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^c &= 0{,}4\,\varphi_n + 0{,}8\,\omega_n - 1{,}2\,\theta_n + 1{,}2\,\theta_{n+1} - \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^d &= 0{,}4\,\varphi_{n+1} + 0{,}4\,\omega_n - 1{,}2\,\theta_n + 1{,}2\,\theta_{n+1} + \frac{4}{3}\,p.
\end{aligned}\tag{36}$$

Înlocuind expresiile funcțiilor φ_n, ω_n și θ_n în expresiile momentelor încovoietoare (36) se obțin expresiile recurente ale momentelor încovoietoare la capătul barelor. Semnele lor sînt date de sensul mecanic folosit. Aceste expresii sînt :

$$\begin{aligned}
M_n^s &= -\,11{,}849\,p\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-17}) + 4{,}785\,p\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-17}),\\
M_n^i &= -\,18{,}919\,p\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-17}) + 3{,}332\,p\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-17}),\\
M_n^a &= -\,8{,}755\,p\,\gamma^{-n} + 2{,}721\,p\,\gamma^{n-16} - 5{,}564\,p\,\varepsilon^{-n} - 1{,}384\,p\,\varepsilon^{n-16} - \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^b &- 1{,}642\,p\,(\gamma^{-n} + \gamma^{n-16}) - 3{,}148\,p\,(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{n-16}) + \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^c &= -\,1{,}642\,p\,(\gamma^{-n} + \gamma^{n-16}) + 3{,}148\,p\,(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{n-16}) - \frac{4}{3}\,p,\\
M_n^d &= -\,2{,}721\,p\,\gamma^{-n} + 8{,}755\,p\,\gamma^{n-16} + 1{,}384\,p\,\varepsilon^{-n} + 5{,}564\,p\,\varepsilon^{n-16} + \frac{4}{3}\,p.
\end{aligned}\tag{37}$$

Se constată că se găsesc aceleași funcții ca și în metoda eforturilor.

O verificare suplimentară se obține din echilibrul nodurilor. Această operație este suficient să fie făcută pentru nodul n, folosind expresiile recurente ale momentelor încovoietoare.

Valorile momentelor găsite prin această metodă sînt date în tabloul nr. 12.

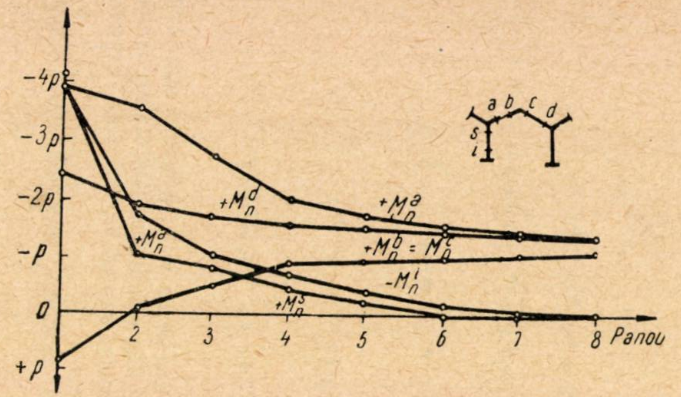


Fig. 9

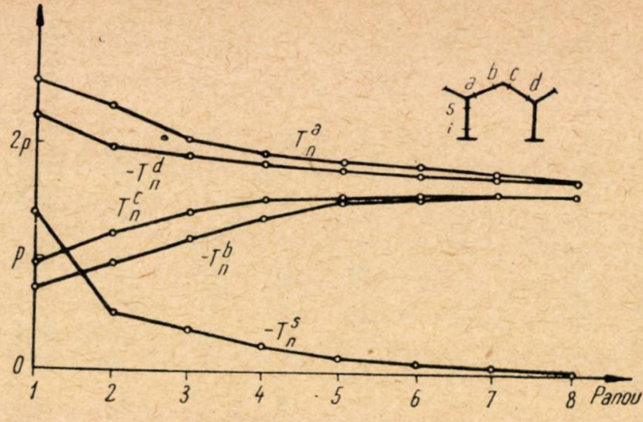


Fig. 10

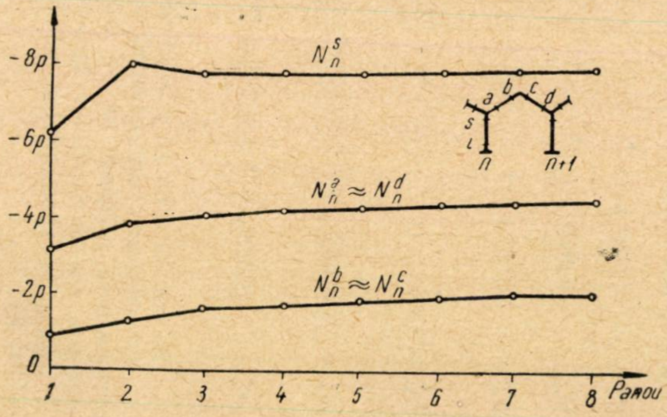


Fig. 11

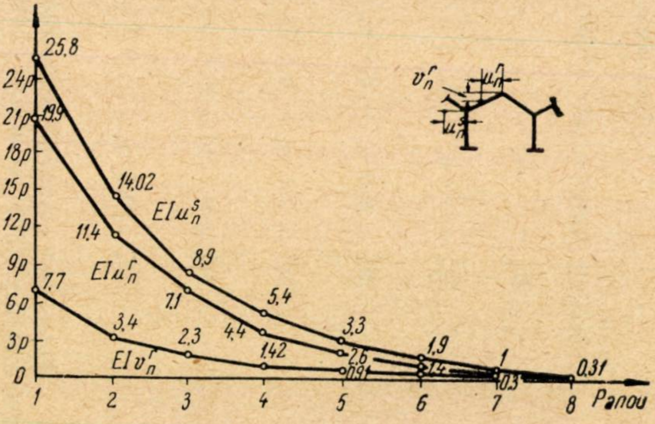


Fig. 12

Tabloul nr. 12

Efort \ Panou	1	2	3	4	5	6	7	8
M^s_n	+ 4,13	+ 1,72	+ 1,15	+ 0,69	+ 0,43	+ 0,25	+ 0,13	+ 0,04
M^i_n	− 3,92	− 1,10	− 0,81	− 0,49	− 0,30	− 0,17	− 0,09	− 0,03
M^a_n	− 3,92	− 3,56	− 2,66	− 2,16	− 1,85	− 1,67	− 1,55	− 1,49
M^d_n	− 2,46	− 1,85	− 1,68	− 1,56	− 1,49	− 1,46	− 1,47	− 1,49
$M^b_n = M^c_n$	+ 0,78	− 0,14	− 0,57	− 0,86	− 1,03	− 1,13	− 1,18	− 1,20

Variația momentelor încovoietoare de la panou la panou este arătată în graficul de la figura 9.

Folosind diagramele de momente încovoietoare s-au dedus următoarele expresii pentru forțele tăietoare din panoul n.

$$T^s_n = 5{,}128\, p\, \gamma^{-n} - 5{,}128\, p\, \gamma^{n-17} - 1{,}352\, p\, \varepsilon^{-n} + 1{,}352\, p\, \varepsilon^{n-17} = T^i_n,$$

$$T^a_n = 1{,}423\, p\, \gamma^{-n} - 0{,}873\, p\, \gamma^{n-16} + 1{,}742\, p\, \varepsilon^{-n} + 0{,}906\, p\, \varepsilon^{n-16} + 1{,}6\, p,$$

$$T^b_n = 1{,}423\, p\, \gamma^{-n} - 0{,}873\, p\, \gamma^{n-16} + 1{,}742\, p\, \varepsilon^{-n} + 0{,}906\, p\, \varepsilon^{n-16} - 1{,}6\, p,$$

$$T^c_n = 0{,}873\, p\, \gamma^{-n} - 1{,}423\, p\, \gamma^{n-16} - 0{,}906\, p\, \varepsilon^{-n} - 1{,}742\, p\, \varepsilon^{n-16} + 1{,}6\, p,$$

$$T^d_n = 0{,}873\, p\, \gamma^{-n} - 1{,}423\, p\, \gamma^{n-16} - 0{,}906\, p\, \varepsilon^{-n} - 1{,}742\, p\, \varepsilon^{n-16} - 1{,}6\, p. \tag{38}$$

Se observă că se găsesc aceleași funcții ca și în metoda eforturilor.

Variația forțelor tăietoare de la panou la panou este arătată în figura 10.

Expresiile forțelor axiale sînt următoarele

$$N^s_a = -16{,}031\, p\, \gamma^{-n} - 16{,}031\, p\, \gamma^{n-17} + 0{,}318\, p\, \varepsilon^{-n} + 0{,}318\, p\, \varepsilon^{n-17} - 8\, p,$$

$$N^a_n = -0{,}494\, p\, \gamma^{-n} + 1{,}228\, p\, \gamma^{n-16} + 1{,}461\, p\, \varepsilon^{-n} + 2{,}065\, p\, \varepsilon^{n-16} - 4{,}533\, p,$$

$$N^b_n = -0{,}494\, p\, \gamma^{-n} + 1{,}228\, p\, \gamma^{n-16} + 1{,}461\, p\, \varepsilon^{-n} + 2{,}065\, p\, \varepsilon^{n-16} - 2{,}133\, p,$$

$$N^c_n = 1{,}228\, p\, \gamma^{-n} - 0{,}494\, p\, \gamma^{n-16} + 2{,}065\, p\, \varepsilon^{-n} + 1{,}461\, p\, \varepsilon^{n-16} - 2{,}133\, p,$$

$$N^d_n = 1{,}228\, p\, \gamma^{-n} - 0{,}494\, p\, \gamma^{n-16} + 2{,}065\, p\, \varepsilon^{-n} + 1{,}461\, p\, \varepsilon^{n-16} - 4{,}533\, p\,;$$

și aici se constată că se obțin aceleași expresii recurente. (39)

Variația forțelor axiale este arătată în figura 11.

După cum se constată, expresiile recurente ale eforturilor sînt aceleași, atît în metoda eforturilor cît și în metoda deplasărilor. Diferențele sînt foarte mici și provin din operațiile algebrice efectuate.

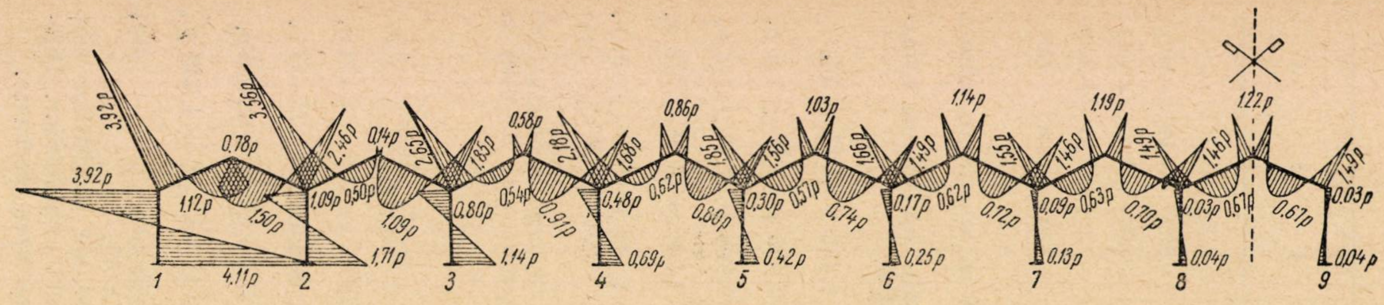

3,92p
3,92p
0,78p
1,12p
1,50p
4,11p
3,56p
2,46p
1,09p
0,50p
1,09p
1,71p
0,14p
2,63p
1,85p
0,80p
1,14p
0,58p
0,54p
0,91p
2,18p
1,68p
0,48p
0,69p
0,86p
0,62p
1,85p
1,56p
0,80p
0,30p
0,57p
0,42p
1,03p
1,66p
1,49p
0,74p
0,17p
0,62p
0,25p
1,14p
1,55p
1,46p
0,72p
0,09p
0,63p
0,13p
1,19p
1,49p
1,46p
0,70p
0,03p
0,67p
0,04p
1,22p
0,67p
1,49p
0,03p
0,04p
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 13

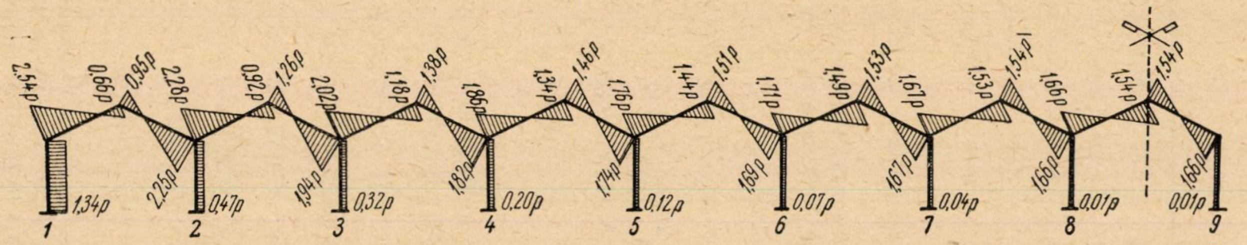

2,54p
0,66p
0,95p
1,34p
2,28p
0,92p
1,26p
2,25p
0,47p
2,02p
1,18p
1,38p
1,94p
0,32p
1,86p
1,34p
1,46p
1,82p
0,20p
1,76p
1,44p
1,51p
1,74p
0,12p
1,71p
1,49p
1,53p
1,69p
0,07p
1,67p
1,53p
1,54p
1,67p
0,04p
1,66p
1,54p
1,54p
1,66p
0,01p
1,66p
0,01p
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 14

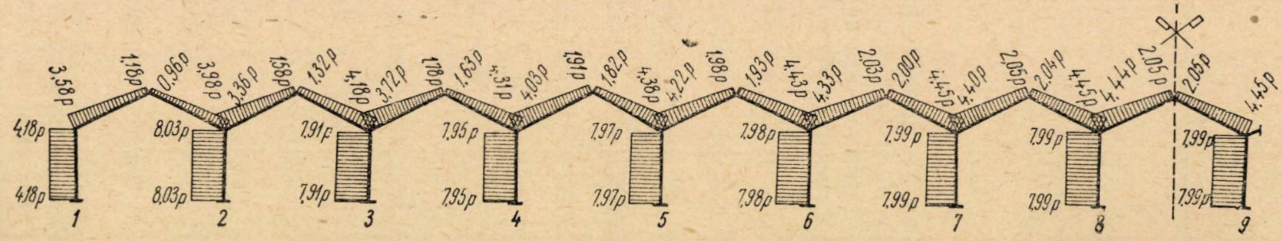

3,58p
4,18p
4,18p
1,18p
0,96p
3,98p
8,03p
8,03p
3,36p
1,58p
1,32p
4,18p
7,91p
7,91p
3,72p
1,78p
1,63p
4,31p
7,95p
7,95p
4,03p
1,91p
1,82p
4,38p
7,97p
7,97p
4,22p
1,98p
1,93p
4,43p
7,98p
7,98p
4,33p
2,03p
2,00p
4,45p
7,99p
7,99p
4,40p
2,05p
2,04p
4,45p
7,99p
7,99p
4,44p
2,05p
2,05p
7,99p
7,99p
4,45p
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Fig. 15

Pentru completarea studiului s-au stabilit relații recurente și pentru deplasări, după cum urmează :

— deplasările pe orizontală ale capetelor stîlpilor

$$EI\, u_n^s = 28{,}68\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-17})\,p - 37{,}18\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-17})\,p = 6\,\theta_n, \quad (40)$$

— deplasările pe verticală ale capetelor superioare ale riglelor

$$EI\, v_n^r = -\,18{,}83\,(\gamma^{-n} + \gamma^{n-16})\,p + 9{,}38\,(\varepsilon^{-n} + \varepsilon^{n-16}) = 4\,(\theta_n - \theta_{n+1}), \quad (41)$$

— deplasările pe orizontală ale capetelor superioare ale riglelor

$$EI\, u_n^r = 11{,}50\,(\gamma^{-n} - \gamma^{n-16})\,p - 30{,}13\,(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^{n-16})\,p = 3\,(\theta_n - \theta_{n-1}). \quad (42)$$

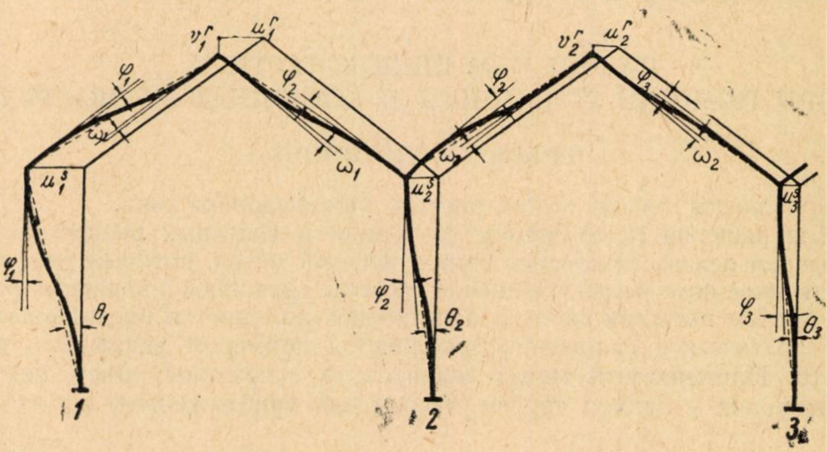


Fig. 16

Valorile numerice ale acestor deplasări sînt date în figura 12.

Diagrama momentelor încovoietoare este arătată în figura 13.

Diagrama forțelor tăietoare este arătată în figura 14.

Diagrama forțelor axiale este arătată în figura 15.

Deformata s-a trasat la o scară arbitrară pe baza valorilor reale ale rotirilor și deplasărilor ; ea este arătată în figura 16.

CONCLUZII

Metoda prezentată este exactă și rapidă, întrucît reduce considerabil timpul de rezolvare, în raport cu oricare din metodele întrebuințate în prezent.

Numărul mare de nedeterminări nu îngreuiază metoda ci o simplifică, ușurînd determinarea constantelor.

Domeniul de aplicare este larg ; se pot calcula cadre cu secțiunea variabilă, cadre cu riglă curbă, cadre cu tiranți etc.

Cadrele de margină pot fi diferite atît ca structură geometrică, cît şi din punct de vedere elastic şi mecanic, ceea ce nu complică problema.

Diferitele sarcini ce solicită construcţiile pot fi luate în calcul cu aceeaşi uşurinţă. În cazul acţionării locale a sarcinilor, problema se rezolvă prin condiţii de limită adecvate.

Comportarea reală a cadrelor tip shed la eforturi din temperatură şi contracţie poate fi prinsă în calcul cu uşurinţă; se pot face studii pentru găsirea structurilor optime, justificîndu-se prin calcul, poziţia rosturilor de dilataţie, înclinările riglelor, raportul rigidităţilor diferitelor bare etc.

Primită la redacţie la 6 aprilie 1956.

РАСЧЕТ РАМ ШЕДОВОГО ТИПА ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Проводится точный метод расчета рам шедового типа.

Для решения применяются уравнения в конечных разностях. Для разделения неизвестных применяется простой метод, который дает непосредственное интегральное решение системы уравнения в конечных разностях, причем прежняя система подстановок заменяется пробованием.

Теоретическое изложение дополняется примером указанного выше расчета. Применяемый метод значительно сокращает объем расчетов по сравнению с любым другим точным или приближенным методом.

CALCUL DES CADRES DE TYPE *SHED* AU MOYEN DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES

(RÉSUMÉ)

On expose une méthode exacte de calcul pour les cadres de type *shed*.

La solution est trouvée au moyen des équations aux différences finies. Pour séparer les inconnues, on utilise une méthode simple qui donne directement la solution intégrale du système d'équation aux différences finies, remplaçant ainsi l'ancien système, basé sur des substitutions par tâtonnements.

L'exposé théorique est complété par un exemple du calcul mentionné. La méthode utilisée réduit considérablement le volume des calculs par rapport à toute autre méthode exacte ou approximative.

BIBLIOGRAFIE

1. A. I. Segal, *Construcţii înalte*, Stroizdat, Moscova 1949.
2. Panait Mazilu, *Statica Construcţiilor*, vol. II (sub tipar).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

CONSIDERAŢII ÎN LEGĂTURĂ CU UN CRITERIU DE PIERDERE A STABILITĂŢII ELASTICE A SISTEMELOR DE BARE

DE

MIHAIL IFRIM

Problemele legate de pierderea stabilităţii echilibrului elastic a structurilor (capitol de mare importanţă în mecanica construcţiilor) se rezumă în esenţă la cunoaşterea *parametrului de încărcare critic*, ce duce la compromiterea stabilităţii generale precum şi la determinarea *coeficientului de siguranţă* la flambaj general al construcţiei.

Procedeele preconizate pentru determinarea ,,*încărcării critice*'' sînt axate în marea lor majoritate pe metodele de bază utilizate în statica construcţiilor : *metoda forţelor*, *metoda deplasărilor* şi *mixtă*. Acest lucru are avantajul de a oferi proiectanţilor de structuri metode unitare de calcul atît în rezolvarea statică a structurilor cît şi pentru verificarea stabilităţii elastice. Ipotezele simplificatoare care stau la baza calculului stabilităţii sistemelor de bare se găsesc în diverse tratate de specialitate [1], [2],[3] etc.

Cu toate acestea, pentru structuri hiperstatice rezultă sisteme canonice de ecuaţii de ordin ridicat. În calculele statice obişnuite, coeficienţii necunoscutelor fiind constanţi, rezolvarea analitică este posibilă, dar suficient de laborioasă. În cazul calculului la stabilitate aceşti coeficienţi sînt funcţii transcendente de *parametru de încărcare*. În consecinţă, ecuaţia de stabilitate implică o rezolvare mult mai dificilă, ea făcîndu-se prin numeroase încercări.

Diferiţi cercetători au propus unele metode mai simple de determinare a ,,*încărcării critice*'' [4], [5], [6] în diverse ipoteze de calcul.

Uneori s-a mers pe linia calculului prin aproximaţii succesive aşa cum se procedează curent în practica de proiectare a structurilor.

Astfel, A. Slavin în lucrarea [7] stabileşte un procedeu simplu pentru calculul stabilităţii fermelor metalice, avînd la bază metoda dată de H. Cross [8] de calcul prin aproximaţii succesive.

În lucrarea de față se expune un criteriu privind stabilitatea cadrelor formate din bare drepte, indicîndu-se în mod unitar modul său de aplicare precum și utilizarea metodelor iterative folosind avantajele cunoscute, din calculul static al structurilor.

Se expune în continuare un procedeu simplu care evită tatonările de lungă durată, în vederea determinării *încărcării critice.*

Aceleași procedee de calcul permit determinarea coeficientului de siguranță la flambaj a întregului sistem.

În cadrul acelorași preocupări se remarcă valoroasele lucrări aparținînd prof. Konrad Sattler [4], [9] și prof. Panait Mazilu *) care au adus contribuții însemnate în problema stabilității sistemelor de bare.

I

Așa cum s-a arătat, în rezolvarea problemei stabilității sistemelor de bare se pot aplica metodele staticii construcțiilor.

Metoda forțelor fiind mai dificilă nu se va folosi, aplicarea ei pretîndu-se structurilor care admit sisteme de bază simple.

În cele ce urmează se va utiliza metoda deplasărilor deoarece aceasta este mult mai eficace. Ea se aplică în mod clasic atît în alegerea sistemului de bază, în stabilirea gradului de nedeterminare cît și în determinarea coeficienților.

Pentru o structură cu n grade de libertate (rotiri de noduri sau deplasări de noduri) acționată la nodurile sale de un grup de forțe F $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ se poate scrie sistemul canonic de ecuații :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} Z_1 + a_{12} Z_2 + a_{13} Z_3 + \dots + a_{m} Z_n = 0 \\ a_{21} Z_1 + a_{22} Z_2 + a_{23} Z_3 + \dots + a_{2n} Z_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} Z_1 + a_{n2} Z_2 + a_{n3} Z_3 + \dots + a_{nn} Z_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

unde :

a_{ik} reprezintă reacțiunea (moment sau forță) în legătura i, în urma unei deplasări unitare a legăturii k (rotire sau deplasare de nod), toate celelalte legături ale sistemului rămînînd fixe ;

a_{kk} reprezintă reacțiunea (moment sau forță) în legătura k, dacă aceasta capătă o deplasare unitară (rotire sau deplasare de nod) toate celelalte legături ale sistemului rămînînd fixe ;

Z_i reprezintă deplasarea reală a sistemului pe direcția legăturii i (rotire sau deplasare de nod).

Coeficienții a_{ik} în calculele statice sînt niște constante. În calculul la stabilitate acești coeficienți sînt funcții trigonometrice. Este deci necesar a se stabili în prealabil (fig. 1 și 2) momentele și forțele tăietoare provocate de rotirile și deplasările nodurilor, care vor folosi la aprecierea acestor coeficienți

---

*) *Calculul static de ordinul II.* Ciclu de conferințe ținut în cadrul Academiei R.P.R., mai 1955.

Stabilitatea cadrelor din bare drepte, pe baza elementelor de statică neliniară. Comunicare ținută la Academia militară tehnică, martie 1956.

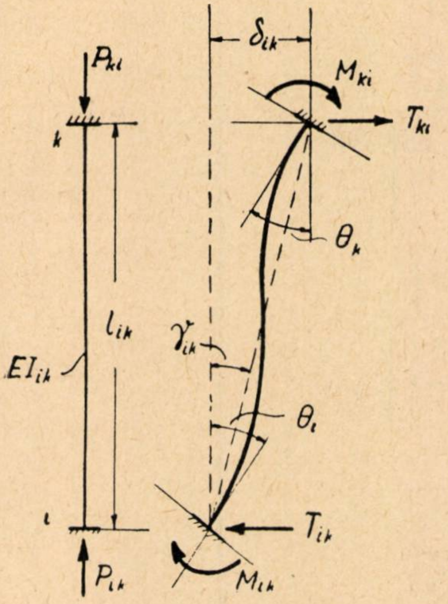


Fig. 1

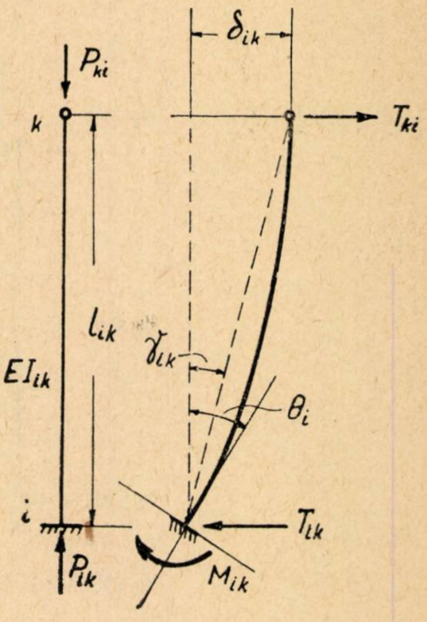


Fig. 2

Pentru bara dublu încastrată :

$$\left.\begin{aligned} M_{ik} &= 2\, i_{ik}\, [2\, \varphi_2(\nu)\, \theta_i + \varphi_3(\nu)\, \theta_k - 3\, \varphi_4(\nu)\, \gamma_{ik}], \\ M_{ki} &= 2\, i_{ik}\, [2\, \varphi_2(\nu)\, \theta_k + \varphi_3(\nu)\, \theta_i - 3\, \varphi_4(\nu)\, \gamma_{ik}], \\ Q_{ik} &= Q_{ki} = -\frac{2\, i_{ik}}{l_{ik}}\, [3\, \varphi_4(\nu)\, (\theta_i + \theta_k) - 6\, \eta_2(\nu)\, \gamma_{ik}]. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Pentru bara încastrată la un capăt și articulată la celălalt :

$$\left.\begin{aligned} M_{ik} &= 3\, i_{ik}\, \varphi_1(\nu)\, [\theta_i - \gamma_{ik}], \\ Q_{ik} &= Q_{ki} = -\frac{i_{ik}}{l_{ik}}\, [3\, \varphi_1(\nu)\, \theta_i - 3\, \eta_1(\nu)\, \gamma_{ik}]. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Expresiile momentelor și forțelor tăietoare pentru rotiri și deplasări unitare rezultă din relațiile (2) și (3) prin înlocuire.

S-au folosit notațiile :

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1(\nu) &= \frac{\nu^2}{3\left[1-\dfrac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right]},\\
\varphi_2(\nu) &= \frac{\left[1-\dfrac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right]}{4\left[\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\nu}{2}}{\dfrac{\nu}{2}}-1\right]},\\
\varphi_3(\nu) &= \frac{\left[\dfrac{\nu}{\sin\nu}-1\right]}{2\left[\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\nu}{2}}{\dfrac{\nu}{2}}-1\right]},\\
\varphi_4(\nu) &= \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right),\\
\eta_1(\nu) &= \varphi_1(\nu)-\frac{\nu^2}{3},\\
\eta_2(\nu) &= \eta_1\left(\frac{\nu}{2}\right)=\varphi_4(\nu)-\frac{\nu^2}{12},\\
\eta_3(\nu) &= \varphi_1\left(\frac{\nu}{2}\right)=\varphi_4(\nu)
\end{aligned}
\right\}
\tag{4}
$$

(valorile acestor funcții se găsesc intabulate în tratatele [1], [3], [10], [11]) unde

$$i_{ik}=\frac{EI_{ik}}{l_{ik}} \tag{5}$$

$$\nu = l_{ik}\sqrt{\frac{P_{ik}}{EI_{ik}}}=\sqrt{\frac{P_{ik}\,l_{ik}}{i_{ik}}},\quad \textit{(parametrul de încărcare)}. \tag{6}$$

Prin urmare, cunoscînd aceste valori, vom păstra analogia în scrierea ecuațiilor de condiție (1), la construcția diagramelor unitare precum și la calculul coeficienților (a_{ik}) cu cele cunoscute din statica liniară [12].

Sistemul de ecuații (1) fiind omogen condiția din care rezultă *parametrul de încărcare critic* al structurii, analitic se poate scrie

$$R(\nu)=\left\|a_{ik}\right\|_1^n=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn}\end{matrix}\right| = 0, \tag{7}$$

unde $n = 1, 2, 3, \ldots$ este ordinul matricei egal cu numărul gradelor de libertate ale sistemului, iar $\left\| a_{ik} \right\|_1^n$ reprezintă matricea pătratică a reacţiunilor în metoda deformaţiilor corespunzător unui sistem elastic oarecare.

Condiţia (7) dezvoltată reprezintă o ecuaţie transcendentă (alcătuită din funcţii trigonometrice) destul de complicată funcţie de parametrul de încărcare ν. Valoarea ν pentru care este satisfăcută condiţia (7) reprezintă *parametrul critic de încărcare* (ν_{cr}) al structurii şi în consecinţă rezultă „*încărcarea critică*" conform relaţiei (6)

$$P_{cr} = \frac{(\nu_{cr})^2 E I_0}{l_0^2} \tag{8}$$

(I_0 şi l_0 fiind mărimi de bază ale structurii la care se raportează celelalte valori după cum se va vedea ulterior).

II

În problema calculului stabilităţii structurilor (forma, rigidităţile şi modul de încărcare fiind cunoscute) distingem două aspecte :

1. Structura este acţionată de o serie de forţe necunoscute $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ multiplu de un „parametru de forţă" P_0 :

$$P_1 = \mathbf{k}_1 P_0 ; \quad P_2 = \mathbf{k}_2 P_0 ; \ldots \quad P_n = \mathbf{k}_n P_0$$

(coeficienţii $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n$ fiind cunoscuţi).

În acest caz urmează să se determine

$P_0^{cr} = \dfrac{\nu_{cr}^2 E I_0}{l_0^2}$, deci în cele din urmă ν_{cr} — al sistemului.

1948

2. Structura este acţionată de forţe reale $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ (date în valoare absolută). Raportînd aceste forţe, spre exemplu la cea mai mică (P_0), considerată de bază, rezultă multiplicatorii

$$\frac{P_1}{P_0} = \mathbf{k}_1' ; \quad \frac{P_2}{P_0} = \mathbf{k}_2' ; \ldots, \quad \frac{P_n}{P_0} = \mathbf{k}_n'.$$

În acest caz se pot rezolva două probleme :

a) luîndu-se P_0 în valoare reală se poate constata dacă sistemul este sau nu stabil;

b) luîndu-se P_0 ca „parametru de forţă" necunoscut se poate determina P_0^{cr} şi în consecinţă, *coeficientul de siguranţă general la flambaj* (c_f) ;

$$c_f = \frac{P_0^{cr}}{P_0}, \quad \left(c_f = \frac{P_1^{cr}}{P_1} = \frac{P_2^{cr}}{P_2} = \cdots \right)$$

ceea ce permite să se determine eforturile critice din toate barele, fiind deci suficient cunoaşterea valorii efortului critic dintr-o singură bară.

În rezolvările ce se vor efectua ne vom referi numai la „*parametrul de încărcare*" (ν) a cărui valoare depinde de forma structurii, de raportul rigidităţilor precum şi de modul de încărcare şi rezemare al sistemului în ansamblu.

III

În cele ce urmează se va lua în discuţie matricea coeficienţilor ecuaţiei (1)

$$R(\nu) = \left\| a_{ik} \right\|_1^n, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

În cazul cînd :

$$\left.\begin{array}{l} \nu < \nu_{cr}\ (P < P_{cr}) \text{ corespunde } \left\| a_{ik} \right\|_1^n > 0\ (\textit{stabilitate}), \quad (a) \\ \text{(sistemul admite soluţii banale — deplasările sînt nule);} \\ \nu = \nu_{cr}\ (P = P_{cr}) \text{ corespunde } \left\| a_{ik} \right\|_1^n = 0\ (\textit{stare critică}), \quad (b) \\ \text{(sistemul admite o infinitate de soluţii corespunzătoare unei} \\ \text{stări nedeterminate);} \\ \nu > \nu_{cr}\ (P > P_{cr}) \text{ corespunde } \left\| a_{ik} \right\|_1^n < 0\ (\textit{instabilitate}). \quad (c) \end{array}\right\} \quad (9)^{*)}$$

Prin urmare, pentru o structură statică dată, *cadre cu noduri fixe* sau *cadre cu noduri deplasabile*, acţionat de un sistem de forţe oarecari se poate determina *parametrul de încărcare critic* (ν_{cr}) folosind relaţiile (9). Cînd relaţia (*b*) din (9) este îndeplinită atunci $\nu = \nu_{cr}$ şi prin urmare rezultă încărcarea critică conform relaţiei (8). Această condiţie în fond se rezumă la anularea determinantului sistemului. Pentru aceasta folosindu-se metoda aproximaţiilor succesive, dînd diverse valori parametrului ν (care iniţial se alege de la sistem la sistem), se micşorează intervalul în care este posibilă existenţa parametrului critic (ν_{cr}) bazaţi pe relaţiile (*a*) şi (*c*) din (9). Acest lucru se poate face pe schema structurii.

IV

Se poate stabili un criteriu mult mai practic şi comod de determinare a *încărcării critice*, sau de verificare a echilibrului elastic al unui sistem bazaţi pe unele proprietăţi ale progresiei geometrice, formată din termenii iteraţiei.

Pentru structurile static stabile, raţia progresiei geometrice formată din corecţiile transmise de sistem către nodul i blocat în poziţie rotită cu o unitate, este [13] :

$$r_i = 1 - \frac{D}{d_i},$$

unde :

D este determinantul coeficienţilor sistemului, iar

d_i minorul determinantului D rezultat din suprimarea liniei şi coloanei i.

---

*) Reciproca acestor relaţii nu este totdeauna valabilă după cum se demonstrează în lucrarea [10].

Relaţia (*b*) din (9) nu reprezintă condiţia stării critice pentru orice structură. Uneori, cum este cazul grinzilor continui sau alte cazuri similare, sarcina critică de pierdere a echilibrului elastic corespunde soluţiilor banale $Z_1 = Z_2 = \ldots Z_n = 0$.

Asupra determinantului $D(\nu)$ al sistemului (1) se pot conduce discuţiile enunţate în relaţiile (9) şi în consecinţă *criteriul de serie* *) capătă aspectul :

cînd

$$\left.\begin{array}{llll} r_i < 1, & \nu < \nu_c, & (P < P_c) & \textit{stabilitate,} \quad (a) \\ r_i = 1, & \nu = \nu_{cr} \cdot & (P = P_{cr}) & \textit{stare critică,} \quad (b) \\ r_i > 1, & \nu > \nu_{cr} & (P > P_{cr}) & \textit{instabilitate.} \quad (c) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

Criteriul (10) se poate aplica la calculul cadrelor cu noduri fixe sau deplasabile utilizîndu-se metoda aproximaţiilor succesive aşa cum se obişnuieşte în statica liniară [14].

Procesul de iterare este condiţionat în acest caz (în statica liniară era indiferent) şi anume :

Se dă o deplasare iniţială $\Delta_i^{(0)}$ legăturii (i) corespunzătoare unei forţe sau unui cuplu pe direcţia gradului de libertate (rotire sau translaţie), menţinîndu-se legătura blocată în această poziţie. Deplasarea $\Delta_i^{(0)}$ se transmite celorlalte legături din sistemul de bază folosind coeficienţii de transmitere neliniari, $(t_{i \rightarrow k})$.

Se relaxează complet celelalte noduri (exceptînd nodul i) iar apoi prin retransmitere către i, se înregistrează pe direcţia gradului de libertate i tendinţa de deplasare $\Delta_i^{(1)}$.

Calculul se poate continua, în treptele următoare obţinîndu-se succesiv valorile $\Delta_i^{(2)}, \Delta_i^{(3)}, \ldots$ care alcătuiesc o progresie geometrică cu raţia

$$r_i = \frac{\Delta_i^{(1)}}{\Delta_i^{(0)}} = \frac{\Delta_i^{(2)}}{\Delta_i^{(1)}} = \frac{\Delta_i^{(3)}}{\Delta_i^{(2)}} = \ldots$$

Luînd deplasarea iniţială $\Delta_i^{(0)}$ egală cu unitatea, ţinînd seama de relaţiile (10) şi oprindu-se la prima corecţie a deplasării ($\Delta_i^{(1)}$) criteriul practic de stabilire a *parametrului de încărcare critic* (ν_{cr}) va avea forma finală :

Dacă

$$\left.\begin{array}{llll} \Delta_i^{(1)} < 1, & \nu < \nu_{cr} & (P < P_{cr}) & \textit{stabilit,} \quad (a) \\ \Delta_i^{(1)} = 1, & \nu = \nu_{cr} & (P = P_{cr}) & \textit{stare critică,} \quad (b) \\ \Delta_i^{(1)} > 1, & \nu > \nu_{cr} & (P > P_{cr}) & \textit{instabilitate.} \quad (c) \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Deplasarea iniţială $\Delta_i^{(0)} = 1$ poate fi o rotire de nod, în cazul cadrelor cu noduri fixe sau o translaţie pentru cadrele cu noduri deplasabile, întrucît în stabilirea sarcinii critice de flambaj este indiferent pe direcţia cărui grad de libertate se dă deplasarea iniţială.

Convergenţa iteraţiei este asigurată, fiind ceva mai lentă în apropierea sarcinii critice. La cadrele cu noduri fixe convergenţa este mai rapidă decît la cele cu noduri deplasabile.

---

*) Acest rezultat a fost obţinut şi de A. Slavin în [7].

V

Procedeul practic de calcul este următorul :

— Se raportează toate forțele, lungimile barelor, momentele de inerție și parametrii încărcărilor la valorile de bază P_0, l_0, I_0 și ν_0.

— Se întocmește sistemul de bază cu nodurile blocate și deplasările nodurilor împiedicate prin introducerea unor penduli.

— Se calculează coeficienții a_{ik} (în sistemul de bază) ținîndu-se seama de funcțiile (4) ce apar pentru barele comprimate.

— Se calculează coeficienții de transmitere neliniari ai deformațiilor

$$t_{i \rightarrow k} = - \frac{a_{ki}}{a_{kk}}. \qquad (12)$$

— Se dă o deplasare inițială pe direcția unei legături în sistemul de bază menținîndu-se blocată această legătură.

— Prin tatonări se determină valoarea parametrului (ν) pentru care avem satisfăcută relația (*b*) din (11). Calculul se face din aproape în aproape pornindu-se cu o valoare inițială $\nu^{(0)}$, prin valori $\nu^{(j)}$ (j fiind treaptă de aproximare) se delimitează intervalul în care există ν_{cr} ținînd seama de inegalitățile (*a*) și (*c*) din (11).

— Iterarea se conduce în modul arătat la punctul IV.

— Calculul se conduce pe schema cadrului aplicîndu-se identic pentru cele cu noduri fixe sau deplasabile.

— Pentru sensibilizarea calculului s-au dat deplasările inițiale $\Delta_i^{(0)} = 100$.

Observații. Alegerea orientativă a valorii inițiale a parametrului $\nu^{(0}$ se face considerînd cazurile elementare de flambaj pentru care $1{,}57 \leqslant \nu \leqslant 6{,}28$. Totuși, în cazul structurilor cu noduri deplasabile se poate ca $\nu < 1{,}57$ adică lungimea de flambaj să întreacă dublul lungimii barei.

S-a folosit la iterare, pentru cadrele cu noduri fixe metoda H. Gross [8] iar pentru cadrul cu noduri deplasabile metoda „nodurilor fictive" preconizată în calculele statice de G. Aznavorian și R. Agent [15] constituind o metodă unitară de iterare și adecvată problemei de față. Două exemple de calcul (un cadru cu noduri fixe și altul cu noduri deplasabile) ilustrează aplicarea practică a problemei.

Criteriul (11) s-ar fi obținut considerînd deplasarea finală a legăturii în urma însumării valorilor $\Delta_i^{(j)}$:

$$\Delta_i = \Delta_i^{(0)} + \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)} + \Delta_i^{(3)} + \ldots$$

Cum $\Delta_i^{(0)}$ s-a luat egal cu unitatea, însumînd se obține :

$$\Delta_i = 1 + \Delta_i^{(1)} + [\Delta_i^{(1)}]^2 + [\Delta_i^{(1)}]^3 + \ldots$$

sau

$$\Delta_i = \frac{1}{1 - \Delta_i^{(1)}}.$$

De aici rezultă :
pentru $\Delta_i^{(1)} < 1$, Δ_i tinde către o valoare finită (cazul stabilității) ;
pentru $\Delta_i^{(1)} = 1$, Δ_i tinde către infinit (cazul flambajului).
S-au obținut tocmai relațiile (11).

VI

Pentru exemplificarea procedeului expus se dă un exemplu de calcul pentru un cadru cu noduri fixe (fig. 3) datele geometrice fiind reprezentate chiar pe figură.

Sistemul de bază ales este reprezentat în figura 4.

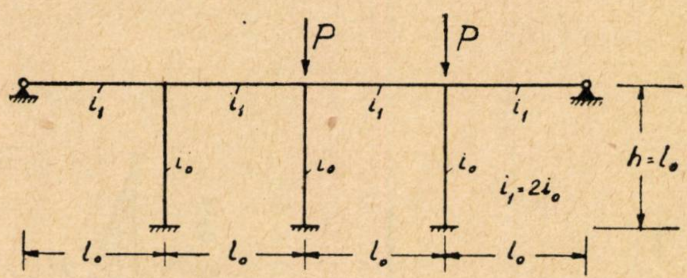


Fig. 3

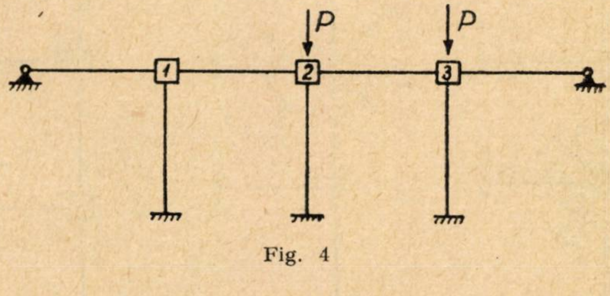


Fig. 4

În vederea calculului coeficienților a_{ik}, în figurile 5 *a*), 5 *b*), 5 *c*) sînt trasate diagramele de efort din deplasările unitare, în sistemul de bază

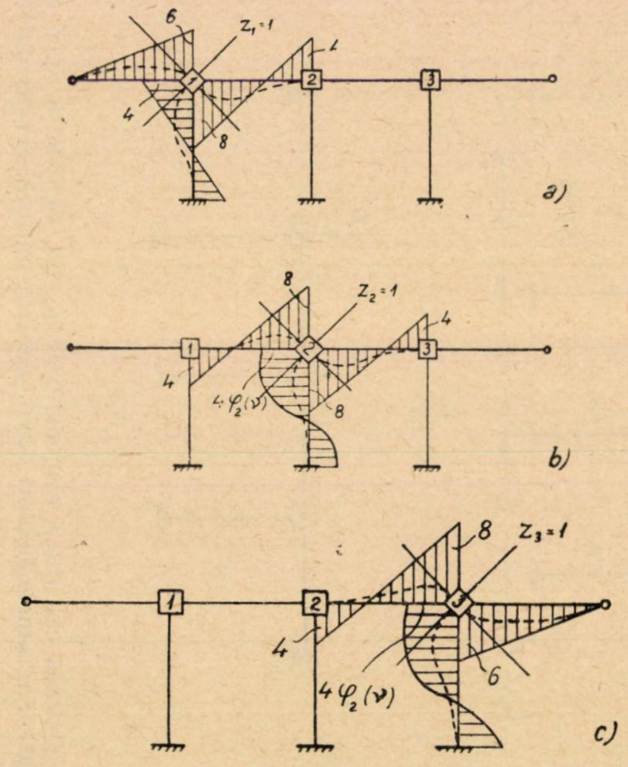

Z₁=1
a)
Z₂=1
4φ₂(ν)
b)
Z₃=1
4φ₂(ν)
c)

Fig. 5

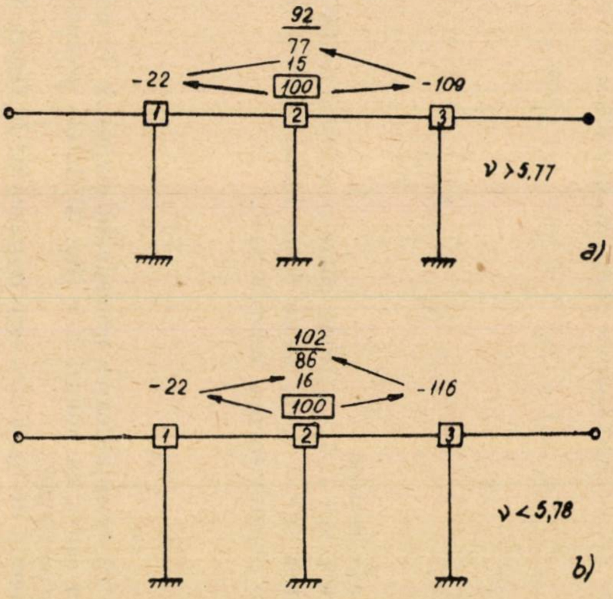

-22
-109
ν>5.77
a)
-22
-116
ν<5,78
b)

Fig. 6

Tabloul nr. 1 conține valorile acestor coeficienți.

Tabloul nr. 1

a_{11}	18	a_{12}	4	a_{13}	0
a_{21}	4	a_{22}	$16+4\,\varphi_2(\nu)$	a_{23}	4
a_{31}	0	a_{32}	4	a_{33}	$14+4\varphi_2(\nu)$

Coeficienții de transmitere a deformațiilor s-au calculat cu relația (12).

Prin cîteva încercări, ținînd seama de criteriul (11), s-a delimitat intervalul în care se găsește ν_{cr} (fig. 6 *a*) și 6 *b*)) S-a obținut:

pentru $\nu = 5{,}77$, $\Delta_i^{(1)} = \doteq 92 < 100$, $(\nu_{cr} > 5{,}77)$;

pentru $\nu = 5{,}78$, $\Delta_i^{(1)} = = 102 > 100$, $(\nu_{cr} < 5{,}78)$.

Se poate lua valoarea medie $\nu_{cr} = 5{,}778$ și deci:

$$P_{cr} = \frac{(5{,}778)^2\, EI_0}{l_0^2}$$

care corespunde cu valoarea exactă $(\nu_{cr} = 5{,}777)$ calculată în (3).

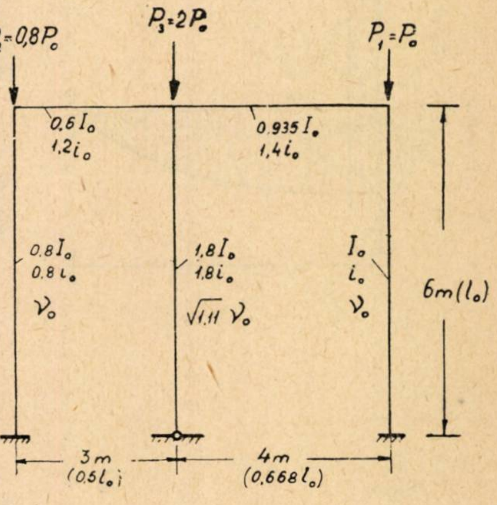


Fig. 7

VII

Ca exemplu de calcul pentru un cadru cu noduri deplasabile se dă cel din figura 7.

S-a ales sistemul de bază din figura 8 cu nodurile blocate iar deplasarea laterală împiedicată prin introducerea pe direcția deplasării a unui pendul.

Diagramele unitare sînt date în figurile 9 *a*), 9 *b*), 9 *c*) și 9 *d*).

În tablourile nr. 2 și 3 sînt calculați coeficienții (a_{ik}) respectiv coeficienții de transmisie $t_{i\to k}$, pentru diverse mărimi ale parametrului (ν) ținînd seama de valorile funcțiilor (4).

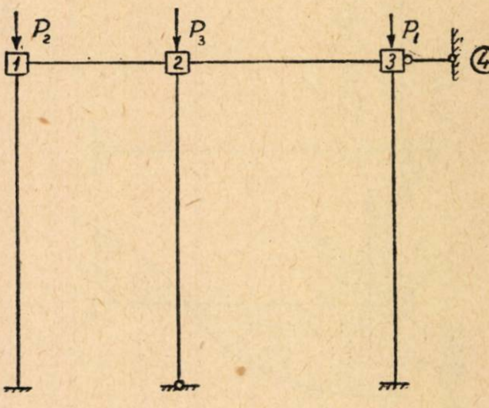


Fig. 8

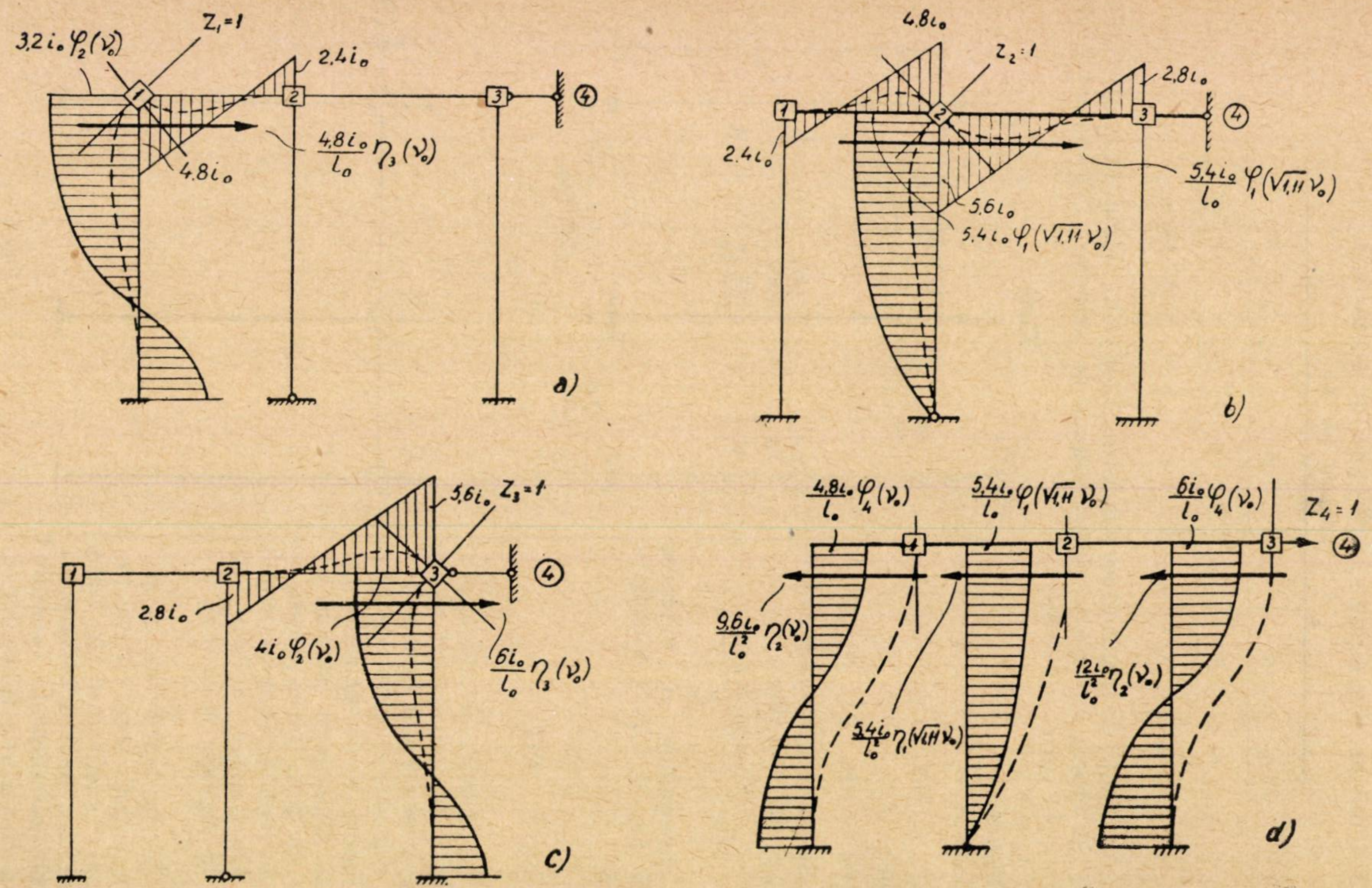

$Z_1 = 1$
$3{,}2 i_o \varphi_2(\nu_o)$
$2{,}4 i_o$
$4{,}8 i_o$
$\frac{4{,}8 i_o}{l_o} \eta_3(\nu_o)$
1
2
3
④
a)
$4{,}8 i_o$
$Z_2 = 1$
$2{,}8 i_o$
$2{,}4 i_o$
$\frac{5{,}4 i_o}{l_o} \varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_o)$
$5{,}6 i_o$
$5{,}4 i_o \varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_o)$
b)
$5{,}6 i_o$
$Z_3 = 1$
$2{,}8 i_o$
$4 i_o \varphi_2(\nu_o)$
$\frac{6 i_o}{l_o} \eta_3(\nu_o)$
c)
$\frac{4{,}8 i_o}{l_o} \varphi_4(\nu_o)$
$\frac{5{,}4 i_o}{l_o} \varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_o)$
$\frac{6 i_o}{l_o} \varphi_4(\nu_o)$
$Z_4 = 1$
$\frac{9{,}6 i_o}{l_o^2} \eta_2(\nu_o)$
$\frac{5{,}4 i_o}{l_o^2} \eta_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_o)$
$\frac{12 i_o}{l_o^2} \eta_2(\nu_o)$
d)

Fig. 9

Tabloul nr. 2

ν	$a_{11} = 3{,}2\,\varphi_2(\nu_0)\,i_0 + 4{,}8\,i_0$	$a_{12} = 2{,}4\,i_0$	$a_{13} = 0$	$a_{14} = -\frac{4{,}8\,i_0}{l_0}\,\varphi_4(\nu_0)$
1,94	2,77 + 4,80 = 7,57	2,4	0	−4,49
2,10	2,70 + 4,80 = 7,50	2,4	0	−4,43
2,16	2,67 + 4,80 = 7,47	2,4	0	−4,41
ν	$a_{21} = 2.4\,i_0$	$a^{22} = 5{,}4\,\varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_0)\,i_0 + 10{,}4\,i_0$	$a_{23} = 2{,}8\,i_0$	$a_{24} = -\frac{5{,}4\,i_0}{l_0}\,\varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_0)$
1,94	2,4	3,66+10,40=14,06	2,8	−3,66
2,10	2,4	3,31+10,40=13,71	2,8	−3,31
2,16	2,4	3,17+10,40=13,57	2,8	−3,17
ν	$a_{31} = 0$	$a_{32} = 2.8\,i_0$	$a_{33} = 4\,\varphi_2(\nu_0)\,i_0 + 5{,}6\,i_0$	$a_{34} = -\frac{6\,i_0}{l_0}\,\varphi_4(\nu_0)$
1,94	0	2,8	3,47+5,60=9,07	−5,61
2,10	0	2,8	3,39+5,60=8,99	−5,53
2,16	0	2,8	3,33+5,60=8,93	−5,51
ν	$a_{41} = -\frac{4{,}8\,i_0}{l_0}\,\eta_3(\nu_0)$	$a_{42} = -\frac{5{,}4\,i_0}{l_0}\,\varphi_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu_0)$	$a_{43} = -\frac{6\,i_0}{l_0}\,\varphi_4(\nu_0)$	$a_{44} = \frac{21{,}6\,i_0}{l_0^2}\,\eta_2(\nu_0) + \frac{5{,}4\,i_0}{l_0^2}\,\eta_1(\sqrt{1{,}11}\,\nu^0)$
1,94	−4,49	−3,66	−5,61	13,45−3,90=9,55
2,10	−4,43	−3,31	−5,53	12,00−5,58=6,42
2,16	−4,41	−3,17	−5,51	11,50−6,19=5,31

Tabloul nr. 3

ν	$t_{1 \to 2} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$	$t_{2 \to 1} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}$	$t_{3 \to 1} = -\frac{a_{13}}{a_{11}}$	$t_{4 \to 1} = -\frac{a_{14}}{a_{11}}$
1,94	− 0,171	−0,317	0	+0,593
2,10	− 0,175	−0,320	0	+0,590
2,16	− 0,177	−0,321	0	+0,589

Tabloul nr. 3 *(continuare)*

ν	$t_{1\to 3} = -\frac{a_{31}}{a_{33}}$	$t_{2\to 3} = -\frac{a_{32}}{a_{33}}$	$a_{3\to 2} = -\frac{a_{23}}{a_{22}}$	$t_{4\to 2} = -\frac{a_{24}}{a_{22}}$
1,94	0	−0,309	−0,199	+0,261
2,10	0	−0,312	−0,204	+0,249
2,16	0	−0,314	−0,207	+0,234
ν	$t_{1\to 4} = -\frac{a_{41}}{a_{44}}$	$t_{2\to 4} = -\frac{a_{42}}{a_{44}}$	$t_{3\to 4} = -\frac{a_{43}}{a_{44}}$	$t_{4\to 3} = -\frac{a_{34}}{a_{33}}$
1,94	+0,470	+0,384	+0,589	+0,618
2,10	+0,695	+0,516	+0,868	+0,616
2,16	+0,830	+0,598	+1,035	+0,616

Iterarea finală este reprezentată în figura 10 rezultînd

$$\nu_0^{cr} = 2{,}10 \quad \text{și deci}$$

$$P_0^{cr} = \frac{(\nu_0^{cr})^2 EI_0}{l_0^2} = \frac{(2{,}10)^2 EI_0}{l_0^2}$$

(valoarea încărcării critice corespunde cu cea calculată prin altă metodă în lucrarea [4]).

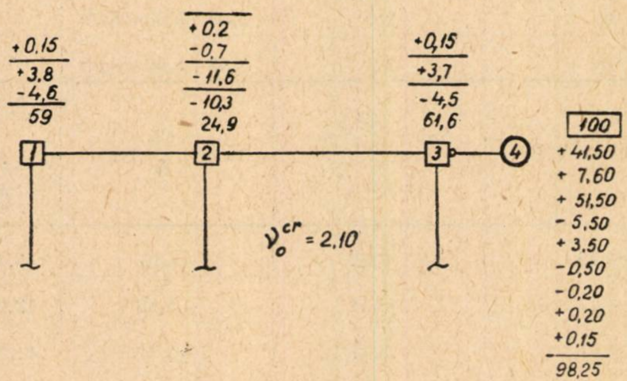

+0.15
+3.8
-4,6
59
+0.2
-0.7
-11,6
-10,3
24,9
+0,15
+3,7
-4,5
61,6
100
+41,50
+ 7,60
+ 51,50
- 5,50
+ 3,50
-0,50
-0,20
+0,20
+0,15
98,25
1
2
3
4
$\nu_0^{cr} = 2{,}10$

Fig. 10

Celelalte forțe critice ale sistemului vor fi

$$P_1^{cr} = P_0^{cr}; \quad P_2^{cr} = 0{,}8\, P_0^{cr}; \quad P_3^{cr} = 2\, P_0^{cr}.$$

Se poate calcula lungimea de flambaj a stîlpului 3, și anume :

$$l_f = \frac{\pi}{\nu_{cr}}\, l_0 = \frac{3{,}14}{2{,}10} = 1{,}5\, l_0$$

de unde reiese că *lungimea liberă a oricăreia din barele unei structuri depinde și de modul de încărcare a structurii.*

VIII

În calculele de stabilitate, la fel ca în Statica Construcțiilor, pentru sistemele static nedeterminate rezultă simplificări importante folosind *simetria.*

Aceste simplificări se aplică la structurile geometricește simetrice și încărcate simetric.

Pentru aceasta se efectuează o grupare judicioasă a necunoscutelor în grupuri simetrice sau antisimetrice în raport cu o axă sau un punct.

Spectrul „încărcării critice'' se obține prin determinarea parametrilor critici separat pentru necunoscutele simetrice și antisimetrice.

IX

Pentru evitarea tatonărilor de lungă durată, se propune un procedeu simplu de determinare a *parametrului critic* bazat pe observația făcută de Southwell [16] privind posibilitatea determinării sarcinii critice printr-un procedeu grafo-analitic.

Extinzînd această observație, s-a constatat că există o proporționalitate între pătratul *parametrului de încărcare* (ν^2) și *prima corecție* a deplasării ($\Delta_i^{(1)}$) (fig. 11), în apropierea încărcării critice. În reprezentarea grafică din figura 11 s-au folosit următoarele notații :

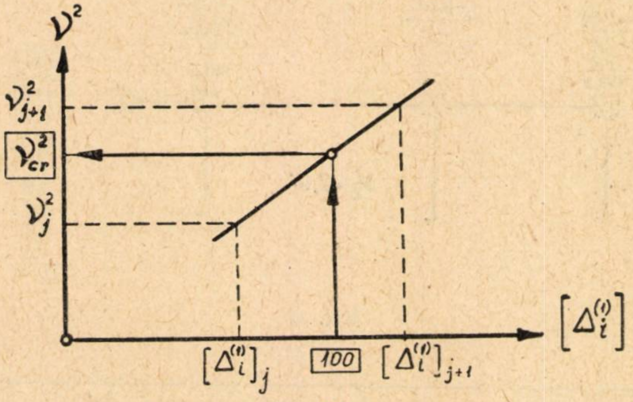


Fig. 11

j,	treapta de aproximare ;
ν_j,	parametru de încărcare ales în treapta j ;
ν_{j+1},	idem în trepta $j+1$;
$[\Delta_i^{(1)}]_j$,	prima corecție a deplasării corespunzătoare parametrului ν_j ;
$[\Delta_i^{(1)}]_{j+1}$,	idem parametrului ν_{j+1}.

Folosind acest procedeu grafic se poate calcula cu suficientă exactitate parametrul de încărcare critic (ν_{cr}) făcînd numai două iterări pentru valori ν în apropierea „încărcării critice''.

Pentru cadrul din figura 7 s-a urmat acest procedeu. S-au considerat valorile

$$\nu_1 = 1{,}94 \qquad \nu_2 = 2{,}16$$

obținîndu-se (figurile 12 și 13)

$$[\Delta_i^{(1)}]_1 = 65 \quad \text{și} \quad [\Delta_i^{(1)}]_2 = 113.$$

În figura 14 este aplicat procedeul grafic la cazul studiat.

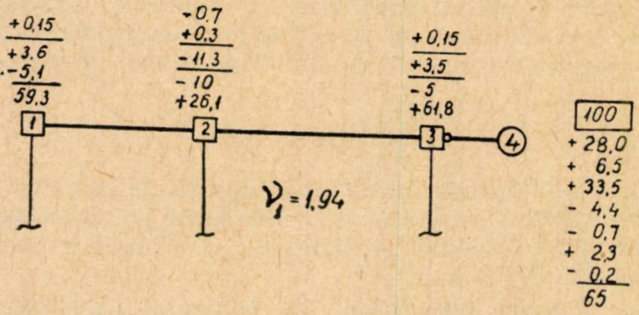

+0,15
+3.6
-5,1
59.3
-0.7
+0.3
-11.3
-10
+26,1
+0,15
+3,5
-5
+61,8
1
2
3
4
ν_1=1,94
100
+28.0
+6.5
+33.5
-4.4
-0.7
+2.3
-0.2
65

Fig. 12

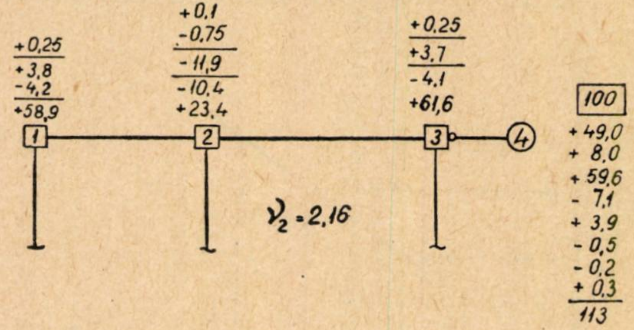

+0,1
-0,75
-11,9
-10,4
+23,4
+0,25
+3,8
-4,2
+58,9
+0.25
+3.7
-4,1
+61,6
1
2
3
4
ν_2=2,16
100
+49,0
+8,0
+59,6
-7,1
+3,9
-0,5
-0,2
+0,3
113

Fig. 13

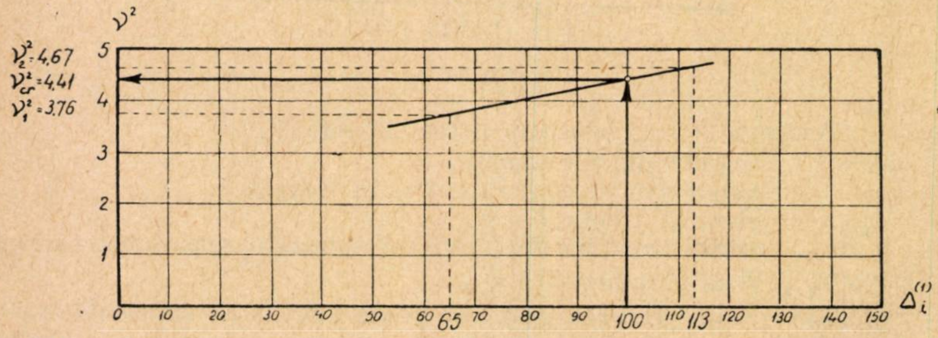


Fig. 14

Deci

$$\nu_{cr}^2 = 4{,}43 \text{ rezultat grafic } - P_{cr} = \frac{4{,}43\, EI_0}{l_0^2};$$

$$\nu_{cr}^2 = 4{,}41 \text{ calculat } - P_{cr} = \frac{4{,}41\, EI_0}{l_0^2}.$$

Diferența, în acest caz, este sub 1%.

X

Avîndu-se în vedere cunoscuta analogie dintre fenomenul pierderii stabilității elastice și fenomenul de rezonanță [2], sistemul canonic de ecuații fiind identic cu cel cuprins în (1), toate considerațiile făcute în această lucrare sînt valabile și în calculul frecvențelor proprii de vibrație a sistemelor de bare.

Prin urmare, se poate determina *parametrul critic de vibrație* (α_{cr}) folosind criteriul de serie (11):

Dacă

$$\left.\begin{array}{llll} \Delta_i^{(1)} < 1, & \alpha < \alpha_{cr} & (\omega_i < \omega), & (a) \\ \Delta_i^{(1)} = 1, & \alpha = \alpha_{cr} & (\omega_i = \omega)\ \textit{rezonanța}, & (b) \\ \Delta_i^{(1)} > 1, & \alpha > \alpha_{cr} & (\omega_i > \omega), & (c) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

unde

$$\omega = \frac{\alpha_{cr}^2}{l_0^2}\sqrt{\frac{EI_0}{\overline{m}_0}}, \text{ (frecvența vibrațiilor proprii)} \qquad (14)$$

$\overline{m}_0$ = masa uniform distribuită, de bază.

Calculele se conduc asemenea celora care s-au făcut la determinarea parametrului critic de încărcare.

CONCLUZII

Lucrarea de față prezintă un criteriu (11) eficace de a determina încărcarea minimă de pierdere a stabilității elastice a sistemelor de bare.

Pentru aplicarea criteriului (11) se utilizează metoda aproximațiilor succesive. Procedeul de calcul propus își găsește practic utilizare la calculul stabilității elastice a cadrelor.

Avantajele aplicării metodei aproximațiilor succesive sînt remarcabile mai ales pentru cadrele cu noduri fixe în care caz procesul de iterare este rapid convergent indiferent de numărul gradelor de libertate ale sistemului.

Metoda de calcul este aplicabilă și la cadrele cu noduri deplasabile, în acest caz convergența iterației este ceva mai lentă.

Calculul se poate face și pentru structurile solicitate și de sarcini transversale.

Prin același procedeu de calcul se poate determina coeficientul de siguranță la flambaj general al construcției. Folosind construcția grafică din figura 11 se pot evita tatonările de lungă durată la determinarea încărcării critice. De asemenea este posibilă aplicarea criteriului de serie în studiul vibrațiilor cadrelor.

Primită la redacție la 4 august 1956.

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ПОТЕРИ ЭЛАСТИЧНОЙ СТАБИЛЬНОСТИ СИСТЕМАМИ ШТАНГ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

На основании критерия (II) указывается метод последовательных приближений для определения минимальной «критической нагрузки», вызывающей потерю эластичной стабильности системами штанг.

Предлагается графический способ (рис. 11), дающий возможность не терять время на поиски вслепую.

При помощи этого способа можно определить коэффициент безопасности при общем изгибе структур.

Два примера — рама жестко связанная в узлах и рама с подвижными узлами — иллюстрируют применение этого метода.

CONSIDÉRATIONS SUR UN CRITÉRIUM DE PERTE DE LA STABILITÉ ÉLASTIQUE DES SYSTÈMES DE BARRES

(RÉSUMÉ)

Basé sur le critérium (11), on indique l'utilisation de la méthode des approximations successives concernant l'appréciation «de la charge critique» minimum, de perte de la stabilité élastique des systèmes de barres.

On propose un procédé graphique (fig. 11) qui permette d'éviter les tâtonnements de longue durée.

Par le même procédé, on peut déterminer le coefficient général de sécurité au flambage des structures.

Deux exemples, un cadre à noeuds fixes et un autre à noeuds mobiles, illustrent le mode d'application de cette méthode.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Théorie de la stabilité élastique.* Paris, Liège, 1947.
2. Odone Belluzzi, *La stabilità dell'equilibrio elastico. La vibrazioni. Scienza delle costruzioni,* Bologna, 1955, vol. IV, cap. 33–34.
3. N. V. Kornouhov, *Procinosti i ustoicivosti sterjnevih sistem.* Moscova, 1949.

4 **Konrad Sattler**, *Das Durchbiegungsverfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen.* Die Bautechnik, 1953, nr. 10—11.
5. M. **Mişicu**, *Stabilitatea dinamică a construcțiilor rigide pe stîlpi sau piloți.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. III, nr. 3—4, 1952, p. 257.
6. R. P. **Voinea** şi N. **Bucur**, *Contribuții la studiul flambajului cadrelor cu noduri fixe.* Studii şi cercetări de mecanică şi metalurgie, t. IV, 1953.
7. A. **Slavin**, *Stability Studies of Structural Frames.* Transactions of the NewYork Academy of Sciences, ianuarie 1950, Seria II, vol. 12, nr. 3.
8. **Hardy Cross** a. N. D. **Morgan**, *Continous Frames of Reinforsed Concrete,* New-York, 1950.
9. **Konrad Sattler**, *Das Verfahren Slavin zur Untersuchung der Stabilität ganzer Fachwerksysteme.* Die Bautechnik, 1953, nr. 8.
10. A. F. **Smirnov**, *Stabilitatea statică şi dinamică a construcțiilor.* Bucureşti, 1951.
11. I. P. **Procofiev** şi A. F. **Smirnov**, *Statica construcțiilor,* Bucureşti, 1951, vol.III.
12. **Panait Mazilu**, *Statica construcțiilor.* Ed. tehnică, Bucureşti, vol. II, (sub tipar).
13. **Radu Agent**, *Metoda aproximațiilor succesive aplicată în probleme de statică și în alte probleme similare.* Bucureşti, 1933, vol. I.
14. **Mihail Ifrim**, *Calculul stabilității cadrelor prin metoda iterației.* Industria construcțiilor şi a materialelor de construcţie, Bucureşti, 1956, nr. 3.
15. G. **Aznavorian** şi R. **Agent**, *Metode iterative pentru calculul cadrelor cu noduri deplasabile.* Industria construcţiilor şi a materialelor de construcţie. Bucureşti, 1955, nr. 3/12.
16. **Southwell**, *On the Analysis of Experimental Observations in Problems of Elastic Stability.* Proc. Royal Society, Londra, 1932, Seria A, vol. 135.
17. R. **Agent**. *Notă asupra calculului stabilității elastice a cadrelor prin metoda iterației.* Industria construcției și materialelor de construcție, București, 1956, nr. 6.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

HIDROTEHNICĂ

TRANSFORMAREA BRAŢULUI SULINA ÎN CANAL MARITIM

SOLUŢIE CARE CONDUCE LA ASIGURAREA IEŞIRII LA MARE ŞI LA VALORIFICAREA BOGĂŢIILOR DELTEI DUNĂRII

DE

GR. VASILESCU

Comunicarea de faţă expune, principial, o soluţie ,,unică" pentru asigurarea ieşirei la mare şi pentru valorificarea Deltei Dunării, conform concluziilor consfătuirii de la Maliuc (Deltă), ţinută de la 28 mai la 2 iunie 1956.

Braţul Sulina se transformă în canal maritim, dacă se barează la Ceatalul Sf. Gheorghe, adică la bifurcarea braţelor Sulina şi Sf. Gheorghe.

Trecerea vaselor între braţul Tulcea şi canalul maritim Sulina se va face prin ecluze maritime.

Întregul debit al braţului Tulcea se va scurge prin braţul Sf. Gheorghe, care va fi conformat în prealabil pentru a îndeplini această funcţie.

Braţul Sulina, transformat în canal maritim, va fi îndiguit insubmersibil, în tot lungul său, pentru a nu pătrunde în el decît apele folosite la ecluzări şi totodată apele limpezi ce se vor scurge din deltă, ori de cîte ori aceasta va fi necesar.

Nivelul apelor canalului maritim Sulina va fi foarte apropiat de nivelul zero al Mării Negre, *adică cel mai jos nivel cu scurgere la mare ce se poate realiza în Delta Dunării.*

Apele mării vor pătrunde în canalul Sulina pe aproape 70 km, de la gura braţului Sulina şi pînă la Ceatalul Sf. Gheorghe. Braţul Sulina, transformat în canal maritim, va îndeplini, în cele mai bune şi mai economice condiţii, funcţia de canal principal de colectare şi evacuare al apelor acelei părţi din deltă, care este susceptibilă în primul rînd de a fi valorificată în mod complex şi anume partea formată din insulele Letea şi Sf. Gheorghe, în suprafaţă totală de 260 000 ha aproximativ.

Transformarea brațului Sulina în canal maritim creează totodată condiții deosebit de favorabile și pentru întreținerea adîncimii necesare peste bara de la gura brațului Sulina, care, precum se știe, se formează la ieşirea în mare, prin depunerea aluviunilor grele, aduse de fluviu, care nu mai pot fi transportate în adîncurile mării, datorită slăbirii capacității de antrenare a curenților ce acționează în zona de depunere.

Transformarea brațului Sulina în canal maritim are repercusiuni multiple asupra întregii activități ce se desfășoară în această regiune:

1. Cu privire la navigație

Menținerea adîncimii în canalul navigabil ce străbate bara de la Sulina, trece iarăși printr-o criză gravă: ea a scăzut în primăvara anului 1956, de la 7,32 m — cît este adîncimea normal întreținută în lungul căii navigabile, de la mare și pînă la Brăila — la abia 4,57 m, situație care împiedică vasele de mare tonaj de a ieși încărcate din Dunăre și ca atare face fără obiect navigarea către porturile maritime ale fluviului (Galați, Brăila, Reni, Ismail, etc.).

Această situație, deosebit de critică, se datorește în măsură hotărîtoare, înnisipării brațului Sulina prin masele enorme de nisipuri, aduse de brațul însuși, care sînt transportate pe fund, sub formă de valuri călătoare, și sînt vărsate în mare în timpul perioadelor de viituri puternice și îndelungate.

Dovada acestor valuri de nisip, o fac ancorele pe care se trag drăgile ce adîncesc fundul mării prin cupe (sau godeuri), în șenalul navigabil ce trece peste bară, la gura brațului Sulina; aceste ancore se îngroapă atît de adînc în masele proaspăt depuse de nisip, încît nu mai pot fi smulse decît cu vinciurile unui vapor, de unde în apele joase și medii (cînd fluviul nu aduce asemenea valuri de nisip) ele se manevrează ușor și manual de echipajul drăgilor.

Constatăm, așadar, la gura brațului Sulina — și același fapt se întîmplă la fiecare gură — existența unui fenomen de autoînnisipare, fenomen căruia i se datorește aproape exclusiv formarea barelor în șenalul navigabil, la gurile fluviilor ce se varsă în mări fără maree.

Este de ajuns ca o perioadă mai îndelungată de ape foarte mari să aibă loc, și imediat se constată o tendință de scădere a adîncimii în șenalul navigabil ce trece peste bară, prin materialul depus de valurile călătoare de nisip, ajunse la mare.

O asemenea situație a existat în timpul apelor mari din primăvara anului 1956, care au urmat unor viituri excepționale, ca durată și intensitate, ce au avut loc în anul precedent.

Dar numai această explicație nu este suficientă pentru a justifica total o asemenea scădere, cu totul neobișnuită, în adîncimea șenalului navigabil de la gura brațului Sulina.

Una din cauzele agravante, a stării îngrijorătoare de la gura brațului Sulina, este datorită faptului că brațul Chilia, care scurge 2/3 din debitul lichid și solid al Dunării, se varsă în mare la extremitatea de nord a deltei Dunării, și formează acolo, datorită maselor enorme de aluviuni aduse, și pantei mici a plajei submarine, o deltă proprie, denumită delta secundară a brațului Chilia.

Dezvoltarea acestei delte a fost în ultimul timp vertiginoasă. De la 40 km², cît măsura în anul 1830, în anul 1922 — cînd s-a făcut o nouă ridicare topografică — ea se dezvoltase la 204 km², adică la mai mult de 5 ori, în aproape un secol.

Pentru a caracteriza mai precis această dezvoltare, menționăm că înaintarea în mare a coastei a fost, în același interval de timp, de aproape 8000 m și aceasta atît către răsărit cît și către sud-est (vezi harta).

Ca urmare a acestei dezvoltări, gura brațului Sulina a suferit două neajunsuri :

Pe de o parte, ea s-a găsit adăpostită de vînturile puternice de iarnă, care suflă din sectoarele de nord și nord-est, și care răscolesc materialele depuse peste bară, le pune în suspensie și ușurează transportarea lor către adîncuri de curenții existenți ; iar, pe de altă parte, delta secundară a brațului Chilia, prin aceeași înaintare rapidă către răsărit, îndepărtează tot mai mult de la coastă curentul litoral (costal), care circulă în Marea Neagră de la nord la sud și scurge masele mari de apă, ce se varsă în golful Odesei aduse de afluenții principali ai Mării Negre — Dunărea, Nistru și Nipru — către Bosfor și Marea de Marmara.

Acest curent maritim acționează cu toată intensitatea lui pentru transportul aluviunilor, aduse de brațul Sulina, către adîncuri și întîrzie astfel procesul de formarea barei.

Prin îndepărtarea curentului litoral de la coastă, de către Delta secundară a Chiliei, procesul de formare a barei se activează și ajunge să ia uneori proporții cu totul alarmante, prin depunerile formate chiar în șenalul navigabil de la gură, așa cum s-a întîmplat în primăvara acestui an, cu toată acțiunea de dragare întreprinsă.

Remediul indicat, în primă fază a acestei stări de lucruri, este prelungirea intensă a digurilor de la gura brațului Sulina, pentru a ajunge, cît mai curînd, cu extremitatea lor, în zona puternic spălată de curentul litoral ; concomitent cu aceasta, trebuie concentrat materialul de dragaj, în șenalul navigabil de la gură, care face legătura între marea adîncă și fluviu, pentru a înlătura depozitele de nisipuri, care se formează în șenal, în timpul viiturilor (apelor mari).

În sfîrșit, ultimul fenomen îngrijorător, care a avut și are încă loc la gura brațului Sulina, este concentrarea aluviunilor acestui braț și ale brațului Vechiul Stambul, în spațiul marin restrîns care separă aceste două guri. Ținînd seamă și de faptul că brațul Vechiul Stambul transportă aproape jumătate din debitul solid al brațului Chilia, iar brațul Sulina mai puțin de jumătate din debitul solid al brațului Tulcea ; în total deci ceva peste 40% din debitul solid total al Dunării.

Această concentrare, datorită faptului că scurgerea în mare a aluviunilor brațului Vechiul Stambul se făcea către sud-est, iar acelea ale brațului Sulina către est, amenința să conducă la colmatarea băii marine ce separă aceste două guri și la contopirea lor într-o gură unică.

Pentru a lupta împotriva acestui fenomen, care se îndeplinea cu mare intensitate și care a determinat Comitetul consultativ al C.E.D.*) să se pronunțe, în anul 1932, că gura brațului Sulina nu ar mai avea decît 10 ani de bună funcționare, Comitetul consultativ a luat măsura excelentă de a curba către sud-est direcția digurilor noi, ce se construiesc la gura brațului Sulina, îndepărtînd astfel, continuu, această gură, de gura brațului Vechiul Stambul.

Totodată el a examinat raportul prezentat de inginerul șef al C.E.D., aprobînd în principiu soluția de a se da brațului Sulina o altă ieșire la mare, prin scurgere liberă, săpînd o nouă albie îndreptată către sud și construind lucrări pentru amenajarea noii guri la mare.

Ulterior, s-a constatat că natura a reacționat ea însăși împotriva greutății de a se evacua aluviunile, într-o baie maritimă în curs de colmatare, și, în anul 1942, s-a constatat că brațul Vechiul Stambul și-a deschis o nouă gură principală de ieșire la mare, către est, vechea gură fiind în bună parte colmatată.

În anul 1943, vechea gură a fost barată printr-un dig, prin grija Direcției Dunării Maritime și astfel s-a consolidat acțiunea naturală de îndepărtare a celor două guri și deci de împiedicare a contopirii lor.

Aceste fapte justifică afirmația ce facem că gura brațului Sulina va mai asigura, încă cîtva timp ieșirea la mare, dacă digurile vor fi prelungite în ritmul necesar recuperării întîrzierii evidente a prelungirii lor și totodată dacă se va efectua dragajele necesare întreținerii adîncimii în șenalul navigabil, în timpul perioadelor de ape mari.

Dar asemenea eforturi nu pot fi făcute timp prea îndelungat.

De aceea este de recomandat să se înfăptuiască, cît mai curînd posibil, transformarea brațului Sulina în canal maritim, care va scoate din procesul ce se îndeplinește astăzi la gura brațului Sulina, cantitățile mari de aluviuni pe care le aduce brațul însuși.

După ce brațul Sulina va fi barat și între timp digurile de la gura lui vor fi ajuns la o anumită îndepărtare de gura brațului Vechiul Stambul, o adîncime în șenalul navigabil de la mare se va putea menține, timp îndelungat, numai prin dragarea minimală a materiilor ce vor fi introduse în șenal, de furtuni și de curentul litoral.

În cazul însă cînd se va constata în viitor o nouă tendință pronunțată de dezvoltare a deltei secundare a brațului Chilia, în direcția gurii brațului Sulina, atunci va trebui să se discute, comparativ, oportunitatea unei îndepărtări către sud-est prin o nouă prelungire a digurilor de la gura brațului Sulina, sau amenajarea unei alte guri de ieșire la mare, situată la sud de Sulina, legată printr-o ramură de canal, de actuala cale navigabilă, or, în sfîrșit, și de preferință, după cum se va vedea mai departe, să se amenajeze brațul și gura brațului Sf. Gheorghe.

Cheltuielile de întreținere a noii guri vor fi deosebit de reduse, dat fiind că o dată amenajată, ea nu va mai suferi nici un proces de autoînnisipare; de asemenea, întreținerea gurii brrațului Sf. Gheorghe va fi modestă.

---

*) C.E.D. înseamnă „Comisiunea Europeană a Dunării”,

Alimentarea cu apă dulce a orașului Sulina și a noii guri se va face din brațul Chilia, sau din brațul Sf. Gheorghe. Satelor în lungul brațului Sulina li se vor asigura apa de băut din puțuri locale.

Pînza subterană, care a invadat subsolurile din orașul Sulina, ca urmare a prelungirii digurilor de la gură cu aproape 6000 m, va scădea imediat.

În ceea ce privește brațul Sulina, el reprezintă și va continua să fie o cale navigabilă excelentă, deoarece are astăzi, în tot lungul său, aproape 8 m adîncime, la etiaj, adică la nivelul apelor foarte apropiat de zero al Mării Negre (la etiaj înălțimea nivelului apelor peste zero al Mării Negre este de 31 cm, la Ceatalul Sf. Gheorghe, scăzînd treptat către mare).

Construirea platformelor — digurile însubmersibile din lungul brațului Sulina — se va face prin dragaje în brațul însuși și prin depunerea materialului dragat pe maluri. În acest mod brațul se va mai adînci ; satele actuale, inundabile, se vor instala pe platformele insubmersibile; căi de comunicație, practicabile la orice nivel al apelor, se vor stabili în tot lungul brațului Sulina.

Tot prin dragare se va îndepărta și numeroasele epiuri (pinteni) ce au fost construite pe acest braț, pentru a-i îngusta secțiunea și a-i spori adîncimea de care nu mai este nevoie în regim maritim, ceea ce va îmbunătăți sensibil condițiile de navigație.

Așadar, transformarea brațului Sulina în canal maritim, cu derivație către sud — dacă va fi necesar — va satisface pentru o perioadă îndelungată de timp, cerințele de viitor ale navigației, atît în ceea ce privește brațul însuși cît și gura.

Se pun totuși cîteva probleme, care trebuie discutate, în legătură cu transformarea brațului Sulina în canal maritim.

Prima problemă este : dacă pătrunderea apei mării pe aproximativ 70 km în interiorul deltei — de la mare pînă la Ceatalul Sf. Gheorghe — care modifică regimul hidraulic al centrului deltei, nu va perturba exploatarea economică și viața socială a acestei regiuni ?

Răspunsul la această obiecțiune, formulată de Comitetul consultativ al C.E.D. în anul 1932, este dat la sfîrșitul acestei comunicări, unde se vor arăta consecințele favorabile ale transformării brațului Sulina în canal maritim, asupra valorificării bogățiilor deltei Dunării.

Totodată, menționăm avizul dat asupra transformării brațului Sulina în canal maritim, de către Consiliul tehnic superior, în anul 1934, în care s-a discutat în adîncime avantajele și inconvenientele acestei transformări. Consiliul, completat cu o comisie de specialiști — printre care figura și academicianul Doctor Grigore Antipa — a dat avizul că „transformarea brațului Sulina în canal maritim, este tehnicește admisibilă și merită de a fi luată în considerare în posibilitățile de rezolvare a ameliorării navigației la gurile Dunării, prin actuala cale a brațului Sulina”. Acest aviz ne îndreptățește să considerăm prima problemă ca favorabil rezolvată. Consiliu și comisia de specialiști au discutat problema între 4 aprilie și 4 iulie 1934 (3).

Avizul răspunde evident și la întrebarea dacă pătrunderea apei de mare în centrul deltei dăunează sau nu exploatării piscicole a acestei regiuni, care a fost adînc discutată de Consiliu, împreună cu comisia de specialiști și care a căpătat un răspuns negativ.

A doua problemă care se pune este: se va putea face scurgerea debitului brațului Sulina prin brațul Sf. Gheorghe, fără a se produce consecințe dăunătoare în amonte sau în aval de Ceatalul Sf. Gheorghe?

Răspunsul este:

În anul 1856 brațul Sf. Gheorghe scurgea către mare 30% din debitul Dunării și brațul Sulina numai 7%. În prezent debitul brațului Sf. Gheorghe a scăzut la 21%, iar debitul brațului Sulina a crescut la 15% din debitul Dunării și aceasta datorită în special scurtării brațului, prin tăierea coturilor sale, care a avut ca rezultat mărirea pantei de scurgere a brațului.

Suma debitelor ambelor brațe este în prezent de 36% din debitul Dunării, adică cu 20% mai mare decît debitul brațului Sf. Gheorghe, în 1856.

Albia brațului Sf. Gheorghe a păstrat, însă, în linii generale, vechea ei conformație.

Această constatare rezultă și din măsurarea debitelor brațelor Dunării, la Ceatalul Sf. Gheorghe, făcută în august 1955 de organele Ministerului Transporturilor Rutiere, Navale și Aeriene, la cota de +317 cm citită pe mira de la Tulcea. Rezultatele acestei măsurători sînt expuse în tabloul următor:

Brațul	Secțiunea udată m^2	Viteza medie m/s	Debitul m^3/s	Procentul debitelor brațelor față de debitul brațului Tulcea
Sulina	1153	1,213	1 399	41 %
Sf. Gheorghe	2687	0,742	1 994	59 %

Ca atare debitul brațului Sf. Gheorghe era la data măsurării de 1,44 ori mai mare decît debitul brațului Sulina.

Secțiunea udată a brațului Sf. Gheorghe era însă de 2,33 ori mai mare decît a brațului Sulina.

Procentul mare de debit al brațului Sulina se datorește vitezei ridicate, mijlocii, a maselor sale lichide (1,213 metri pe secundă, față de 0,742 metri pe secundă, pe brațul Sf. Gheorghe).

De aici rezultă că trebuie să mărim panta de scurgere a brațului Sf. Gheorghe pentru a-i spori debitul și adîncimea secțiunii transversale. În acest caz se impune a fi tăiate cotul strangulat de la Calinova și bucla de la Murighiol, la care nu trebuie dragate decît cîte un canal îngust.

Mărirea secțiunii acestor canale se va face prin factorii naturali, în primele perioade de ape mari. Se va vedea apoi dacă mai este nevoie și de tăierea altor coturi.

Secțiunea transversală a brațului Sf. Gheorghe se va spori de la sine, adîncindu-se în părțile ei colmatate.

Deturnarea întregului debit al brațului Tulcea, pe brațul Sf. Gheorghe, va fi în mod deosebit ușurată prin curba continuă, cu concavitatea către malul stîng, pe care o formează traseul brațului Tulcea și în continuare al brațului Sf. Gheorghe, în amonte și aval de Ceatalul Sf. Gheorghe.

A treia problemă care se pune este: crearea nodului hidrotehnic de la Ceatalul Sf. Gheorghe nu va pune în primejdie de inundație orașul Tulcea, sau așezările omenești de pe brațul Sf. Gheorghe?

Răspunsul este următorul:

Construirea ecluzelor maritime de la Ceatalul Sf. Gheorghe se va face pe platforma întinsă care există în acel loc și, concomitent, se va face tăierea cotului de la Calinova și a buclei Murighiol.

Imediat după aceasta, vasele vor trece între brațele Tulcea și Sulina prin ecluze și se va începe executarea barajului de închidere a brațului Sulina, cu ancoramente depozitate peste un strat gros de saltele de fascine, protejate cu piatră de dimensii convenabile, mai cu deosebire înspre aval de baraj. Operația se va înfăptui, treptat, în cîțiva ani, consolidîndu-se totodată malurile brațului Sulina la Ceatalul Sf. Gheorghe și dîndu-se răgazul necesar brațului Sf. Gheorghe de a-și acomoda secțiunea transversală și panta, pentru a putea primi și scurge, întregul debit al brațului Tulcea.

Remuul produs, din momentul ce închiderea brațului Sulina se va apropia de sfîrșit, se va amortiza în cursa lui de propagare, spre Tulcea, prin deversări ce se vor face, în interiorul insulei Letea, peste malul stîng al brațului Tulcea, pe o lungime de aproape 9 km. În acest fel, orașul Tulcea se va găsi la adăpost de inundații ce ar putea fi provocate de bararea brațului Sulina.

Constrîngerea, tot mai accentuată, exercitată treptat, asupra brațului Sf. Gheorghe, prin înălțarea continuă a barajului, pentru a scurge un debit sporit, pe de o parte și tăierea de coturi, pe de altă parte, va sfîrși prin a obliga brațul să-și modifice panta și secțiunea transversală de scurgere și să primească întregul debit al brațului Tulcea.

Din cele expuse mai sus credem că se desprinde concluzia că *transformarea brațului Sulina în canal maritim, cu eventuala deschidere a unei noi guri către sud, reprezintă o soluție favorabilă pentru asigurarea navigabilității la gurile Dunării.*

În ceea ce privește al doilea aspect al transformării brațului Sulina în canal maritim, și anume acela al creării unui canal principal de drenaj (colectare și evacuare), în centrul deltei, expunem principial următoarele:

Canalul maritim Sulina, aflîndu-se la nivelul Mării Negre, va permite scurgerea apelor dinspre brațele periferice, Chilia și Sf. Gheorghe, către colectorul central al deltei ,Sulina, ori de cîte ori va fi nevoie. Diferența de nivel între brațele periferice și canalul maritim Sulina, va fi maximă la Ceatalul Sf. Gheorghe, în timpul apelor mari, și minimă în vecinătatea mării la apele mici. Primenirea apelor se va putea face, așadar, mai intens la nivelurile mai crescute al apelor Dunării și mai slab la nivelurile joase

Apele ce vor străbate insula Letea și insula Sf. Gheorghe se vor decanta pe parcurs și vor ajunge limpezite în canalul Sulina.

Trecerea apelor din baltă în canalul Sulina se va face prin stăvilare, iar a vaselor fluviale care circulă prin deltă (vasele de pescărie, vase pentru transportul stufului etc.), prin ecluze de serviciu.

Masele de apă dulce ce se vor scurge prin ecluzele maritime de la Ceatalul-Sf. Gheorghe, la trecerea vaselor, și cele limpezi ce se vor aduna din baltă, în canalul Sulina, vor face ca apa din canal să fie cel puțin la suprafață salmastră, și vor crea un slab curent de scurgere către mare.

Consecințele transformării brațului Sulina în canal maritim, cu privire la valorificarea bogățiilor deltei Dunării vor fi următoarele, după specificul resurselor naturale :

2. Cu privire la creșterea și recoltarea piscicolă

Privitor la creșterea și recoltarea piscicolă, consecințele transformării brațului Sulina în canal maritim sînt deosebit de însemnate :

Primenirea activă a apelor din bălțile insulii Letea și a insulii Sf. Gheorghe va înlesni sporirea considerabilă a recoltei piscicole și va garanta în mai mare măsură permanența ei, prin oxigenul și sărurile aduse aproape continuu de apele proaspete. Prin această primenire se va putea totodată activa dezvoltarea planctonului și se va ventila apele viciate de sub plaur*), putîndu-se găsi mijloacele de a pescui cu folos și în bălțile acoperite cu această vegetație, care acoperă în cea mai mare parte bălțile permanente (sub 3 hidrograde).

Terenuri deosebit de folositoare pentru reproducerea piscicolă și creșterea puietului vor trebui create prin colmatări în zonele periferice ale stufului, diriguind apele din brațele principale ale Dunării și din canalele interioare către aceste zone. Apele decantate, după ce primenesc apele viciate din bălți, se vor scurge în colectorul principal Sulina și prin acesta la mare.

Funcția îndeplinită de acest canal, care se găsește la nivelul mării, în dezvoltarea și recoltarea faunei piscicole din Delta Dunării, va fi așadar deosebit de însemnată *și ca atare transformarea brațului Sulina în canal maritim se impune și din punct de vedere piscicol.*

3. Cu privire la creșterea și recoltarea stufului

Transformarea brațului Sulina în canal maritim va asigura realizarea condițiilor de bază ale maturizării, recoltării și în parte a depozitării stufului pentru transport, atunci cînd aceasta se va face prin brațul Sulina.

La sfîrșitul lunii septembrie, începutul lui octombrie, apa din unitățile stuficole, care vor fi inundate în timpul apelor mari de primăvară,

---

*) Plaur este stuful plutelor, liber, sau legat prin rădăcini de fundul bălților.

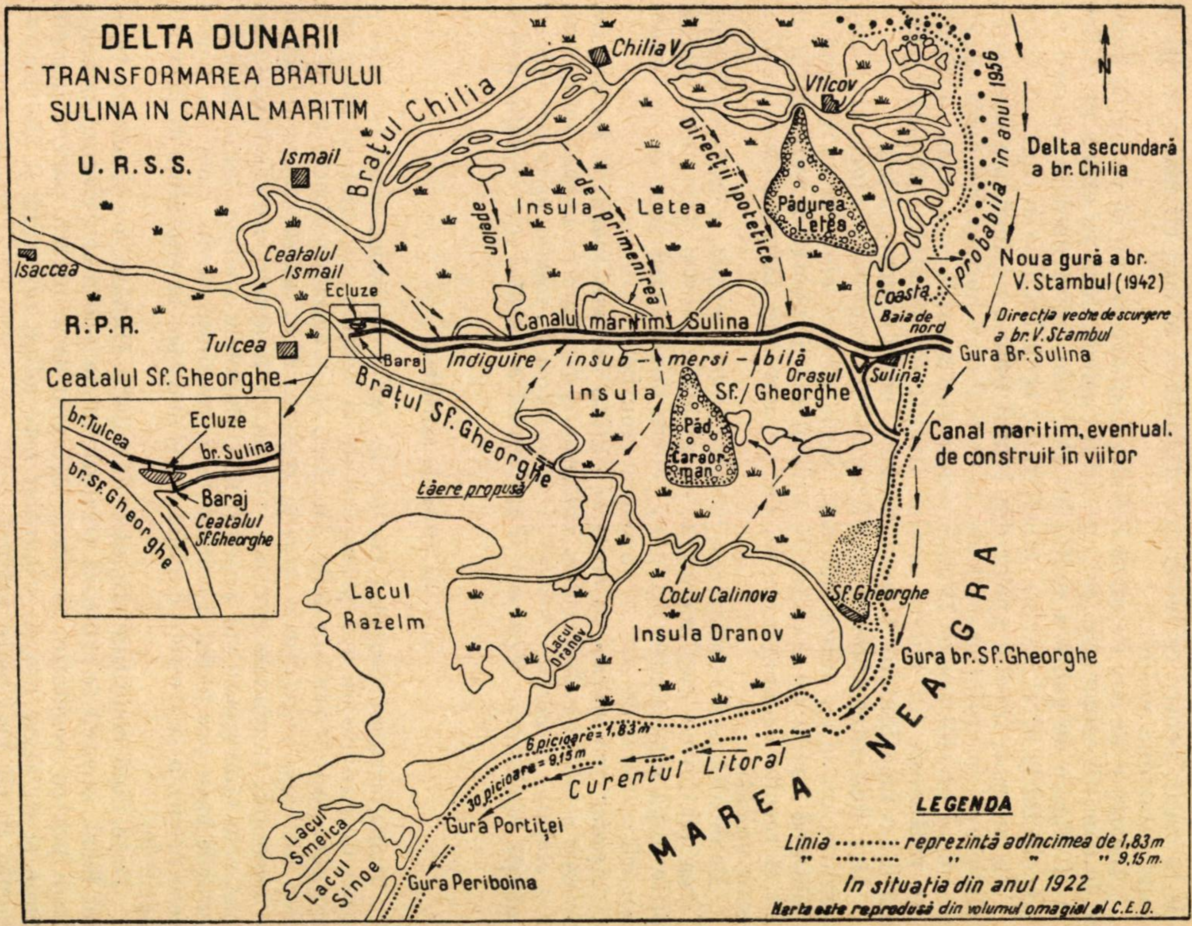

DELTA DUNARII
TRANSFORMAREA BRATULUI SULINA IN CANAL MARITIM
U. R. S. S.
R. P. R.
Isaccea
Ismail
Ceatalul Ismail
Ecluze
Tulcea
Baraj
Ceatalul Sf. Gheorghe
Brațul Chilia
Chilia V.
Vîlcov
Insula Letea
apelor
de primenirea
Direcții ipotetice
Pădurea Letea
Canalul maritim Sulina
Indiguire insub - mersi - bilă
Insula Sf. Gheorghe
Orasul Sulina
Păd. Caraorman
Brațul Sf. Gheorghe
tăere propusă
Lacul Razelm
Lacul Dranov
Cotul Calinova
Insula Dranov
Sf. Gheorghe
Lacul Smeica
Lacul Sinoe
Gura Portiței
Gura Periboina
6 picioare = 1,83 m
30 picioare = 9,15 m
Curentul Litoral
MAREA NEAGRA
Coasta
Baia de nord
probabilă în anul 1956
Delta secundară a br. Chilia
Noua gură a br. V. Stambul (1942)
Direcția veche de scurgere a br. V. Stambul
Gura Br. Sulina
Canal maritim, eventual. de construit în viitor
Gura br. Sf. Gheorghe
N
br. Tulcea
Ecluze
br. Sulina
br. Sf. Gheorghe
Baraj
Ceatalul Sf. Gheorghe
LEGENDA
Linia .... reprezintă adîncimea de 1,83 m
" .... " " 9,15 m.
In situația din anul 1922
Harta este reprodusă din volumul omagial al C.E.D.

Fig. 1

va trebui să fie evacuată pînă la nivelul de 6 hidrograde*) ; iar la începutul lunii decembrie, scurgerea va trebui continuată pînă la nivelul cel mai jos posibil, care să lase cea mai mare parte din suprafața unităților stuficole la uscat, pentru ca recoltarea stufului să se facă cît mai complet și cît mai economic posibil.

Această evacuare de masă lichidă, dăunătoare, nu se va putea îndeplini în condiții economice (prin gravitație), decît dacă va exista un mijloc sigur și eficace de golire a unităților stuficole, adică dacă se va crea un canal colector la nivel scăzut, transformînd brațul Sulina în canal maritim.

În prezent, nivelul apelor din brațul Sulina nu îngăduie scoborîrea nivelului apei în unitățile stuficole, la nivelul de 6 hidrograde, decît numai atunci cînd nivelul apelor Dunării scade sub această cotă, ceea ce uneori nu se realizează (în cursul anului trecut, de exemplu, nivelul apelor Dunării s-a menținut tot timpul, toamna, peste 6 hidrograde).

Dar desecarea aproape totală a unităților stuficole, la începutul lunii decembrie, nu se va putea înfăptui, decît atunci cînd se va dispune în vecinătatea lor de un colector la nivelul mării, pentru a putea pune la uscat și recolta economic stuful, de pe aproape întreaga suprafață a acestor unități.

Pe de altă parte indiguirea, la peste 10 hidrograde, a brațului Sulina, va crea platforme insubmersibile pe malurile acestui braț, care vor fi folosite după exploatarea stufului, pentru depozitarea acestuia în scopul încărcării snopilor de stuf în vasele de transport.

***Așadar, transformarea brațului Sulina în canal maritim, va asigura** realizarea condițiilor de creștere, maturizare, recoltare și parțial de depozitare a stufului la malul Dunării și ca atare va fi absolut necesară dacă se urmărește exploatarea rațională și economică a stufului din unitățile deltei.*

4. Cu privire la agricultură

Transformarea brațului Sulina în canal maritim, [care va înlesni crearea de curente de apă proaspătă de la brațele periferice, Chilia și Sf. Gheorghe, peste suprafața deltei Dunării, către canalul colector Sulina, va activa întreaga vegetație a acestei regiuni. Prin asigurarea apei ce le este necesară, terenurile agricole vor putea fi amenajate și cultivate rațional, cele sărăturoase vor putea fi mai abundent spălate, iar o parte din terenurile joase vor putea fi colmatate și transformate în zone de reproducere piscicolă și creștere a puietului și mai apoi în suprafețe de pășunat și agricole.

Date fiind condițiile climatice din delta Dunării, ca și natura terenului local, secetele ce urmează perioadelor de ape mari, creează condiții vitrege pentru vegetație, în ciuda așteptărilor contrarii pentru această regiune și ca atare nevoia irigațiilor este adînc resimțită și trebuie satisfăcută în cît mai mare măsură.

---

*) Un hidrograd reprezintă a zecea parte din amplitudinea maximă a nivelului apelor Dunării, într-un anumit punct considerat.

Transformarea brațului Sulina în canal maritim va îngădui așa dar circulația apelor derivate din brațele periferice ale deltei și îndreptarea lor către regiunile joase cu ape viciate, situate în centrul deltei, iar apoi către canalul colector Sulina, ceea ce va contribui la stimularea întregii vegetații a deltei, la înviorarea climatului său și la cîștigarea de terenuri agricole, prin colmatare și dessărăturare.

5. Referitor la silvicultură

Afirmăm că aceasta nu va avea decît de cîștigat din transformarea brațului Sulina în canal maritim, care, creînd condiții de activare a circulației apelor, va stimula întreaga vegetație, inclusiv pe acea forestieră.

CONCLUZII

Academia R.P.R., în urma consfătuirii de mare amploare, care a avut loc în ostrovul Maliuc din delta Dunării, de la 28 mai la 2 iunie 1956, ale cărei dezbateri au fost conduse de acad. Traian Săvulescu, a formulat o serie de concluzii și a recomandat să se găsească o soluție „unică", care să satisfacă interesele tuturor sectoarelor de valorificare a bogățiilor deltei : piscicol, stuficol, navigație, agricultură, silvicultură etc.

Transformarea brațului Sulina în canal maritim, credem că reprezintă o asemenea soluție, asigurînd navigația prin brațul Sulina și îngăduind valorificarea complexă a bogățiilor naturale din Delta Dunării.

Consecință fundamentală

Prin transformarea brațului Sulina în canal maritim și prin derivarea debitului acestui braț pe brațul Sf. Gheorghe, a cărui albie și pantă vor fi acomodate noii sale funcțiuni, ca și prin tăierea coturilor principale ale cursului său sinuos, brațul Sf. Gheorghe va dobîndi caracteristici corespunzătoare unei căi navigabile excelente pentru circulația vaselor de mare.

Tăierea coturilor se va face numai parțial prin dragare, urmînd ca curentul fluvial să desăvîrșească profilul canalelor prin eroziune naturală.

Gura brațului Sf. Gheorghe, care se află în condiții naturale excelente pentru navigație, datorită pantei abrupte a plajei submarine locale și situației sale de promontoriu, spălat puternic de curentul litoral, va fi amenajată, pentru navigație făcînd lucrările necesare de investiție, și continuînd prin cheltuieli modeste de întreținere, dat fiind că noul debit solid al brațului nu va depăși decît cu 20% debitul brațului Sf. Gheorghe din anul 1856.

Aceasta înseamnă înfăptuirea unui rezultat rîvnit de un secol, pentru asigurarea ieșirii la mare prin gurile Dunării, care poate deveni, economic realizabil, numai prin consecințele sporirii debitului brațului Sf. Gheorghe cu acela al brațului Sulina.

Așadar o consecință fundamentală pentru asigurarea navigabilității gurilor Dunării, ce se datorește transformării brațului Sulina în canal maritim, este transformarea brațului Sf. Gheorghe în cale maritimă.

În aceste condiții vom deosebi trei faze pe care le propunem, necesare pentru valorificarea complexă a rezervelor naturale ale Deltei Dunării și pentru asigurarea navigației la gurile Dunării.

Faza primă : completarea datelor ce trebuie să stea la baza întocmirii proiectelor de valorificare a deltei Dunării și redactarea acestor proiecte; idem ridicarea plajei submarine a Deltei. Pentru asigurarea ieșirii la mare urmează să se continue în acest timp cu prelungirea digurilor de la Sulina, pînă în zona puternic spălată de curentul maritim și cu dragajele :

Faza a doua : transformarea brațului Sulina în canal maritim, cu toate consecințele arătate mai sus și tăierea coturilor brațului Sf. Gheorghe

Faza a treia (de perpectivă) : finisarea brațului și amenajarea gurii brațului Sf. Gheorghe, pentru navigație, urmînd ca brațul Sulina, transformat în canal maritim, să continue a îndeplini funcțiunea fundamentală de canal colector principal pentru valorificarea deltei Dunării.

Primită la redacție la 4 iulie 1956.

ПРЕВРАЩЕНИЕ СУЛИНСКОГО РУКАВА В МОРСКОЙ КАНАЛ

РАДИКАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВЫХОДА В МОРЕ И ДЛЯ ОСВОЕНИЯ БОГАТСТВ ДЕЛЬТЫ ДУНАЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Сулинский рукав превращается в морской канал путем постройки плотины в месте ответвления рукава св. Георгия.

Проход судов из рукава Тульча в морской Сулинский канал будет происходить через морские шлюзы.

Дебит воды Сулинского рукава будет вытекать в море по рукаву св. Георгия, дебит которого, таким образом, в будущем будет равный дебиту рукава Тульча.

Сулинский рукав будет огражден от затопления плотинами.

Морская вода будет доходить по каналу до разветвления св Георгия.

Сулинский рукав, превращенный в морской канал, будет иметь уровень, близкий к нулевой отметке Черного моря, т. е. наиболее низкий уровень по отношению к морю, который может быть осуществлен в дельте.

В этих условиях он будет превосходно выполнять функции главного сборного и отводящего канала для островов Летя и св. Георгия (250 000 га).

Морской Сулинский канал создает благоприятные условия для продления времени пользования Сулинским устьем и возможность избегнуть самозанесения песком этого устья. В то же время потройка криволинейных плотин по направлению к юго-востоку от Сулинского устья удаляет его от устья рукава Старый Стамбул.

В этих условиях пользование устьем Сулинского рукава продлистя на продолжительный срок.

На случай возможной радикальной конфигурации берега дельты, которая заставила бы покинуть Сулинское устье, можно создать в короткое

время новое устье с режимом морского канала, выкопав новый соединительный канал с морем к югу от города Сулина.

Морской Сулинский канал будет играть особо важную роль в комплексном освоении дельты, а именно в интенсивной эпсплутации рыбных богатств, использовании камыша, в развитии змеледелия, лесоводства и зоотехники в дельте. Благодаря низкому уровню, близкому к нулевому уровню Черного моря, станет возможным протекание вод поперек дельты от периферийных рукавов — Килия и св. Георгия — к центральному сборному и отводящему рукаву, каковым будет морской Сулинский канал, что поведет к постоянному их обмену воды. Низко лежащие местности заливаются в опоясывающих зонах камыша. Преприятия по разработке камыша смогут изменять по желанию уровень воды для правильного развития, созревания и сбора камыша.

Несомненно, что в виду роли, которую он будет играть в будущем освоения дельты и в поддержании судоходства в устьях Дуная, превращение Сулинского рукава в морской канал соответствует требованиям, поставленным Академией РНР в результате совещания в Малюк (дельта) в мае — июне 1956 года, по вопросу о том, что необходимо найти единое гидротехническое решение, которое удовлетворяло бы интересы всех секторов освоения дельты, т. е рыболовства, эксплуатации камыша, земледелия, лесоводства, судоходства и т. д.

Примечание. Чрезвычайно важным последствием превращения Сулиского рукава в морской канал является приспособление рукава св. Георгия для судоходства.

Это приспособление является следствием отвода по этому руказу всего дебита воды рукава Тульча и выпрямления некоторых извилин этого рукава, что приведет к соответственному изменению поперечного сечения и уклона течения в рукаве св. Георгия.

Таким образом, в будущем, после превращения Сулинского рукава в морской канал для выхода в море, можно будет сохранить рукав св. Георгия для комплексного освоения естественных богатств дельты Дуная с тем, чтобы Сулинский рукав оставался главным каналом сбора и отвода.

TRANSFORMATION DU BRAŞ DE SOULINA EN CANAL MARITIME

SOLUTION RADICALE POUR ASSURER LA SORTIE À LA MER ET POUR METTRE EN VALEUR LES RICHESSES DU DELTA DU DANUBE

(RÉSUMÉ)

Le bras de Soulina sera transformée en canal maritime par un barrage à la bifurcation de Saint-Georges.

Le passage des vaisseaux du bras de Toultcha dans le canal maritime de Soulina se fera par des écluses maritimes.

Le débit du bras de Soulina s'écoulera vers la mer par le bras de Saint-Georges, qui portera ainsi un débit égal à celui du bras de Toultcha.

Le bras de Soulina sera endigué insubmersiblement.

Les eaux de la mer pénétreront dedans le canal jusqu'à la bifurcation Saint-Georges.

Le bras de Soulina, transformé en canal maritime, se trouvera à un niveau proche de celui de la Mer Noire, c'est-à-dire au plus bas niveau de comunication avec la mer, qui puisse être réalisé dans le Delta.

Dans ces conditions, le bras de Soulina remplira d'une façon parfaite la fonction de principal canal collecteur et d'évacuation pour les îles de Letea et de Saint-Georges (250 000 ha).

Le canal maritime de Soulina crée des conditions favorables pour la prolongation du temps de fonctionnement de l'embouchure de Soulina, en évitant l'auto-ensablement de cette embouchure. En même temps, l'exécution de digues incurvées vers le Sud-Est, à l'embouchure de Soulina, éloigne celle-ci de l'embouchure du bras du Vieux Stamboul.

Dans ces conditions, le fonctionnement de l'embouchure du bras de Soulina sera prolongé encore longtemps.

Dans l'éventualité d'un changement radical de la configuration de la côte du Delta, qui amènerait l'obligation d'abandonner l'embouchure de Soulina, une nouvelle embouchure pourrait être créée, rapidement, en régime de canal maritime, en creusant un nouveau canal de raccordement avec la mer, au Sud de la ville de Soulina.

Le canal maritime de Soulina jouera un rôle particulièrement important pour la mise en valeur complexe du Delta, notamment pour l'exploitation piscicole intensive, l'exploitation du carex, la prospérité de l'agriculture, de la sylviculture et de la zootechnie dans le Delta. Grâce à son niveau bas (environ celui de la Mer Noire) les eaux pourront circuler à travers le Delta, des bras périphériques Kilia et Saint-Georges, vers le canal central collecteur et d'évacuation, qui sera le canal maritime de Soulina, ce qui aura pour résultat un incessant renouvellement des eaux, le colmatage des basses terres dans les zones de ceinture du carex et la possibilité, pour les unités d'exploitation du carex, de régler à volonté le niveau des eaux, pour le bon développement, la maturation et la récolte du carex.

Il est évident qu'étant donné les fonctions qu'elle devra remplir pour la future mise en valeur du Delta et pour l'entretien de la navigabilité aux bouches du Danube, la transformation du bras de Soulina en canal maritime correspond aux exigences formulées par l'Académie de la R.P.R., à la conférence qui s'est tenue à Maliuc (Delta) en mai et juin 1956. Il y a été établi qu'il était nécessaire de trouver une solution „unique", ayant un caractère hydrotechnique et satisfaisant aux intérêts de tous les secteurs de mise en valeur du Delta : pisciculture, exploitation du carex, agriculture, sylviculture, navigation, etc.

★

Une conséquence, d'une importance particulière de la transformation du bras de Soulina en canal maritime, est la transformation du bras de Saint-Georges en voie navigable.

Cette transformation sera due tant à la déviation de l'entier débit du bras de Toultcha dans ce dernier bras, qu'à la rectification de quelques-uns des coudes de ce bras, qui auront pour conséquence la modification de la section transversale et de la pente d'écoulement du bras de Saint-Georges.

L'avenir pourra ainsi réserver — après la transformation du bras de Soulina en canal maritime — au bras de Saint-Georges, le rôle de servir comme sortie à la mer, le bras de Soulina continuant à servir de canal principal collecteur et d'évacuation, pour la mise en valeur complexe des richesses naturelles du Delta du Danube.

BIBLIOGRAFIE

1. Comisiunea Europeană a Dunării, *Rapports du Comité des ingénieurs consultants de la Commission Européenne du Danube*, rédigés en 1932, et 1933. Bucarest, 1933.
2. N. Greceanu, *Bara de la Sulina*, Bucureşti, 1933.
3. Gr. Vasilescu, *Asigurarea navigabilităţii gurilor Dunării prin transformarea braţului Sulina în canal maritim*. Buletinul AGIR, 1934.
4. — *Gurile Dunării*, Colecţia IRE. Bucureşti, 1935.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

HIDROTEHNICĂ

MĂRIREA CAPACITĂŢII DE SPĂLARE ŞI TRANSPORT ALUVIONAR A SCURGERILOR ÎN CANALE SCURTE

DE

M. KAHAN şi C. IAMANDI

Tema prezentei lucrări ne-a fost sugerată de greutăţile de proiectare şi exploatare ce apar la prizele cu nivel liber, realizate prin bararea rîurilor cu capacitate importantă de transport aluvionar de fund; prize care sînt prevăzute, de cele mai multe ori, a capta un procent important din debitul curent al rîului. Astfel de construcţii se proiectează şi se execută în ultimul timp la noi în ţară în număr mare, pentru utilizări energetice, de ameliorații funciare, industriale etc.

La astfel de prize, problema opririi colmatării lor cu aluviuni este foarte dificilă şi încă nerezolvată. Într-adevăr, din cauza curburii mari a curenţilor ce intră în priză, curbură ce se accentuează în condiţiile unui debit important de apă, se creează condiţii favorabile introducerii aluviunilor tîrîte în priză (fig. 1).

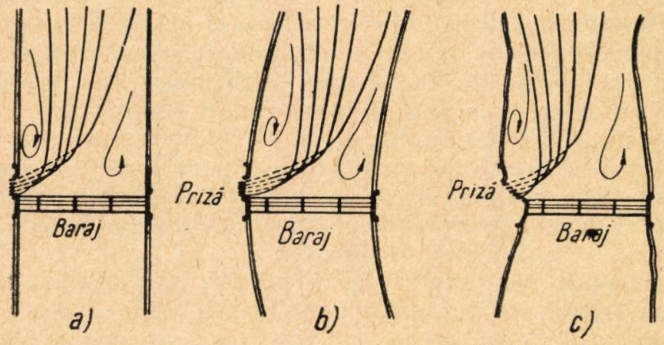


Fig. 1. — Configuraţia curenţilor la cîteva captări cu nivel liber şi barare.

Aceasta are loc aproape independent de amplasamentul prizei, configuraţia albiei, tipul de priză etc. Exploatarea prizelor existente cît şi încercările de laborator au arătat că această situaţie nu poate fi remediată radical prin nici una din măsurile ce se iau asupra amplasării prizelor, direcţionării lor, vitezii de acces a apei sau asupra schimbării în limite practice a raportului între debitul captat şi debitul rîului. Cele de mai sus explică de ce astăzi are loc, în mod curent, colmatarea prizelor cu nivel liber realizate prin barare şi de ce apar greutăţi mari în exploatarea prizelor propriu-zise cît şi în a decantoarelor.

Condiţiile grele de exploatare sînt agravate de faptul că pe rîurile cu caracteristicile amintite, lipsesc de cele mai multe ori debitele de apă necesare pentru spălarea prizelor.

O ameliorare a condiţiilor de exploatare s-a obţinut prin realizarea în faşa prizelor a unui avant-canal de spălare. Acest avant-canal de spălare se realizează, în general, prin prelungirea spre amonte, în faţa frontului prizei, a pilei ce mărgineşte deschiderea de spălare. Un studiu pe care l-am efectuat asupra unei astfel de soluţii a scos în evidenţă două avantaje importante :

1) În perioada apelor mari, cînd debite importante de apă se scurg prin deschiderile centrale ale nodului hidrotehnic, în faţa intrării în avant-canal apare un puternic curent transversal de fund care opreşte aproape integral intrarea aluviunilor între pila prelungită şi frontul prizei (fig. 2).

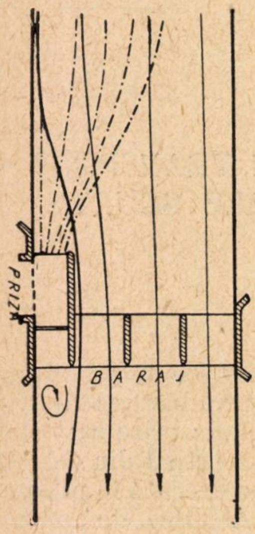


Fig. 2. — Configuraţia curenţilor în cazul unei prize cu buzunar.

Acest curent transversal de fund este provocat de scurgerea apei în lungul pilei prelungite a deschiderii de spălare şi se menţine chiar în condiţiile funcţionării prizei cu capacitatea ei maximă de captare.

Comparativ se pot urmări tendinţele de colmatare, pentru aceleaşi condiţii de exploatare, în cazul unei prize obişnuite (fig. 3) şi în cazul aceleiaşi prize la care s-a creat avant-canalul amintit (fig. 4).

2) În timpul funcţionării deschiderii de spălare curentul de apă păstrează o viteză constantă în tot lungul frontului prizei, spre deosebire de cazurile celorlalte tipuri de prize, la care curentul de spălare îşi micşorează viteza şi deci capacitatea de spălare şi transport imediat în amontele vanei ce închide deschiderea de spălare.

De asemenea, comparativ, figurile 5 şi 6 arată eficacitatea de spălare în cele două cazuri pentru aceleaşi condiţii de exploatare.

Trebuie însă menţionat că şi în acest caz, ca la orice alt tip de priză, deschiderile de spălare au o capacitate de debit lichid importantă şi evacuează deci volume mari de apă în timpul spălării.

În cazul condiţiilor amintite pînă acum apare din ce în ce mai evident că acţionarea numai asupra amplasamentului prizei, tipului de priză, asupra orientării ei, a vitezei de acces etc. nu poate aduce o îmbunătăţire radicală problemei. Astfel, apare ca singură soluţie raţională a problemei, o acţionare activă asupra structurii interioare a curenţilor de apă, atît

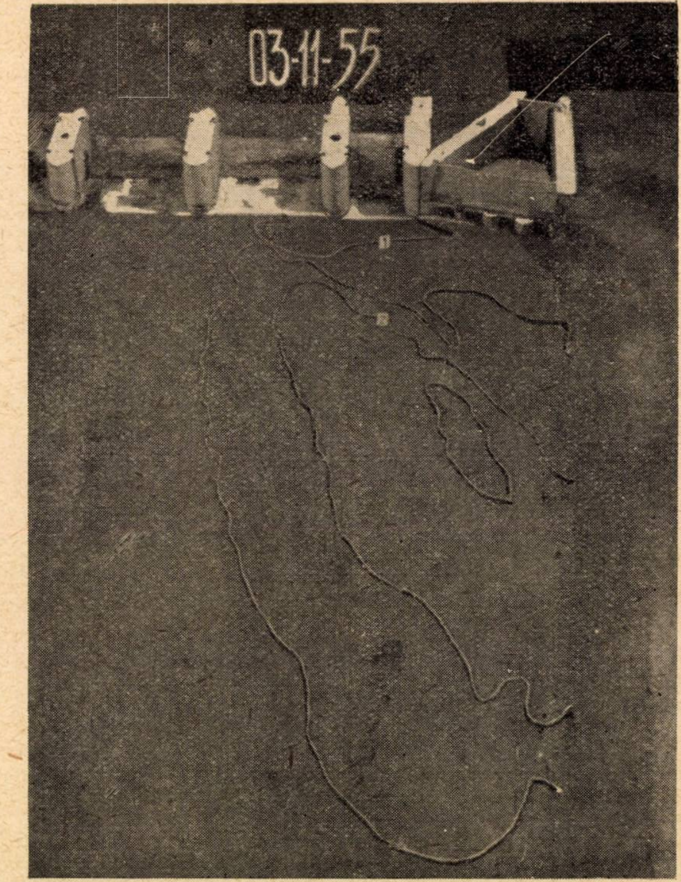


Fig. 3. — Tendința de colmatare la o priză obișnuită.

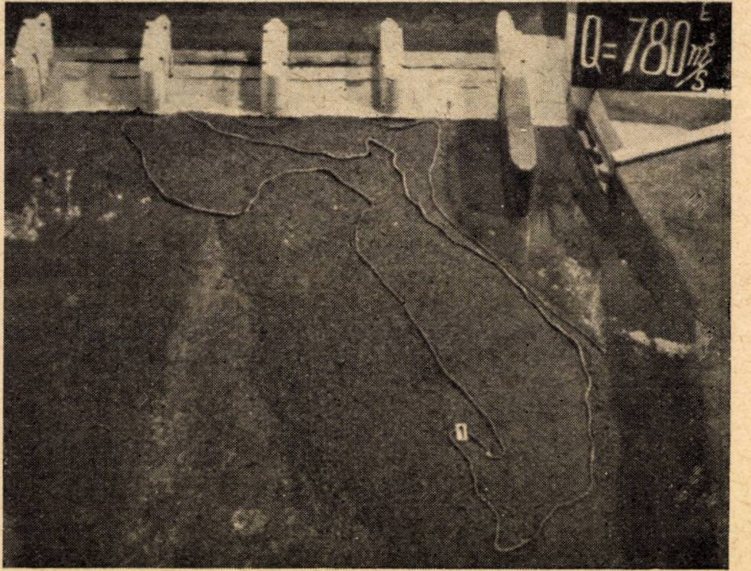


Fig. 4. — Tendința de colmatare la o priză cu avant-canal.

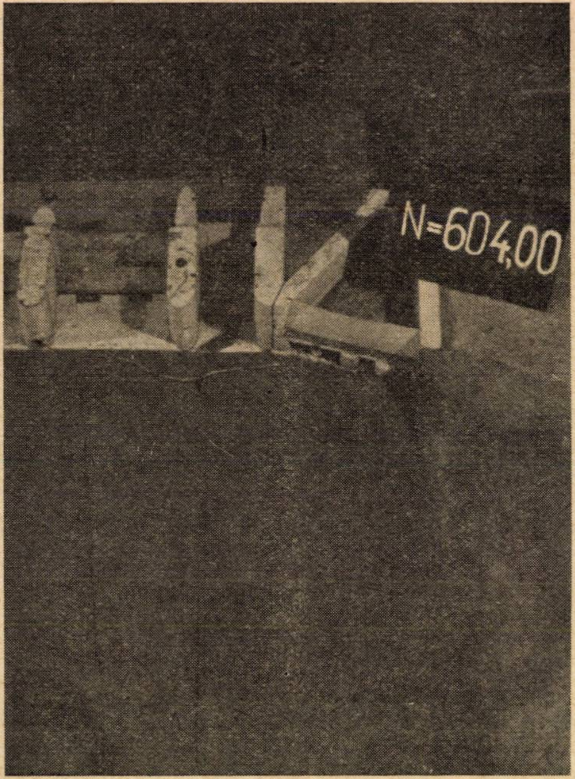


Fig. 5. — Eficacități de spălare în cazul prizelor obișnuite.

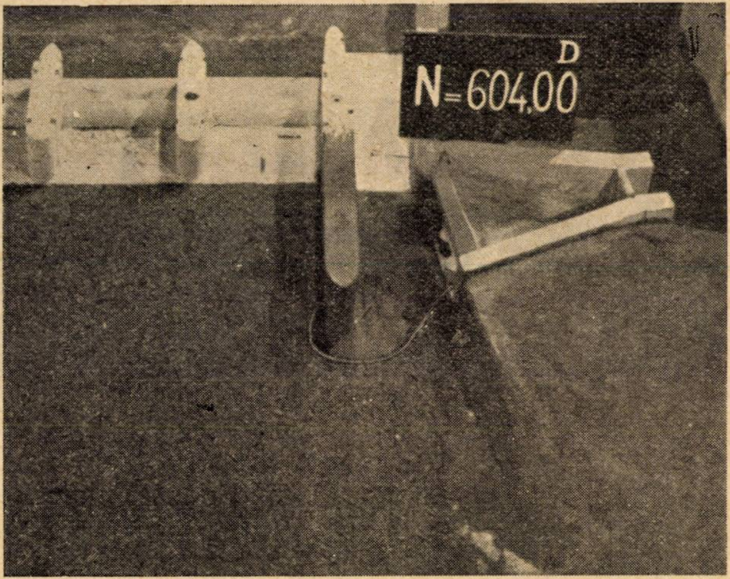


Fig. 6. — Eficacitatea de spălare în cazul prizei cu avant-canal.

pînă la intrarea în priză cît și după. Dacă în cazul atitudinii pasive față de curenții de apă se acționează asupra construcțiilor hidrotehnice din aval de sectorul în care se face spălarea, în cazul atitudinii active trebuie să se intervină prin construcții în amonte de sectorul respectiv. Aceste construcții avînd ca scop modificarea structurii interioare a curenților în sensul dorit.

În această direcție, a modificării structurii curenților, deosebim :

— cazul în care se urmărește o alimentare a prizei cu curenți de suprafață cu conținut minim de aluviuni și

— cazul în care se urmărește mărirea capacității de spălare și transport a curenților de spălare.

În primul caz apare deosebit de eficace utilizarea sistemelor de panouri „Patapov" în amonte de priză. Unele experiențe au arătat că astfel de soluții reduc cantitatea de aluviuni introduse în priză de la 40—80% la 1 — 4% (N. F. Danelia).

Pentru cel de-al doilea caz în lucrarea de față, se tratează două soluții care se propun a fi utilizate la canalele scurte. Acestea își găsesc aplicație în cazul avant-canalelor de spălare ale prizelor cu buzunar și la decantoarele cu funcționare intermitentă. Soluțiile preconizate constau în mărirea capacității de spălare și transport a curenților, în vederea obținerii unei spălări mai eficace a aluviunilor depuse în fața frontului prizei, sau intrate în decantor :

— prima prin mărirea energiei cinetice a curentului ;

— a doua prin crearea unor curenți de circulație elicoidală în interiorul canalului.

În cele ce urmează se vor analiza pe rînd cele două propuneri.

Posibilitatea de a mări energia cinetică într-o secțiune oarecare a unui curent de apă la același debit rezultă în mod clar din curba energiei specifice (fig. 7).

Într-adevăr, prin trecerea de la priza cu nivel liber obișnuită (fig. 8, tip. *A*) la priza cu buzunar (fig. 8, tip. *B*) se obține o mărire a energiei cinetice a curentului, ceea ce are ca urmare directă mărirea capacității de spălare și transport aluvionar.

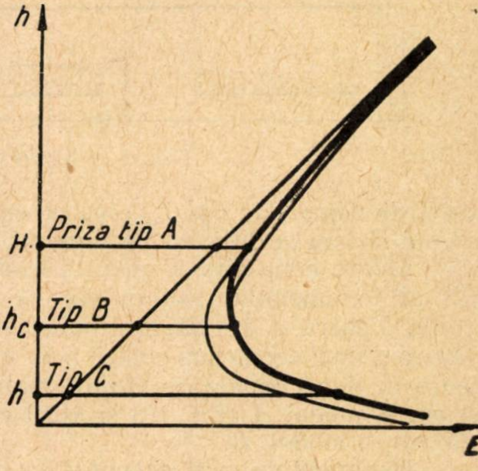


Fig. 7. — Variația energiei cinetice pentru diferite tipuri de prize.

În același sens am căutat să găsim un dispozitiv care să ducă la mărirea energiei cinetice și respectiv la sporirea capacității de spălare și transport aluvionar. Astfel s-a ajuns la priza cu avant-canal și stavilă de transformare a energiei pe care o propunem (fig. 8, tip. *C*) și cu ajutorul căreia se pot obține valorile maxime ale energiei cinetice (fig. 7) în lungul canalului.

Capacitatea de spălare se mărește prin aceea că în prezența vitezelor sporite ale curentului cresc eforturile tangențiale pe fundul canalului (fig. 9), iar capacitatea de transport se mărește datorită faptului că se mărește energia de turbulență a curentului.

Trebuie menționat și faptul că racordarea dintre adîncimea strangulată și adîncimea critică în cadrul soluției propuse se face printr-o

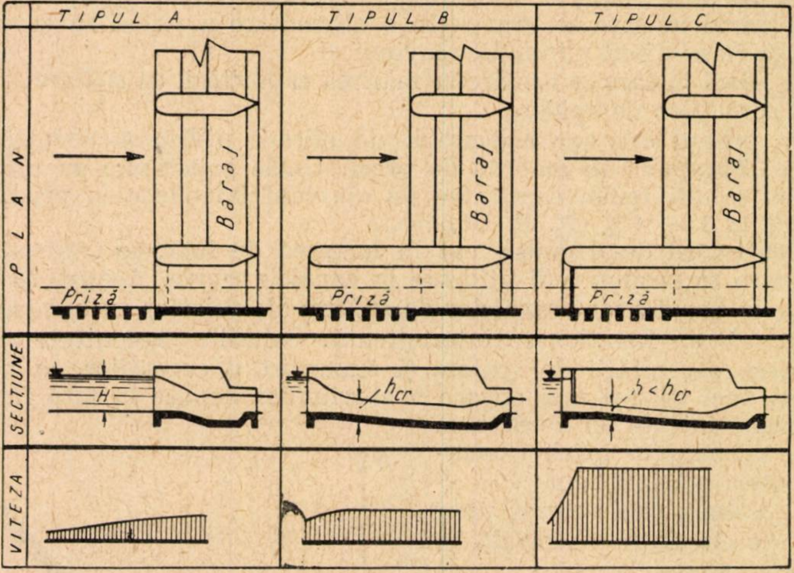


Fig. 8. — Tipuri de prize studiate.

curbă de remuu de tip C_0, ceea ce explică de ce eficacitatea de spălare a acestui sistem se întinde pe lungimi relativ mari (fig. 9).

Aceste considerații ne-au permis să determinăm parametrii principali ai fenomenului asupra cărora acționînd să putem obține efectul optim. Pentru a studia din punct de vedere cantitativ eficacitatea de spălare a unei asemenea soluții s-au executat în laborator o serie de experiențe în două canale de studiu, unul cu lățimea de 12 cm și lungimea 50 cm — model *A* (fig. 10) și altul cu lățimea de 30 cm și lungimea de 125 cm — model *B*.

Experiențele s-au executat cu nisip de 1,25 mm diametrul mediu în straturi respectiv de 2, 4 și 6 cm și 6, 8 și 10 cm. În primul canal s-a experimentat cu debitul de 1, 2, 3, 4 și 5 l/s; în cel de-al doilea canal cu 5, 10, 15, 20 l/s.

O parte dintre experiențe s-au realizat fără strangularea curentului la intrare în canal, în care caz scurgerea în canal putem considera că s-a realizat cu adîncime critică (fig. 11). Acestea au constituit experiențele de comparație și control.

Alt grup de experiențe s-a realizat cu strangularea curentului la intrarea în canal, prin vane plane cu deschiderea variabilă (fig. 12).

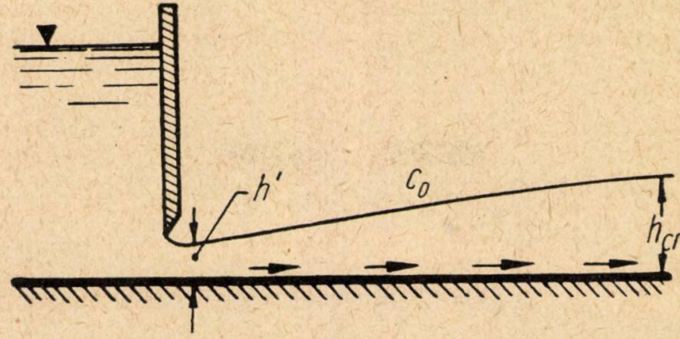


Fig. 9. — Eforturi tangențiale suplimentare ce apar în cadrul prizei de tip *C*.

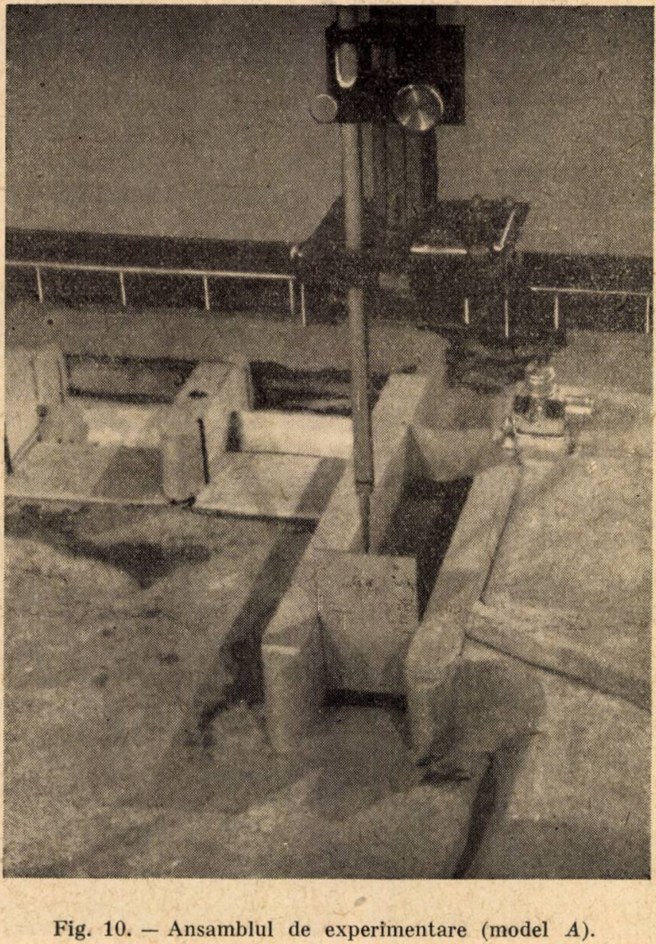


Fig. 10. — Ansamblul de experimentare (model *A*).

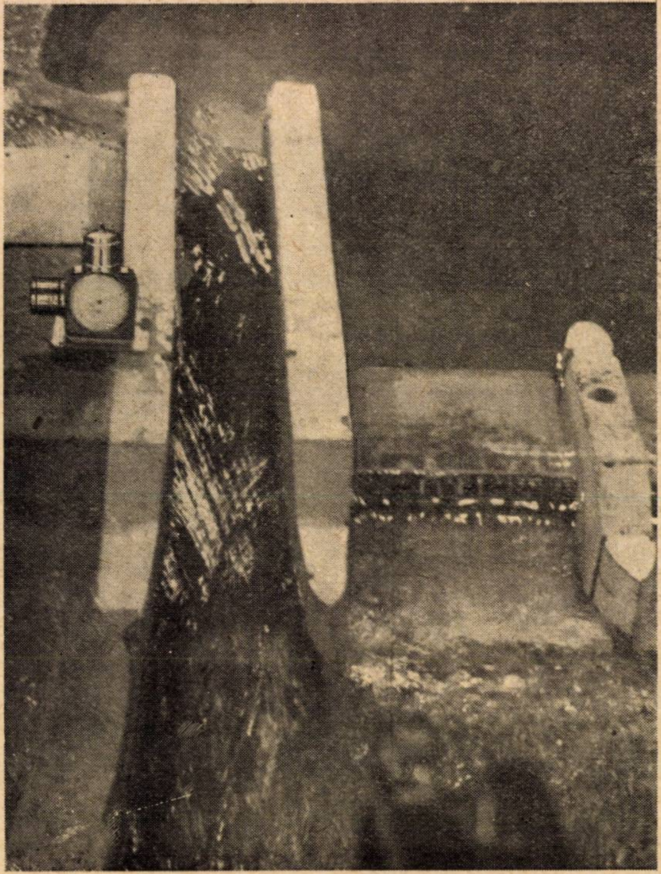


Fig. 11. – Experiență fără stavilă de spălare.

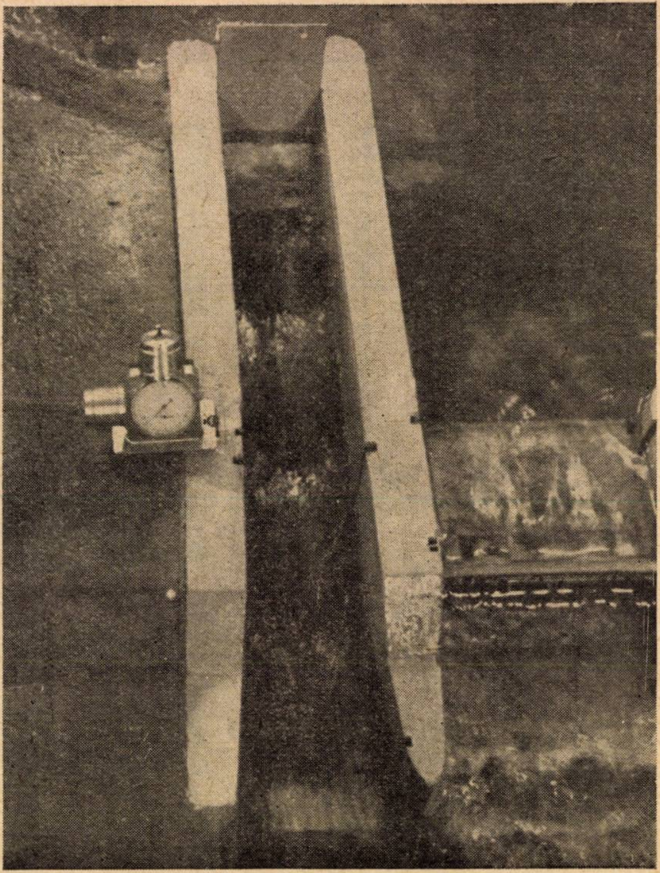


Fig. 12. – Experiență cu stavilă de spălare.

Rezultatele experienţelor s-au reprezentat grafic, parametrul de comparaţie de bază fiind ales volumul de apă utilizat pentru spălarea integrală a nisipului pentru fiecare variantă în parte.

Rezultatele se dau în graficele din figurile 13, 14, 15, 16, 17 şi 18, de forma:

a) $V = f_1\ (H)\ (d = \text{const.})$

b) $V = f_2\ (H)\ (q = \text{const.})$

c) $\dfrac{V}{V_{\max}} = f_3\left(\dfrac{H_{\min}}{H}\right)$,

în care

V reprezintă volumul de apă necesar spălării pentru o anumită grosime de nisip şi o anumită deschidere a stavilei de transformare a energiei;

$V_{\max}$, volumul de apă necesar spălării pentru anumită grosime de nisip dar fără stavilă;

H, înălţimea apei la intrare în amonte de stavilă;

$H_{\min}$, înălţimea amonte corespunzătoare lui $V_{\max}$;

d este grosimea nisipului în canal, iar

q, debitul specific.

Din interpretarea rezultatelor obţinute, se pot trage următoarele concluzii:

— Eficacitatea de spălare poate creşte practic pînă la 10 ori, ea depinde numai de posibilităţile de supraînălţare a nivelelor amonte. Aceasta echivalează cu folosirea de volume de apă necesare spălării de 10 ori mai mici şi deci cu posibilitate de spălare la debite de asemenea de 10 ori mai mici.

— Pe măsura coborîrii stavilei şi măririi strangulării curentului de apă, volumele de apă necesare spălării aluviunilor scad la început rapid, pentru ca apoi să scadă din ce în ce mai lent. Curbele $V = f\ (H)$ au alură asimptotică pentru o anumită valoare a volumului minim, aceasta explicîndu-se desigur prin aceea că de la o anumită valoare a nivelelor amonte, orice ridicare ulterioară a lor se realizează printr-o strangulare excesivă a secţiunii de scurgere. În acest mod, aportul de energie care se cîştigă prin ridicarea nivelelor amonte se pierde în parte prin sporirea pierderilor de sarcină locale sub stavilă; de aici rezultă o limită a eficacităţii de strangulare a curentului prin stavila de manevră.

— Experienţele au arătat că volumele de apă utilizate pentru spălare sînt mai bine întrebuinţate la adîncimi mari de aluviuni.

— Transformarea la scara 1 : 50 şi respectiv 1 : 20 a rezultatelor obţinute în cele două canale conduc la un caz practic de priză cu un avant-canal de spălare de 6 m lăţime şi 22,5 m lungime arătînd că rezultatele pot fi interpretate conform criteriului Froude.

— Sporul de energie cinetică se poate obţine nu numai pe seama energiei potenţiale la aceeaşi energie totală, ci şi direct prin ridicarea nivelului amonte, deci prin mărirea energiei globale, a curentului.

— În condiţiile unei limitări a nivelelor maxime în bieful amonte, rezultă ca indicată efectuarea spălărilor cu debite mici de apă şi

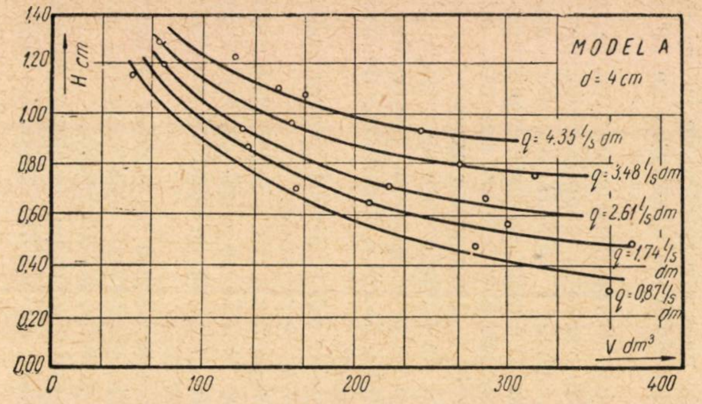


Fig. 13. — $V = f_1 (H)$ (d = const.) model *A*.

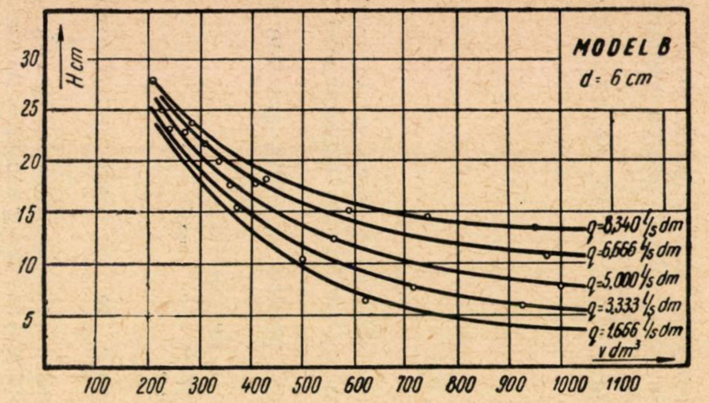


Fig. 14. — $V = f_1 (H)$ (d = const.) model *B*.

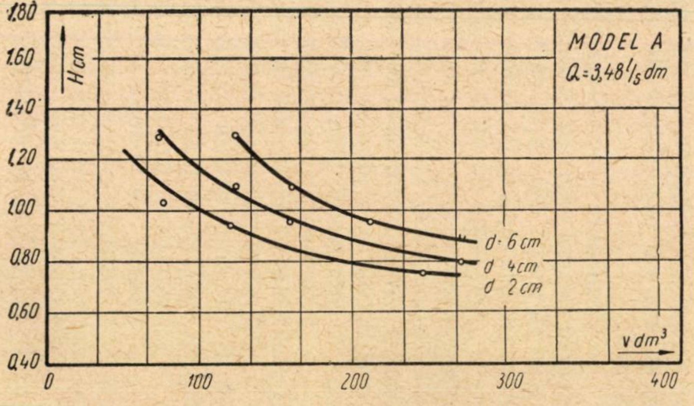


Fig. 15. — $V = f_2 (H)$ (q = const.) model *A*.

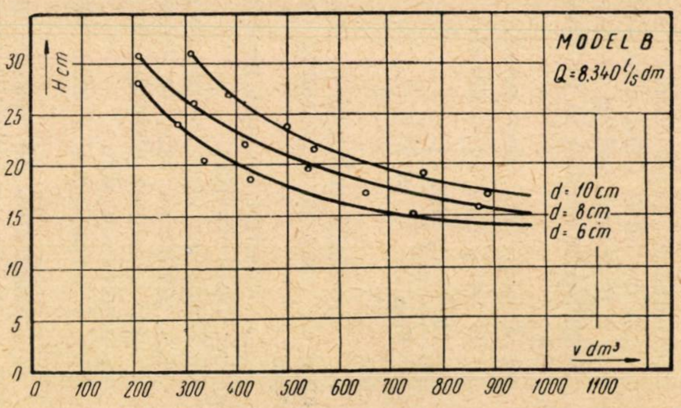


Fig. 16. — $V = f_2 (H)$ (q = const.) model *B*.

supraînălţarea maximă a nivelelor amonte. Acest lucru rezultă ca indicat şi din punct de vedere al debitelor disponibile pe rîu.

Trebuie menţionat că stavila amonte de spălare nu trebuie să fie o stavilă etanşă putîndu-se folosi eventual batardoul de la deschiderea de spălare, dacă acesta este realizat monolit. În acelaşi timp stavila poate fi realizată de înălţime redusă iar prin coborîrea totală a ei în timpul funcţionării prizei se va putea permite intrarea prin deversarea în avant-canal numai a apelor de suprafaţă cu conţinut minim de aluviuni.

În cazul decantoarelor, panoul de manevră poate fi mobil, pentru se a putea deplasa punctul de eficacitate maximă a sistemului, în tot lungul decantorului.

Cea de-a doua soluţie care se propune a fi folosită pentru mărirea capacităţii de spălare şi transport a curentului se bazează, aşa cum s-a mai amintit, pe realizarea unor curenţi de circulaţie elicoidali în lungul canalului.

Curenţii de circulaţie măresc capacitatea de spălare şi transport prin intermediul eforturilor tangenţiale care iau naştere pe pereţii şi fundul canalului şi a sporirii corespunzătoare a eforturilor tangenţiale interioare.

Creşterea eforturilor tangenţiale la fund în prezenţa curenţilor de circulaţie se produce după cum se ştie, pe două căi :

1) Pe calea eforturilor de frecare τ_l longitudinale, care apar datorită gradientului de presiune a curentului de circulaţie, ce se formează datorită stingerii circulaţiei în lungul canalului.

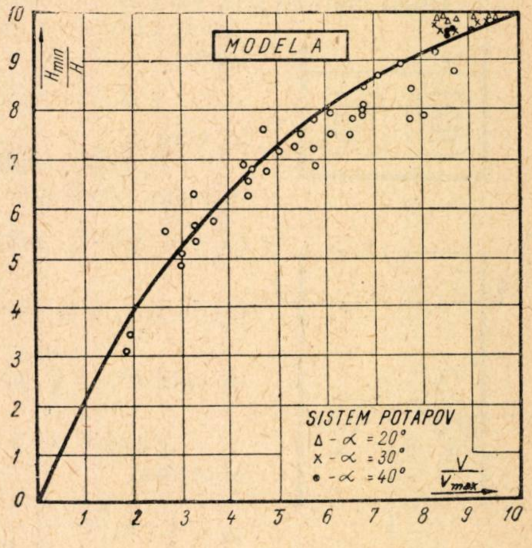


Fig. 17. — $V/V_{\max} = f_3\,(H_{\min}/H)$, model *A*.

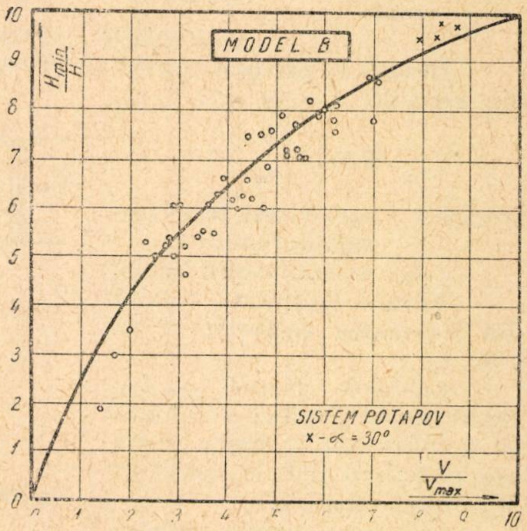


Fig. 18. — $V/V_{\max} = f_3\,(H_{\min}/H)$ model *B*.

2) Pe calea eforturilor de frecare τ_t transversale care apare datorită curburii liniilor de curent la fundul canalului (fig. 19 și 20).

După cum se știe, echilibrul forțelor pe un metru lățime și lungime Δx de curent se exprimă (conform fig. 19 și 20) sub forma

$$\gamma\, H \cdot \Delta x \cdot i_0 + (P_{c1} - P_{c2}) = (\tau + \tau_l)\, \Delta x,$$

în care

P_c este rezultanta presiunilor de circulație pe întreaga secțiune transversală a curentului. Știind că $\tau = \gamma H \cdot i_0$ rezultă $\tau_l = -\dfrac{\Delta P_c}{\Delta x}$,

iar la limită $\tau_l = -\dfrac{\partial P_c}{\partial x}$

în care $P_c = \displaystyle\int_0^H p_c\, dz.$

După **Potapov** presiunea de circulație p_c are expresia

$$p_c = 4\,\gamma\, h_c \left[1 - \left(\frac{b^2}{H^2 + b^2} \sin 2\frac{\pi y}{2} + \frac{H^2}{H^2 + b^2} \sin 2\frac{\pi z}{4}\right)\right]$$

în care $h_c = \dfrac{v_c^2}{2}$, iar v_c fiind viteza medie patratică a circulației transversale.

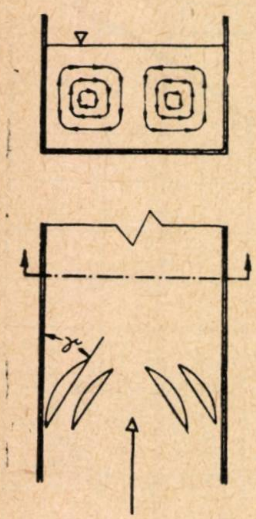


Fig. 19. — Schema și sistemul constructiv pentru crearea circulației transversale.

În ceea ce privește efortul de frecare transversal τ_t el se poate calcula din relațiile $\tau_t = tg\ \alpha_t\ (\tau + \tau_l)$,

$$tg\ \alpha_l = \frac{v}{u_m}$$

în care v este viteza transversală la fund, iar

u_m, viteza longitudinală.

Efortul de frecare rezultă din însumarea vectorială a lui τ și τ_t.

Calculele făcute pentru cîteva cazuri practice arată însă că τ_t influențează foarte puțin asupra valorii globale, astfel că el se poate neglija.

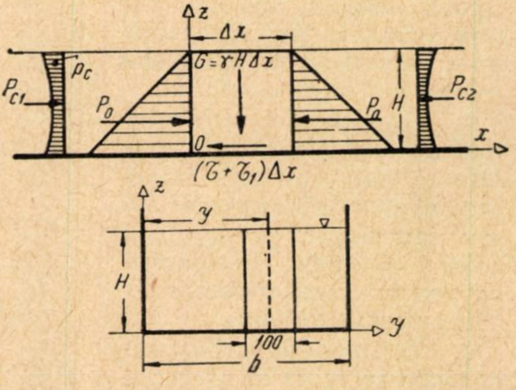


Fig. 20. — Echilibrul forțelor în cazul circulației transversale.

Pentru a verifica eficacitatea unui asemenea sistem, asupra capacității de transport a curenților în canale scurte, s-au făcut o serie de experiențe în aceleași canale și aceleași condiții amintite mai sus cu sistem dublu de panouri Potapov avînd unghiul $\alpha = 20, 30$ și $40°$ (fig. 21 și 22).

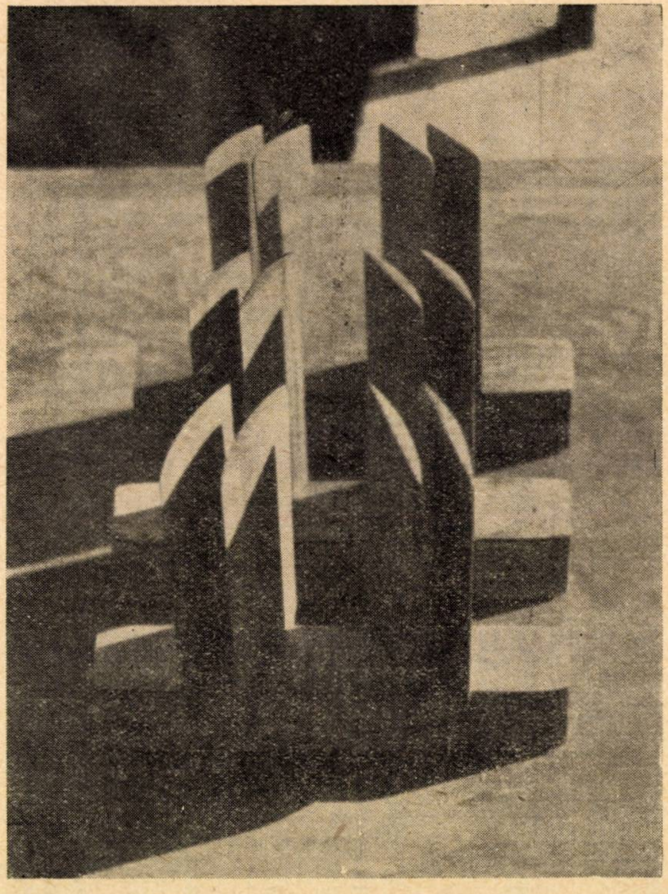


Fig. 21. — Sistemele constructive utilizate în experimentare.

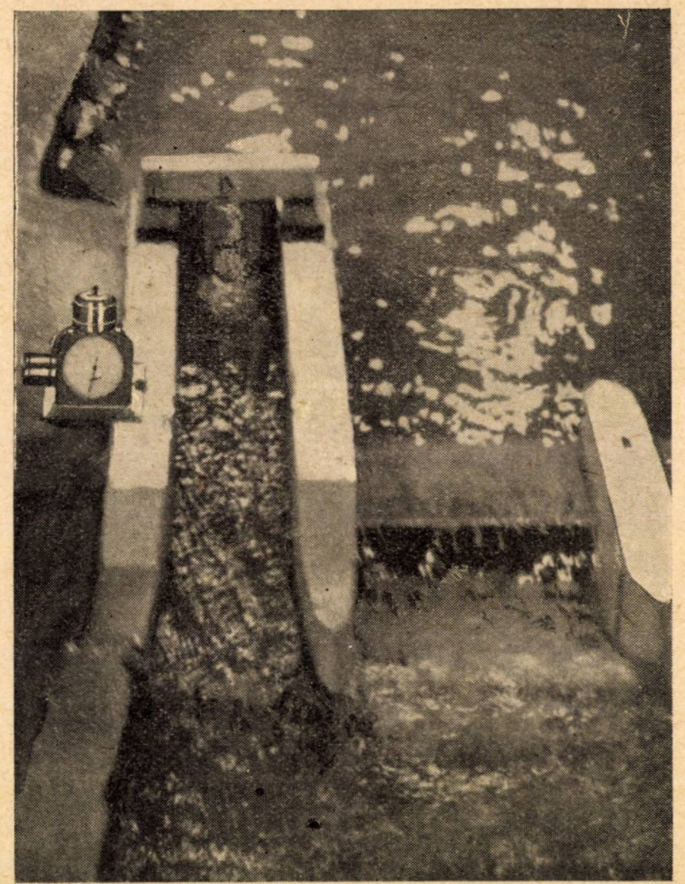


Fig. 22. — Experiențe de circulație transversale.

Adîncimea de scufundare a fost variată în jurul lui $H = 0{,}4 \ldots 0{,}6\ h_c$ la modelul A şi luată constantă de $0{,}5\ h_c$ la modelul B.

Experienţele s-au făcut pentru diferite debite.

Rezultatul experienţelor a arătat că :

— Sistemul de panouri Potapov are un domeniu relativ restrîns de aplicaţii, el producînd supraînălţări relativ mici în amonte $H_{\min}/H$ de la 0,9 la 1 (fig. 17 şi 18).

Acestea fac ca ele să aibă aplicaţii în special în cazul decantoarelor unde supraînălţimile nu pot fi importante.

— Pentru acest domeniu eficacitatea în mărirea capacităţii de transport este de aproximativ 25—30%.

Pentru această zonă a supraînălţărilor amonte mici ($H_{\min}/H = 0{,}9 \ldots 1$) eficacitatea lor este mai mare ca a sistemului propus anterior.

Pentru unghiurile experimentale de 20 pînă la 40° se constată că unghiul are o influenţă mică asupra capacităţii de transport. De asemenea, pentru scufundări ale panourilor de $0{,}4 \ldots 0{,}6\ h_c$, scufundarea nu are influenţă sensibilă asupra măririi capacităţii de transport.

Pentru ambele sisteme preconizate trebuie subliniată importanţa pentru exploatare a micşorării volumului de apă necesar spălărilor. Ele permit o economie însemnată de apă ce poate fi utilizată în folosinţa de bază importantă, în special în perioadele de ape mici.

În acelaşi timp ele permit a se realiza spălări frecvente chiar la debite care în mod curent nu sînt suficiente.

Desigur că adoptarea în practică a unor asemenea soluţii la construcţiile deja existente sau care se proiectează, ar permite verificarea lor la scară naturală.

Primită la redacţie la 4 iulie 1956.

УВЕЛИЧЕНИЕ СПОСОБНОСТИ РАЗМЫВА И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ НАНОСОВ ВОДЫ, ТЕКУЩЕЙ ПО КОРОТКИМ КАНАЛАМ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе рассматриваются водозаборы с свободным уровнем, осуществляемые путем запруживания рек с значительной способностью перемещаемости донных наносов.

Для увеличения заиливания этих водозаборов предлагаются два решения, основанные на изменении внутренней структуры течений:

— увеличение кинетической энергии течения;

— создание геликоидальных циркуляционных течений внутри канала.

Проверка эффективности предложенных систем была произведена путем лабораторных опытов.

Для обеих систем подчерквается эксплутационное значение уменьшения объема воды, необходимого для размыва. Таким образом, возможна значительная экономия воды, которая может быть использована, особенно в период малых дебитов.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Конфигурация струй в некоторых водозаборах с свободным уровнем и с плотинами.
Рис. 2. — Конфигурация струй в водозаборе с мешком.
Рис. 3. — Тенденция к заиливанию обычного водозабора.
Рис. 4. — Тенденция к заиливанию водозабора с подводящим каналом.
Рис. 5. — Эффективность размыва обычных водозаборов.
Рис. 6. — Эффективность размыва водозаборов с подводящим каналом.
Рис. 7. — Изменение кинетической энергии разных типов водозаборов.
Рис. 8. — Исследованные типы водозаборов.
Рис. 9. — Дополнительные касательные усилия, появляющиеся в водозаборе типа *C*.
Рис. 10. — Ансамбль для опытов (модель *A*).
Рис. 11. — Опыт без размывной задвижки.
Рис. 12. — Опыт с размывной задвижкой.
Рис. 13. — $V = f_1 (H)$ (d = cost) модель *A*.
Рис. 14. — $V = f_1 (H)$ (d = cost) модель *B*.
Рис. 15. — $V = f_2 (H)$ (d = cost) модель *A*.
Рис. 16. — $V = f_2 (H)$ (d = cost) модель *B*.
Рис. 17. — $V = V/V_{\max} = f_3 (H_{\min}/H)$ модель *A*
Рис. 18. — $V = V/V_{\max} = f_3 (H_{\min}/H)$ модель *B*.
Рис. 19. — Схема и конструктивная система для создания поперечной циркуляции.
Рис. 20. — Равновесие сил при поперечной циркуляции.
Рис. 21. — Конструктивные системы, примененные при опытах.
Рис. 22. — Опыты поперечной циркуляции.

ACCROISSEMENT DE LA CAPACITÉ DE LAVAGE ET DE TRANSPORT ALLUVIONNAIRE DES ÉCOULEMENTS À TRAVERS DES CANAUX COURTS

(RÉSUMÉ)

Le travail se réfère aux prises à niveau libre, réalisées par barrage des rivières à grande capacité de transport des alluvions de fond.

Pour augmenter le colmatage de ces prises, on propose deux solutions, basées sur la modification de la structure intérieure des courants :

— La première, par accroissement de l'énergie cinétique du courant.

— La seconde, par la création de courants de circulation hélicoïdaux à l'intérieur du canal.

La vérification de l'efficacité des systèmes proposés a été faite par des essais en laboratoire.

Pour les deux systèmes préconisés, on souligne l'importance, pour l'exploitation, d'obtenir une diminution du volume d'eau nécessaire au lavage. Ils permettent ainsi une économie importante d'eau, qui peut être utilisée, particulièrement durant la période des débits réduits.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Configuration des courants pour quelques captages à niveau libreet à barrages.
Fig. 2. — Configuration des courants dans le cas d'une prise à poche.
Fig. 3. — Tendance au colmatage pour une prise ordinaire.

Fig. 4. — Tendance au colmatage pour une prise à avant-canal.
Fig. 5. — Efficacité de lavage dans le cas des prises ordinaires.
Fig. 6. — Efficacité de lavage dans le cas d'une prise à avant-canal.
Fig. 7. — Variation de l'énergie cinétique pour différents types de prises.
Fig. 8. — Types de prises étudiées.
Fig. 9. — Efforts tangentiels supplémentaires qui apparaissent dans le cadre de la prise du type C.
Fig. 10. — Ensemble d'expérimentation (modèle A).
Fig. 11. — Essai sens vanne de lavage.
Fig. 12. — Essai avec vanne de lavage.
Fig. 13. — $V = f_1(H)$ (d = constante) modèle A.
Fig. 14. — $V = f_1(H)$ (d = constante) modèle B.
Fig. 15. — $V = f_2(H)$ (q = constante) modèle A.
Fig. 16. — $V = f_2(H)$ (q = constante) modèle B.
Fig. 17. — $V/V_{\max} = f_3(H_{\min}/H)$ modèle A.
Fig. 18. — $V/V_{\max} = f_3(H_{\min}/H)$ modèle B.
Fig. 19. — Schéma et système de construction pour la création de la circulation transversale.
Fig. 20. — Equilibre des forres dans le cas de la circulation transversale.
Fig. 21. — Systèmes de construction utilisés dans les essais.
Fig. 22. — Essais de circulation transversale.

BIBLIOGRAFIE

1. N. F. Danella, *Vodozabornii uzel dila gornih rek s obilnodonnimi nanosami*. Gidrotehnika i Melioraţia, 1950, nr. 8, p. 47.
2. M. Kahan şi C. Iamandi, *Studiul de laborator al unei prize cu nivel liber cu barare*. Hidrotehnika, 1956, nr. 2.
3. G. H. Labaye, *Quelques observations sur une étude sur modèle réduit d'une prise d'eau*. A.I.R.H., 1951, vol. 29.
4. F. S. Salahov, *Povişenie vzveşivaiuşcei i transportiruiuşcei sposobnosti potoka metodom poperecinoi ţirkuleaţii*. Hidrotehnica i Melioraţia, 1950, nr. 1, p. 23.
5. S. H. Sapiro, *Vlianie poperecinoi ţirkulaţii na vzbşivaiu şuiu otkritih ruslah*. Hidrotehnika i Melioraţia, 1950, nr. 10, p. 56.
6. V. A. Turos, *Rezultati ekspluataţii struknaproviliaiuşih sistem na r. Amu — Darie*, Gidrotehnika i Melioraţia, 1953, nr. 4, p. 68.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 1, 1957

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

În această rubrică se publică lucrările de nivel ştiinţific superior în care se expun :

—stadiul actual al unei anumite probleme, subliniindu-se totodată aspectul nou:

— generalizări asupra dezvoltărilor matematice în probleme de cercetări de mecanică aplicată:

— descrieri de aparate pentru cercetări ştiinţifice realizate în Institutul de mecanică aplicată.

CU PRIVIRE LA STUDIUL UZURII CUŢITELOR DE STRUNG (IRADIATE) PENTRU DETERMINAREA PARAMETRILOR OPTIMI DE AŞCHIERE

DE

D. PAVELESCU

Credem necesar să subliniem că uzura în cazul aşchierii este un aspect particular, care diferă în mod esenţial de restul domeniului uzurii.

Elucidarea problemei este îngreunată mai ales de numărul mare de parametri, de complexitatea lor, precum şi de interdependenţa dintre aceştia ; metodele de măsură folosite în majoritatea studiilor, rămîn şi ele o cauză a situaţiei menţionate.

De fapt, factorul determinant al aşchierii optime este uzura cuţitului, care condiţionează durata lui de funcţionare.

Aplicarea radioizotopilor la cercetarea uzurii cuţitelor aşchietoare, constituie un element nou ce intervine în mod favorabil. Noua metodă a creat posibilitatea să se aprecieze uzura fără a mai fi necesar să se întrerupă procesul de aşchiere ; ea poate înlesni obţinerea unor rezultate repetate şi precise *), cu cheltuirea unui timp minim şi a unei reduse cantităţi de material.

I. METODA DE MĂSURĂ. APARATAJ

Determinarea uzurii la aşchiere, cu ajutorul radiaţiilor, se face măsurînd cu o aparatură radiometrică activitatea aşchiei, obţinută într-un timp scurt (2···10 s), prin strunjirea cu un cuţit, a cărui armătură a fost în prealabil activată. În limita duratei optime de serviciu a sculei (40···90 minute) între două ascuţiri, pentru obţinerea fiecărui parametru optim se execută în mod normal, pînă la cîteva zeci de determinări individuale sau un număr echivalent de cicluri experimentale **).

Datorită cărui fapt, însă, radioactivitatea şpanului poate exprima valabil uzura cuţitului de aşchiere?

Prin cercetările experimentale întreprinse în U.R.S.S., S.U.A., Anglia etc., s-a descoperit un nou aspect fizic al aşchierii şi anume modul în care se face distribuţia produselor uzurii. Măsurătorile efectuate în condiţii similare asupra radioactivităţii şpanului, lichidului de răcire-ungere şi asupra piesei, au demonstrat că aproximativ 90% din produsele uzurii cuţitului aderă la şpan, restul fiind antrenate de lichidul de răcire (un mic procent aderînd la piesa prelucrată). Rezultă deci că fiind cunoscut procentul materialului uzat ce aderă la şpan este suficient, în majoritatea cazurilor, să se determine uzura prin măsurători radiometrice.

---

*) Se pot măsura produse de uzură pînă la 10^{-12}g.

**) Un ciclu constituind media a 3···8 determinări individuale.

Acest gen de măsurători directe sînt valabile şi prin faptul că s-a stabilit proporţionalitatea dintre cantitatea materialului uzat de pe cuţit (depus pe şpan sau antrenat de lichid) şi radioactivitatea respectivă, putîndu-se astfel determina comod gradul de uzură a sculei, exprimat în : număr de impulsuri pe minut şi gram.

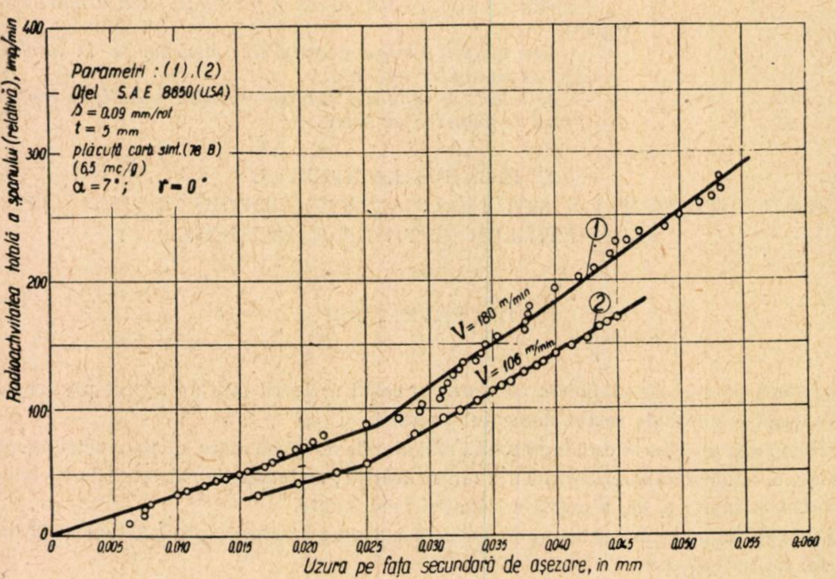


Fig. 1

Această proporţionalitate apare evident din figura 1, unde este reprezentată (curba *1*), radioactivitatea totală a şpanului (măsurată cu un contor G.M.) şi uzura măsurată micrometric pe faţa secundară de aşchiere. În aceleaşi condiţii, însă cu o viteză de aşchiere mai mică (106 faţă de 180 m/min), rezultă de asemenea o proporţionalitate între cele două mărimi. Constatarea aceasta rămîne perfect valabilă şi în condiţii de iradiere diferite a plăcuţei precum şi în cazul aşchierii cu parametri total diferiţi.

În sfîrşit, metoda se bazează de asemenea şi pe proporţionalitatea dintre uzură şi timpul de lucru.

Specificul acestui caz al uzurii, de care ne ocupăm, impune completarea aparaturii radiometrice obişnuite cu sistem de captare inedit, funcţie de procedeul de măsură folosit.

În general, pentru cicluri numeroase şi activităţi mai mari se utilizează un recipient de sticlă sau plexiglas de tip Marinelli, avînd contorul G. M. plasat centric (separat de şpan, care trebuie în prealabil curăţat şi fărîmiţat), (fig. 2) [1].

Din cauza precauţiilor de protecţie ce trebuie luate, aşchierea se execută într-o cameră specială, complet închisă (fig. 3), avînd pereţii de oţel (polizaţi şi cromaţi) de aproximativ 25 mm grosime, montată pe masa strungului ; peretele din faţă este uşor demontabil. Camera dispune

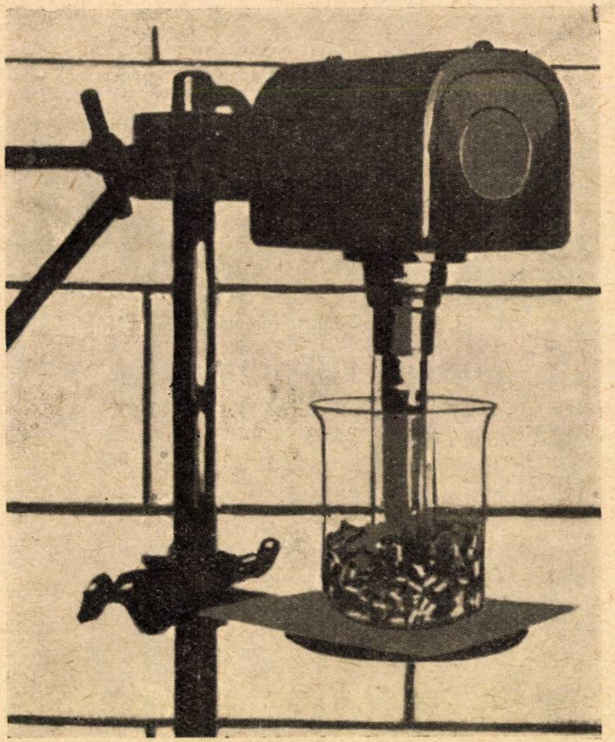


Fig. 2

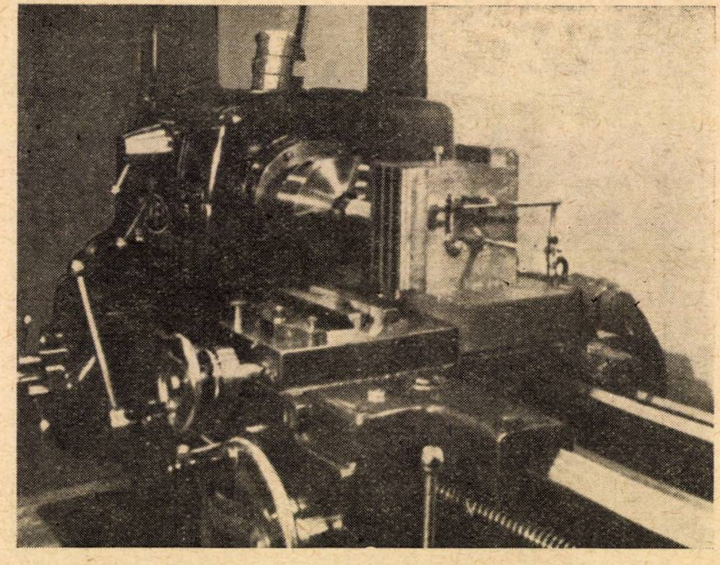


Fig. 3

de un sistem propriu de recirculare al lichidului de răcire şi ungere, astfel că asupra sculei aşchietoare acţionează două jeturi. Este de menţionat că la anumite viteze şi dimensiuni s-a preferat aşchierea probelor tubulare.

Pentru a putea cerceta gradul de uniformitate al distribuţiei uzurii pe şpan sau piesă, s-a utilizat curent şi autoradiografia *). În general, autoradiografiile obţinute arată că scula se uzează printr-un proces de abraziune continuă şi că distribuţia particulelor, în cazul unui mare grad de uzură, prezintă un caracter de uniformitate de-a lungul strunjiturii, [3].

O distribuţie mai omogenă se constată mai ales în cazul măsurării unui grad de uzură mai mic. În general, timpul necesar de expunere al filmului este destul de mare, funcţie de activitatea produselor uzurii.

Nu insistăm asupra aspectelor generale, care demonstrează net superioritatea metodei radiaţiilor faţă de cea micrometrică; menţionăm totuşi că s-au făcut cu ajutorul celor două metode, amănunţite studii statistice comparative, privind de exemplu viaţa uneltei (în multe serii de încercări paralele), ajungîndu-se la concluzia finală că „nesiguranţa" procentuală a rezultatelor obţinute este aproximativ de 3···5 ori mai mare folosind metoda micrometrică faţă de metoda radiaţiilor.

Din aceleaşi studii comparative rezultă că pentru determinarea durabilităţii sculei, metoda radiaţiilor a cerut un timp efectiv de aşchiere, aproximativ 1/25 din timpul cerut de metoda micrometrică, fiecare determinare (completă) executată cu radioizotopi necesitînd 2···5 minute. De asemenea, subliniem faptul că prin măsurarea uzurii „instantanee" (după 2···3 s de aşchiere), fără întreruperea strunjirii, se ajunge, cu o singură sculă, să se poată executa, între două ascuţiri, pînă la 500 determinări.

II. DESPRE ARMĂTURA „ACTIVATĂ" A CUŢITELOR AŞCHIETOARE

În general, în cercetările de uzură la aşchiere, s-au folosit cuţite armate, fie cu aliaje dure sau extradure metalo-ceramice, fie cu oţeluri rapide, gama plăcuţelor dure fiind destul de variată, atît ca forme, greutate (2···35 g), cît şi în ceea ce priveşte compoziţia aliajului. Date fiind complicaţiile introduse de sudura plăcuţelor dure iradiate, s-a preferat fixarea lor mecanică.

Pentru a folosi cercetărilor de uzură, plăcuţele se „tratează" de preferinţă prin iradiere (după ascuţire), într-un puternic curent de neutroni termici (10^{14} neutroni/cm^2/s sau mai puţin), activizarea prin introducerea izotopilor radioactivi în timpul sinterizării nefiind recomandabilă prin complicaţiile ce le introduce.

Prin calcul, cunoscîndu-se viaţa medie a tăişului (aproximativ 80 minute), timpul mediu de aşchiere (aproximativ 6 s), etc., rezultă ca necesară, o activitate minimă de 5 cm/g, suficientă totuşi pentru ca produsele uzurii să prezinte pe şpan un minimum de 50 imp/min. În realitate se lucrează cu armături avînd activitatea cuprinsă între 6,5 mc/g, şi 15 mc/g; în acest ultim caz radiaţiile gama dispun de 5 mc/g, iar cele beta de restul.

După iradiere, în funcţie de carbura folosită, s-au obţinut în general radioizotopii CO^{60}, Ti^{51}, W^{185}, W^{187} şi Ta^{182}, cu observaţia că dintre aceştia predomină wolframul radioactiv. Indiferent de tratarea aliajului dur, numai radioizotopii „efectivi" fac scula aşchietoare corespunzătoare condiţiilor cerute. Specificul cercetărilor, măsurile de protecţie şi posibilităţile comode de iradiere, recomandă folosirea izotopului W^{187}, cu o scurtă perioadă de semidisociere (24,1 ore), dar cu radiaţii β de energie mare uşor măsurabile. De asemenea este considerat ca „efectiv" şi W^{185} ($T = 73{,}2$ zile; $E_\beta = 0{,}430$ M.ev.).

---

*) În anumite studii de frecare şi uzură la aşchiere, s-a preferat activarea piesei de prelucrat (bară de cupru — Cu^{64} —), şi autoradiografierea cuţitului (neactivat prealabil) [2].

Durata lucrărilor și amplasarea laboratorului față de reactor, impun adesea folosirea lui CO^{60}, cerîndu-se însă serioase măsuri de protecție.

În general, elementele radioactive ale aliajelor dure dispun atît de radiații β, cît și de radiații γ, creînd astfel posibilitatea unor studii complete, favorizate și de faptul că radiațiile β și γ ale radioizotopilor „efectivi” au energii aproape egale (cu excepția Cr^{51}) putîndu-se astfel conta pe radiații compuse omogene. În plus față de aceste aspecte, caracterul radiațiilor β, de a nu putea străbate așchia creează de asemenea posibilitatea studierii separate a uzurii diferitelor fețe ale cuțitului de strung.

III. DESPRE PROTECȚIA MUNCII ÎN CADRUL MĂSURĂTORILOR ȘI AȘCHIERII CU SCULE ACTIVATE

Radioactivitatea curent întîlnită la cuțitele de strung (maximum 15 mc/g), nu este prea mare, totuși ea cere anumite precauții, mai ales datorită faptului că în cercetările privind uzura la așchiere, în afară de folosirea radiațiilor gama, există și pericolul „pulverizării” în aer a o parte din particulele activate, produse de uzură.

Pentru a se evita depășirea dozei de „iradiere” de maximum 0,3 rem pe săptămînă *), personalul este obligat să respecte cu strictețe o serie de norme de protecție adecvate acestui gen de cercetări.

Laboratorul în care se fac studiile este compartimentat prin pereți metalici sau sticlă, avînd pardoseala, pereții, mobilierul etc. amenajate după prescripțiile speciale, pentru a evita depozitarea prafului și a permite o ușoară întreținere. În general se utilizează comanda la distanță a bancurilor de lucru, măsurarea, spălarea, prepararea, interpretarea datelor etc., făcîndu-se în încăperi separate celei experimentale.

În special pentru protecția gama, sculele sînt ținute într-un depozit special, cu pereți de plumb, amenajat astfel ca să excludă iradieri accidentale la introducerea și extragerea plăcuțelor dure activate, cu toate că această operație este făcută cu dispozitive prelungitoare speciale. Așchierea se execută așa cum rezultă din figura 3. În general se remarcă faptul că protecția cea mai eficace se obține limitînd timpul de expunere și respectînd distanțele de lucru impuse.

Este interesantă constatarea că iradierea maximă primită de un cercetător care a respectat integral normele de protecție, a fost de numai 0,011 rem pe săptămînă adică aproximativ 1/20 din cifra indicată ca maximă ; în cazuri de „mare expunere”, nu s-a constatat o depășire mai mare de 1/60 din valoarea admisă [1].

IV. DESPRE INFLUENȚA UNOR PARAMETRI AI AȘCHIERII ASUPRA UZURII ȘI DURABILITĂȚII

În cele ce urmează, pe baza rezultatelor obținute în cîteva țări, în cercetările cu radioizotopi asupra uzurii la așchiere, privite comparativ cu măsurătorile efectuate cu metode cunoscute, ne propunem a prezenta o serie de aspecte mai importante care să contribuie la sprijinirea unui punct de vedere privind metodica și posibilitățile de generalizare a cercetărilor ce se efectuează în cadrul I.M.A., subliniind totodată caracterul și posibilitățile măsurătorilor cu radiații.

---

*) Am utilizat unitatea biologică de doză „remul”, care în cazul radiațiilor β și γ, reprezintă efectul biologic produs de 1 röntgen. În privința dozei maxime admise se tinde către legiferarea unei doze de 0,03 rem/săpt.

a. Aspecte privind uzura sculei în funcţie de durata de aşchiere

În general, în cazul aşchierii, curbele de uzură erau cunoscute ca avînd o alură continuă regulată, fapt ce indica o proporţionalitate, de asemenea, continuă a uzurii funcţie de durata sau lungimea de aşchiere. În unele cazuri însă, uzura normală era prezentată sub forma unor curbe „frînte" în două sau trei locuri, imitînd alura clasică a unor deformaţii elastice. Se pune întrebarea, dacă situaţia arătată ascunde o contrazicere.

Fiind convinşi că prin aprofundarea caracterului curbelor de uzură, se uşurează posibilitatea elucidării fenomenului fizic al aşchierii, vom insista mai mult asupra acestui aspect, avînd la dispoziţie, mai ales, contribuţia măsurătorilor cu izotopi radioactivi.

Un fenomen asemănător celui sezisat mai sus, îl indică de asemenea şi modul de împrăştiere a celor aproximativ 50 de puncte experimentale ale curbei *1* (fig. 1), prin care am prezentat activitatea şpanului în funcţie de uzura cuţitului.

Diagrama menţionată se caracterizează printr-o împrăştiere „ritmică" a punctelor, denumită de unele publicaţii din S.U.A., fenomen „de cascadă". În cazul amintit, observăm că atunci cînd caracteristica uzurii urmează fidel punctele experimentale, ea devine o linie ondulată sau frîntă ; urmînd însă media cîmpului de împrăştiere, alura curbei este „normală". Fiind vorba deocamdată de funcţia radioactivitate-uzură, se poate însă naşte întrebarea dacă fenomenul sezisat nu este o „eroare" de metodă, sau poate chiar un aspect real al uzurii la aşchiere, pus în evidenţă mai ales de sensibilitatea metodei folosite în acest caz.

Trebuie să recunoaştem de la început că, pentru a se putea conta pe o uniformă distribuţie a elementului radioactiv în masa aliajului dur, se cere la activarea acestuia precauţii deosebite. De asemenea, amintim şi faptul că autoradiografierea şpanului a dovedit existenţa unei distribuţii de multe ori neuniformă a produselor active ale uzurii pe şpan.

Cu toate acestea, s-a constatat că neuniformitatea activităţii produselor uzurii influenţează în mai mică măsură apariţia „cascadei" şi factorul principal ce predomină se presupune de unii cercetători a fi uzura intensivă a tăişului cuţitului de strung. Acest fapt trebuie să apară mai evident, dacă analizăm rezultatele obţinute în cursul aceloraşi serii de încercări prin metoda micrometrică. Curba *1* din figura 4 ne arată că împrăştierea ritmică a apărut şi în cazul în care s-a exprimat, prin măsurători micrometrice, uzura tăişului cuţitului funcţie de timpul de lucru Pe aceeaşi diagramă şi funcţia radioactivitate (uzură) — durată de aşchiere, ridicată pe baza analizei radiometrice a lichidului de răcire-ungere folosit (curba *2*), indică de asemenea existenţa mprăştierii ritmice a punctelor experimentale. Atunci, cînd s-a aşchiat însă fără întrerupere, cu aceeaşi sculă bine ascuţită, luîndu-se în consideraţie numai media valorilor activităţii şpanului, obţinută pentru cicluri de 3· · ·8 aşchieri a cîte 2· · ·3 secunde fiecare aşchiere, a rezultat o caracteristică (curba 3), unde practic nu mai apar cascade. Se observă totuşi şi în acest caz existenţa unei uşoare variaţii ritmice. Micşorînd viteza de aşchiere (curba *4*) şi totodată numărul punctelor (medii), variaţia ritmică dispare complet, funcţia uzură-durată de aşchiere fiind continuă şi liniară.

De asemenea, constatăm că fenomenul sezisat mai sus, nu este caracteristic numai unui grup de parametri ; el apare evident şi în condiţii complet diferite de aşchiere.Astfel, în figura 5, relaţia uzură-durată de aşchiere, indică prin alura ei că împrăştierea] ritmică a curbelor de uzură apar în general, independent de metodă şi de unii parametri.

Fenomenul de uzură intensivă, arătat de unii cercetători [4], [1] drept cauză principală a apariţiei cascadei, este bine cunoscut în practică prin acţiunea sa de la începutul aşchierii. Rezultă imediat că metoda de măsură micrometrică ce impune opriri şi reluări ale aşchierii, fiind supusă deci influenţei uzurii intensive, nu poate fi eficace, mai ales atunci cînd urmărim să obţinem cu precizie uzura cuţitului după aşchieri de scurtă durată.

Metoda radiațiilor poate prezenta două aspecte principale, diferite.

În primul rînd, după cum am arătat deja, ea poate evita împrăștierile, conducînd la o curbă de uzură practic reală (de exemplu fig. 6). În cazul în care însă se urmărește aprofundarea fenomenului fizic de așchiere, aceeași metodă prin sensibilitatea ei riguroasă (măsurarea uzuri „instantanee“ după 2 secunde de așchiere), poate asigura reproducerea exactă a fenomenelor de uzură a cuplului în frecare sculă-piesă.

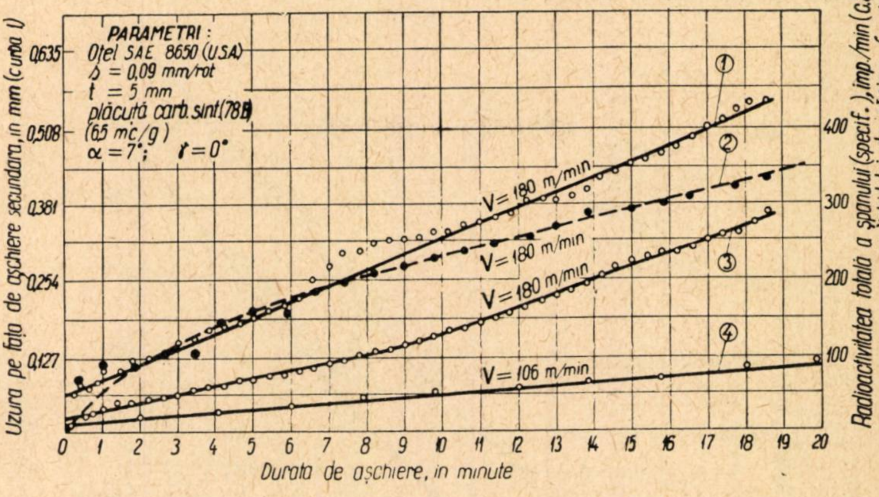


Fig. 4

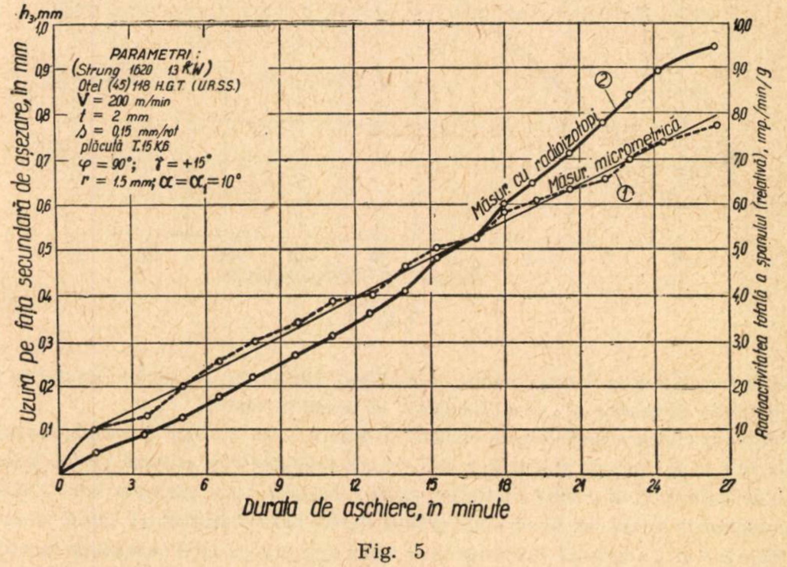


Fig. 5

În figura 6 este demonstrat pe deplin primul aspect al metodei, remarcîndu-se pe de o parte, caracterul continuu al punctelor experimentale ce exprimă uzura în funcţie de durata de aşchiere (prin metoda radiaţiilor) şi pe de altă parte, împrăştierea punctelor şi eroarea permanentă relativă a măsurătorilor micrometrice respective. Se menţionează necesitatea folosirii în metodica măsurătorilor cu radiaţii, a unei rodări prealabile (de 5 minute în condiţii similare de aşchiere) a cuţitelor de strung (înainte de iradiere), obţinîndu-se o rază a tăişului de 1···2 mm cu care se poate evita efectul „şocului iniţial" al uzurii intensive.

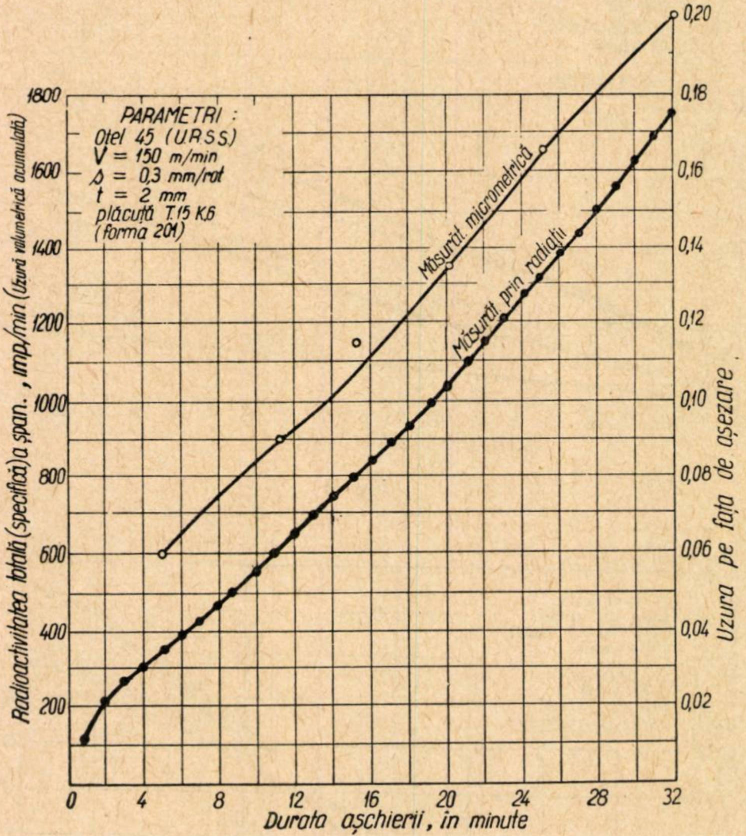


Fig. 6

Cel de al doilea aspect devine evident în figura 7. În aceleaşi condiţii de aşchiere (curba *4* faţă de *1*, *2* şi *3*), metoda radiaţiilor faţă de cea micrometrică creează posibilitatea stabilirii gradului de influenţă în neuniformitatea uzurii, datorită spre exemplu constituţiei plăcuţei dure, deosebind în acest caz fenomenul produs de cel datorit influenţei uzurii intensive.

Curbele *1* şi *2* confirmă existenţa unei uzuri mai mari a feţei secundare de aşchiere.

În paralel, însă, cu aprofundarea caracterului metodei şi totodată al uzurii la aşchiere în sine, se remarcă în plus un alt aspect important ce fondează însăşi metoda radiaţiilor, permiţînd determinarea uzurii cuţitului prin măsurarea activităţii produselor uzurii. Este vorba de faptul că între uzura cuţitului şi durata respectivă de aşchiere există, în general, o relaţie liniară, aceeaşi

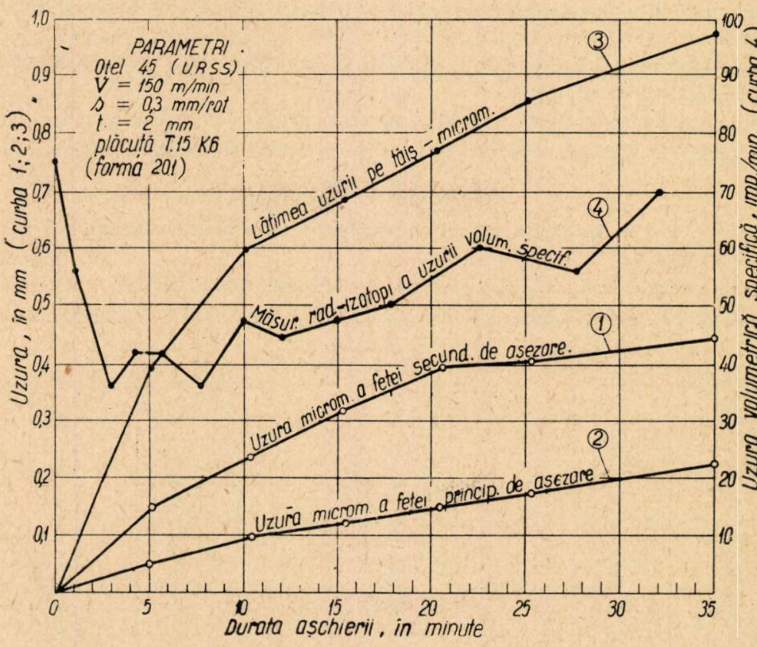

PARAMETRI
Oţel 45 (URSS)
V = 150 m/min
s = 0,3 mm/rot
t = 2 mm
plăcuţă T.15 K6
(formă 201)
Lăţimea uzurii pe tăiş – microm.
Măsur. rad.-izotopi a uzurii volum. specif.
Uzura microm. a feţei secund. de aşezare.
Uzura microm. a feţei princip. de aşezare
③
④
①
②
Uzura, în mm (curba 1; 2; 3)
Uzura volumetrică specifică, imp/min (curba 4)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
5
10
15
20
25
30
35
Durata aşchierii, în minute

Fig. 7

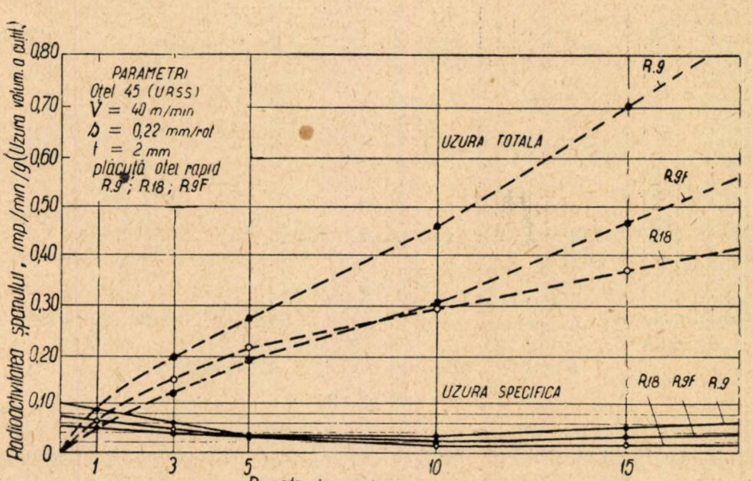

PARAMETRI
Oţel 45 (URSS)
V = 40 m/min
s = 0,22 mm/rot
t = 2 mm
plăcuţă oţel rapid
R.9; R.18; R.9F
UZURA TOTALA
UZURA SPECIFICA
R.9
R.9F
R.18
R.18 R.9F R.9
Radioactivitatea şpanului, imp/min/g (Uzura volum. a cuţit.)
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0
1
3
5
10
15
Durata de aşchiere, în minute

Fig. 8

relaţie liniară ce apare între uzură şi activitatea produselor ei (fig. 6, 1 şi 4), concluzia rămînînd valabilă chiar dacă variază cuplul în frecare. Astfel, în figura 8, se constată că prin aşchierea oţelului 45, cu diferite plăcuţe din oţel rapid (R. 9, R. 9, F şi R. 18), influenţa duratei de aşchiere atît asupra uzurii specifice, cît şi asupra uzurii totale a sculei, se prezintă sub forma unor curbe cu alură continuă ce indică existenţa unei relaţii liniare între aceşti doi factori (excepţie făcînd începutul procesului de aşchiere).

Vom urmări în continuare modul în care uzura grupului de frecare material sculă-material piesă este influenţat, paralel cu durata de aşchiere, şi de alţi parametri ai aşchierii.

b. Influenţa vitezei de aşchiere asupra uzurii cuţitului

S-a remarcat deja din figura 1 şi figura 4 o scădere sensibilă a activităţii şpanului (deci o micşorare a uzurii), atunci cînd aşchierea s-a executat (în condiţii similare), cu o viteză mai redusă.

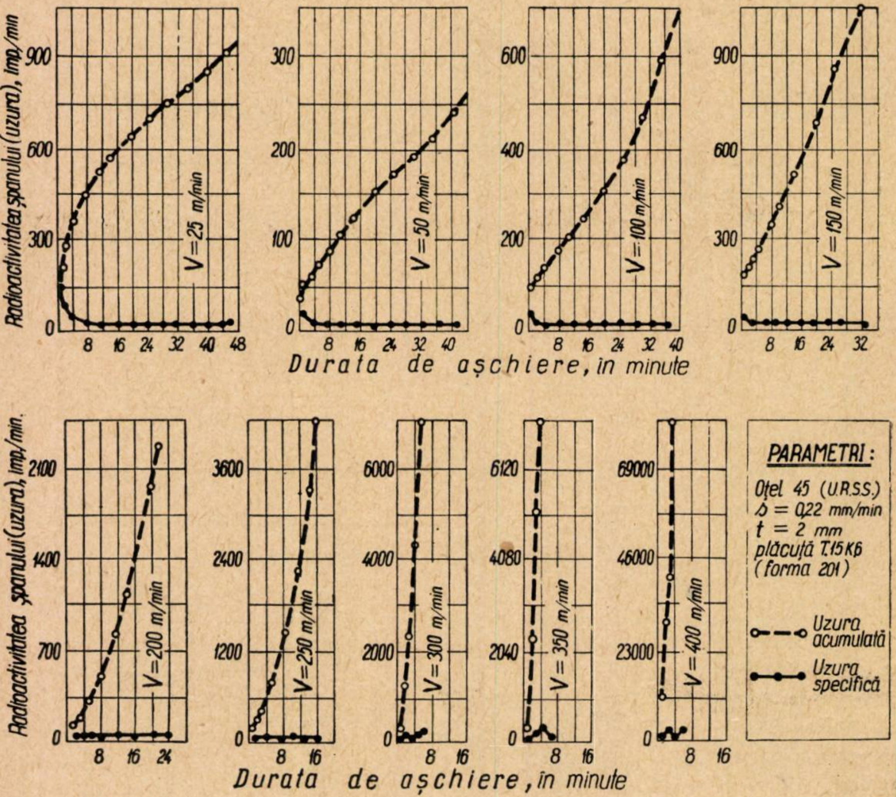


Fig. 9

Aprofundînd mai mult acest aspect, se ajunge la concluzia că folosirea radioizotopilor conduce deci, şi în cazul parametrului viteză, la două aspecte importante. Să urmărim evoluţia, atît a uzurii volumetrice specifice, cît şi a celei acumulate, în timpul aşchierii unui oţel 45 (sovietic) cu plăcuţa T. 15 K.6, printr-o gamă largă de viteze de tăiere (de la 25 la 400 m/min fig. 9) [4].

În primul rînd, rezultă şi în acest caz că, în general curbele ce exprimă funcţia uzură-durată, pentru diferite viteze de aşchiere, prezintă o alură continuu crescătoare, admisă anterio cu ocazia prezentării influenţei parametrului „durată de aşchiere". În plus, o constatare importantă este aceea că prima diagramă (fig. 9) indică la viteza de 25 m/min atît o uzură volumetrică, cît şi o durată de rodaj a tăişului, superioară celor datorite vitezelor imediat superioare prezentate (50 şi 100 m/min).

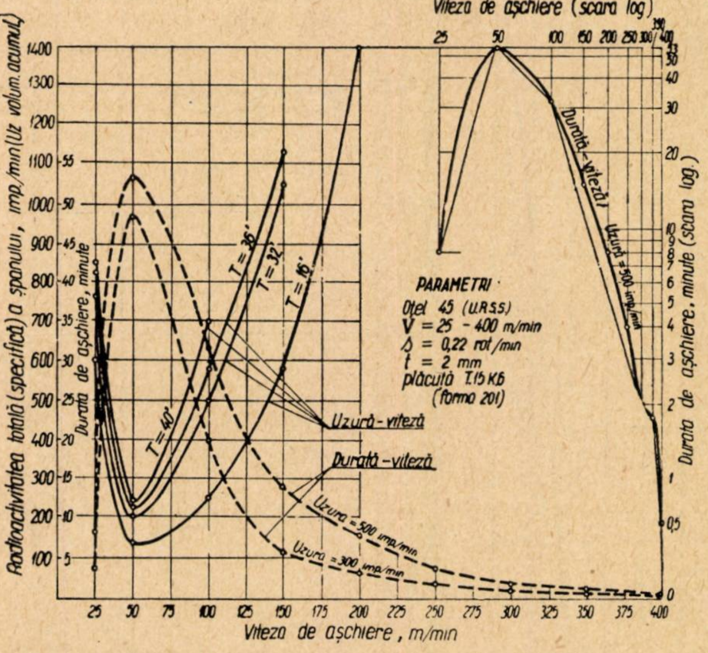


Fig. 10

Explicăm acest aspect prin apariţia la viteze mici a unor forţe mari de aşchiere şi a unor coeficienţi de frecare şi de contracţie a aşchiei, de asemenea mai mari. Transpunînd rezultatele din figura 9, atît în diagrame uzură-viteză, pentru diferite durate de aşchiere optime constante (16...40 min), cît şi în diagrame durată de aşchiere-viteză de aşchiere, pentru uzuri „optime" de asemenea constante (300 şi 500 imp/min), se remarcă (fig.10) existenţa unei unice viteze optime de aşchiere — viteza de 50 m/min — pentru care uzura plăcuţei T. 15K. 6 este minimă, corespunzînd unei durate maxime a tăişului între două ascuţiri.

Exprimînd în scară logaritmică curba de durabilitate optimă (uzura fiind constantă 500 imp/min), se verifică faptul că uzura şi durabilitatea sînt funcţii ale vitezei, relaţiile fiind liniare. Trebuie însă subliniată existenţa acestei liniarităţi numai pe anumite paliere mai restrînse de viteză (25—50—100—350 m/min etc.), care par a deveni crescătoare în regiunea vitezelor mai mari, regiune în care uzurile sînt însă mari, iar rezistenţa tăişului descrescătoare.

Toate aceste constatări, obţinute din rezultatele măsurătorilor cu radioizotopi, sînt deosebit de importante pentru activitatea colectivului I.M.A. ce studiază aşchierea metalelor romîneşti, folosind măsurători obişnuite ; în legătură cu aceasta putem face următoarele observaţii :

a) Se confirmă astfel, în general, rezultatele obţinute prin măsurători micrometrice, existînd o perfectă concordanţă privind alura curbelor şi concluziile ce se pot trage, deşi singurul factor similar a fost plăcuţa T. 15 K. 6*).

b) Relaţiile empirice clasice curent utilizate în aşchierea metalelor — spre exemplu VT^n = const. — sînt confirmate deci şi de metoda radiaţiilor, cu menţiunea divizării domeniului în mai multe benzi de viteze aşa cum s-a arătat mai sus, fenomenul real indicînd că exponentul „*n*" este şi el o funcţie de viteză **).

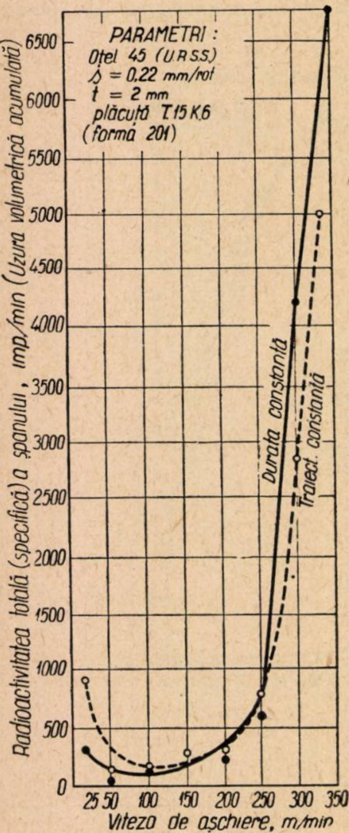


Fig. 11

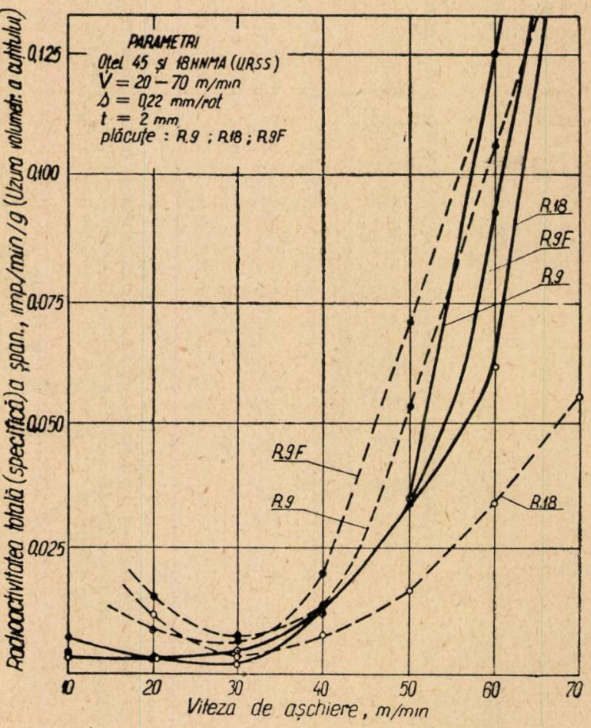


Fig. 12

În al doilea rînd, privind aspectul fizic al uzurii la aşchiere, noua metodă confirmă faptul că în perioada rodajului sculei, creşterea vitezei de aşchiere pentru o anumită limită face ca microfisurările tăişului să predomine uzurii prin frecare, ducînd astfel chiar la ruperea tăişului bine ascuţit; la viteze mai mari se confirmă de asemenea creşterea rapidă a uzurii proporţională cu timpul. Aşchiindu-se la viteze peste 200 m/min. s-a constatat că atît uzurile specifice, cît şi cele volumetrice acumulate, ridicate cu contorul G.M., prezintă variaţii neuniforme în timp, verificîndu-se ipoteza că uzura în aceste condiţii va creşte rapid. Curbele în salturi, ce exprimă uzura specifică a plăcuţei dure,indică desprinderi neregulate din materialul tăişului, fenomen,ce observăm că ia proporţii o dată cu sporirea vitezei. Se pare că cele constatate confirmă o ipoteză făcută, privind procesul fizic al uzurii plăcuţelor metalo-ceramice. Astfel, se presupune că în anumite condiţii, forţele de deformare plastică, temperatura ce depăşeşte anumite limite, coeficientul de frecare, cît şi sarcinile dinamice ce apar pe tăişul sculei, uzează liantul pe bază de cobalt, degradează reţeaua cristalină a carburilor dure, uşurînd astfel desprinderea acestora, chiar sub formă de ştirbituri.

---

*) „Viteza optimă pentru aşchierea oţelului romînesc OL.42 pe strung la degroşare" Colectivul aşchierea metodelor I.M.A., comunicare prezentată la I.M.A. în sesiunea decembrie 1955. M. Popov.

**) „Aplicarea metodelor de înaltă productivitate la strungărie", conferinţă ţinută în cadrul MIMCM, în martie 1956, de M. Popov, candidat în ştiinţe.

Acest aspect apare în prezent drept principala cauză a variaţiei caracterului şi ritmului uzurii sculei aşchietoare în funcţie de creşterea vitezei de aşchiere. Conchidem deci că apariţia cascadelor uzurii este favorizată şi de anumite valori ale parametrului viteză.

Pentru elucidarea problemei sînt interesante şi alte aspecte în legătură cu influenţa parametrului viteză de aşchiere.

Astfel, metoda radiaţiilor creează posibilitatea să se constate că uzura volumetrică, specifică sculei de aşchiere, este asemănător influenţată de viteza de aşchiere, atît în cazul în care s-a considerat constant drumul parcurs de cuţit (fig. 11), cît şi atunci cînd s-a considerat constantă durata aşchierii. Curbele obţinute în acest caz sînt continue, prezentînd un minim accentuat la $V = 100$ m/min, iar alura lor este ca aceea a curbelor clasice ale uzurii funcţie de viteză.

S-a demonstrat, de asemenea, că influenţa perioadei de semidisociere a radioizotopului, care ar putea fi o cauză de eroare, se manifestă numai prin deplasarea curbelor pe verticală, menţinîndu-se atît alura, cît şi valoarea vitezei corespunzătoare uzurii minime (în cazul aceloraşi parametri de aşchiere). Rezultatele apar mai concludente, dacă precizăm că timpul de aşchiere necesar pentru stabilirea vitezei optime pentru un cuplu piesă-sculă, este de aproximativ 2 minute, deci modificarea în timp a suprafeţelor cuplului în contact, nu pot influenţa practic cercetarea, chiar în cazul folosirii unui izotop radioactiv cu viaţă relativ mai scurtă.

Rezultate asemănătoare au fost obţinute şi în cazul în care s-au folosit plăcuţe diferite. Astfel, în figura 12, se constată că aşchierea unor metale diferite (oţel 45 şi 18 HNMA) [5], executată cu plăcuţe diferite (oţel rapid R.9, R. 18 şi R. 9 F), în condiţiile unei variaţii a vitezei de aşchiere de la 20...70 m/min, duce la curba de uzură cu alură clasică, indicîndu-se o viteză optimă comună ($V = 30$ m/min), corespunzătoare unei uzuri minime a cuţitului*.

Considerăm deosebit de important faptul că, în urma examinării influenţei celor trei parametri diferiţi (material-sculă, material-piesă şi viteză) asupra duratei de funcţionare, s-a putut obţine o valoare comună. În aceeaşi figură remarcăm, de asemenea, o marjă de viteze (40···50 m/min), în care prelucrarea oţelului 18 HNMA se poate face în aceleaşi condiţii, folosind pe oricare din cele trei plăcuţe amintite. Practic vorbind, aspectele pe care le prezentăm dovedesc posibilitatea stabilirii unei erarhizări a influenţei diferiţilor parametri asupra duratei de serviciu a cuţitelor de strung, aprecierea ponderii factorilor putînd simplifica găsirea parametrilor optimi ai aşchierii.

Avantajele certe ale măsurătorilor cu radioizotopi, în cazul cercetării influenţei parametrului, viteză, au condus chiar la concluzia părăsirii metodelor micrometrice ca metode de bază. Acest aspect se fondează pe constatarea că, numai prin metoda radiaţiilor se poate considera constantă uzura specifică volumetrică, metoda permiţînd deci fie menţinerea constantă a greutăţii şpanului, fie a drumului parcurs de cuţit. În schimb, pentru aceleaşi măsurători făcute cu metoda micrometrică, cuplul în frecare modificîndu-se între două ascuţiri, greutatea şpanului neputînd fi menţinută constantă, de asemenea invariabilitatea drumului de tăiere etc., etc., se obţine în cele din urmă, o neconcordanţă între rezultatele cercetării şi anumite valori fizice : greutatea şi volumul de material aşchiat, suprafaţă prelucrată şi traiectul cuţitului.

---

* În figura 12, curbele pline privesc oţelul 18 HNMA.

c. Influenţa avansului şi a adîncimii de aşchiere

Se constată că unele cercetări executate cu metode obişnuite de măsură faţă de creşterea avansului în anumite limite, indică menţinerea aproape constantă a uzurii relative. Măsurătorile micrometrice mai precise, şi mai ales în ultimul timp măsurătorile cu izotopi, prezintă în această privinţă o neconcordanţă ; în unele cazuri apare o influenţă destul de esenţială a avansului asupra uzurii (creşterea avansului producînd fie scăderea, fie creşterea uzurii specifice) [4], [5], [6].

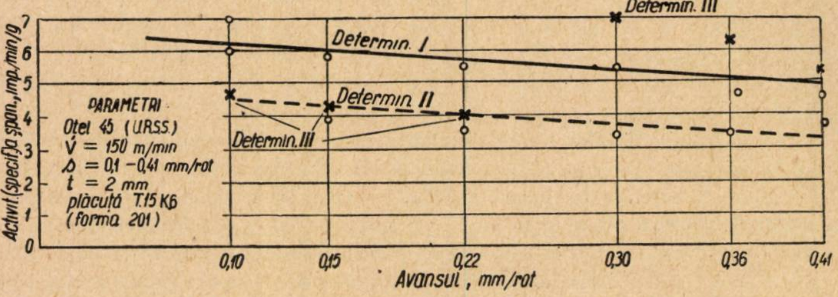


Fig. 13

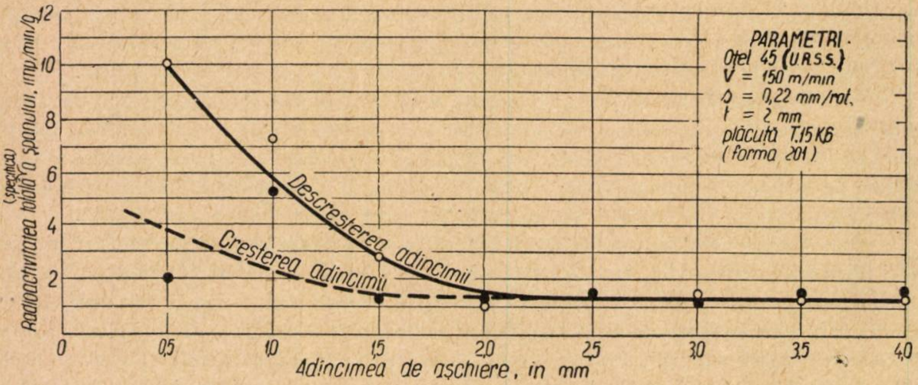


Fig. 14

În mod normal sporirea avansului trebuie să ducă la o uşoară scădere a uzurii specifice a sculei, cu toate că creşterea forţei de aşchiere la sporirea avansului ar trebui să provoace intensificarea uzurii relative. Totuşi acest lucru nu se întîmplă pentru că în acelaşi timp drumul de frecare variază proporţional cu avansul, astfel că la creşterea avansului se micşorează deformaţia volumetrică. Cercetările lui E.P. Nadeinskaia [5] au confirmat această ipoteză, după cum rezultă din figura 13, determinările I şi II fiind făcute cu aceeaşi plăcuță T. 15 K. 6.

Urmărindu-se pe cale micrometrică funcția avans-durabilitate la diferite viteze (130...240 m/min ; $s = 0{,}1...0{,}3$ mm/rot.), se constată în cazul parametrilor indicați, o uşoară dependență de viteză, curbele deplasîndu-se paralel [6].

Observația se menține caracteristică şi în cazul aşchierii cu diferite plăcuțe iradiate T. 15 K.6 [4], putîndu-se studia totodată neomogenitatea structurii unui strat subțire al unei plăcuțe. Punctele de împrăştiere au rezultat deplasate pe baza ordonatelor, menținîndu-se însă panta funcției liniare obținută inițial (determinarea III față de I şi II).

În schimb s-a putut confirma, în mod unanim, faptul că sporirea adîncimii de aşchiere nu influențează în general uzura specifică a sculei, exceptînd domeniul adîncimilor mici (0,5... 1mm), adică regimul în care unghiurile de degajare, aşezare şi atac sînt modificate de razele de racordare a tăişului şi de raza de uzură a vîrfului cuțitului (fig. 14).

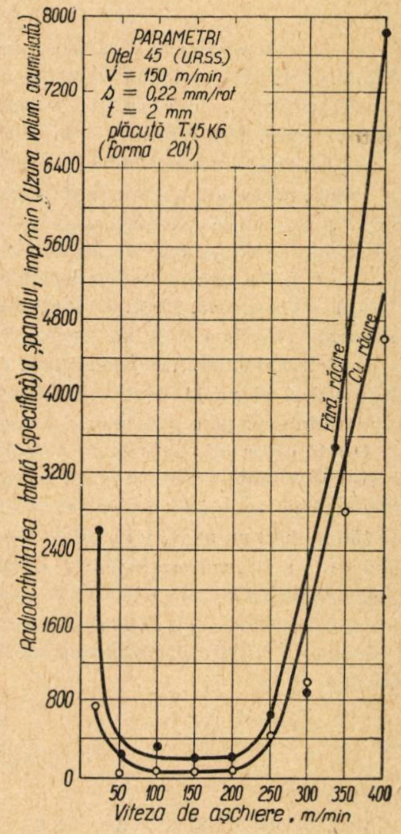


Fig. 15

Deosebit de importantă este observația că atît avansul, cît şi adîncimea de aşchiere, influențează în schimb durabilitatea sculei într-o măsură mai mare decît uzura secifică [6].

d. Influența lichidului de răcire

În momentul în care s-a constatat, paralel cu influența frecării, şi acțiunea negativă [a temperaturilor ridicate, ce iau naştere în timpul aşchierii, asupra liantului pe bază de cobalt,prin reducerea rezistenței la vibrații a rețelei cristaline a aliajelor dure, a apărut necesitatea răcirii-ungerii cuțitelor armate.

În ultimii ani acest parametru al aşchierii a fost minuțios analizat. În cadrul Institutului VNII din Moscova [4], în laboratorul „Alexander Duckhan" din Londra [7] şi [8], cît mai ales în laboratorul Companiei „Cincinatti Millning Machine" din S.U.A. [1], s-au făcut, cu radioizotopi, diferite cercetări privind acțiunea lichidelor de răcire-ungere asupra uzurii cuțitului şi interacțiunea diferiților parametri ai aşchierii.

Figura 9 indică regiunea corespunzătoare vitezelor 250...400 m/min, drept regiunea uzurilor mari ale plăcuței T. 15 K.6. Din curbele uzurii' în funcție de viteza de aşchiere (fig. 15), ridicate în condiție de răcire-ungere, sau aşchiere fără răcire, pe porțiuni de tăiere de cîte 20 m, rezultă că — în cazul parametrilor respectivi — numai în regiunea vitezelor mai mari durabilitatea cuțitului este considerabil sporită prin răcire-ungere. Acest lucru întăreşte presupunerea că mai ales în zona vitezelor mari, datorită temperaturii şi apoi vibrațiilor, apar caracteristic uzurile intensive.

De asemenea, calitatea lichidului de răcire-ungere dă variaţii de uzură destul de importante [1]. Astfel, experimentîndu-se două lichide diferite de răcire curent folosite în S.U.A. a rezultat o diferenţă de 11 % între uzurile ce s-au produs *).

Aşchiind metale diferite (SAE — 31.45, 8650 şi 80 B. 45 — aceiaşi parametri ca mai sus) s-a putut trage concluzia că, menţinînd acelaşi lichid de tăiere diferenţa calităţii materialelor pieşă, poate duce şi ea la uzuri procentuale ce pot diferi cu aproximativ 10 %.

Se constată că în toate cazurile menţionate nu s-a depăşit aspectul „răcire" de aspectul „ungere", ultimul — după părerea noastră — apărînd important mai ales dacă se ia în consideraţie factorul frecare care este deosebit de activ.

e. INFLUENŢA PARAMETRILOR GEOMETRICI AI CUŢITULUI

În această privinţă în studiile recent făcute cu radioizotopi, s-a acordat o importanţă mai mare influenţei, asupra uzurii cuţitelor de strung, a factorilor arătaţi mai sus, decît influenţa geometriei cuţitului, în sensul că valorile optime „clasice" ale diferitelor unghiuri au fost utilizate ca atare, fără a se urmări în principal confirmarea lor.

Astfel, pe oţelurile sovietice din grupa 45 şi pe cele americane SAE s-a aşchiat cu diferite plăcuţe dure, în general unghiurile de aşezare avînd valorile 7° sau 10°, unghiurile de degajare 0° sau 15° şi unghiurile de atac principale 45°...90°, deci valori curent recomandate de literatură pentru condiţiile experimentale respective (material piesă, prelucrare etc.).

În fond, din cercetările făcute pînă în prezent de colectivul de aşchiere I.M.A. **) (numai parametrul plăcuţă — T. 15. K. 6—fiind asemănător) tragem concluzia (cu excepţia unghiului γ) că în general valorile clasice ale unghiurilor cuţitului pot fi considerate optime în experimentarea cu oţeluri romîneşti, asemănătoare. Cît priveşte unghiul de degajare γ, presupunem că la anumite valori el poate deveni (la fel ca viteza de aşchiere, uzură intensivă etc.) o cauză a împrăştierii în cascadă a punctelor experimentale ale uzurii.

O altă observaţie interesantă este aceea că valoarea acestui unghi este riguros legată de caracterul materialului piesă şi nu în aceeaşi măsură de rezistenţa sa de rupere. Astfel, pentru oţelul OL.42 cu $\sigma_r = 50$ kg/cm², a rezultat la degroşare şi semidegroşare (cu plăcuţa T.15 K.6 şi $v = 156$ m/min) un unghi γ optim $+ 5°$ faţă de normele R.D.G., care indică pentru acest oţel unghiul $\gamma = + 10°$, valoare cu care în cazul cercetărilor IMA s-a obţinut o durabilitate minimă. Ca şi pentru viteza optimă, obţinută de cercetările IMA, diferită de normele U.R.S.S. şi R.D.G. pentru oţelul cu acelaşi σ_r, se confirmă ipoteza că rezistenţa la rupere a diferitelor materiale nu poate forma un criteriu, factorul comparabil fiind numai omogenitatea şi compoziţia chimică a materialului ***).

CONCLUZII

Cercetătorii E. P. Nadeinskaia şi N. F. Kazakov din U.R.S.S. precum şi M. E. Merchant, H. Ernest şi E. J. Krabacer, în S.U.A., au obţinut rezultate importante, studiind cu radioizotopi uzura aşchierii la strung, funcţie de o serie de parametri specifici. Cunoscîndu-se însă complexitatea factorilor existenți, cercetările întreprinse marchează totodată un caracter oarecum parțial, problema rămînînd mai departe deschisă, mai ales în ceea ce privește posibilitățile de generalizare a rezultatelor.

---

*) Oţel SAE 8650, $V = 180$ m/min, $t = 5$ mm, $s = 0{,}009$ mm/rot.

**) Vezi prima notă la pag. 276

***) Vezi a doua notă la pag. 276

În legătură cu acest aspect desprindem următoarele concluzii:

1) În prezent măsurătorile cu radioizotopi, în studiul uzurii la așchiere, nu mai constituie o metodă „în studiu". Dacă se analizează recenta lucrare [5] a cercetătoarei E. P. Nadeinskaia, se constată că metoda este considerată complet elucidată, astfel că autoarea a trecut direct la stabilirea proprietăților așchietoare și de prelucrabilitate a unor oțeluri rapide.

2) Faptul că unele lucrări prezintă folosirea radiațiilor în studiul uzurii la așchiere, drept „cheia" lămuririi procesului așchierii, nu trebuie să conducă la ideea excluderii din acest gen de cercetări, a măsurătorilor micrometrice (cu toate calitățile evident mai reduse ale acestei metode); materialul prezentat de noi lasă să se vadă destul de clar că măsurătorile cu radiații nu exclud, ci completează măsurătorile micrometrice în studiul așchierii, aprofundînd și lărgind considerabil domeniul cercetărilor. În plus, folosirea radioizotopilor, după cum am exemplificat, este singura cale care permite lămurirea diferitelor fenomene fizice ce însoțesc procesul de așchiere.

Date fiind însă condițiile specifice ale domeniului studiat, noua metodă nu poate fi însă o „cheie" care să facă posibilă o astfel de generalizare a rezultatelor, încît să ne conducă la parametri optimi „universal" aplicabili.

3) Necesitatea clarificării posibilităților unei generalizări a rezultatelor obținute în diferite țări ne-a condus la gruparea parametrilor așchierii, în două categorii mari:

a) factori „impuși" atît cercetării, cît și practicii de condiții teritoriale (material-piesă, material-sculă, mașină-unealtă etc.) și

b) factori „la dispoziția" cercetării (viteză de așchiere, avans, adîncime, geometria scule etc.).

Se desprinde în mod indiscutabil constatarea confirmată și de realitate, că parametrii așchierii indicați în prima grupă împiedică practic reproducerea identică și generalizarea unor rezultate obținute în țări diferite, cercetările respective căpătînd, din acest punct de vedere, valabilitatea limitată și în general numai indicativă.

Rezultă implicit necesitatea efectuării cercetărilor „indigene", singurele ce pot duce la concluzii valabile și cu aplicare practică în țara respectivă, pentru că studiile se efectuează în condiții reproductibile.

4) Se constată de asemenea că influența diferiților parametri ai așchierii asupra uzurii și deci durabilității cuțitului, se exercită sub ponderi diferite, fapt care considerăm că poate favoriza o oarecare simplificare a metodei de cercetare și totodată o generalizare — cu caracter totuși parțial — a rezultatelor obținute.

a) Astfel, parametrii: material piesă*), material sculă și viteza de așchiere, pot forma împreună un prim grup de factori a căror influență este deosebit de importantă asupra uzurii și duratei de utilizare a cuțitului. Pe această linie s-a exemplificat posibilitatea determinării unei viteze „optime" comune diferitelor materiale piesă și sculă, în condițiile unei geometrii a cuțitului considerată optimă.

b) Geometria cuțitului formează un al doilea grup de parametri ce condiționează evoluția uzurii, în unele cazuri chiar în limite foarte înguste. Și în acest caz o concluzie simplificatoare, o poate aduce faptul că, în general, unghiurile „optime-clasice" indicate pentru diferite condiții de așchiere, au dat satisfacție (unghiul γ impunînd însă condiții mai riguroase).

---

*) Fenomenul este mai complex, piesa de prelucrat avînd la rîndul său ca parametri; proprietățile mecanice, plastice, tehnice omogenitate, șpan etc.

c) De asemenea, este importantă constatarea făcută privind o altă categorie de parametri (avans, adîncime de aşchiere, lichid de răcire-ungere etc.), ca avînd o acţiune oarecum mai „limitată'' asupra uzurii la aşchiere.

5) Cercetările făcute cu radioizotopi în general, confirmă în condiţiile arătate atît relaţiile empirice devenite clasice, cît şi rezultatele măsurătorilor micrometrice, pe care totodată le şi completează. De asemenea, rezultă că atît ipotezele simplificatoare, pe care sîntem nevoiţi a le face, cît mai ales caracterul specific al interdependenţei unor parametri, conduc spre legi cu caracter destul de restrîns. Astfel, s-a demonstrat în mod absolut că funcţia viteză de aşchiere-durabilitate nu este liniară decît în anumite game de viteză. Concluziile expuse mai sus impun deci existenţa unor parametri optimi pentru fiecare grup de factori principali a aşchierii, neexcluzînd posibilitatea unor generalizări în unele domenii.

6) Asupra efectului de cascadă s-au făcut unele ipoteze. Din punct de vedere cauzal, considerăm o legătură între acest efect şi fenomenul fizic al aşchierii. Considerăm necesar să subliniem că în afară de uzura intensivă există şi alţi factori (viteză, unghiul de degajare, material plăcuţă, lichid de ungere-răcire, metoda de măsură etc.) care pot înlesni şi accentua acest fenomen.

Admitem fenomenul de cascadă ca fiind în general specific aspectului fizic al uzării cuţitului. În această privinţă remarcăm ca interesantă ipoteza semnalată — cu privire la originea acestui fenomen — pe baza rezultatelor obţinute cu măsurători micrometrice*). Nu sîntem însă convinşi — sub rezerva verificării — că efectul de cascadă se datoreşte exclusiv modului de uzare „în tăişuri succesive'' a sculei aşchietoare, ca efect permanent al uzurii la aşchiere, generat continuu de uzura mai accentuată a feţei de aşezare secundară. Astfel enunţată, ipoteza nu poate explica integral caracterul împrăştierii ritmice a punctelor experimentale, ce apar în cadrul uzurii reduse sau aproape constante pe curbe de viteză şi de durabilitate optimă analizată comparativ cu cazul uzurii sporite a curbelor de viteză mare şi durabilitate mai redusă.

Cercetările ce se fac în continuare de colectivul de aşchiere I.M.A. vor avea posibilitatea să verifice observaţiile şi ipotezele făcute în această lucrare. Precizăm că în prezent, la determinarea parametrilor optimi de strunjire a unor oţeluri romîneşti, este folosită la citirea uzurii cuţitelor, numai metoda micrometrică.

Primită la redacţie la 31 august 1956.

К ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗНОСА ТОКАРНЫХ РЕЗЦОВ (ОБЛУЧЕННЫХ) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕЗАНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

После краткого изложения методики, аппаратуры и мер безопасности, соответствующим исследованиям износа при резании активированными инструментами, автор рассматривает влияние некоторых параметров на износ и оптимальную долговечность резца.

Цель работы — выявить преимущества метода изучений при таком способе исследования, проверить частные результаты, полученные обычными методами иссле-

---

*) Vezi prima notă la pag. 266 jos.

довательским коллективом Института прикладной механики, найти упрощение применяющейся в настоящее время методики для выяснения возможности обобщения результатов.

В числе явлений, сопровождающих разние металлов особенно отмечается «каскадное» явление, причем приводятся некоторые пояснения в связи с примененными гипотезами, которые следует проверить путем дальнейших исследований, проводящихся в настоящее время обычными методами в Институте прикладной механики.

L'ÉTUDE DE L'USURE DES OUTILS COUPANTS (IRRADIÉS) EN VUE DE DÉTERMINER LES MEILLEURS PARAMÈTRES DU DÉTACHEMENT EN COPEAUX

(RÉSUMÉ)

Après un exposé succinct de la méthode, des appareils utilisés et des mesures de protection nécessaires aux recherches dans le domaine de l'usure des outils coupants activés, l'auteur analyse l'influence de certains paramètres sur l'usure et la durabilité de l'outil.

Le but de cet ouvrage a été de mettre en évidence les qualités de la méthode des radiations dans ce genre de recherches, de vérifier les résultats partiels obtenus dans ce domains par le collectif d'études de l'Institut de Mécanique Appliquée, à l'aide des méthodes usuelles, et de mettre en évidence une simplification de la méthode courante, en vue d'établir les possibilités de généralisation des résultats.

Parmi les phénomènes qui accompagnent le travail des métaux par détachement en copeaux, l'auteur a retenu en particulier le phénomène de „cascade". Dans ce sens, il apporte quelques précisions en ce qui concerne les hypothèses faites, qui seront vérifiées par les recherches poursuivies actuellement à l'Institut de Mécanique Appliquée à l'aide des méthodes usuelles.

BIBLIOGRAFIE

1. M. E. Merchant, Hans Ernest a. E. J. Krabacher, *Radioactive Cutting Tools, for Rapid Tool-life Testing*. Transactions of the ASME, New York, May 1953, vol. 175, nr. 4, p. 549.
2. J. Finnie i E. Rabinowicz, *Radioaktivnoe izucenie proțesa rezania metalov*. Mașinostroenie, 1956, nr. 8, (38) p. 111—119 (după Lubrification Eng., 12 (I) 1955).
3. N. F. Kazakov, *Issledovanie izonosastoikosti rezțov metodom, radioaktinih izotopov izlucenii a* Izvestia Akademii Nauk SSSR, 1954, nr. 1, p. 41.
4. E. P. Nadeinskaia, *Issledovanie iznosa rejușcevo instrumenta pripomoșci radioaktivnih izotopov.* Izvestiia Akademii Nauk SSSR, OTN, 1954, nr. 1, p. 24.
5. — *Rejuscie svoistva i obrabativaemost bistro rejușcei stali.* Vestnik mașinostroenia, 1956, nr. 7, p. 35.
6. A. P. Sokolovski, *Precizia prelucrării mecanice și metodele pentru mărirea ei.* Ed. tehnică, București, 1954.
7. * * * *Cutting Tools and Radiosotopes.* Atomics, July 1956, vol. 7 p. 229.
8. * * * *Measurement of Cutting Tool Performance With Radioactive Isotopes.* The Engineer July 1956, p. 127.

9. B. Colding i L. G. Erwall, Nucleonics, 1953, t. 11, p. 46, (*Issledovanie iznosa activirovannîh neitronami rezţov iz tverdîh splavov.* Primenenie metoda mecenîh atomov v fizike i tehnike. Moscova, 1955, p. 345 (după Nucleonics 11, 1953, p. 46).

10. M. E. Merchant i. E. J. Krabacher, Applied Physics, 1951, t. 22, (12) p. 1507, (*Opredelenie sroka slujbî rejuşcego instrumenta metodom radioaktivnîh indikatorov*. Prikladnaia mehanika i maşinostroenie, 1952, nr. 2, p. 135).

11. * * * *Aplicaţiile paşnice ale energiei atomice.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1955, p. 172.

12. G. A. Alexeev, V. A. Arşinov şi E. A. Smolnikov, *Calculul şi construcţia sculelor aşchietoare.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.

13. Dan Pavelescu, *Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 1 ianuarie-martie 1956, p. 271.

14. E. V. Borisov, *Tehnica bezopasnosti pri rabote a radioaktivnîmi izotopami.* Profizdat Moscova, 1956.

RECENZII

Résistance des matériaux, théorique et expérimentale. I. Théorie de l'élasticité et des structures élastiques (Rezistența materialelor teoretică și experimentală. I. Teoria elasticității și a structurilor elastice). Dunod, Paris, 1955, 860 pag.

În dezvoltarea oricărei științe un rol însemnat l-au jucat operele care sintetizînd rezultatele preocupărilor multiple ale unei epoci au fixat stadiul de cunoștințe la un anumit timp. Istoria rezistenței materialelor este jalonată de lucrările lui Navier, Clebsch de Saint Venant, Mohr Love, Föppl și în ultimul timp de valoroasa operă a lui Timoshenko.

Pe linia marilor lucrări care marchează mersul înainte al Rezistenței materialelor se situează volumul lui R. l'Hermite, recent apărut în editura Dunod.

Programul autorului este vast: să expună *sintetic* tot materialul documentar privitor la rezistența materialelor scris pînă în 1952, cu scopul de a informa asupra posibilităților actuale de rezolvare a problemelor practice care intervin în activitatea inginerului.

Astfel volumul I cuprinde : elasticitatea în două și trei dimensii, statica barelor și firelor cu teoria încovoierii și torsiunii, teoria plăcilor încovoiate și teoria învelitorilor subțiri. Volumul II va fi consacrat teoriei moderne a stabilității și flambajului și metodelor de încercări pe modele. Volumul III va trata mecanica fizică a materialelor plecînd direct de la sursa experimentală și în sfîrșit volumul IV va cuprinde teoriile moderne ale plasticității, fenomenelor dinamice, șoc, vibrații.

Deocamdată volumul I apărut reprezintă o muncă de mai mulți ani : au fost consultate aproape 2000 de lucrări, sînt citați 1000 de autori. Deși de proporțiile unei enciclopedii, puternica personalitate a autorului se regăsește mereu în text ; expunerea este clară, concisă, materialul este orînduit după importanță, observații pline de conținut scot în evidență tocmai părțile delicate ale diverselor teorii : ipotezele de plecare, limitele de valabilitate, extinderea pe care o poate avea calculul efectiv.

Dacă în majoritatea lucrărilor de rezistența materialelor expunerea se bazează pe o schemă cu calități îndeosebi didactice criteriul de sinteză al lui R. l'Hermite îl formează în mod accentuat *interesul practic*, menținînd însă nivelul matematic necesar posibilităților de rezolvare a problemelor puse. Cu toate că în introducere se afirmă : ,,cunoașterea aprofundată a teoriei elasticității necesită la ora actuală o cultură matematică cu bază suficientă, funcțiile Bessel sau ecuațiile de derivate parțiale nu trebuie să sperie pe nimeni", autorul nu este în expunere furat de farmecul dezvoltărilor matematice. Spiritul său rațional îl face să privească matematica drept instrument de cercetare și nu un mijloc de teoretizare derutantă pentru neavertizați.

Astfel, la începutul studiului referitor la învelitorile subțiri se precizează : ,,Este greu a da o rezolvare generală valabilă peste tot — simțul mecanic al calculatorului trebuie să-i permită să sezisezе oportunitatea simplificărilor în complexitatea extraordinară a teoriei, de aceea se studiază mai degrabă cazurile particulare decît se caută o expunere a soluțiilor generale".

Privind sub aspectul interesului practic, R. l'Hermite definește rezistența materialelor ,,știința analitică destinată să afle ce se petrece într-un solid" sub acțiunea unei solicitări ; el a sezisat necesitatea logică în momentul de față ca întreg domeniul de cercetare, legat de comportarea mecanică a corpului solid, să se considere unitar, păstrînd pe linia tradiției școlii franceze denumirea dată de Navier, de rezistența materialelor.

Avînd o erudiţie surprinzător de vastă şi o bogată experienţă acumulată în cadrul Institutului de construcţii şi lucrări publice (Institut du bâtiment et des travaux publics) din Paris, al cărui director este, autorul adînc cunoscător al problemelor de rezistenţa materialelor, nu se sfieşte în încheiere să adauge : „a construi este însă o artă pentru că, constructorul nu este numai om de ştiinţă, ci şi un artist, un creator, opera unui inginer poartă în întregime amprenta personalităţii sale".

Cine a urmărit frumoasele pagini ale volumului I, nu-şi poate opri dorinţa de a vedea terminată această operă concepută de R. l'Hermite, monumentală prin complexitatea problemelor tratate, dar mai ales prin simţul de echilibru care orînduieşte acest vast cuprins.

A. Beleş şi M. Mihailescu

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VII 1956

INDEX ALFABETIC

AEROMECANICĂ

	nr.	pag.
CARAFOLI E. și HOROVITZ BEATRICE, Asupra aripii unghiulare avînd discuri axiale cu incidența antisimetrică	2	307
CARAFOLI E. și DUMITRESCU L., Rezistența de undă a unei clase de aripi delta subțiri dublu-conice, cu incidența variabilă, în curent supersonic	3	581
CARAFOLI E. și SĂNDULESCU S., Influența bracajului aripilor asupra caracteristicilor aerodinamice ale aripii triunghiulare în regim supersonic	4	815
CONSTANTINESCU V. N., Asupra extinderii problemei Tsien-Scurlock la mișcări axial-simetrice	2	323
CONSTANTINESCU V. N., Considerații asupra arderii laminare în camere de secțiune variabilă	4	851
DUMITRESCU LUCIAN, Calculul lungimii elementelor componente ale unui tub de șoc pentru o durată de funcționare dată	2	337
LARICH E., Propagarea arderii în canal cu secțiune variabilă	4	863
MARINESCU AL., Asupra stabilității dinamice a elicopterului cu rotoare coaxiale contrarotative	1	29
MARINESCU AL., Stabilitatea dinamică în zbor vertical ascendent și la punct fix, a două tipuri frecvente de elicopter	3	617
MARINESCU AL., Formulele undei mixte pentru sistemele liniare stabile	4	841
OROVEANU T., Cercetări asupra scurgerii unui curent de aer printr-un strat de cereale cu aplicații la ventilația cerealelor din silozuri	3	605
PATRAULEA N. și LARISCH E., Aripi de anvergură infinită suflate	3	599

HIDRODINAMICĂ

	nr.	pag.
CODREANU D. și CRISTEA N., O nouă metodă de prevedere a comportării zăcămintelor de țiței cu împingere parțială de apă	2	355
KAHAN M., Studiul scurgerilor în albii naturale cu ajutorul modelării în curenți de aer	4	881
OROVEANU T., Cîteva probleme de scurgere pintr-un mediu poros cu variație unidimensională a permeabilității	4	881
OROVEANU T. și PASCAL H., Scurgerea staționară plan- radială a unui amestec de licbid și gaz printr-un mediu poros	2	757
POPOV MINCIO, Încercări pe modele cu pulverizarea fluidelor	1	9
STĂNESCU CRISTIAN și DUMITRESCU LUCIAN, Mișcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafață plană	4	891
VLADIMIRESCU I., Un caz particular de mișcare ascensională a pînzei freatice	2	375

REZISTENȚA MATERIALELOR—ELASTICITATE

	nr.	pag.
BELEȘ AUREL și MIHAILESCU MIRCEA, Ecuațiile de echilibru în coordonatele oblice la învelitorile subțiri de grosime constantă	3	631
MARCU V., ZELINGHER N. și FREUND P., Studii asupra unor carcteristici ale straturilor obținute prin electrometalizare	2	465

	Pag.	nr.
MIHAILESCU MIRCEA, Teoria de încovoiere la paraboloizii	2	421
MIȘICU M., Notă asupra unei formulări a problemei spațiale în cazul dinamic al teoriei corpurilor elastice	4	995
MORARU D., Stabilirea stării de efort în grinzi perete, prin metoda analogiei cu o rețea	4	937
NICOLAU EDUARD, Contribuții la utilizarea analogiei cu membrană în cercetarea tensiunilor la torsiune	2	485
PETRE A., Flambajul barelor drepte prin șoc axial	1	173
PETRE A., STĂNESCU C. și LIBRESCU I., Asupra structurilor ortotrope optime	4	955
PÎRVU A., Problema plană a elasticității pentru o coroană circulară în cazul celei de a doua probeme fundamentale la limită	2	415
PÎRVULESCU N. S., Rezistența la încovoire a prăjinilor grele încărcate axial cu o parte din greutatea proprie	3	697
PÎRVULESCU N. S., Instabilitatea prăjinilor grele în rotație	4	901
POPOVICI CONST. C., O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor. Partea I	3	677
POPOVICI CONST. C., O teorie generală a metodei distribuirii eforturilor. Partea II	4	971
TANASICIUC CL., Tensometru rezistiv	3	729
TEODORESCU P. P., O metodă de aproximare a condițiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticității	3	655
VISARION VIOREL, Învelitori subțiri în formă de paraboloid hiperbolic	2	443
VISARION VIOREL, Calculul clasic al învelitorilor subțiri în forma de elicoid drept	4	925

UNGERE – FRECARE – UZURA

CONSTANTINESCU V. N., Considerații asupra calculului lagărelor circulare de alungire infinită lubrificate cu gaze	1	81
CONSTANTINESCU V. N., Considerații asupra calculului lagărelor de alungire infinită lubrificate cu gaze, compuse din suprafețe plane	3	741
ROZEANU L. și PREOȚESCU O., Determinarea și utilizarea parametrilor de caracterizare a viscozității lubrifianților	1	63
TIPEI N., Mișcarea fluidelor vîscoase între pereți solizi, cu deplasare relativă oarecare	1	45
VASILCA GH., Asupra utilității caracteristicii $p = f(V)$ la lagărele circulare de alunecare	2	49
VASILCA GH. și FREUND P., Studii experimentale asupra unor materiale antifricțiune de înlocuire pentru lagărele de alunecare	3	773

VIBRAȚII

HAMBURGER L., Asupra influenței inerției solului la fundații cu pături elastice intermediare	1	12
MARCU V. și LEZER A., Studiul metodei „Rijkov" pentru eliminarea vibrațiilor la strungire	1	135
PETRE AUGUSTIN, Aplicarea analogiilor electrice la studiul vibrațiilor mediilor elastice	2	505
RĂUTU S., Calculul vibrațiilor cadrelor prin aproximații succesive.	1	151
RĂUTU S. și IFRIM M., În legătură cu calculul vibrațiilor proprii ale cadrelor etajate	3	785

ORGANE DE MAȘINI

BODNĂRESCU D., Asupra combinării prăjinilor în pompajul de adîncime din industria de petrol, după criterii de rezistență la oboseală	1	107

TEORIA MECANISMELOR

BUGAIEVSKI E., BOGDAN R., PAVELESCU D., PELECUDI C. și LEZER A., Considerații asupra posibilităților de mărire a vitezei de lucru la mașinile circulare automate de tricotat	2	393

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

DUMITRESCU I., Considerații asupra calculului grinzilor continue din beton precomprimat	2	545
DUMITRESCU I. și VISARION V., Influența compoziției mineralogice a cimentului asupra comportării grinzilor din beton armat la încovoiere.	4	1013
FROIMESCU A., Grinda continuă din beton precomprimat cu moment de inerție variabil și efort de preîntindere constant pe toată lungimea	1	203

nr. pag.

REVICI T., O metodă pentru simplificarea consolidării podurilor metalice 1 179

WEISSENBERG M. și **CIUNGU S.**, Variația aderenței dintre beton și armătură în funcție de lungimea de ancoraj 2 527

VASILESCU-KARPEN N., Aderența fierului la beton în betonul armat. Determinarea experimentală a aderenței și a contracției betonului 4 1001

MECANICA PĂMÎNTURILOR

BALLY R. și **ANTONESCU I.**, Contribuții la problema electrosilicatării pămînturilor 4 1037

ÎNCERCĂRI DE MATERIALE

PANĂ GH. I., Contribuții la studiul penetrabilității lemnului de către lichide la diferite presiuni și temperaturi 1 235

TEHNICA PRELUCRĂRII MATERIALELOR

POPOV M., **MITRICĂ I.** și **DECIU E.**, Studiul presiunilor specifice pe suprafața de contact în procesul de laminare 2 557

METODE DE CALCUL

PÎRVULESCU N. S., Rezolvarea ecuațiilor algebrice printr-o metodă de recurență și o metodă de iterație 1 249

TEHNOLOGIA MATERIALELOR

PANĂ G. I., **DUPU M.** și **OCSKAY S.**, Proprietățile fizice, mecanice și tehnologice ale lemnului speciilor exotice 4 1057

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

DUMITRESCU L., Tubul de șoc și aplicațiile sale 1 283

OROVEANU T., Dezvoltarea cercetărilor de mecanica fluidelor și aerodinamică în țara noastră . . . 4 1073

PAVELESCU D., Cercetări cu radioizotopi în domeniul mecanicii aplicate 1 271

VARLAN RADU N., Un aparat de laborator pentru determinarea modulului de deformație al pămîntului 4 1087

RECENZII

BABUŠKA I., **REKTORYS K.**, **VYČICHLO F.**, *Matematick theorie rovinné pružnosti* (Teoria matematică a elasticității plane). Praga, 1955, de P. P. Teodorescu 3 800

CARAFOLI E., și **OROVEANU T.**, *Mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1955, vol. I și II, de N. Tipei 1 293

CISMIGIU AL. I. și **VERNESCU P. V.**, *Aplicații ale teoriei elasticității în construcție-plăci curbe și plane* E.S.A.C., București, 1955, de Mihail Ifrim 3 800

GOLDENBLAT I. I., *Nekotorîe voprosî mehaniki deformiruemîh sred* (Unele probleme ale mecanicii mediilor deformabile). Gostehizdat, Moscova, 1954, de Petre P. Teodorescu 4 1099

HANGAN MIHAIL D., *Betonul armat. Introducere în alcătuirea și calculul structurilor statice.* E.S.A.C. București, 1955, vol. I, de Mircea Mihailescu 1 295

KOCIN N. E., *Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial.* Ed. tehnică, București, 1954, de Adrian Lezer 2 569

LURIE A. I., *Prostranst vernîe zadoci teorii uprugosti* (Probleme spațiale ale teoriei elasticității). Gostehizdat, Moscova, 1955, de P. P. Teodorescu 2 570

NICOLAU V., **FROIMESCU A.** și **WEISSENBERG M.** *Betonul precomprimat.* Ed. Acad. R.P.R. București, 1956, de C. Ionescu 4 1101

NIKIFOROV S. N., *Teoria uprugosti i plasticinosti* (Teoria elasticității și plasticității), Moscova, 1955, de Adrian Lezer 3 799

PATRAULEA N. N. *Aerodinamica suprafețelor permeabile.* Ed. Acad. R.P.R. București, 1956, de T. Oroveanu 4 1101

POLIAKOV V. S., **KUDRIAVȚEV V. I.**, **ZUBANOV M. P.**, **ANOSOV A. S.**, **BARBAS I. D.**, **MIAGKOV V. D.**, *Detali mașin* (Organe de mașini), Masghiz, Moscova, 1954, de A. Lezer 1 294

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VII 1956

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

АЭРОМЕХАНИКА

ДУМИТРЕСКУ Л., Расчет длины составных элементов ударной трубы для заданного времени действия 2 337

КАРАФОЛИ Е. и ХОРОВИЦ Б., Об угловом крыле с осевыми дисками с противосимметрическим наклоном 2 307

КАРАФОЛИ Е. и ДУМИТРЕСКУ Л., Волновое сопротивление одного класса тонких треугольных двухконусных крыльев с переменным углом атаки в сверхзвуковом потоке 3 581

КАРАФОЛИ Е. и САНДУЛЕСКУ С., Влияние отклонения элеронов на аэродинамические характеристики треугольного крыла в сверхзвуковом режиме 4 815

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О распространении задачи Циена — Скурлока на аксиально-симметричные движения 2 323

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., К вопросу о ламинарном горении в камерах переменного сечения 4 851

ЛАРИШ Е., Распространение горения в каналах с переменным сечением 4 863

МАРИНЕСКУ А., Об устойчивости геликоптера с соосными взаимообратно вращающимися роторами 1 29

МАРИНЕСКУ А., Динамическая устойчивость привосходящем вертикальном полете и висении двух часто встречающихся типов вертолетов 3 617

МАРИНЕСКУ А., Формулы волны смешанного типа для устойчивых линейных систем 4 841

ОРОВЯНУ Т., Исследование протекания воздушной струи сквозь слой зерна применительно к проветриванию зерна в силозах . . . 3 605

ПАТРАУЛЯ Н. и ЛАРИШ Е., Дутые крылья с бесконечным размахом 3 599

ГИДРОДИНАМИКА

ВЛАДИМИРЕСКУ И., Частный случай восходящего движения уровня грунтовых вод 4 891

КАХАН М., Исследование течения в натуральных руслах путем моделирования его в воздушных струях 2 355

КОДРЯНУ Д. и КРИСТЯ Н., Новый метод прогноза поведения нефтяных месторождений с неполным водонапорным режимом . . . 3 519

ОРОВЯНУ Т. и ПАСКАЛ Х., Стационарное плоско-радиальное протекание смеси жидкости и газа сквозь пористую среду 4 827

ОРОВЯНУ Т., Несколько задач, относящихся к протеканию через пористую среду с одноразмерно изменяющейся проницаемостью . . 4 881

ПОПОВ М., Испытание на моделях распыления жидкости . . . 1 387

СТЭНЕСКУ К. и ДУМИТРЕСКУ Л., Одноразмерное движение двух тяжелых вязких жидкостей, разделенных плоской поверхностью 4 891

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

БЕЛЕШ А. и МИХЭИЛЕСКУ М., Уравнение равновесия в косых координатах для тонких кровель неизменной толщины 3 631

ВИСАРИОН В., Расчет упругости тонких покрытий, имеющих форму прямого геликоида 4 925

ВИСАРИОН В., Тонкие оболочки в виде гиперболического параболоида 2 443

МАРКУ В., ЗЕЛИНГЕР Р. и ФРЕЙНД И., О некоторых характеристиках покрытий, полученных методом металлизации 2 465

МИХЭИЛЕСКУ М., Теория изгиба гиперболических параболоидов . . 2 421

МИШИКУ М., О формулировке пространственной задачи в динамическом случае теории упругих тел 4 995

МОРАРУ Д., Определение усилий в балках-стенах путем проведения аналогии с сетью 4 937

НИКОЛАУ Э., К вопросу использования аналогии с мембраной при исследовании напряжений при кручении 2 485

ПЕТРЕ А., Изгиб прямых брусьев под влиянием осевого удара . . 1 173

ПЕТРЕ А., СТЭНЕСКУ К. и ЛИБРЕСКУ И., Об оптимальных ортотропных структурах 4 955

ПОПОВИЧ К. К., Общая теория метода распределения напряжений. Часть I 3 677

ПОПОВИЧ К. К., Общая теория метода распределения усилий . . 4 971

ПЫРВУ А., Плоская задача упругости для круглого кольца в случае второй основной краевой задачи 2 415

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Сопротивление на изгиб тяжелых буровых штанг при осевой нагрузке, являющейся частью собственного веса . . 3 697

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Неустойчивость тяжелых бурильных труб при вращении 4 901

ТАНАСИЧУК К., Тензомер с проволочными датчиками 3 729

ТЕОДОРЕСКУ П. П., Метод приближения условий на контуре в плоской задаче упругости 3 655

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

ВАСИЛКА Г., О полезности характеристики $p=f(V)$ для кольцевых подшипников скольжения 2 499

ВАСИЛКА Г. и ФРЕЙНД П., Экспериментальное исследование некоторых антифрикционных материалов — заменителей для подшипников скольжения 3 773

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О расчете круглых бескончно удлиненных подшипников с газовой смазкой 1 81

КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., О расчете смазываемых газами бесконечно удлиненных подшипников, состоящих из плоских поверхностей . 3 741

РОЗЯНУ Л. и ПРЕОЦЕСКУ О., Определение и использование параметров, характеризующих вязкости смазочных веществ 1 63

ТИПЕЙ Н., Движение вязких жидкостей между твердыми стенками с некоторым относительным перемещением 1 45

ВИБРАЦИИ

ГАМБУРГЕР Л., О влиянии инерции почвы на фундаменты с промежуточными упругими прокладками 1 123

МАРКУ В. и ЛЕЗЕР А., Изучение метода Рыжкова для устранения вибрации при течении 1 135

ПЕТРЕ А., Применение электрических аналогий к исследованию вибрации упругих сред 2 505

РЭУТУ С., Расчет вибраций рам по способу последовательных приближений 1 151

РЭУТУ С. и ИФРИМ М., О расчете частот собственных колебаний ярусных рам 3 785

ДЕТАЛИ МАШИН

Д. БОДНЭРЕСКУ, О подборе бурильных труб при глубинном выкачивании в нефтяной промышленности по критериям выносливости на усталость 1 107

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

БУГАЕВСКИ Е., БОГДАН Р., ПАВЕЛЕСКУ Д., ПЕЛЕКУДИ К. и ЛЕЗЕР А., О возможности увеличения рабочей скорости для автоматических круговязальных машин 2 393

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ВАСИЛЕСКУ КАРПЕН Н., Сцепление железа с бетоном в железобетоне Эксперментальное определение сцепления и усадки бетона . . . 4 1001

ВЕЙСЕНБЕРГ М. и ЧУНГУ С., Изменение сцепления бетона с арматурой в зависимости от длины анкеровки. 2 527

ДУМИТРЕСКУ И., К расчету неразрезных балок из предварительно напряженного бетона 2 545

ДУМИТРЕСКУ Л. и ВИСАРИОН В., Влияние минералогического состава цемента на поведение железобетонных балок при изгибе . 4 1013

РЕВИЧ Т., Метод усиления металлических мостов 1 179

ФРОИМЕСКУ А., Неразрезная балка из предварительно сжатого бетона с переменным моментом инерции и постоянным по всей длине усилием на предварительное напряжение 1 203

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

БАЛИ Р. и АНТОНЕСКУ П., К вопросу электросиликатизации грунтов 4 1037

ИСПЫТАНИЕ МАТЕРИАЛОВ

ПАНЭ Г. И., К вопросу о проницаемости древесины для жидкостей при различных давлениях и температурах 1 235

ТЕХНИКА ОБРАБОТКИ МАТЕРИАЛОВ

ПОПОВ М., МИТРИКЭ И. и ДЕЧИУ Е., Исследование удельных давлений на поверхности соприкосновения в процессе прокатки . . 2 557

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ

ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Решение алгебраических уравнений рекуррентным способом и способом итерации 1 249

ТЕХНОЛОГИЯ МАТЕРИАЛОВ

ПАНЭ Г. И. и ЛУПУ М., Физические, механические и технологические свойства древесины экзотических пород 4 1057

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

ВЫРЛАН Р. Н., Лабораторный прибор для определение модуля деформации грунтов 4 1087

ДУМИТРЕСКУ Л., Ударная труба и ее применение 1 283

ОРОВЯНУ Т., Развитие исследований в РНР в области механики жидкостей и аэродинамики 4 1073

ПАВЕЛЕСКУ Д., Исследование в области прикладной механики при помощи радиоактивных изотопов 1 283

РЕЦЕНЗИИ

БАБУШКА И., РЕКТОРИС К. и ВИЧИХЛО Ф., *Matematicka theorie rovinne pruznosti* (Математическая теория плоской упругости). Прага 1955, *П. П. Теодореску* 3 800

ГОЛДЕНБЛАТ И. И., Некоторые вопросы механики деформированных сред. Гостехиздат, Москва, 1954, *Петре П. Теодореску* . . . 4 1099

КАРАФОЛИ Е. и ОРОВЯНУ Т., Mecanica fluidelor (Механика жидкостей). Изд. Акад. РНР, Бухарест, 1955, Том I и II, *Н. Типей* 1 293

КОЧИН Н. Е., Calculul vectorial şi în traducere în calculul tensorial (Векторный расчет и введение в тензориальный расчет). Техиздат., Бухарест, 1954, *Адриан Лезер* 2 569

ЛУРЬЕ А. И., Пространственные задачи теории упругости. Гостехиздат, Москва, 1955, *П. П. Теодореску* 2 570

НИКИФОРОВ С. Н., Теория упругости и пластичности. Москва, 1955, *Адриан Лезер* 3 799

НИКОЛАУ В., ФРОИМЕСКУ А. и ВАИССЕМБЕРГ М., Betonul precomprimat (Предварительно напряженный бетон). Издат. Акад. РНР, Бухарест, 1956 . . . . 4 1099

ПАТРАУЛЯ Н. Н., Aerodinamica suprafeţelor permeabile (Аэродинамика проницаемых поверхностей). Издат. Акад. РНР, Бухарест, 1956, *Т. Оровяну* 4 1101

ПОЛЯКОВ В. С., КУДРЯВЦЕВ В. И., ЗУБАНОВ М.П, АНОСОВ А. С., БАРАБАС И. Д. и МЯГКОВ В. Д., Детали машин. Машгиз, Москва, 1954, *А. Лезер*	1	94
ХАНГАН М. Д., Betonul armat. Introducere în alcatuirea şi calculul structurilor statice E.S.A.C. (Железобетон. Введение к составлению и расчету статических структур). Бухарест, 1955, том I, *Мирча Михэилеску*	1	295
ЧИШМИДЖИУ А. И. и ВЕРНЕСКУ П. В. Aplicaţii ale teoriei elasticitătii în constructie — plăci curbe şi plane (Применение теории упругости в строительстве — плоские и кривые пластины). ЭСАК, Бухарест, 1955, *Михаил Ифрим*	3	800

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPIQUÉE

Tome VII 1956

INDEX ALPHABÉTIQUE

AÉROMÉCANIQUE

	No.	Page
CARAFOLI E. et HOROVITZ BEATRICE, Sur l'aile angulaire au disques axiaux à incidence antisymétrique	2	307
OARAFOLI E. et DUMITRESCU L., Trainée d'onde pour une classe d'ailes delta minces doublement coniques, à incidence variable, en courant supersonique	3	581
CARAFOLI E. et SĂNDULESCU S., Influence du braquage des ailerons sur les caractéristiques aérodynamiques de l'aile triangulaire en régime supersonique	4	815
CONSTANTINESCU V. N., Sur l'extension du problème de Tsien-Scurlock aux mouvements axial-symétriques	2	323
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur la combustion laminaire dans les chambres à section variable	4	851
DUMITRESCU LUCIAN, Calcul de la longueur des éléments composants d'un tube de choc pour une durée de fonctionnement donnée	2	337
LARISCH E., Propagation of Flames in Channels with Variable Cross Section	4	863
MARINESCU AL., Sur la stabilité dynamique de l'hélicoptère à rotors coaxiaux contrerotatifs	1	29
MARINESCU AL., La stabilité dynamique de deux types fréquents d'hélicoptères, en vol vertical ascendant et en vol à point fixe	3	617
MARINESCU AL., Formules de l'onde mixte pour les systèmes linéaires stables	4	841
OROVEANU T., Recherches sur l'écoulement d'un courant d'air à travers une couche de céréales. Application à la ventilation des céréales en silos	3	605
PATRAULEA N. et LARISCH E., Ailes d'envergure infinie soufflées	3	599

HYDRODYNAMIQUE

	No.	Page
CODREANU D. et CRISTEA N., Une nouvelle méthode d'étude du comportement des gisements de pétrole en régime hydraulique partiel	2	357
KAHAN M., Etude des écoulements dans des lits naturels à l'aide du modelage dans des courants d'air	4	881
OROVEANU T., Quelques problèmes d'écoulement à travers un milieu poreux avec variation unidimensionnelle de la perméabilité	4	875
OROVEANU T. et PASCAL H., L'écoulement stationnaire plan-radial d'un mélange de liquide et de gaz à travers un milieu poreux	2	387

	No.	Page
POPOV MINTSCHO, Essais de pulvérisation des fluides àl'aide de modèles expérimentaux	1	9
STĂNESCU CRISTIAN et DUMITRESCU LUCIAN, Mouvement unidimensionnel de deux fluides visqueux pesants, séparés par une surface plane	4	891
VLADIMIRESCU I., Un cas particulier de mouvement ascensionnel de la nappe phréatique . . .	2	375

RÉSISTANCÉ DES MATÉRIAUX—ÉLASTICITÉ

	No.	Page
BELEŞ AUREL et MIHĂILESCU MIRCEA, Les équations d'équilibre en coordonnées obliques pour les voiles minces d'épaisseur constante	3	631
MARCU V., ZELINGHER N. et FREUND P., Etudes de certaines caractéristiques des couches obtenues par l'electrométallisation	2	465
MIHAILESCU MIRCEA, La théorie de la flexion appliquée aux paraboloïdes hyperboliques	2	421
MISICU M., Note sur une énonciation du problème spatial dans le cas dynamique de la théorie des corps élastiques	4	995
MORARU DINU, Détermination de l'état d'effort dans les poutres-paroi par la méthode de l'analogie avec un réseau	4	937
NICOLAU EDUARD, Contribution à l'application de l'analogie à membrane à l'étude des tensions à la torsion	2	485
PETRE A. Flambage des barres droites par choc axial	1	173
PETRE A., STĂNESCU C. et LIBRESCU I., Sur les meilleures structures orthotropes	4	955
PÎRVU A., Le problème plan de l'élasticité pour une couronne circulaire dans le cas du deuxième problème fondamental à la limite	2	415
PÎRVULESCU N. S., La résistance à la flexion des tiges lourdes axialement chargées d'une fraction du poids propre	3	697
PÎRVULESCU N. S., L'instabilité de rotation des tiges lourdes	4	901
POPOVICI CONST. C., Une théorie générale de la méthode de distribution des moments. I ère partie	3	677
POPOVICI CONST. C., Une théorie générale de la méthode de distribution des moments. II e partie. .	4	971
TAANASICIUC CL., Le tensomètre résistif	3	729
THEODORESCU P. P., A Method of Approximation of the Boundary Conditions for the Plane Problem of the Elasticity	3	655
VISARION VIOREL, Couvertures minces en forme de paraboloide hyperbolique	2	443
VISARION VIOREL, Calcul élastique des couvertures minces en forme d'hélicoïde droit	4	925

LUBRIFICATION, FROTTEMENT USURE

	No.	Page
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur le calcul des paliert circulaires d'allongement infini, lubrifiés aux gaz	1	81
CONSTANTINESCU V. N., Considérations sur le calcul des paliers d'allongement infini, lubrifiés aux gaz, composés de surfaces planes	3	741
ROZEANU L. et PREOŢESCU O., Détermination et utilisation des paramètres de caractérisation de la viscosité des lubrifiants	1	63
TIPEI N., Le mouvement des fluides visqueux entre parois solides ayant un déplacement relatif quelconque	1	45
VASILICA GH., Sur l'utilité de la caractéristique $p = f(V)$ pour les paliers circulaires de glissement . .	2	499
VASILICA GH. et FREUND P., Etudes expérimentales sur certains matériaux antifriction de substitution pour les paliers lisses	3	773

VIBRATIONS

	No.	Page
HAMBURGER L., Sur l'influeuce de l'inertie du sol sur les fondatious à couches élastiques intermédiaires	1	123
MARCU V. et LEZER A., Etude sur la méthode de Ryjkov pour l'élimination des vibrations lors du tournage	1	135
PETRE AUGUSTIN, Application des analogies électriques à l'étude des vibrations des milieux élastiques	2	505

	no.	Page
RĂUTU S., Le calcul des vibrations des cadres par approximations successives	1	151
RĂUTU S. et IFRIM M., A propos du calcul des fréquences des vibrations propres des cadres étagés .	3	785

ORGANES DES MACHINES

BODNĂRESCU D., Sur la façon de combiner les tiges pour len pompage en profondeur, dans l'industrie du pétrole, suivant des critériums de résistance à la fatigue	1	107

THÉORIE DES MÉCANISMES

BUGAIEVSKI E., BOGDAN R., PAVELESCU D., PELECUDI C. et LEZER A., Conisdérations sur les possibilités d'accrotre la vitesse de travail des machines circulaires automatiques à tricoter	2	393

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

DUMITRESCU I., Considérations sur le calcul des poutres continues en béton précontraint	2	545
DUMITRESCU I. et VISARION V., Influence de la composition minéralogique du ciment sur le comportement des poutres en béton armé soumises à la flexion	4	1013
FROIMESCU A., Poutre continue en béton précontraint à moment d'inertie variable et à effort de prétension constant sur toute la longueur	1	203
REVICI T., Méthode pour la simplification du renforcement des ponts métalliques	1	179
VASILESCU-KARPEN N., L'adhérence du fer au béton dans le béton armé. Détermination expérimentale de l'adhérence et de la contraction du béton	4	1001
WEISSENBERG M. et CIUNGU S., Variation de l'adhérence du béton à l'armature en fonction de de la longueur d'ancrage	2	527

MÉCANIQUE DES TERRES

BALLY R. et ANTONESCU T., Contribution au problème de l'électrosilicatisation des terres. . . .	4	1037

ESSAIS DES MATERIAUX

PANĂ GH. I., Contribution à l'étude de la pénétrabilité du bois par des liquides à différentes pressions et températures	1	235

TECHNIQUE DE L'USINAGE DES MATÉRIAUX

POPOV M., MITRICĂ I. et DECIU E., Etude des pressions spécifiques sur la surface de contact au cours du processus de laminage	2	557

MÉTHODES DE CALCUL

PÎRVULESCU N. S., Résolution des équations algébriques par une méthode de récurrence et une méthode d'approximations successives	1	249

TECHNOLOGIE DES MATERIAUX

PANĂ GH. I. et DUPU M., Les propriétés physiques, mécaniques et technologiques des essences exotiques	4	1057

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

DUMITRESCU L., Le tube à chocs et ses applications	1	282
OROVEANU T., L'essor des recherches dans le domaine de la mécanique des fluides et de l'aérodynamique dans la République Populaire Roumaine	4	1073
PAVELESCU D., Recherches à l'aide des isotopes radio-actifs dans le domaine de la mécanique appliquée	1	271
VÎRLAN RADU N., Un appareil de laboratoire pour la détermination du module de déformation du sol	4	1087

COMPTES RENDUS

	nr.	Pag.
BABUSKA I., REKTORVY K., YCICHLO F., *Matematikca theorie rovinne pruznosti* (Théorie mathématique de l'élasticité plane), Prague, 1955, par. P. P. Teodorescu	3	800
CARAFOLI E. et OROVEANU T., *Mecanica fluidelor* (Mécanique des fluides), Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1955, vol. I et II, par N. Tipei	1	293
CIȘMIGIU AL. I. et VERNESCU P. V., *Aplicații ale teoriei elasticității în construcție-plăci curbe și plane* (Applications de la théorie de l'élasticité [à la construction – plaques courbes et planes) E.S.A.C., Bucarest, 1955, par Mihail Ifrim	3	800
GOLDENBLAT I. I., *Nekotorye voprosy mehhaniki deformiruemyh sred* (Certains problèmes de la mécanique des milieux déformables), Gostehizdat, Moscou 1954, par. P. P. Teodorescu	4	1099
HANGAN MIHAI D., *Betonul armat. Introducere în alcătuirea și calculul structurilor statice (Le béton armé).* Introduction à la constitution et au calcul des structures statiques), E.S.A.C., Bucarest, 1955, vol. I, par Mircea Mihăilescu	1	295
KOCIN N. E., *Calculul vectorial și introducere în calculul tensorial* (Le calcul vectoriel et introduction au calcul tensoriel), Ed. Tehnică, Bucarest, 1954, par Adrian Lezer	2	569
LOURIÉ A. I., *Prostranst vennie zadotchi téorii ouprogosti* (Problèmes spatiaux de la théorie de l'élasticité), Gostehizdat, Moscou, 1955, par P. P. Teodorescu	2	570
NICOLAU V., FROIMESCU A. et WEISSENBERG M., *Betonul precomprimat* (Le béton précontraint), Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1956, par C. Ionescu	4	1099
NIKIFOROV S. N., *Teoria ouprougosti i plastitchinosti* (Théorie de l'élasticité et de la plasticité) Moscou, 1955, par Adrian Lezer	3	799
PATRAULEA N. N., *Aerodinamica suprafețelor permeabile* (Aérodynamique des surfaces perméables), Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1956, par T. Oroveanu	4	1101
POLIAKOV V. S., KOUDRIAVTZEV V. L., ZOUBANOV M. P., ANOSSOV A. S., BARBAS Y. D., MIAGKOV V. D., *Detali mașchine* (Organes des machines), Masghiz, Moscou, 1954, par A. Lezer		294

ERATĂ

Pag.	rîndul sau formula	în loc de:	se va citi:
17	(3.13)	$D=\sqrt{(x_1-\xi_{1z}\,\mathrm{ui}\varsigma_z(\gamma+\cdots}$	$D=\sqrt{(x_1-\xi_1)^2\sin^2\gamma+\cdots}$
17	3 de jos	$\cdots\cos\beta_0+\nu_i\bar{k}_i\sin\beta_0)]$	$\cdots\cos\beta_0)+\nu_i\bar{k}_i\sin\beta_0]$
20	12	v_3^*	$\bar{v}_3^*$
21	3 de jos	$\bar{v}$	$\bar{\nu}$
21	9 ,, ,,	δ_ρ	δ_p
31	21	$\cdots\cong 0{,}152$	$\cdots\cong 1{,}52$
36	8 de jos	$\cdots\frac{c_2}{b^2}$	$\cdots\frac{c_1}{b^2}$
39	(1.8)	$\cdots 2\,\delta\cdot{}_0x_0\cdots$	$\cdots 2\,\delta\,\dot{x}_0\,x_0\cdots$
42	1 de jos	$\frac{g}{\Omega^2}=\cdots$	$\frac{g}{\Omega_1^2}=\cdots$
50	14	C	c
50	15	C_1	c_1
90	(11)	$\cdots\int_{x_{\max}-z}^{x_{\max}},$	$\cdots\Big\vert_{x_{\max}-z}^{x_{\max}},$
90	(12)	$\cdots e^{-\frac{x_{\max}}{2}}\cdots$	$\cdots e^{-\frac{x^2_{\max}}{2}}\cdots$
95	13 de jos	efectele	defectele
103	4	izolat	izolant
112	(10)	$\cdots\frac{(-1)j}{\pi}\cdots$	$\cdots\frac{(-1)^j}{\pi}\cdots$
126	(24)	$\cdots\varkappa_2'\cdots$	$\cdots\chi_2\cdots$
131	(10)	$\cdots\mathrm{cth}\,\vartheta\pi+\cdots$	$\cdots\mathrm{cth}\,\vartheta\pi-\cdots$
131	(10)	$\cdots\mathrm{cth}\,\vartheta\pi-\cdots$	$\cdots\mathrm{cth}\,\vartheta\pi+\cdots$
132	(12)	$\cdots\frac{}{(\mathrm{cth}\,\vartheta\pi-\cdots}$	$\cdots\frac{}{(\mathrm{cth}\,\vartheta\pi+\cdots}$
132	(12)	$\cdots\frac{}{(\mathrm{cth}\,\vartheta\pi+\cdots}$	$\cdots\frac{}{(\mathrm{cth}\,\vartheta\pi-\cdots}$
136	fig. 1	y_0	Y
143	(8)	$\Gamma^*t=\cdots$	$\Gamma^*=\cdots$
143	(9)	$\cdots=\gamma_n\cdots$	$\cdots=\gamma_n^2\cdots$
151	1 de jos	$\cdots-P(t)\cdots$	$\cdots+P(t)\cdots$
152	(22)	$\cdots\frac{\partial^2 y}{\partial t^4}\cdots$	$\cdots\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}$
153	9	$\cdots\frac{1+2R\cdots}{\cdots+2R\cdots}$	$\cdots\frac{1+2R'\cdots}{\cdots+2R'\cdots}$
186	8	du stratifié	d'un stratifié
219	11 de jos	stabilit	stabilitate
219	15 ,, ,,	oprindu-se	oprindu-ne
231	10 ,, ,,	1933, vol. I.	1955, vol. I.
239	14	cu ancoramente	din anrocamente
246	9	(250 000 ha)	(260 000 ha)
263	16 şi 17	(d = cost)	(d = const.)
263	18 şi 19	(d = cost)	(q = const.)
276	3 de jos	1955. M. Popov	1955, de M. Popov
276	4 ,, ,,	metodelor	metalelor

Studii şi cercetări de mecanică aplicată 1/57.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

F 2557

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

2

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti
M. ARCAN, conferenţiar la Institutul de construcţii, Bucureşti

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VIII, nr. 2 1957

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ

Pag.

N. N. PATRAULEA, Profil cu volet fluid în prezenţa unor singularităţi date . . . 313

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, C. POPESCU, D. CĂPRIŢĂ şi H. GAB, Cercetări experimentale asupra profilelor aerodinamice suflate . . . 319

ST. SĂVULESCU, Asupra determinării caracteristicilor stratului limită prin utilizarea unor profile tip de viteze şi temperaturi . . . 341

LUCIAN DUMITRESCU, Determinarea efectului de ejecţie la profile cu volet fluid (jet-flap) . . . 357

VIBRAŢII

ALEŠ TONDL, Rezonanţa subarmonică a unui rotor, cu o caracteristică neliniară a reazemelor . . . 379

MIHAIL IFRIM, Calculul dinamic al cadrelor elastice pe baza principiului conservării energiei . . . 393

TEORIA MECANISMELOR

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN şi C. PELECUDI, Contribuţii la clasificarea mecanismelor spaţiale . . . 407

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU şi N. PASCU, Cu privire la parametrii geometrici ai cuţitului armat cu plăcuţă de carburi metalice . . . 423

ELASTICITATE – REZISTENŢA MATERIALELOR

GH. BUZDUGAN, Studiu comparativ între diverse metode pentru calculul fundaţiilor masive de maşini . . . 437

PETRE P. TEODORESCU, Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere . . . 451

Pag.

V. VISARION, O metodă pentru calculul dinamic al tuburilor și învelitorilor cilindrice circulare 491

LIVIU LIBRESCU, O nouă formulare a problemei generale a învelitorilor subțiri elastice 511

ED. NICOLAU, Cu privire la influența unui mediu elastic de încastrare asupra distribuției tensiunilor într-o consolă 525

HIDRODINAMICĂ

T. OROVEANU, O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii staționare plan-radiale a unui amestec de lichid și gaz printr-un mediu poros 541

V. MANEA, Calculul masei aparente pentru carene alungite 547

M. KAHAN și S. HÎNCU, Dinamica curenților sub presiune în canale cu rugozitate mixtă 557

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

RADU PRIȘCU, Contribuții la problema determinării temperaturilor de calcul pentru barajele arcuite 585

RECENZII 603

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene.

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utiliarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAJAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VIII, n° 2 1957

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AÉROMÉCANIQUE

Page

N. N. PATRAULEA, Profil à volet fluide en présence de singularités données . . 313

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, C. POPESCU, D. CĂPRIŢĂ et H. GAB, Recherches expérimentales sur les profils aérodynamiques soufflés . . . 319

ST. SĂVULESCU, Sur la détermination des caractéristiques de la couche limite par l'emploi de profils types de vitesses et températures 341

LUCIAN DUMITRESCU, Détermination de l'effet d'éjection, pour des profils à volet fluide (jet-flap) 357

VIBRATIONS

ALEŠ TONDL, Die unterharmonische Resonanz eines Rotors mit nichtlinearer Charakteristik der Stützen 379

MIHAIL IFRIM, Dynamic Calculus of Elastic Frames on the Basis of the Law of Conservation of Energy 393

THÉORIE DES MÉCANISMES

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN et C. PELECUDI, Contribution à la classification des mécanismes spatiaux 407

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET USINAGE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU et N. PASCU, Ueber geometrische Parameter des Schneidewerkzeugs mit Hartmetallplättchen 423

ÉLASTICITÉ — RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

GH. BUZDUGAN, Etude comparée entre différentes méthodes de calcul des fondations massives pour machines 437

P. P. TEODORESCU, Sur le calcul des poutres-parois à une seule ouverture 451

Page

V. VISARION, Une méthode de calcul dynamique des tubes et couvertures cylindriques circulaires 491

LIVIU LIBRESCU, Une nouvelle manière de formuler le problème général des coques minces élastiques 511

ED. NICOLAU, Au sujet de l'influence d'un milieu élastique d'encastrement sur la distribution des tensions dans une console 525

HYDRODYNAMIQUE

T. OROVEANU, Une méthode approximative pour l'étude de l'écoulement stationnaire plan-radial d'un mélange liquide-gaz à travers un milieu poreux 541

V. MANEA, Calcul de la masse apparente pour les carènes allongées 547

M. KAHAN et S. HÎNCU, La dynamique des courants sous pression dans les canaux à rugosité mixte 557

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

R. PRIȘCU, Contribution au problème de la détermination des températures de calcul pour les barrages-voûtes 585

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 603

ÉDITIONS DE L'ACADEÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques utilisation de l'ultrason et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique du sol, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions, hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant, autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés, en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complète que possible, comprenant, par exemple, pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15 rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ИМЕНИ ТРАЯНА ВУЯ

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VIII, № 2 1957

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

АЭРОМЕХАНИКА

Стр.

Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Профиль с текучим закрылком в случае заданных особенностей 313
Н. Н. ПАТРАУЛЯ, Л. ДУМИТРЕСКУ, К. ПОПЕСКУ, Д. КЭПРИЦЭ и Х. ГАБ, Экспериментальные исследования сдуваемых аэродинамических профилей 319
Ш. СЭВУЛЕСКУ, Об определении характеристик пограничного слоя путем применения типовых профилей для скоростей и температур 341
Л. ДУМИТРЕСКУ, Определение коэффициента эжекции для профилей с текучим закрылком 357

ВИБРАЦИИ

А. ТОНДЛ, Субгармоническая резонанция ротора с нелинейной характеристикой упругих стоек подшипников 379
М. ИФРИМ, Динамический расчет упругих рам на основе принципа сохранения энергии 393

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Е. БУГАЕВСКИ, Р. БОГДАН и К. ПЕЛЕКУДИ, К вопросу о классификации пространственных механизмов 407

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ТВЕРДЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

М. ПОПОВ, Д. ПАВЕЛЕСКУ, И. МИТРИКЭ, Е. ДЕЧУ, М. КАЛЧУ, и Н. ПАСКУ, О геометрических параметрах напайного резца с пластинкой из твердых сплавов 423

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Г. БУЗДУГАН, Сравнительное обследование разных методов расчета сплошных фундаментов для машин 437
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, К расчету однопролетных высоких балок . . 451

Стр.

В. ВИСАРИОН, Метод для динамического расчета труб и кругло-цилиндрических оболочек 491

Л. ЛИБРЕСКУ, Новая формулировка общей задачи тонких гибких оболочек 511

Э. НИКОЛАУ, О влиянии упругой среды заделки на распределение напряжений в консоле 525

ГИДРОДИНАМИКА

Т. ОРОВЯНУ, Приближенный метод изучения стационарного плоско-радиального течения смеси жидкости и газа сквозь пористую среду 541

В. МАНЯ, Расчет кажущейся массы для удлиненных корпусов . . . 547

М. КАГАН и С. ХЫНКУ, Динамика напорного потока в каналах с неравномерной шероховатостью 557

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. ПРИШКУ, К вопросу определения температур для статического расчета арочных плотин 585

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ 603

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигагели, самолетостроение, использование энергии ветра и пр.).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механическая обработка твердых сплошных сред).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех специалистов нашей страны и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

AEROMECANICĂ

PROFIL CU VOLET FLUID ÎN PREZENȚA UNOR SINGULARITĂȚI DATE

DE

N. N. PATRAULEA

1. Considerații generale. Într-o notă precedentă [1] am dat o metodă liniarizată pentru determinarea mișcării în jurul unui profil cu jet [2] —[7], ținînd seama de efectul forțelor care provoacă formarea jetului. Se știe că este avantajos de a situa aceste forțe pe extradosul profilului aproape de bordul de fugă. Efectul acestor forțe a fost reprezentat pînă la urmă printr-o sursă negativă.

În nota citată însă s-a presupus implicit că această sursă este destul de slabă, astfel încît cîmpul vitezelor ei să fie mic în raport cu viteza de la infinit $\overline{V}_\infty$ în majoritatea punctelor din plan.

Vom prezenta acum problema mai generală a unui profil cu volet fluid în prezența unor singularități date, folosind în același timp condiții la limită mai riguroase.

2. Condiții la limită. Să însemnăm prin $w(z) = u - iv$ viteza complexă de perturbație în raport cu cîmpul cunoscut $w^\star(z) = u^\star - iv^\star$. Acest cîmp $w^\star$ se compune din viteza de la infinit și din cîmpul indus de singularitățile date.

Presupunînd că profilul este subțire și că se proiectează pe axa reală a planului $z = x + iy$ între O și c, iar jetul de bracaj inițial suficient de mic, proiectîndu-se pe axa reală între c și ∞ (figura 1), avem următoarele condiții la limită liniarizate :

$$\frac{v + v^\star}{u^\star} = \theta(x),\ 0 < x < c; \tag{1}$$

$$\frac{I}{r} = \rho\, u^\star\, \gamma, \tag{2}$$

unde s-a notat prin

$\theta(x)$ — panta profilului (sau a jetului) măsurată algebric în sensul direct trigonometric față de axa Ox;

γ — densitatea turbionară pe linia de jet provenind de la viteza complexă necunoscută;

I — debitul de impuls al jetului;

r — raza de curbură a liniei de jet.

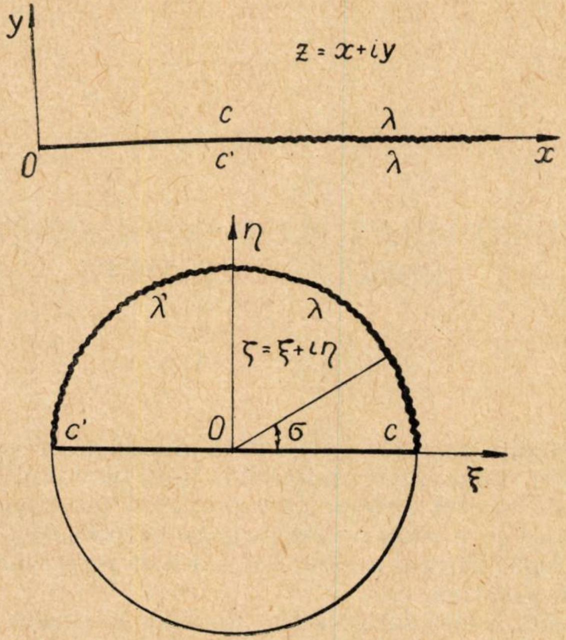


Fig. 1

Curbura jetului este dată în mod aproximativ de expresia

$$\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{v + v^*}{u^*}, \tag{3}$$

derivata fiind luată pe Ox.

Introducînd de asemenea coeficientul de jet

$$K_j = \frac{I}{\rho/_2 V_\infty^2 \, c}$$

relația (2) se scrie

$$\frac{c}{2} V_\infty^2 \, K_j \frac{\partial}{\partial_x} \frac{v + v^*}{u^*} = - u^* \gamma, \tag{4}$$

sau integrînd în raport cu x,

$$\frac{c}{2} V_\infty^2 \, K_j \left(\frac{v(x) + v^*(x)}{u^*(x)} - \frac{V}{U}\right) = \int_x^\infty \frac{d\Gamma(x)}{dx} \cdot u^*(x)\, dx, \tag{5}$$

$\Gamma(x)$ este circulația vitezei necunoscute în jurul profilului și a părții de jet pînă la abscisa x.

Formula (5) poate să se scrie de asemenea

$$\frac{c}{2} V_\infty^2 K_j \left(\frac{v+v^*}{u^*} - \frac{V}{U}\right) = \Gamma_\infty U - \Gamma(x)u^*(x) - \int_x^\infty \Gamma(x)\frac{du^*}{dx}\,dx. \qquad (6)$$

Este util să se adopte următorii parametri adimensionali :

$$\bar{u} = \frac{u}{V_\infty}\,; \quad \bar{u}^* = \frac{u^*}{V_\infty}\,; \quad \bar{U} = \frac{U}{V_\infty}\,;$$
$$\bar{z} = \frac{z}{c}\,; \quad \bar{\Gamma}(\bar{x}) = \frac{\Gamma(x)}{V_\infty \cdot c} \qquad (7)$$

și atunci relația (6) devine

$$\frac{K_j}{2}\left(\frac{\bar{v}+\bar{v}^*}{\bar{u}^*} - \frac{\bar{V}}{\bar{U}}\right) = \int_{\bar{x}}^{\infty} \bar{u}^* d\Gamma(x). \qquad (8)$$

3. Transformarea conformă pe un semicerc. Funcția

$$\bar{z} = \frac{4\zeta^2}{(\zeta^2+1)^2} \qquad (9)$$

transformă conform planul z avînd ca tăietură semiaxa reală pozitivă, pe semicercul planului complex $\zeta = \xi + i\eta$ (figura 1).

Înainte de a vedea ce devine relația (8) pe semicircumferința superioară, să punem potențialul complex necunoscut sub forma

$$f(\zeta) = F_\Gamma + F_P + F \qquad (10$$

unde

$$F_\Gamma = -\bar{\Gamma}_\infty - \frac{\bar{\Gamma}_\infty}{\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} \qquad (11)$$

$$F_P = f_P(\zeta) - \overline{f_P\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}$$
$$f_P(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} v(\xi) \left|\frac{dx}{d\xi}\right| \ln(\zeta - \xi)\, d\xi \qquad (12)$$

$$v(\xi) = \begin{cases} v(x), & \xi > 0, \\ -v(x), & \xi < 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Această ultimă funcțiune, $v(x)$, este furnizată de relația (1). Prin introducerea funcției $F_P(\zeta)$ condiția la limită (1) este satisfăcută oricare ar fi funcția olomorfă în *cercul întreg*.

$$F(\zeta) = \Phi + i\,\Psi = \Sigma A_n \zeta^n. \qquad (14)$$

Pe de altă parte, deoarece potențialul vitezelor de perturbație poate să fie conceput că este indus de un strat de vîrtejuri situat pe Ox, rezultă că, coeficienții A_n sînt reali și de rang impar.

Ținînd seama mai departe de relațiile (10), (11), (12) și (13), relația (8) devine pe primul cadran al cercului $\zeta = e^{i'\sigma}$

$$4 \sin \sigma \int_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}} \overline{u}^{\star} \sum_{1}^{\infty} l A_l \sin l\sigma d\sigma + K_j \sum_{1}^{\infty} \frac{\cos^3 \sigma}{2\overline{u}^{\star 2}} n A_n \cos n\sigma = \\ = -\frac{K_j}{2} \frac{\cos^3 \sigma}{\overline{u}^{\star 2}} \left(\frac{d\psi_P}{d\sigma} + \frac{d\psi\Gamma}{d\sigma} \right) + \frac{K_j}{2} \cdot \frac{\cos^3 \sigma}{\overline{u}^{\star}} \left(\frac{\overline{v}^{\star}}{\overline{u}^{\star}} - \frac{\overline{V}}{\overline{U}} \right). \tag{15}$$

În afară de această relație se va folosi și ecuația

$$\frac{K_j}{2} \left(\theta_1 - \frac{\overline{V}}{\overline{U}} \right) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \overline{u}^{\star} d\overline{\Gamma}, \tag{16}$$

care leagă portanța suferită de jet de bracajul inițial θ_1 al jetului.

Dacă, în particular, $\overline{u}^{\star} = \overline{U}$ și $\overline{v}^{\star} = \overline{V}$, dăm peste condiția deja studiată de alți autori și de noi înșine [3] — [7].

În cazul general ecuația (15) poate de asemenea să fie rezolvată prin procedeele cunoscute ale calculului numeric.

După determinarea potențialului complex $f(\zeta)$ forțele aerodinamice care acționează asupra profilului pot fi calculate prin integrarea presiunilor pe profil.

Primită la redacție la 24 ianuarie 1957.

ПРОФИЛЬ С ТЕКУЧИМ ЗАКРЫЛКОМ В СЛУЧАЕ ЗАДАННЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Представляется обобщение задачи профиля с текучим закрылком, соответствующее случаю известного поля скоростей, обусловленного данными особенностями.

После обобщения в намеченном смысле предельных линеаризованных условий, автор прибегает к своему методу, применяемому для случая равномерного поля скоростей (без других особенностей) [4].

PROFIL À VOLET FLUIDE EN PRÉSENCE DE SINGULARITÉS DONNÉES

(RÉSUMÉ)

On présente une généralisation du problème du profil à volet fluide, correspondant au cas de l'existence d'un champ de vitesses connues provenant de certaines singularités connues.

Après une généralisation, dans le sens indiqué, des conditions à la limite du problème linéarisé, l'auteur utilise sa méthode, appliquée auparavant au cas du champ connu uniforme (sans autres singularités) [4].

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu jet cu efect combinat.* Comunicările Acad. R.P.R., nr. 2, 1957, p. 57.
2. I. M. Davidson, *The Jet-Flap,* Journal of the Royal Aeron. Scienc., ian. 1956, p. 26.
3. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu volet fluid.* Congresul Matematicienilor Romîni, mai 1956.
4. — *Contributions théoriques à l'étude des profils à volets fluides.* Congresul al IX-lea de mecanică aplicată, Bruxelles, 11 septembrie 1956.
5. Maurice Roy, *Principes d'études de l'aile à jet.* Les Recherches Aéronautiques, iulie-august 1956, nr. 2.
6. Raymond Siestrunck et J. J. Bernard, *Sur une méthode de détermination des potentiels de perturbation dans la théorie linéarisée du soufflage au bord de fuite des profils d'ailes.* Comptes Rendus des séances de l'Acad. des Sciences, Paris, 1956, nr. 20, p. 2443.
7. L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton et P. Jousserandot, *Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de la circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avion.* O.N.E.R.A., Notes techniques, 1956, nr. 37.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

AEROMECANICĂ

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA PROFILELOR AERODINAMICE SUFLATE

DE

N. N. PATRAULEA, L. DUMITRESCU, C. POPESCU, D. CĂPRIŢĂ şi H. GAB

A. INTRODUCERE

Într-o lucrare precedentă [1] s-a propus o schemă fizică unică pentru explicarea funcţionării mai multor dispozitive de hipersustentaţie, şi anume s-a scos în evidenţă existenţa unor forţe care acţionează asupra curentului din vecinătatea profilului, în sensul circulaţiei favorabile pentru sustentaţie.

Forţele menţionate pot proveni de la structuri solide, în general permeabile, sau datorită unor fenomene de ejecţie avînd sediul în domenii din vecinătatea profilului. Aceste domenii pot fi adesea aproximate prin suprafeţe permeabile cum ar fi discuri de elici, plăci perforate etc.

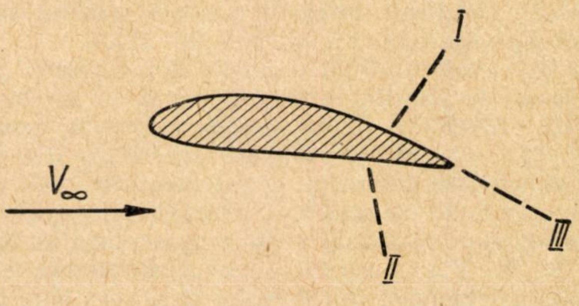


Fig. 1

Figura 1 arată trei dispoziţii tipice ale unei suprafeţe permeabile în raport cu un profil de aripă, forţele avînd în toate cazurile sensul convenabil pentru circulaţie.

De altfel, dispoziţia II este aceea a unui volet de intrados, suprafaţa permeabilă fiind pasivă [2], [3], [4], [5].

Prin analogie, s-ar putea numi suprafaţa permeabilă activă I „volet de extrados".

În ceea ce priveşte aripa plană, N. N. Patraulea a conceput realizarea forţelor aplicate fluidului principal corespunzătoare dispoziţiei I, prin ejecţia provocată de o serie de jerbe ale unui fluid primar care ţîşneşte din interiorul aripei, aşa cum se vede în figura 2.

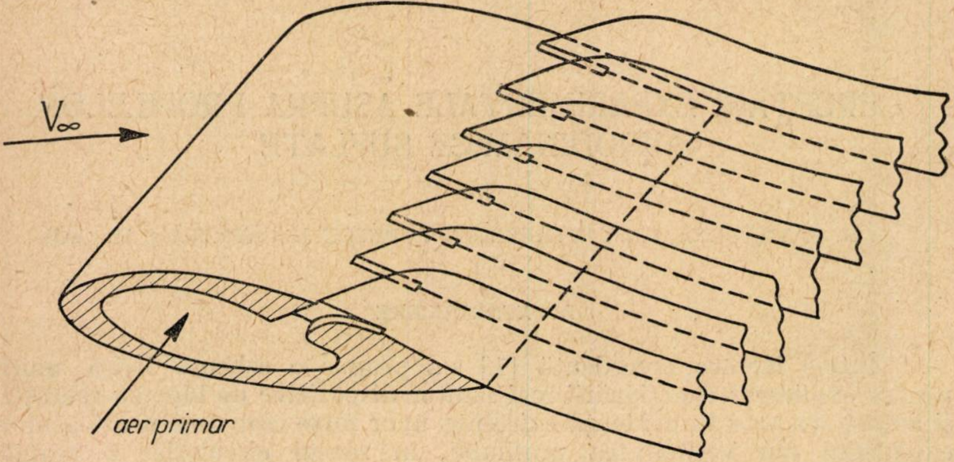


Fig. 2

Aerul secundar este antrenat printre aceste jerbe.

Vom arăta că hipersustentaţia prin aşa-numitul jet de bord de fugă sau „volet fluid" (jet-flap) intră în aceeaşi schemă fizică generală şi anume corespunde aproximativ dispoziţiei III.

Într-adevăr, „voletul fluid" constă din lansarea pe la bordul de fugă a unei pînze de jet din interiorul aripii cu un bracaj convenabil. Se constată din experienţe şi din teoriile făcute în acest sens [6], [7], [8], [9], [10], [11] că datorită forţelor centrifuge din jet, pînza fluidă este capabilă să suporte diferenţe de presiuni între cele două feţe ale ei. Reacţiunea acestor forţe de presiune, adică forţele aplicate de jet asupra fluidului exterior, sînt de sensul celor reprezentate în figura 1 (III).

Iniţial, N. N. Patraulea a avut în vedere cercetarea teoretică şi experimentală a schemelor din figura 1 (I şi III), cînd forţele sînt realizate fie prin suprafeţe permeabile active fie prin forţe de ejecţie.

Lucrările experimentale ce se expun în nota de faţă se referă la voletul de extrados din figura 1 (I), realizat prin ejecţie.

Este interesant să remarcăm încă de pe acum că dacă amestecul celor două fluide se face pînă la bordul de fugă, dincolo de bordul de fugă jetul total (de aproximativ acelaşi debit de impuls ca cel primar) se comportă ca un volet fluid. Amîndouă efectele se adună.

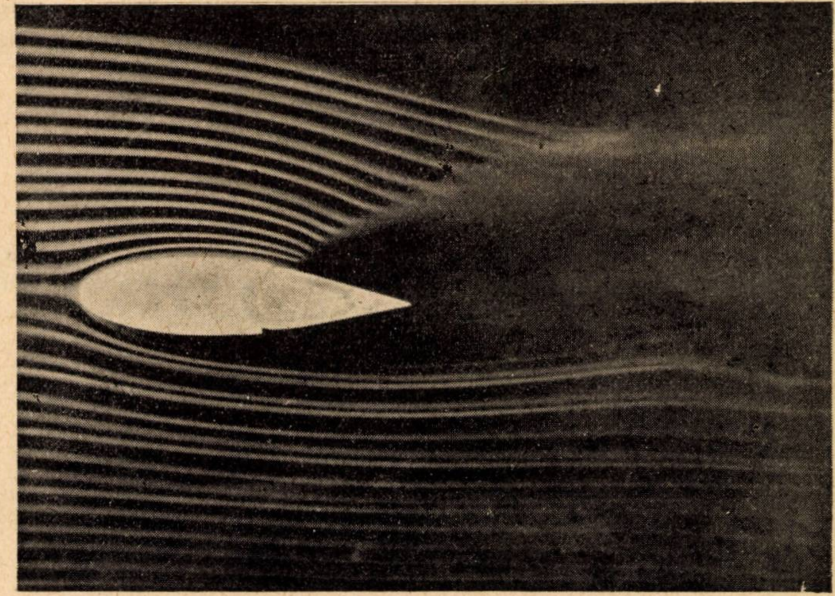


Fig. 3 a

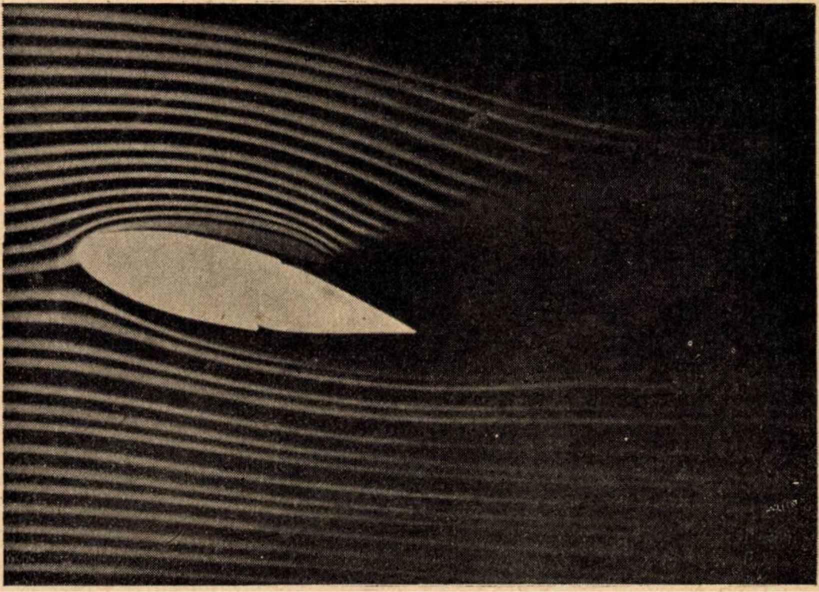


Fig. 3 b

Efectul de volet fluid este cu atît mai mare cu cît incidența profilului (sau a unui volet de curbură pe care ar fi plasate fantele de ieșire a fluidului primar) este mai mare. Figura 3 reprezintă o vizualizare cu fum a unui profil suflat.

B. DESCRIEREA EXPERIENȚELOR

1. Experiențe preliminare

Pentru a se verifica funcționarea fantelor, ceea ce nu se poate face în mod teoretic, s-a confecționat înainte de proiectarea oricărui model o fantă izolată care a fost încercată. Forma fantei a fost aleasă în mod empiric, astfel încît aerul să se scurgă la ieșire de-a lungul suprafeței aripii, Forma fantei este reprezentată în figura 4.

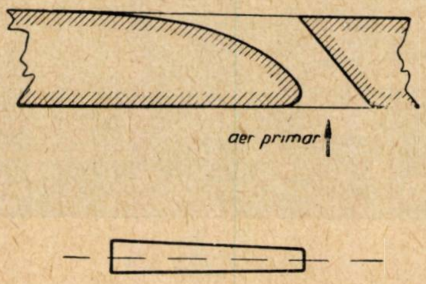


Fig. 4

Experiențele au avut doar un caracter calitativ și au arătat că scurgerea are loc conform previziunilor, lama de aer care iese din fantă nedeslipindu-se de suprafața aripii. Figura 5 (reprodusă după o fotografie) arată poziția unor fire de mătase plasate la ieșirea din fantă.

Experiențele au mai pus în evidență și efectul sensibil de antrenare a aerului secundar. S-a mai constatat că modificarea formei gurii de ieșire în sensul îngustării fantei spre aval, produce rezultate defavorabile, încît s-a adoptat o deschidere trapezoidală ca în fig. 4.

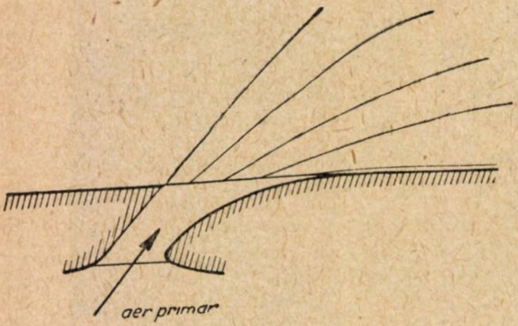


Fig. 5

În posesia rezultatelor de mai sus s-a putut trece la proiectarea și confecționarea modelului de aripă.

2. Descrierea modelului

Determinarea acțiunii curentului asupra aripii a fost făcută prin măsurarea presiunilor în diferite puncte pe profil. Nu s-au cîntărit forțele

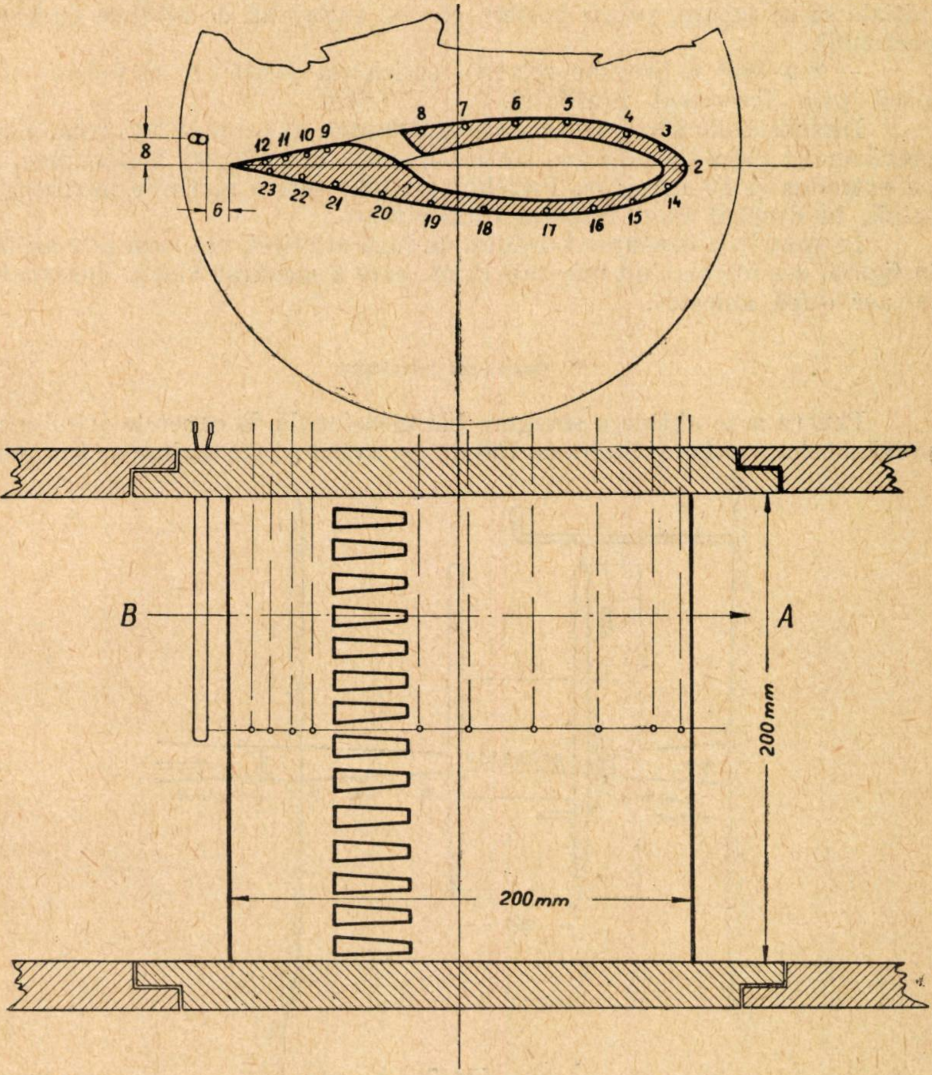

8
7
6
5
4
3
2
12 11 10 9
23
22
21
20
19
18
17
16
15
14
8
6
B
A
200mm
200 mm

Fig. 6

globale aerodinamice întrucît conducta de aducțiune a aerului pentru suflat, fiind legată de machetă, falsifică măsurătorile cu balanța aerodinamică.

Profilul ales a fost de tipul NA CA 0015, biconvex simetric, cu o grosime relativă maximă de 15% ; la baza alegerii profilului au stat următoarele considerente :

— S-a luat un profil cunoscut, cu caracteristici bine definite.

— S-a preferat o formă simetrică, pentru ca la aceste experiențe inițiale să se separe, pe cît posibil, efectul suflajului de efectele curburii profilului.

— S-a luat o grosime relativă suficientă pentru a se putea sufla aerul prin interiorul profilului.

Dimensiunile aripii sînt : coarda 200 mm, anvergura 200 mm. S-au prevăzut 21 prize de presiune statică dispuse ca în figura 6 şi anume 11 pe extrados şi 10 intrados. Prizele s-au luat într-o secțiune mediană a aripii, în dreptul unui interval dintre fante.

În spatele şi deasupra bordului de fugă al aripii, aşa cum este arătat în figură, s-a instalat un mic tub Pitot, care a măsurat viteza curentului de aer după amestec.

3. Descrierea instalației

Pentru a se obține o scurgere bidimensională, la capetele aripii s-au prevăzut două panouri înalte de 750 mm şi avînd o profunzime de 600 mm, confecționate din lemn cu grosimea de 24 mm şi profilate la bordul de atac şi de fugă (fig. 7).

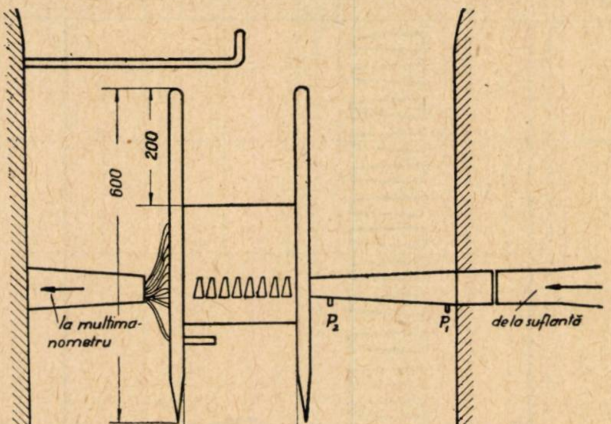


Fig. 7

În aceste panouri sînt decupate două discuri de care este legată aripa, astfel încît să se poată varia incidența aripii, prin rotirea lor.

Aerul primar a fost suflat în aripă cu ajutorul unui ventilator centrifugal de tip ICAR, avînd o putere de 5,5 kW, un debit de 1 m^3/s şi o suprapresiune maximă de 200 mm coloană de apă. Suprapresiunea cerută de model este de ordinul a 200 mm col. apă, iar debitul este mult mai mic, astfel că suflanta lucrează aproape în gol. De la suflantă, aerul este condus în aripă, printr-o conductă convergentă.

Prizele de presiune de pe model sînt legate la un multimanometru cu alcool aşezat în poziţie verticală, presiunea de referinţă fiind presiunea statică din tunel. Citirea se face prin fotografierea multimanometrului.

Pentru măsurarea caracteristicilor aerului primar suflat, s-au folosit următoarele mijloace :

1. Debitul de aer dat de suflantă a fost măsurat cu ajutorul a două prize statice montate în două puncte ale convergentului care conduce aerul de la suflantă la model (P_1 şi P_2, fig. 7). O explorare a scurgerii într-o secţiune a conductei de aducere, explorare care a arătat o repartiţie bună a scurgerii, a permis etalonarea diferenţei de presiune dată de cele două prize, în funcţie de debitul de aer furnizat de suflantă.

2. Suprapresiunea produsă de suflantă s-a măsurat cu ajutorul unei prize statice montată pe convergentul de aducere a aerului primar, imediat înainte de intrarea în aripă. Ca presiune de referinţă s-a luat presiunea statică din tunel.

Viteza scurgerii din suflerie s-a măsurat folosindu-se prizele statice etalonate ale tunelului, iar drept control un tub Pitot aşezat în faţa aripii, la 300 mm de bordul de atac. De altfel, s-a constatat că cele două indicaţii practic coincid. Priza de presiune statică de referinţă, pentru toate măsurătorile de presiune, a fost luată de la tubul Pitot din faţa aripii. În fig. 8 este arătată schema instalaţiilor de măsură.

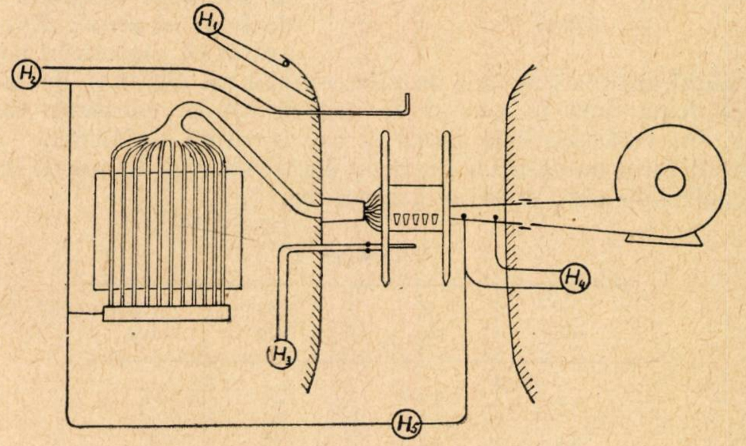


Fig. 8

Semnificaţia notaţiilor (folosite în toate experienţele) este următoarea :

H_1 — diferenţa de presiune dată de prizele statice ale tunelului (scara 1/1),

H_2 — diferența de presiune dată de tubul Pitot pentru viteză (scara 1/2),

H_3 — diferența de presiune dată de tubul Pitot de la bordul de fugă al aripii (scara 1/1),

H_4 — diferența de presiune dată de prizele pentru măsurarea debitului de aer primar (scara 1/2),

H_5 — suprapresiunea dată de suflantă (scara 1/1) pe multimanometru — tubul 24,

$h_2 ... h_{12}$ — diferențe de presiune pe extradosul aripii,

$h_{14} ... h_{23}$ — diferențe de presiune pe intrados,

h_1, h_{13} și h_{25} — tuburi martor.

4. Experiențe la punct fix

Înaintea executării lucrărilor în tunel s-au făcut o serie de experiențe la punct fix. Aceste experiențe au avut două scopuri : în primul rînd, determinarea unor parametri importanți pentru calculele ulterioare (vezi punctul C), iar în al doilea rînd, aflarea portanței și a celorlalte caracteristici ale aripii la punct fix ($V_\infty = 0$).

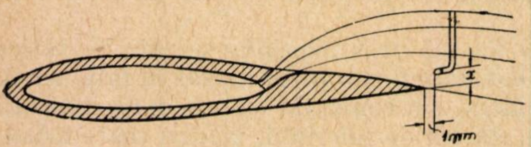


Fig. 9

În acest scop s-a studiat întîi aspectul calitativ al scurgerii cu fire de mătase, iar apoi s-a făcut o explorare a jetului de aer după amestec, la bordul de fugă al aripii. Explorarea a arătat că amestecul aerului primar cu aerul antrenat se face practic complet pe distanța de la fante la bordul de fugă, încît în sensul anvergurii nu se constată variații ale vitezelor. Pe verticală însă jetul nu are o viteză uniformă.

Tubul Pitot cu care s-a făcut explorarea a fost dispus ca în figura 9.

Rezultatele sînt date în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

x mm	V m/s	x mm	V m/s
0	15,7	24	15,3
5	19,1	26	13,6
10	22,5	28	8,0
15	21,7	30	6,35
20	16,4	35	2,4
22	16,1		

Diagrama din figura 10 reprezintă profilul vitezelor în jet, la punct fix, pentru o valoare H_4 = 120 mm col. alcool, adică la un debit al suflantei de 0,045 m^3/s.

Se constată că lățimea jetului este de circa 30 mm, adică 15% din coardă.

După executarea acestor experiențe preliminare s-a trecut la înregistrarea presiunilor de profil. Deoarece aceste presiuni au valori reduse, pentru mărimea preciziei s-a conectat pe rînd fiecare priză de presiune cu un micromanometru Askania cu șurub micrometric.

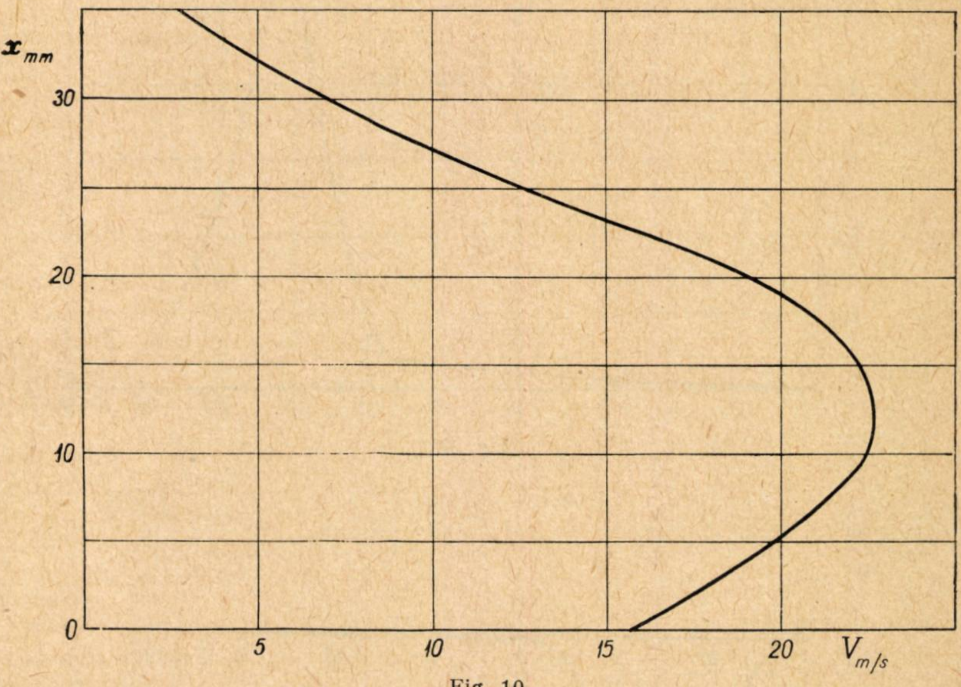


Fig. 10

Rezultatele sînt prezentate în tabloul nr. 2, unde presiunile sînt date în mm col. apă.

Tabloul nr. 2

Nr. prizei	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
h	0,87	0,12	0,15	0,16	0,22	0,34	0,84	11,48	5,82	3,17	0,35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Debitul suflantei a fost de 0,042 m^3/s, iar suprapresiunea de 205 mm col. apă.

În diagramele din figura 11 și 12 sînt reprezentate proiecțiile acestor presiuni pe coardă și pe normala la coardă.

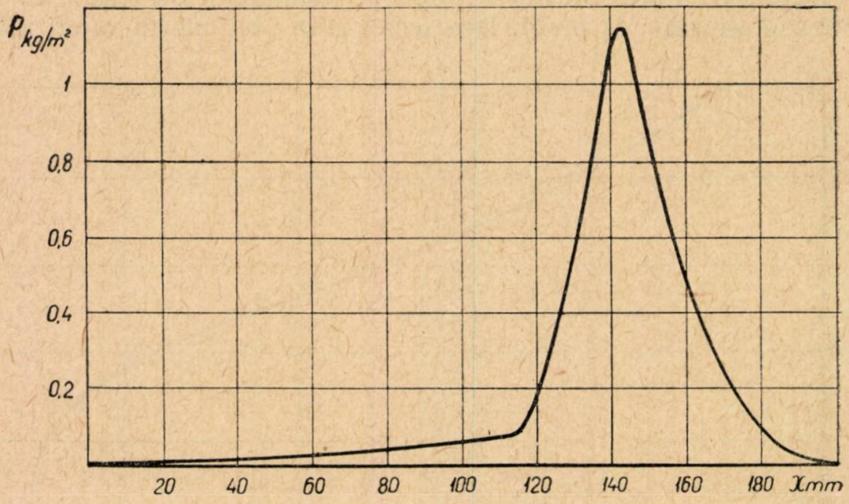

p kg/m²
1
0,8
0,6
0,4
0,2
20
40
60
80
100
120
140
160
180
X mm

Fig. 11

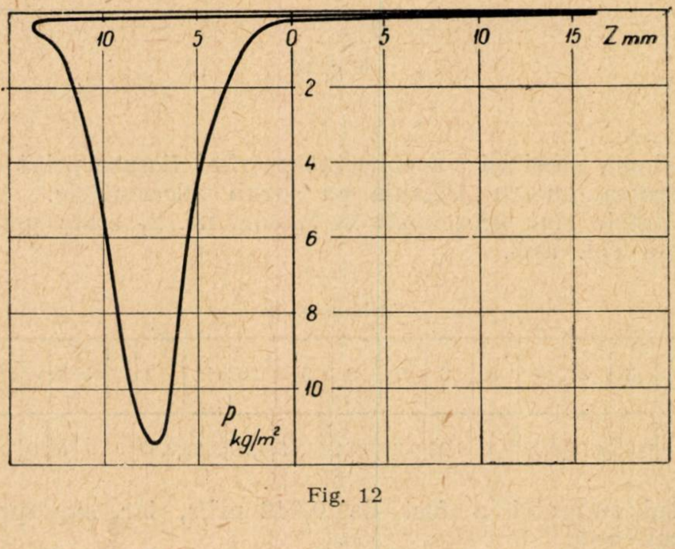

10
5
0
5
10
15
Z mm
2
4
6
8
10
p kg/m²

Fig. 12

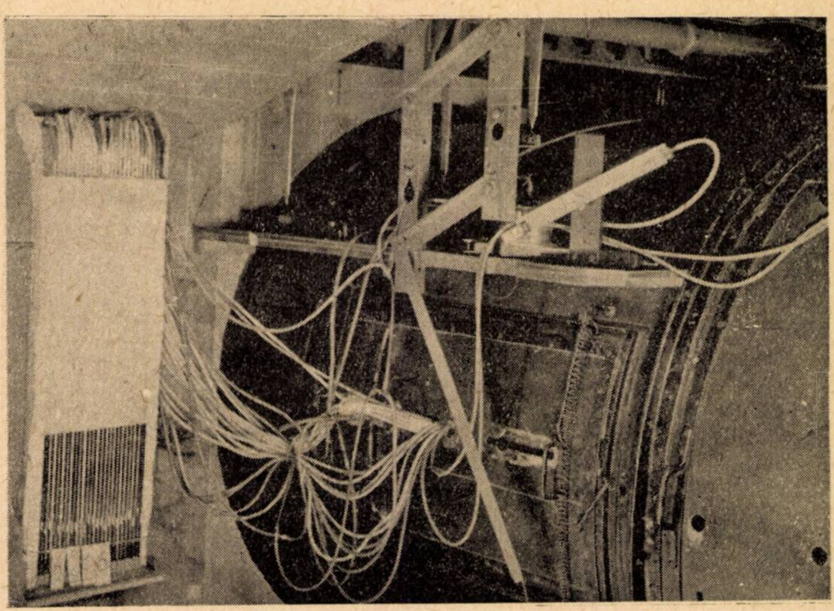


Fig. 13

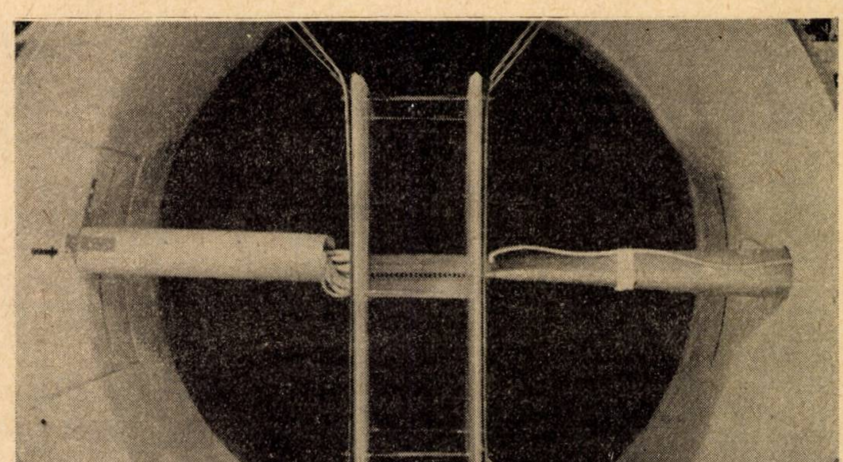


Fig. 14

5. Experiențe în suflerie

După experiențele la punct fix s-a montat aripa în tunel. Figurile 13 și 14 sînt luate în camera reostatului și în suflerie.

În primul rînd s-a determinat poziția axei de portanță nulă. Pentru aceasta s-a obturat trompa de aducere a aerului primar și s-au ridicat diagramele de presiuni pe profil. La o incidență de 0°45′ față de orizontală, experiența (fig. 15) a dat $C_z = 0$.

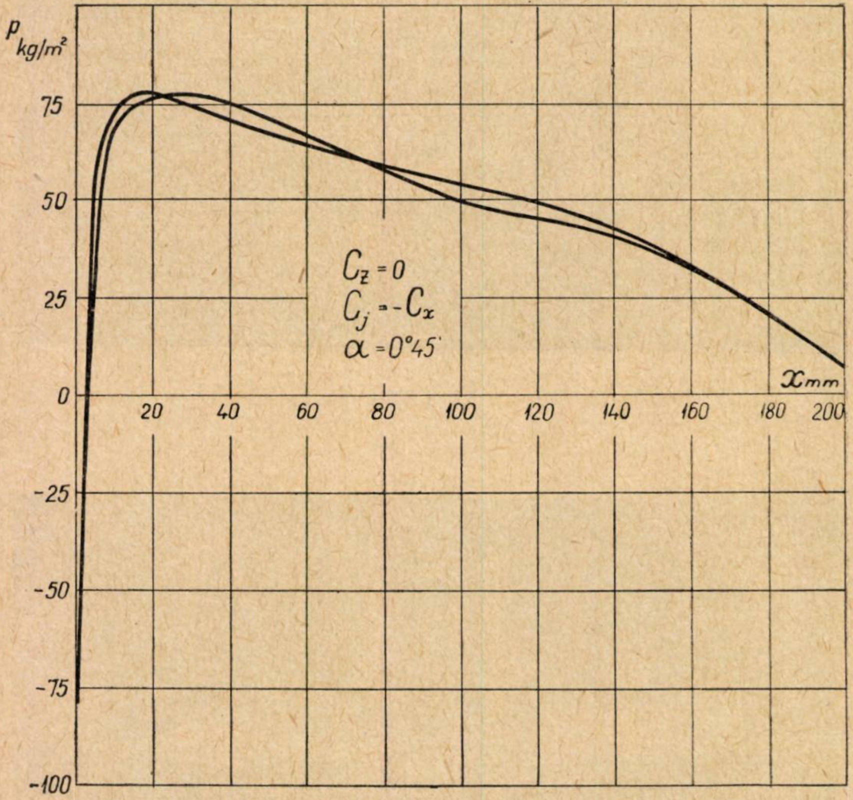


Fig. 15

În această valoare de 0°45′ se cuprinde unghiul de portanță nulă al profilului (care din execuție nu este perfect simetric) și descedența suflului tunelului, care este de circa 20′.

După conectarea suflantei la aripă s-au făcut experiențele cu suflu, după următorul program :

Grupa I de experiențe

S-a menținut suflanta în plin și s-a variat viteza tunelului din 10 în 10 mm la micromanometru, pentru diversele incidențe de la —15 la +24°, din 3 în 3°.

La incidenţa de 18° s-a constatat dezlipirea curentului. Prin mărirea vitezei sufleriei se atinge o valoare pentru care curentul de aer se lipeşte de profil. Se observă un salt brusc al depresiunilor de pe aripă, împreună cu o creştere bruscă a valorii vitezei citită la tubul Pitot de la bordul de fugă. Micşorînd apoi viteza tunelului, desprinderea scurgerii se produce cu un însemnat histerezis, la o viteză mult mai mică. După desprindere, tubul Pitot de la bordul de fugă indică o viteză nulă, ceea ce înseamnă că jetul de aer suflat nu se mai scurge de-a lungul profilului.

Grupa II de experienţe

S-a obturat apoi în diferite proporţii orificiul de admisie al suflantei, ceea ce a variat debitul de aer prin fantă.

Grupa III de experienţe

În continuare s-au făcut o serie de lucrări după obturarea a jumătate din numărul fantelor, alternativ, restabilind forma profilului cu plastilină. Se constată însă că distanţa între fante este prea mare pentru ca amestecul aerului primar cu cel secundar să se poată face complet pînă la bordul de fugă.

Grupa IV de experienţe

La sfîrşit s-a obturat complet fantele cu plastilină şi s-a ridicat polara profilului, cu ajutorul diagramelor de presiune.

C. PREZENTAREA REZULTATELOR

1. Calculul coeficienţilor aerodinamici

1.1. *Consideraţii preliminare*

Să considerăm o aripă cu jet, de anvergură infinită, plasată într-un curent $V\infty$ şi fie A şi B două linii de curent care închid între ele aripa şi jetul (fig. 16).

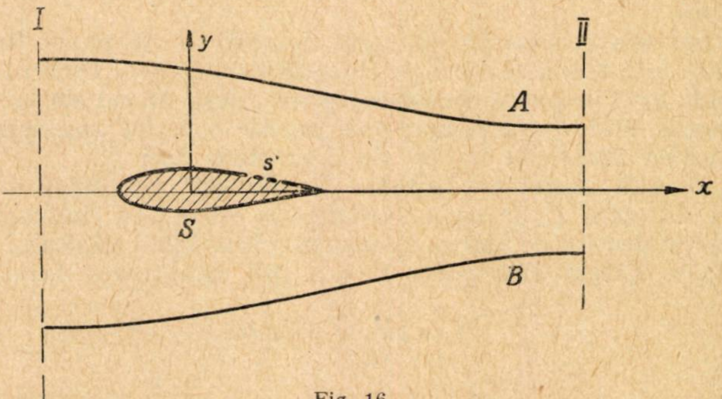


Fig. 16

Fie o suprafaţă de control, formată din aceste linii de curent, secţiunile transversale de la infinit amonte şi aval (I şi II) şi profilul aripii (suprafețele S și s'). Aplicînd teorema impulsului pe direcția Ox la fluidul cuprins în această suprafață de control, avem

$$Pr_x \int_{A+B+\mathrm{I}+\mathrm{II}} p\bar{n}d\sigma + Pr_x \int_{S+s'}^{1} \bar{f}d\sigma = -i + I_1 + I_2 \tag{1}$$

unde

$\bar{n}$ este versorul normalei la suprafața de control, îndreptat către interiorul fluidului;

$\bar{f}$ este forța unitară exercitată de profil asupra fluidului (produsă de presiuni și frecare);

$I_1, I_2, -i$ sînt proiecțiile orizontale ale debitelor de impuls pe suprafețele I, II și s' ($+i$ este debitul de impuls orizontal al jetului care iese din aripă).

S-a presupus că aerul primar este admis în aripă perpendicular pe planul mișcării.

După cum se știe, primul termen din ecuația (1) este nul [2]*). Rezultă

$$i - F_x = I_1 + I_2. \tag{2}$$

Aici avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathrm{I}} \rho V dQ, \\ I_2 &= \int_{\mathrm{II}} \rho V dQ. \end{aligned} \tag{3}$$

Debitul dQ se consideră pozitiv, cînd iese din domeniul delimitat de suprafața de control.

F_x este componenta orizontală a rezultantei forțelor aerodinamice de pe profil.

Să aplicăm ecuația (2) în cazul mișcării de la punct fix, ceea ce este posibil, prin trecere la limită. În acest caz $I_1 = 0$. Debitul de impuls I_2 la infinit aval se poate considera că nu diferă de cel de la bordul de fugă al aripii, unde jetul primar este practic complet amestecat. Explorarea vitezelor făcută la bordul de fugă oferă deci I_2.

Pe de altă parte, cunoașterea distribuției presiunilor pe profil la punct fix ne oferă F_x în mod aproximativ (neglijînd influența frecării pe profil). Se deduce de aici componenta orizontală a debitului de impuls al jetului, i. Acesta însă poate fi pus sub următoarea formă:

$$i = \rho \int_{S_f} V_x V_n \, d\sigma \tag{4}$$

unde S_f este secțiunea gurii de ieșire a fantelor (corespunzînd la s' (fig. 16) minus plinurile dintre fante).

---

*) p. 131.

Este natural să admitem că raportul dintre viteza $\overline{V}_j$ într-un punct de pe S_f și debitul primar Q depinde numai de geometria fantei și nu de mărimea lui Q sau de condițiile de scurgere în exteriorul aripii (V_∞). Rezultă

$$i = \rho Q^2 \int_{S_f} \frac{V_x}{Q} \cdot \frac{V_n}{Q}\, d\sigma = \rho \frac{Q^2}{S_j} \qquad (5)$$

unde prin S_j am notat o constantă de dimensiunea unei suprafețe, care reprezintă inversul integralei din (5).

Această constantă se determină la punct fix, cînd se cunoaște i și Q. Se găsește

$$S_j = 0{,}00097 \text{ m}^2. \qquad (6)$$

1.2. *Calculul coeficientului de jet,* C_j.

Să reluăm relația (2) în cazul unei mișcări cu o viteză V_∞; ea se mai poate scrie astfel:

$$i - F_x = I_2 - |I_1|. \qquad (7)$$

În membrul drept al relației (7) s-a scos în evidență excesul de debit de impuls, comunicat fluidului de către jetul de aer primar. De aceea este natural să se adopte un coeficient de jet, care să indice tocmai contribuția de impuls a suflajului, sub forma

$$C_j = \frac{I_2 - |I_1|}{\rho/_2 S V_\infty^2}. \qquad (8)$$

Cu ajutorul relației (7) se obține formula pentru calculul lui C_j pentru experiențele cu o viteză V_∞

$$C_j = \frac{i - F_x}{\rho/_2 S V_\infty^2}. \qquad (9)$$

În formula de mai sus i este componenta orizontală a debitului de impuls a jetului primar, iar F_x componenta orizontală a rezultantei presiunilor de pe profil.

Formula de calcul, pentru experiențele de față, rezultă

$$C_j = 0{,}1275 \frac{H_4}{H_2} \cos \alpha - C_x. \qquad (10)$$

1.3. *Calculul coeficientului energetic* C_e

Pentru cunoașterea puterii necesare realizării unei anumite portanțe, la avionul real, este util să se introducă un coeficient energetic net. Conductele de aducție a aerului primar au forme și lungimi diferite în realitate față de model și astfel pierderile de sarcină diferă față de cele ce se produc la model. Aceste pierderi se pot de altfel determina separat prin calcul sau experimentare. Ținînd seama de cele de mai sus, în coeficientul energetic vom introduce numai puterea netă consumată prin realizarea jetului. Vom defini deci coeficientul energetic astfel :

$$C_e = \frac{Q \Delta p_j}{\rho/2\, S V_\infty^3} \tag{11}$$

unde Δp_j reprezintă suprapresiunea totală necesară producerii jetului, fără a ține seama de frecare.

Pentru a o determina, să scriem ecuația lui Bernoulli pentru jetul primar, între impact și punctul de ieșire din aripă

$$p_0 + \Delta p_j = p_{\text{local}} + \rho/2 V_j^2 \tag{12}$$

(am presupus că aerul primar este preluat cu presiunea statică de la infinit. Fie δp diferența de presiune locală față de p_0 în punctul de ieșire al jetului

$$p_{\text{local}} = p_0 + \delta p. \tag{13}$$

Rezultă

$$\Delta p_j = \rho/_2\, V_j^2 + \delta p. \tag{14}$$

Se deduce, pentru cazul nostru,

$$C_e = 0{,}0915 \frac{1}{H_2} \sqrt{\frac{H_4}{H_2}} \left[1{,}13\, H_4 + 0{,}43\,(h_8 + h_9)\right]. \tag{15}$$

1.4. *Calculul coeficienților* C_z și C_x

Forțele aerodinamice de pe profil au fost calculate prin integrarea curbelor de presiune. În acest scop s-au calculat întîi coeficienții unitari C_n și C_t ai forțelor aerodinamice normale și tangente la coardă și apoi s-au proiectat pe direcțiile tangentă și normală la viteză, după următoarele relații, deduse din figura 17.

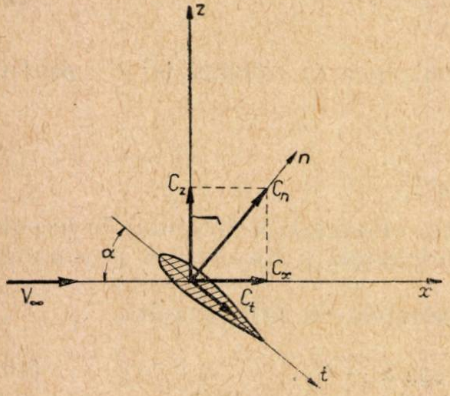


Fig. 17

$$C_z = C_n \cos\alpha - C_t \sin\alpha,$$
$$C_x = C_n \sin\alpha + C_t \cos\alpha. \tag{16}$$

Sensul pozitiv pentru α, C_n, C_t, C_z și C_x este cel din figura 17.

În figurile 18 și 19 sînt reprezentate cîteva diagrame de presiuni tipice, din totalul de circa 600.

2. Prezentarea diagramelor polare

Rezultatele obținute în modul descris mai sus sînt concretizate și rezumate în diagramele din figurile 20, 21, 22, 23, (pentru C_z și C_x ca funcție de C_j și α) și din figurile 24, 25, 26 și 27 (pentru C_z și C_x ca funcție de C_e și α).

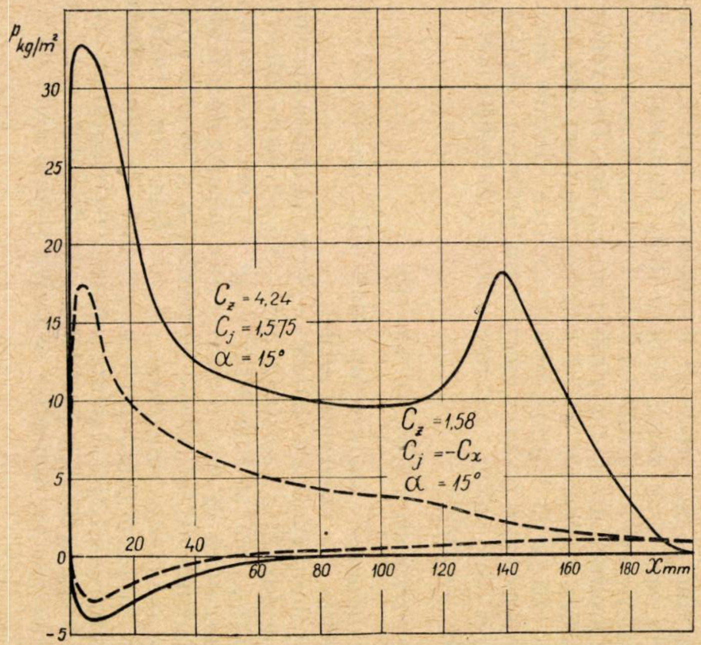

p_{kg/m^2}
30
25
20
15
10
5
0
-5
20
40
60
80
100
120
140
160
180
x_{mm}
$C_z = 4,24$
$C_j = 1,575$
$\alpha = 15°$
$C_z = 1,58$
$C_j = -C_x$
$\alpha = 15°$

Fig. 18

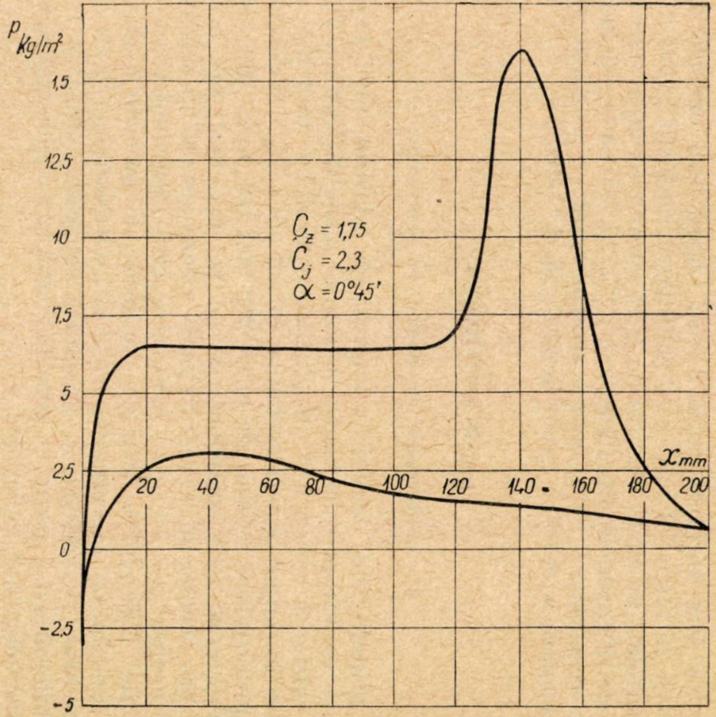

p_{kg/m^2}
1,5
12,5
10
7,5
5
2,5
0
-2,5
-5
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
x_{mm}
$C_z = 1,75$
$C_j = 2,3$
$\alpha = 0°45'$

Fig. 19

Ele au fost obţinute astfel : s-au trasat întîi curbele din figurile 20, 22, 24 şi 26 unde s-a luat α ca parametru, aceasta avînd în vedere că şi experienţele s-au făcut menţinînd α constant, iar apoi s-au trasat prin transpunere diagramele din figurile 21, 23, 25, 27 unde s-a luat ca parametrii C_j respectiv C_e. Cu ocazia acestor trasări s-au făcut şi corecţiile prin interpolare a erorilor experimentale şi de calcul.

D. OBSERVAŢII

1. Observaţii cu privire la experienţe

În primul rînd, trebuie remarcat că folosirea unei turbosuflante neadecvate scopurilor experienţei a produs unele dificultăţi. Într-adevăr, suflanta existentă care a fost adaptată, are un debit mult mai mare decît cel necesar (în timpul experienţelor s-a folosit circa 5% din debitul maxim), dar o suprapresiune redusă, de circa 200 mm col. apă. Din acest motiv, pentru obţinerea unor coeficienţi de jet C_j mai mari (de ordinul lui 2 sau 3) a fost necesar să se reducă mult viteza aerului în suflerie (pînă la valori de ordinul a 5—6 m/s). Aceasta a avut însă numeroase consecinţe nefavorabile. Este vorba întîi de pierderea de precizie a experienţelor, datorită faptului că depresiunile citite la multimanometru au avut valori absolut reduse. De asemenea, presiunea dinamică citită la micromanometrul sufleriei s-a evaluat cu precizie slabă şi a influenţat asupra determinării coeficienţilor calculaţi.

Tot din cauza presiunii insuficiente dată de suflantă şi a vitezei scăzute la care s-au făcut experienţele, numărul Reynolds al scurgerii a avut valori mici (de ordinul a 10^5). Ca urmare scurgerea a avut de suferit calitativ producîndu-se desprinderi premature. De exemplu, la 18° nu s-au putut realiza coeficienţi de jet suficient de mari, din cauza unei desprinderi care apărea la bordul de atac pentru vitezele mici.

De asemenea trebuie menţionată valoarea ridicată a coeficientului C_z obţinut fără suflaj, valoare care se datoreşte existenţei panourilor marginale ale aripii.

Observaţii cu privire la rezultate

Examinarea diagramelor finale din figurile 20—27 permite să se facă o serie de observaţii utile.

În primul rînd se constată că portanţa creşte aproape liniar cu intensitatea jetului, la o incidenţă dată. Nu se poate observa vreo tendinţă de saturaţie, pînă la intensităţile de jet maxime ce s-au putut obţine, ceea ce înseamnă că efectul maxim este departe de a fi atins. Se mai poate vedea că panta dC_z/dC_j creşte cu incidenţa şi că este pozitivă în tot intervalul de incidenţe considerat. Acest fapt are următoarea explicaţie : circulaţia în jurul profilului este produsă de două efecte care se adună (în prima aproximaţie) algebric şi anume : *a*) efectul de volet fluid (jet-flap), cu o incidenţă egală cu a profilului şi *b*) efectul de volet activ pe extrados, datorit ejecţiei. La incidenţe negative primul efect dă o circulaţie nega-

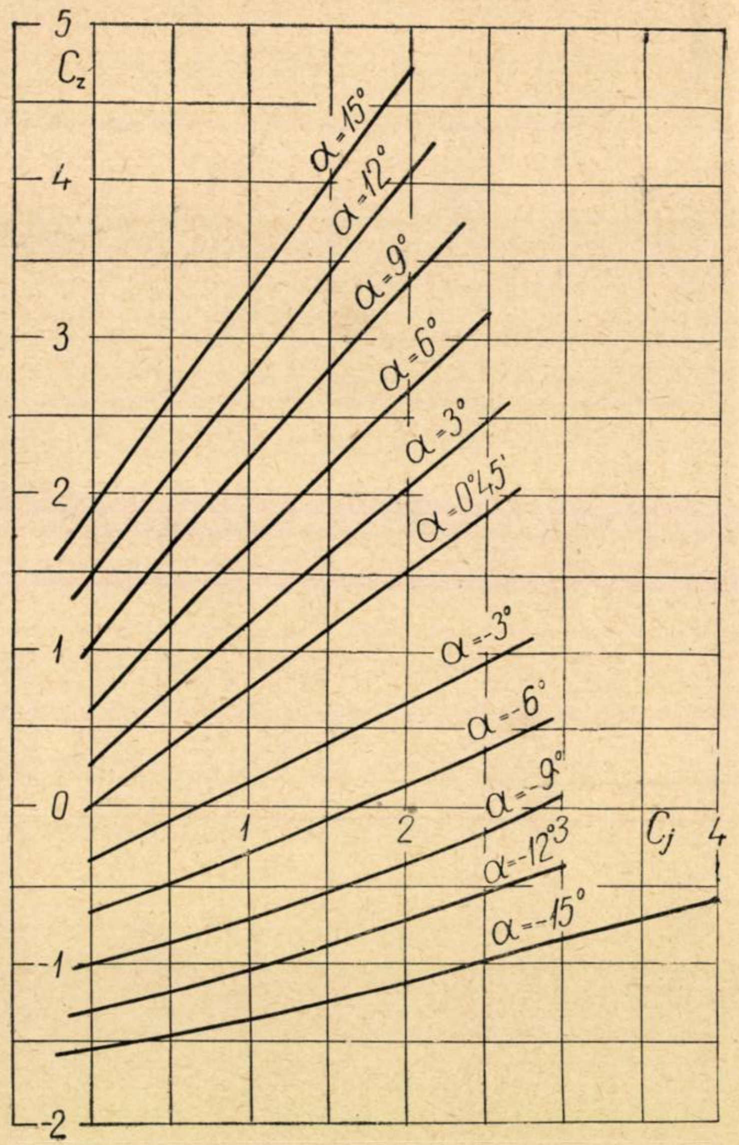


Fig. 20

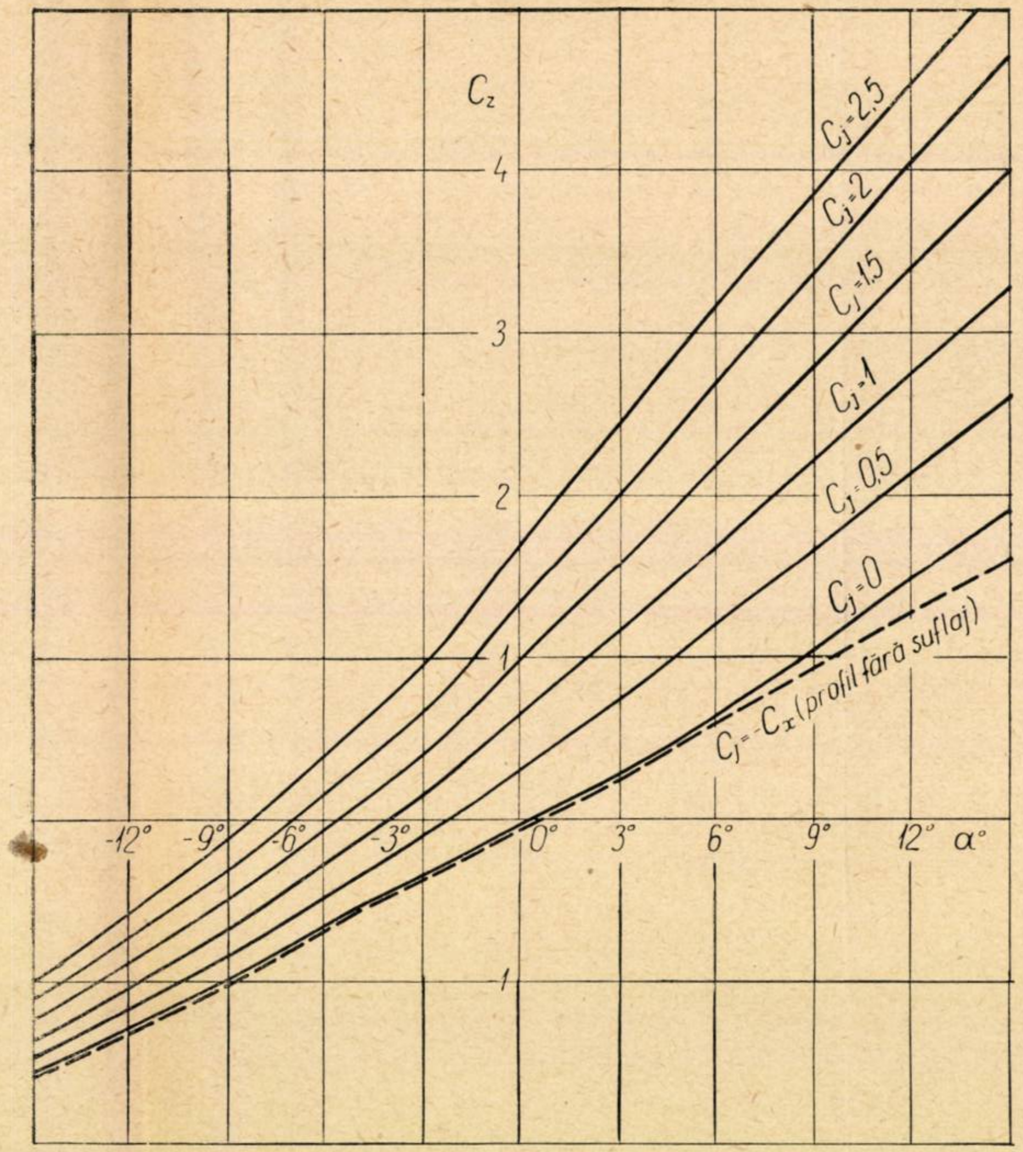


Fig. 21

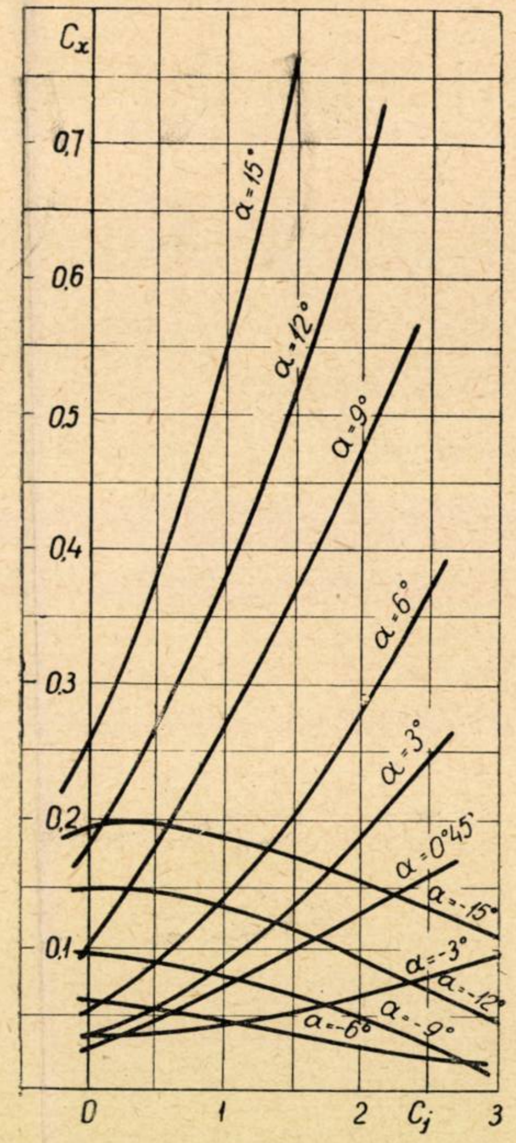


Fig. 22

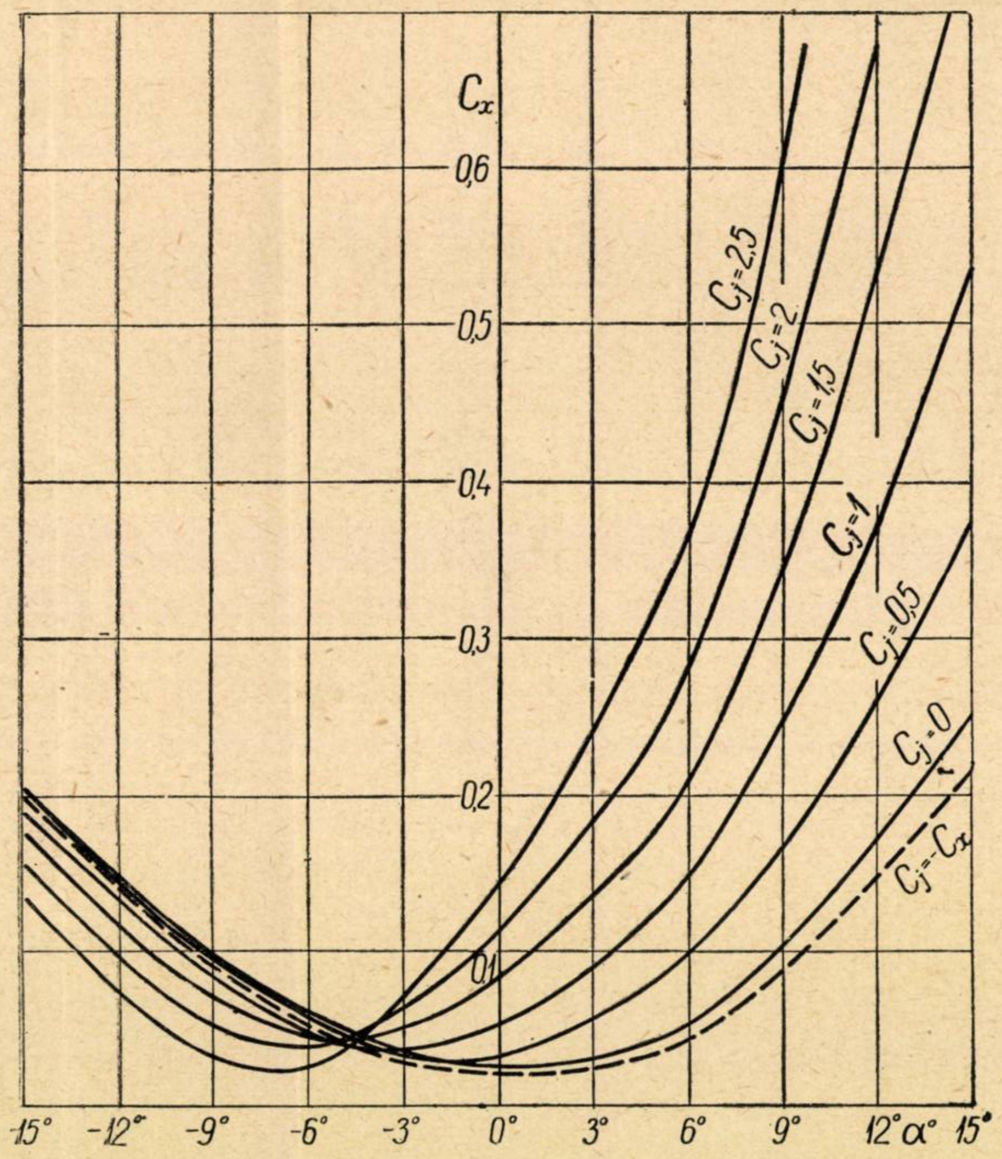


Fig. 23

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM * KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

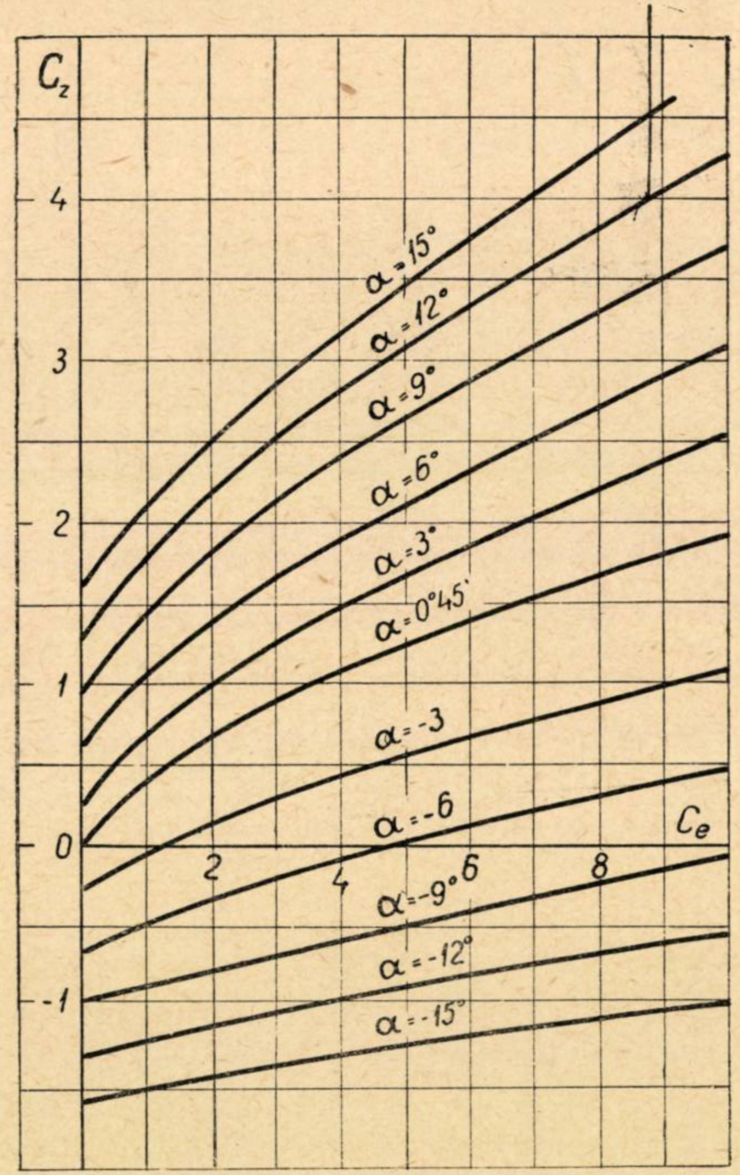


Fig. 24

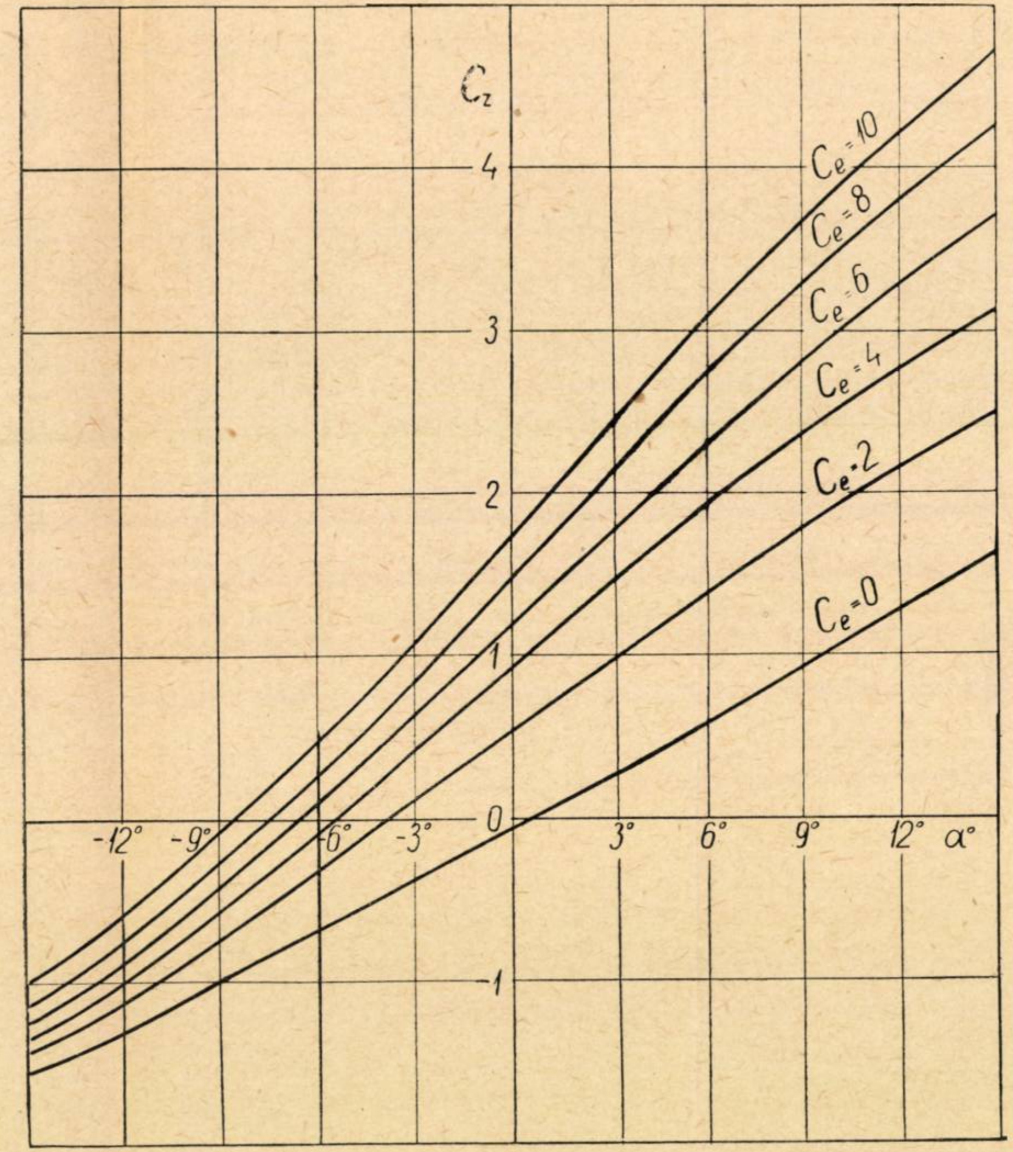


Fig. 25

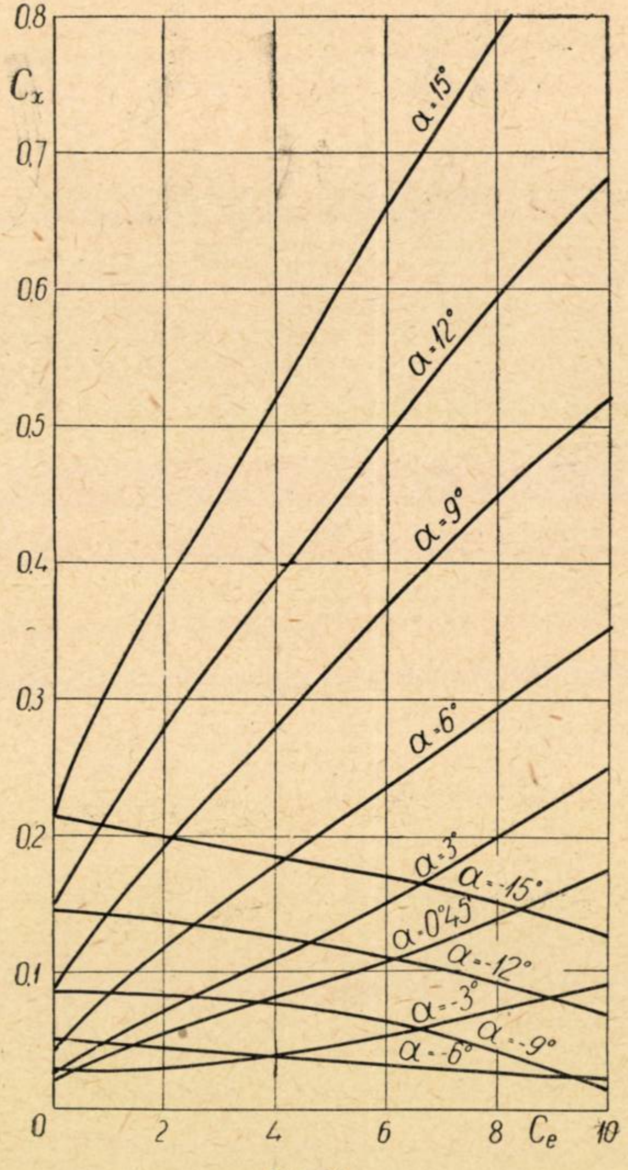


Fig. 26

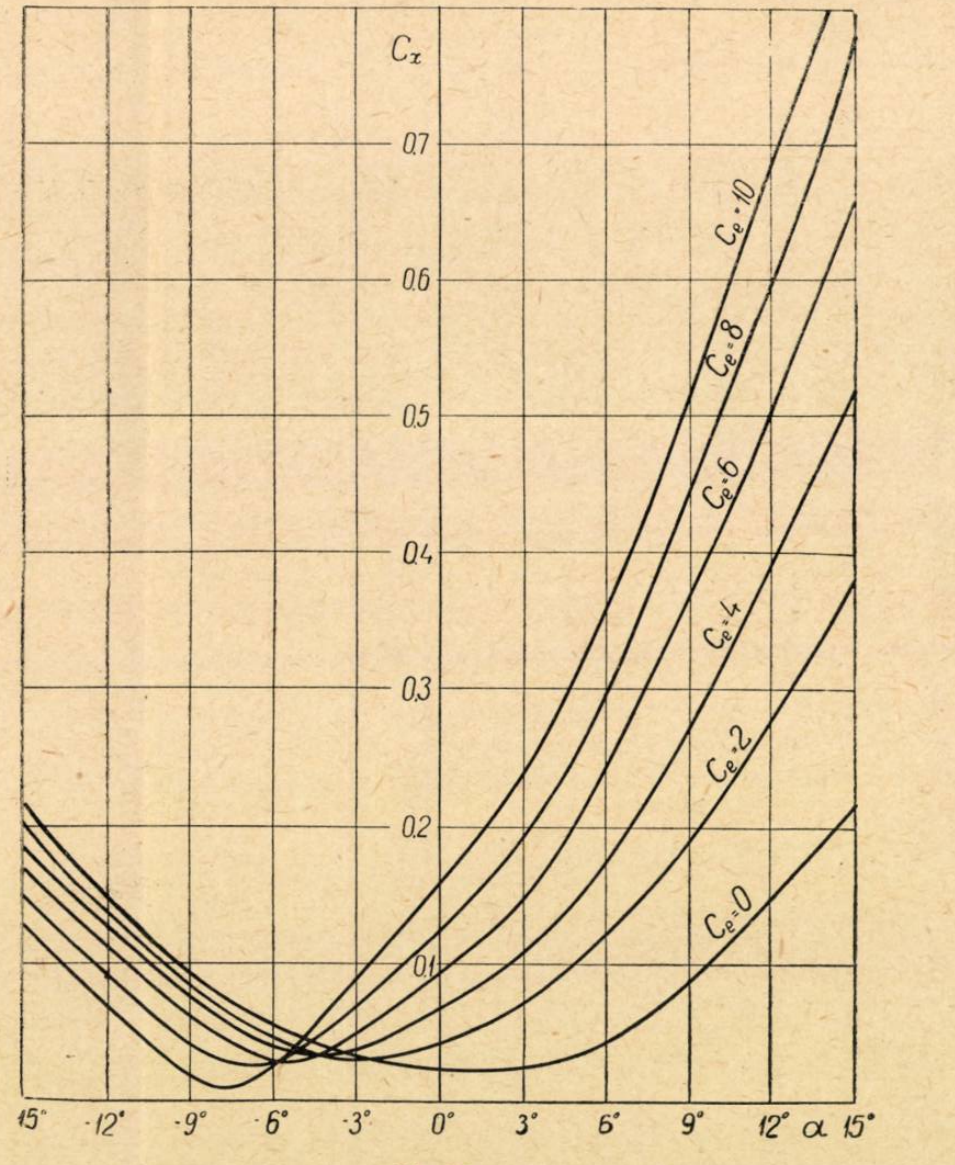


Fig. 27

tivă, care scade circulația produsă de cel de al doilea ; la incidențele pozitive, efectele se adună. Se constată că pînă la $-15°$ efectul de volet de extrados predomină. Observăm însă că efectul de volet fluid (jet-flap) poate fi mărit dacă unghiul de lansare al jetului este mai mare, de pildă cu ajutorul unui volet bracabil.

Considerațiile precedente permit să se tragă concluzia că rezultatele obținute nu reprezintă un maxim de performanță. Realizarea unui profil cu volet ar permite să se atingă valori mult mai mari ale portanței, beneficiind în măsură mai mare de efectul de volet fluid și evitînd totodată desprinderea scurgerii pe partea anterioară a profilului, care poate rămîne la incidență redusă. Este ceea ce ne-am și propus de altfel să facem într-un studiu viitor.

De asemenea, trebuie să remarcăm că numărul, forma și dispoziția fantelor nu au fost studiate sistematic în vederea obținerii rezultatelor optime, întrucît studiul prezent are un caracter de depistare a fenomenelor calitative și evaluarea sensului de variație a caracteristicilor unor asemenea aripi suflate. În lucrările noastre ulterioare ne propunem să căutăm de asemenea valorile optime ale parametrilor dimensionali, în scopul obținerii unor rezultate utile pentru realizarea practică pe avioane.

Mai trebuie amintit aici că valorile C_z și C_x au fost determinate fără a se lua în considerare frecarea pe suprafețele profilului. Aceasta se poate determina cu aproximație suficientă prin calcule. De asemenea nu a fost introdus în calcule efectul de reacție al jetului.

Experiențele mai scot în evidență un fenomen interesant : se poate observa din modul cum a fost definit coeficientul C_j, că la un suflu nul nu corespunde $C_j = 0$ ci $C_j = -C_x$. Cu alte cuvinte, în cazul unui profil fără suflaj, siajul poate fi interpretat ca un volet fluid de sens contrariu. Se poate observa din figura 21 cum la valoarea lui $C_j = 0$, deci cînd se distruge siajul, corespunde o pantă $dC_z/d\alpha$ mai mare decît în cazul profilului fără suflaj, cu $C_j = -C_x$. Definiția astfel dată pentru C_j este corectă ; cel care dă o măsură a intensității suflajului, independentă de mișcare, este coeficientul energetic C_e ; într-adevăr la profilul gol $C_e = 0$.

Din punct de vedere al randamentului unui sistem de hipersustentație cu jet se pot face următoarele considerații : din formulele prezentate mai sus (9), (11) se vede că coeficientul de jet C_j este proporțional (aproximativ) cu $Q \cdot V_j$, iar coeficientul energetic cu QV_j^2. Pentru o portanță dată, la care ar corespunde o anumită valoare a coeficientului de jet C_j, rezultă de aici că acea formă de jet este mai economică, la care Q este mai mare, iar V_j este mai mic. De altfel, existența unei ejecții puternice în aval de bordul de fugă (provocată de o valoare mare pentru V_j) produce o scădere a portanței [12]. Deci interesul este să se producă hipersustentația cu jeturi slabe și de debit mare. Pe de altă parte creșterea portanței este cu atît mai mare cu cît ejecția care se produce pe extrados este mai accentuată [13], [14].

În consecință, o aripă suflată cu randament bun va avea o secțiune de ieșire a jetului relativ mare, cu o viteză moderată a aerului primar, secțiunea fiind materializată printr-un număr mare de fante, dese și înguste

care să provoace o ejecție intensă pe extradosul profilului, înainte de bordul de fugă.

Desigur că există o limită, provocată de creșterea pierderilor de sarcină la ieșirea aerului prin fante; căutarea unei soluții optime va face parte din cercetările noastre ulterioare.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1967.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СДУВАЕМЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе излагаются опыты, произведенные в Институте прикладной механики, над профилем, для которого повышенная подъемная сила осуществляется путем сдувания.

Принцип сдувания показан на рис. 2; по существу эффект повышения подъемной силы осуществляется благодаря эжекции ряда струй из внутренности крыла, за которой следует эффект текучего закрылка (*jet-flap*), позади задней кромки. Описание установки и порядок опытов изложены в части *B* настоящей статьи. Форма эжекционной щели представлена на рис. 3, профиль крыла (NACA 0015) на рис. 5, экспериментальная установка на рис. 5, 12, 13, 14. Аэродинамические силы определяются путем интегрирования давлений на профиле для разных углов атаки и для разных скоростей в трубе от 0 до 35 м/сек. Диаграмма на рис. 9 представляет профиль скоростей в струе после эжекции, для неподвижного профиля вблизи задней кромки. Для неподвижного профиля распределение давлений, проектируемых на хорду и нормальное к последней, показано на рис. 10 и 11.

В части *C* работы излагаются экспериментальные результаты. Определяются коэффициент струи *C* [8] и коэффициент чисто энергетический C_e (11) (эффект реакции не учитывается). Рис. 18, 19 представляют несколько типичных диаграмм давления; конечные результаты представлены на рис. 20—27.

В последней части статьи излагаются несколько замечаний относительно опытов и результатов.

Замечается в первую очередь, что в диапазоне определенных коэффициентов струи *C*, не замечается какой-либо наклонности к ограничению подъемной силы.

Изучая ход кривых $C_z = F\ (C_j)$ для углов атаки противоположных знаков, удалось отделить эффект закрылка от эффекта текучего закрылка. Оба эффекта суммируются при положительных и имеют разные знаки при отрицательных углах атаки. До значения $\alpha = -15^0$ первый эффект преобладает.

Что касается определения коэффициента струи, нужно заметить, что нулевому сдуванию соответствует не $C_j = 0$, а $C_j = -C_a$. Это позволяет интерпретировать след позади профиля, как жидкий закрылок с отрицательной интенсивностью; таким образом находится объяснение убывания крутизны $dC_z/d\alpha$ (рис. 21).

С энергетической точки зрения показывается, что лучше использовать слабые струи с большим расходом, так как это ведет к уменьшению потерь в подъемной силе благодаря эжекции струи позади задней кромки.

С другой стороны, эффект верхнего закрылка увеличивается, если эжекция на верхнем контуре сильнее; отсюда видно, что благоприятное размещение сдувания состоит в большом числе узких целей, имеющих суммарную площадь, достаточно большую по отношению к площади крыла.

RECHERCHES EXPÉRIMENTALES SUR LES PROFILS AÉRODYNAMIQUES SOUFFLÉS

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on présente les expériences faites à l'Institut de mécanique appliquée sur un profil d'aile soufflé, de manière à réaliser une hypersustentation.

Le principe du soufflage est indiqué sur la figure 2 ; en essence, l'effet d'hypersustentation est produit par l'éjection provoquée par une rangée de gerbes lancées de l'intérieur de l'aile (fig. 2), suivie d'un effet de *jet-flap* en aval du bord de fuite.

L'installation et le programme des expériences font l'objet de la partie *B* de l'article.

La forme d'une fente d'éjection est représentée par la figure 3, le profil d'aile (NACA 0015), par la figure 5 et l'installation expérimentale, par les figures 5, 12, 13 et 14.

Les forces aérodynamiques sont déduites de l'intégration des pressions sur le profil pour différentes incidences de l'aile et pour des vitesses dans la soufflerie allant de zéro à 35 m/s.

Le diagramme de la figure 9 montre le profil des vitesses, dans le jet résultant de l'éjection au point fixe, à l'endroit du bord de fuite. Toujours au point fixe, les figures 10 et 19 donnent la distribution des pressions sur le profil, projetées sur la corde et la normale à celle-ci.

Dans la partie *C*, on présente les résultats des expériences.

On commence par la définition du coefficient de jet, C_j et du coefficient énergétique C_e (11) (l'effet de réaction n'est pas inclus).

Les figures 18, 19 donnent quelques diagrammes de pressions typiques. Les résultats finaux sont rendus par les figures 20 à 27.

Dans la partie *D*, on présente quelques observations relatives aux expériences et aux résultats.

On remarque en premier lieu que, dans la gamme de C_j dont on a pu disposer, on ne constate pas de tendance de plafonnage pour la portance.

En inspectant l'allure des courbes $C_z = F(C_j)$ pour des incidences opposées, on a pu séparer l'effet de volet d'extrados (effet de puits) de l'effet de *jet-flap*. Ces deux effets s'ajoutent aux incidences positives et ont des sens contraires aux incidences négatives ; jusqu'à la valeur $\alpha = -15°$ le premier effet est prédominant.

En ce qui concerne la définition du coefficient de jet, on doit remarquer qu'à un soufflage nul, ne correspond pas $C_j = 0$, mais $C_j = C_x$. Ceci permet d'interpréter le sillage d'un profil comme un *jet-flap* d'intensité négative ; on trouve une explication de la diminution de la pente $dC_z/d\alpha$ (fig. 21).

Au point de vue énergétique, on peut voir qu'on a avantage à utiliser des jets de faible vitesse et de grand débit, ce qui diminue en outre les pertes de portance provoquées par l'éjection du jet en aval du bord de fuite.

Par ailleurs, l'effet de puits est accru si l'éjection sur l'extrados est plus forte ; on voit donc qu'une disposition favorable du soufflage consiste en un grand nombre de fentes minces, dont la section totale a une valeur assez grande par rapport à la surface de l'aile.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *La théorie des mouvements à sillages presque rectilignes et son application à l'hypersustentation par soufflage des ailes.* IXème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956, I—238.
2. — *Aerodinamica suprafețelor permeabile.* Ed. Acad. R.P.R., București, 1956.
3. N. N. Patraulea și E. Larisch, *O teorie aerodinamică a profilelor de aripă cu volet de intrados permeabil.* Comunicările Acad R.P.R., t. V, nr. 4, 1955, p. 689.
4. — *A Theory for blown airfoils and airfoils with porous flaps.* Revue de mécanique appliquée, nr. 2, 1956.
5. — *Aripi plane suflate.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, 1956, p. 599.
6. I. M. Davidson, *The Jet-Flap.* Journal of the Royal. Aeron. Society, ianuarie 1956, p. 26.
7. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu voleți fluizi.* Congresul matematicienilor romîni, mai 1956.
8. — *Contributions théoriques à l'étude des profils à volet fluide* (jet-flap). IXème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 11 sept. 1956, 1-240.
9. Raymond Sistrunck et J. J. Bernard, *Sur une méthode de détermination des potentiels de perturbation dans la théorie linéarisée du soufflage au bord de fuite des profils d'ailes.* Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences Paris, 1956, nr. 20, p. 2443.
10. Maurice Roy, *Théorie du profil d'aile à jets.* Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, 25 iunie 1956.
11. L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton et P. Jousserandot, *Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de la circulation par soufflage appliqué aux ailes d'avions.* O.N.E.R.A., Note Technique, 1956, nr. 37.
12. L. Dumitrescu, *Determinarea efectului de ejecție la profile cu volet fluid* (*jet-flap*), acest volum, p. 357.
13. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu jeturi cu efect combinat* (sub tipar).
14. — *Profile aerodinamice cu volet fluid, în prezența unor singularități date* (sub tipar).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

AEROMECANICĂ

ASUPRA DETERMINĂRII CARACTERISTICILOR STRATULUI LIMITĂ PRIN UTILIZAREA UNOR PROFILE TIP DE VITEZE ŞI TEMPERATURI

DE

ST. SĂVULESCU

I. INTRODUCERE

Există numeroase metode pentru integrarea ecuaţiilor fundamentale ale stratului limită, ecuaţii datorite lui Prandtl. Unele din aceste metode îşi concentrează calculele pentru determinarea cît mai exactă a profilelor de viteze şi temperaturi într-o secţiune a stratului limită. Apoi se deduc frecarea, transferul de căldură, grosimea stratului, care reprezintă caracteristicile principale ale stratului limită. Variantele acestor metode se grupează în jurul lucrărilor lui Blasius [1], Hartree [2], Dorodniţîn [3], Crocco [4], Illingworth [5], Ferrari [6], Stewartson [7].

Alte metode pornesc de la ecuaţia integrală a lui Kármán [8] şi o integrează folosind expresii variate ale profilului de viteze, depinzînd de unul sau doi parametri. Analog se procedează cu ecuaţia integrală a energiei. Putem cita în acest sens lucrările lui Kármán-Pohlhausen [9], Loiţianski [10], Morris şi Smith [11], Tani [12]. Expresiile atît de variate date profilurilor de viteze şi de temperaturi corespund particularităţilor numeroase ale scurgerii în stratul limită: scurgere laminară, turbulentă, cu succiune, cu influenţa gradientului de presiune exterior, a variaţiei temperaturii la perete, a compresibilităţii etc.

În lucrarea de faţă, propunem o metodă aproximativă care utilizează un profil tip de viteză şi de temperaturi pentru toate cazurile de mai sus. Acest profil depinde de un parametru deosebit doar pentru scurgerea laminară şi turbulentă. Acest lucru a fost posibil prin utilizarea unei noi variabile transversale adimensionale care uniformizează profilele din diferitele secţiuni ale stratului limită. Cum se va vedea din aplicaţiile prezentate, calculele sînt simple, rezultatele explicite iar precizia lor este de ordinul celorlalte metode aproximative cunoscute.

II. OBSERVAŢII ASUPRA PROFILELOR DE VITEZE ŞI TEMPERATURI DIN SCURGEREA UNUI FLUID VÎSCOS LIMITAT DE PEREŢI SOLIZI

1. Drept scurgeri de bază ale studiului nostru să considerăm cazul simplu al scurgerilor unidimensionale prin canale în regim laminar și turbulent. În figura 1 sînt arătate profilele de viteză $u_a = u_a(\eta_0)$, unde $u_a = \frac{u}{u_e}$, $\eta_0 = \frac{y}{h}$, $u(h) = u_e$, pentru cazurile Couette, Poiseuille și regimul complet turbulent la un Reynolds de ordinul 12×10^3.

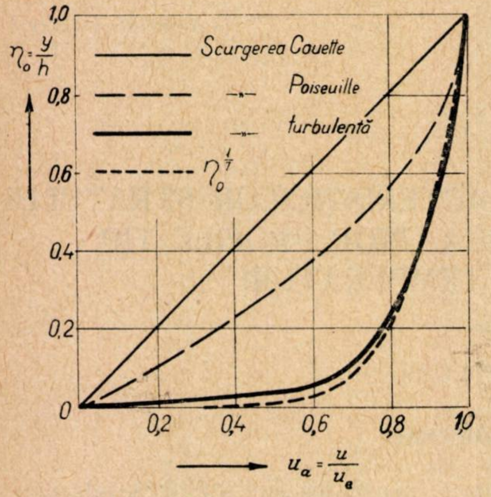


Fig. 1

Să efectuăm acum o schimbare a variabilei transversale η_0 dată de relația

$$\eta_1 = \frac{\Psi}{\Psi_h} = \frac{\int_0^y \rho u dy}{\int_0^h \rho u dy} = \frac{\int_0^{\eta_0} \rho_a u_a d\eta_0}{\int_0^1 \rho_a u_a d\eta_0}, \quad (1)$$

unde $\rho_a = \frac{\rho}{\rho_e}$, Ψ și Ψ_h sînt debitele ce se scurg pînă la cota y și respectiv h (axa canalului). Exprimînd aceleași profile de viteză în funcție de noua variabilă η_1 obținem curbele $u_a = u_a(\eta_1)$ din figura 2.

Să remarcăm două lucruri :

a) Profilele de viteză ale scurgerii laminare capătă un caracter turbulent, devenind profile *pline*. În acest sens profilul transformat Couette, dat de $u_a = \eta^{\frac{1}{2}}$ este foarte apropiat de cel calculat de Pai [13]. Profilul transformat Poiseuille s-a apropiat sensibil de cel turbulent corespunzător, și printr-o a doua transformare dată de

$$\eta_2 = \frac{\int_0^{\eta_1} \rho_a u_a d\eta_1}{\int_0^1 \rho_a u_a d\eta_1}, \quad (2)$$

are doar abateri neglijabile.

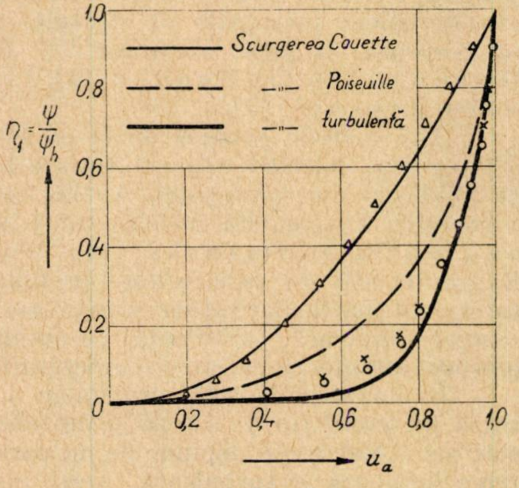


Fig. 2

b) Profilul turbulent se modifică foarte puțin astfel că profilul transformat din figura 2 corespunde unui Reynolds de ordinul 50×10^3.

Urmărind transformările succesive ale unui astfel de profil tindem foarte încet la limită către profilul scurgerii unui fluid ideal, fără frecare, dat de $u_a = 1$.

Fără a ne preocupa deocamdată de natura intimă a mecanismului scurgerii laminare și turbulente, să remarcăm doar că transformarea (1) realizează profile *pline* al căror tip este apropiat de cel turbulent. Cu alte cuvinte transformarea (1) realizează o schimbare a scării de măsurare a distanțelor transversale pe curentul principal, începînd de la perete, scară ce reproduce aproximativ scara de turbulență.

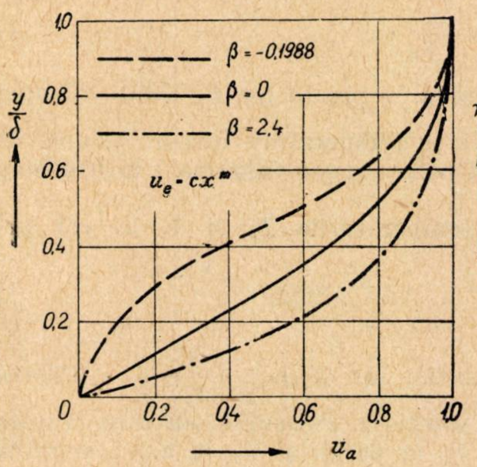


Fig. 3

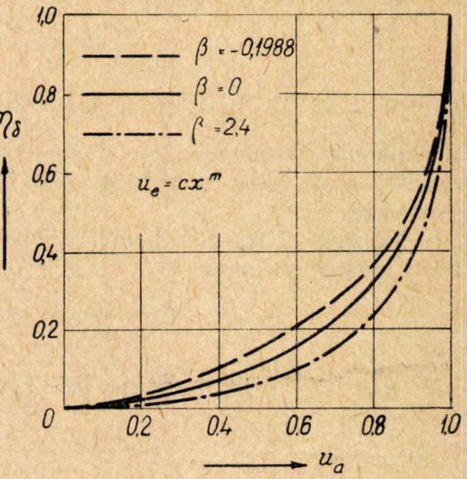


Fig. 4

2. Să ne ocupăm acum și de scurgerea în stratul limită, unde avem o frontieră solidă și una fluidă la distanța δ (grosimea stratului) una de alta. În figurile 3 și 4 am reprezentat profilele vitezei longitudinale din soluțiile lui Hartree ($u_e = cx^m$), pentru trei valori ale parametrului $\beta = \frac{2m}{1+m}$. Reprezentarea din figura 3 este făcută în funcție de variabila obișnuită $\eta_0 = \frac{y}{\delta}$, iar cea din figura 4 în funcție de noua variabilă

$$\eta_\delta = \frac{\int_0^y \rho u dy}{\int_0^\delta \rho u dy}. \tag{3}$$

Să observăm că această transformare uniformizează profilele, dîndu-le forma tip a profilelor *pline* turbulente, chiar și în zona punctului de desprindere.

Profilele de viteză reprezintă de fapt o caracteristică a alunecării straturilor de fluid unele peste altele și sînt condiționate esențial de aderența la perete. Deosebirile dintre aceste profile, datorite influenței factorilor exteriori (presiune, temperatură), sau interiori (compresibilitate, viscozitate) sînt limitate din cauza tinderii către valoarea de la frontiera superioară, $u(\delta) = u_e$ şi din cauza aderenţei, $u(0) = 0$. Noua variabilă η_δ atenuează şi mai mult aceste deosebiri astfel că, de exemplu, profilul de viteză al scurgerii compresibile va putea fi considerat în prima aproximaţie identic cu cel din scurgerea incompresibilă.

3. În privinţa profilelor de temperaturi să considerăm expresia

$$E_a = \frac{E - E_w}{E_{e_1} - E_w}. \tag{4}$$

unde $E = C_p T + \frac{u^2}{2}$, E_w fiind valoarea la perete iar E_{e_1} fiind valoarea la frontiera exterioară, cu T notîndu-se temperatura într-un punct. Se observă că E_a este în general nulă la perete şi are valoarea 1 la frontiera exterioară.

Pentru scurgerea Couette cu temperaturile T_w şi T_c la cei doi pereţi găsim expresia

$$E_a = u_a \cdot \frac{1 + \sigma K_e + K_e(1 - \sigma)\, u_a}{1 + K_e} \tag{5}$$

unde $\sigma = \frac{C_p \mu}{\lambda}$ este numărul lui Prandtl, iar $K_e = \frac{u_e^2}{2C_p(T_e - T_w)}$. Pentru scurgerea Poiseuille, cu temperatura T_w la pereţi şi T_e în axa canalului [14] căpătăm relaţia

$$E_a = u_a \cdot \frac{3 + 2\sigma(2 - u_a)}{3 + 2\sigma}. \tag{6}$$

În figura 5 am reprezentat expresiile (5) şi (6) pentru cîteva valori caracteristice ale parametrilor σ şi K_e. În esenţă se remarcă faptul că E_a se deosebeşte de u_a printr-un factor care cuprinde influenţa numărului Prandtl şi a compresibilităţii, dar că acest factor este extrem de aproape de unitate pentru numărul Prandtl apropiat de unitate, ceea ce se întîmplă cu aerul ($\sigma = 0,7$).

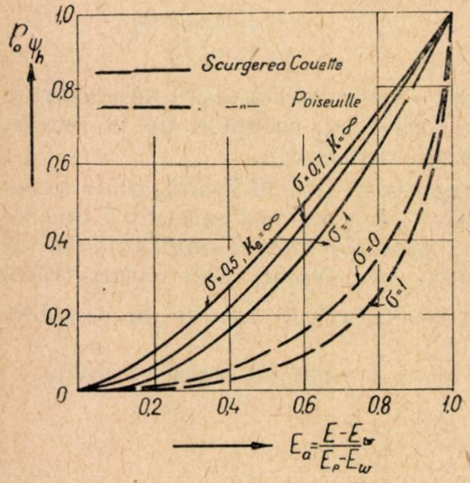


Fig. 5

În cazul stratului limită vom considera frontiera exterioară a stratului limită termic la distanţa Δ de perete, obţinînd corespunzător debitul $\Psi_\Delta = \int_0^\Delta \rho u dy$ şi variabila

$$\eta_\Delta = \frac{\int_0^y \rho u dy}{\int_0^\Delta \rho u dy}. \tag{7}$$

Pe baza observațiilor de mai sus putem conchide că $E_a = E_a(\eta_\Delta)$ va admite o reprezentare analogă profilelor tip ale vitezei adimensionale u_a.

III. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR STRATULUI LIMITĂ

Ipoteza fundamentală pe care o utilizăm în tratarea analogă a ecuațiilor stratului limită laminar și turbulent este aceea că efectul pulsației turbulente se concentrează asupra tensiunii de frecare τ și asupra transferului de căldură q_y. Pentru scurgerea medie aceste mărimi au expresiile cunoscute

$$\tau = M\frac{\partial u}{\partial y},\quad q_y = \Lambda\frac{\partial T}{\partial y}, \tag{8}$$

unde M și Λ reprezintă viscozitatea și respectiv coeficientul de transfer caloric rezultate dintr-un proces turbulent sau laminar.

Ecuațiile stratului limită bidimensional, permanent, sînt

$$\left.\begin{aligned}&\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dp}{dx} = \frac{\partial \tau}{\partial y},\\ &\rho u\frac{\partial E}{\partial x} + \rho v\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\tau u + q_y),\\ &\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0,\end{aligned}\right| \tag{9}$$

unde u,v sînt componentele vitezei după x (coordonata longitudinală) și respectiv y (coordonata transversală); p este presiunea, ρ densitatea, E energia totală într-un punct.

Să observăm că pentru fluidul incompresibil din ecuația energiei se scade termenul $u\dfrac{dp}{dx}$ care reprezintă travaliul datorit compresiunii fluidului. Să notăm de asemenea că, în cazul mișcării turbulente, mărimile de mai sus au valori mediate. Condițiile la limită sînt următoarele : La perete ($y = 0$), admițînd un transfer de masă avem

$$u = 0,\ v = v_w(x),\ T = T_w(x)\ \text{sau}\ q_{yw} = q_{yw}(x).$$

La frontiera exterioară dinamică ($y = \delta$) avem

$$u = u_e,\ \tau \simeq 0. \tag{10}$$

La frontiera exterioară termică ($y = \Delta$) avem

$$u = u_{e_1},\ \tau = \tau_{e_1},\ T = T_e,\ q_y \simeq 0.$$

Să introducem acum funcțiile

$$\Psi = \int_0^x \rho_w v_w \, dx + \int_0^y \rho u dy = Q + \psi,$$

$$\Psi_\delta = \int_0^x \rho_w v_w \, dx + \int_0^\delta \rho u dy = Q + \psi_\delta,$$

$$\Psi_\Delta = \int_0^x \rho_w v_w \, dx + \int_0^\Delta \rho u dy = Q + \psi_\Delta,$$

care reprezintă debitele de fluid totale, formate din debitul transferat prin perete (Q) și din debitul corespunzător profilului de viteză (Ψ) limitat de cota y, de grosimea dinamică δ, sau de grosimea termică Δ. Efectuăm schimbarea de variabile, dată de relațiile

$$x = x, \quad \eta_{\delta(\Delta)} = \frac{\Psi}{\Psi_{\delta(\Delta)}}, \tag{11}$$

știind că

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\rho v, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \rho u.$$

Ecuația de continuitate fiind satisfăcută identic obținem forma următoare pentru ecuația de mișcare și pentru ecuația energiei

$$a \frac{\partial u_a}{\partial x} + b \eta_\delta \frac{\partial u_a}{\partial \eta_\delta} - d\left(\frac{1}{\rho_a u_a} - u_a\right) = c \frac{\partial \tau}{\partial \eta_\delta}, \tag{12}$$

$$a_1 \frac{\partial E_a}{\partial x} + b_1 \eta_\Delta \frac{\partial E_a}{\delta \eta_\Delta} + d_1 (E_a - 1) = c_1 \frac{\partial}{\partial \eta_\Delta} (\tau u + q_y), \tag{13}$$

unde s-a notat

$$a = u_e, \qquad a_1 = i_{e_1} - i_w + \frac{u_{e_1}^2}{2} = D,$$

$$b = - u_e \frac{1}{\Psi_\delta} \cdot \frac{d\Psi_\delta}{dx}, \qquad b_1 = - D \frac{1}{\Psi_\Delta} \cdot \frac{d\Psi_\Delta}{dx},$$

$$c = \frac{1}{\Psi_\delta}, \qquad c_1 = \frac{1}{\Psi_\Delta},$$

$$d = \frac{du_e}{dx}, \qquad d_1 = \frac{dD}{dx}.$$

Să observăm în primul rînd că ecuația energiei scrisă ca mai sus este valabilă atît pentru fluid compresibil cît și pentru fluid incompresibil.

În al doilea rînd să scriem expresiile τ și $\tau\, u + q_y$ în noile variabile folosind relațiile (8). Obținem

$$\tau = A_\tau\, M_a\, \rho_a \frac{\partial}{\partial \eta_\delta} (u_a^2) , \tag{14}$$

$$\tau u + q_y = A_q\, M_{a_1}\, \rho_{a_1}\, u_{a_1} \frac{\partial}{\partial \eta_\Delta} \left[E_a + \frac{(\sigma - 1)\, u_{e_1}^2}{2D}\, u_{a_1}^2 \right] , \tag{15}$$

unde s-a notat

$$A_\tau = \frac{\mu_e \rho_e u_e^2}{2 \Psi_\delta} ,\ A_q = \frac{\mu_{e_1}\, \rho_{e_1}\, u_{e_1}}{\Psi_\Delta} \cdot \frac{D}{\sigma} ,\quad M_{a_{(1)}} = \frac{M}{\mu_{e_{(1)}}} ,\ \sigma = \frac{C_p M}{\Lambda} .$$

În sfîrșit, noua formă a condițiilor la limită se scrie astfel

$$\eta_\delta = \frac{Q}{\Psi_\delta} = S,\ u_a = 0 ;\ \eta_\delta = 1,\ u_a = 1,\ \rho_a = 1,\ \tau = 0 \tag{16}$$

$$\eta_\Delta = \frac{Q}{\Psi_\Delta} = S_1 , u_{a_1} = 0, E_a = 0 \text{ sau } q_y = q_{y_w}^{(x)} ;\ \eta_\Delta = 1, u_{a_1} = 1,\ E_{a_1} = 1,\ q_y = 0. \tag{16'}$$

IV. ECUAȚIILE INTEGRALE PENTRU DETERMINAREA FRECĂRII ȘI TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ

Ținînd seama de condițiile la limită (16) și (16′) să efectuăm o primă integrare a ecuațiilor (12) și (13) în raport cu η_δ și respectiv η_Δ. Găsim

$$\tau = \frac{a}{c} \int_1^{\eta_\delta} \frac{\partial u_a}{\partial x} d\eta_\delta + \frac{b}{c} \int_1^{\eta_\delta} \eta_\delta\, du_a - \frac{d}{c} \int_1^{\eta_\delta} \left(\frac{1}{\rho_a u_a} - u_a \right) d\eta_\delta , \tag{17}$$

$$\tau u + q_y = \frac{a_1}{c_1} \int_1^{\eta_\Delta} \frac{\partial E_a}{\partial x} d\eta_\Delta + \frac{b_1}{c_1} \int_1^{\eta_\Delta} \eta_\Delta\, dE_a + \frac{d_1}{c_1} \int_1^{\eta_\Delta} (E_a - 1)\, d\eta_\Delta + \tau_1\, u_{e_1} . \tag{18}$$

Acum să integrăm încă odată aceste expresii de la $\eta_{\delta(\Delta)} = S_{(1)}$ la $\eta_{\delta(\Delta)}$, ținînd seama de relațiile (14) și (15). Obținem

$$\begin{aligned} \int_S^{\eta_\delta} A_\tau\, M_a \rho_a d\, (u_a^2) = \frac{a}{c} \int_S^{\eta_\delta} \left[\int_1^{\eta_\delta} \frac{\partial u_a}{\partial x}\, d\eta \right] d\eta_\delta + \frac{b}{c} \int_S^{\eta_\delta} \left[\int_1^{\eta_\delta} \eta_\delta\, du_a \right] d\eta_\delta - \\ - \frac{d}{c} \int_S^{\eta_\delta} \left[\int_1^{\eta_\delta} \left(\frac{1}{\rho_a u_a} - u_a \right) d\eta_\delta \right] d\eta_\delta , \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1}^{\eta_\Delta} A_q M_{a_1} \rho_{a_1} u_{a_1} d \left[E_a + \frac{(\sigma - 1)\, u_{e_1}^2}{2D}\, u_{a_1}^2 \right] = \frac{a_1}{c_1} \int_{S_1}^{\eta_\Delta} \left[\int_1^{\eta_\Delta} \frac{\partial E_a}{\partial x} d\eta_\Delta \right] d\eta_\Delta + \\ + \frac{b_1}{c_1} \int_{S_1}^{\eta_\Delta} \left[\int_1^{\eta_\Delta} \eta_\Delta\, dE_a \right] d\eta_\Delta + \frac{d_1}{c_1} \int_{S_1}^{\eta_\Delta} \left[\int_1^{\eta_\Delta} (E_a - 1)\, d\eta_\Delta \right] d\eta_\Delta + \tau_1 u_{e_1} (\eta_\Delta - S_1). \end{aligned} \tag{20}$$

După cum va rezulta din forma expresiilor lui u_a și E_a toate integrările cu limita $\eta_{\delta(\Delta)} = S_{(1)}$ sînt finite.

Pentru $\eta_{\delta(\Delta)} = S_{(1)}$ după aranjamente convenabile obținem din relațiile (17) și (18) formulele integrale ale frecării și transferului de căldură la perete

$$\tau_w = \frac{d}{dx}\left[u_e \Psi_\delta \left(1 - \int_S^1 u_a \, d\eta_\delta\right)\right] - \Psi_\delta \frac{du_e}{dx}\left(1 - \int_S^1 \frac{1}{\rho_a u_a} d\eta_\delta\right), \tag{21}$$

$$q_{vw} = \frac{d}{dx}\left[D\Psi_\Delta \left(1 - \int_{S_1}^1 E_a \, d\eta_\Delta\right)\right] - DE_a(S_1)\frac{dQ}{dx} - Q\frac{dD}{dx} + \tau_1 u_{e_1}. \tag{22}$$

Pentru grosimea stratului limită obținem

$$\delta(\Delta) = \frac{\Psi_{\delta(\Delta)}}{\rho_{e_{(1)}} u_{e_{(1)}}} \int_{S_{(1)}}^1 \frac{d\eta_{\delta(\Delta)}}{\rho_{a(1)} u_{a(1)}}. \tag{23}$$

Se remarcă faptul că necunoscutele care intră în expresiile de mai sus sînt Ψ_δ și Ψ_Δ precum și u_a, E_a. În privința debitelor vom folosi relațiile (19) și (20) pentru $\eta_{\delta(\Delta)} = 1$ care se pot scrie final în forma următoare

$$\frac{d}{dx}(\Psi_\delta^2) - 2\,\frac{\displaystyle\int_S^1\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_1^{\eta_\delta} u_a d\eta\right]d\eta_\delta - \frac{1}{u_e}\frac{du_e}{dx}\int_S^1\left[\int_1^{\eta_\delta}\left(\frac{1}{\rho_a u_a} - u_a\right)d\eta_\delta\right]d\eta_\delta}{\displaystyle\int_S^1\left[\int_1^{\eta_\delta}\eta_\delta\, du_a\right]d\eta_\delta}\Psi_\delta^2 +$$

$$+ \frac{\displaystyle\mu\rho_e u_e \int_S^1 M_a \rho_a d\left(u_a^2\right)}{\displaystyle\int_S^1\left[\int_1^{\eta_\delta}\eta_\delta\, du_a\right]d\eta_\delta} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dx}(\Psi_\Delta^2) - 2\,\frac{\displaystyle\int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_\Delta}\frac{\partial E_a}{\partial x}\,d\eta_\Delta\right]d\eta_\Delta + \frac{1}{D}\frac{dD}{dx}\int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_\Delta}(E_a - 1)\,d\eta_\Delta\right]d\eta_\Delta}{\displaystyle\int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_\Delta}\eta_\Delta\, dE_a\right]d\eta_\Delta}\Psi^2 -$$

$$- 2\,\frac{\tau_1 u_{e1}(1 - S_1)}{\displaystyle D\int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_\Delta}\eta_\Delta\, dE_a\right]d\eta_\Delta}\Psi_\Delta +$$

$$+ 2\,\frac{\mu_{e_1}\rho_{e_1}u_{e_1}}{\sigma}\cdot\frac{\displaystyle\int_{S_1}^1 M_{a_1}\rho_{a_1}u_{a_1}\, d\left[E_a + \frac{(\sigma - 1)\cdot u_{e_1}^2}{2D}\, u_{a_1}^2\right]}{\displaystyle\int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_\Delta}\eta_\Delta\, dE_a\right]d\eta_\Delta} = 0. \tag{25}$$

Ecuațiile (24) și (25) împreună cu (21), (22) și (23) rezolvă problema determinării caracteristicii stratului limită atunci cînd cunoaștem $u_a = u_a\,(x,\ \eta_\delta)$, și $E_a = E_a\,(x,\ \eta_\Delta)$.

În această privință să remarcăm că mărimile u_a, E_a au caracterul *plin* turbulent, așa că le putem pune sub forma

$$u_a = \left(\frac{\eta_\delta - S}{1 - S}\right)^n \cdot f(x,\ \eta_\delta),\ E_a = \left(\frac{\eta_\Delta - S_1}{1 - S_1}\right)^{n_1} f_E\,(x,\ \eta_\Delta), \tag{26}$$

unde n, n_1 sînt funcții de x, pozitive și subunitare, iar f_u, f_E sînt funcții de corecție apropiate de unitate. Într-o primă aproximație vom putea utiliza chiar expresiile simple

$$u_a = \left[\frac{\eta_\delta - S}{1 - S}\right]^n, \quad E_a = \left[\frac{\eta_\Delta - S_1}{1 - S_1}\right]^{n_1}, \tag{27}$$

n și n_1 fiind parametrii esențiali ai acestor profile tip.

Este interesant de observat în primul rînd că o valoare constantă a lui n dă rezultate bune pentru întreg stratul limită laminar, și o altă valoare dă rezultate pentru stratul limită turbulent.

În al doilea rînd cu ajutorul expresiilor (27) introduse în membrii din dreapta ai relațiilor (19) și (20) vom putea determina în a doua aproximație pe u_a și E_a, care servesc pentru precizarea lui $n_{(1)} = n_{(1)}\,(x)$, atunci cînd, printr-un procedeu oarecare, vom face o apropiere între aceste soluții de-a doua aproximație și expresiile (27). Se mai observă de asemenea că toate integralele sînt finite (n, $n_1 < 1$) și ușor de efectuat.

V. APLICAȚII ALE METODEI PREZENTATE

În aplicațiile pe care le vom prezenta ne limităm la cîteva cazuri cunoscute care să îmbrățișeze mai multe aspecte ale problemei stratului limită. Prin alte procedee de detaliu se pot cuprinde încă diverse cazuri care arată unitatea metodei de tratare a acestor probleme.

Să admitem pentru simplificare că n-avem transfer de căldură la perete și că numărul Prandtl este apropiat de unitate. Atunci ecuația (22) admite soluția

$$E_a = 1, \tag{28}$$

care ne dă

$$\frac{1}{\rho_a} = 1 + \frac{u_e^2}{2i_e}\,(1 - u_a^2). \tag{29}$$

Utilizînd profilul tip (27) și relația precedentă găsim

$$\tau_{sw} = \frac{d}{dx}\left[u_e \Psi_\delta\,\frac{S + n}{1 + n}\right] - \Psi_\delta\,\frac{du_e}{dx}\left[\frac{S - n}{1 - n} - \frac{u_e^2}{2i_e}\,\frac{2n\,(1 - S)}{1 - n^2}\right] \tag{30}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\Psi_\delta^2\right) + 2\,\frac{\dfrac{dS}{dx} + \dfrac{1}{u_e}\,\dfrac{du_e}{dx}\,\dfrac{E_e}{i_e}\,\dfrac{2(1+n)}{2-n}\,(1-S)}{1+n+S}\,\Psi_\delta^2 - \\ - \frac{(n+2)(n+1)}{n(1+n+S)(1-S)}\,\mu_e\rho_e u_e K = 0, \tag{31}$$

unde $K = \int_S^1 M_a \rho_a d\,(u_a^2)$.

Vom căuta să obținem acum două soluții asimptotice pentru stratul limită cu succiune, soluții date de $S \to 0$ și $S \to 1$. În acest sens să remarcăm că S nu modifică prea mult soluția ecuației (31) în timp ce influența lui este hotărîtoare asupra coeficientului de frecare dat de relația (30). Acest lucru rezultă dintr-o analiză a ecuației (31) care depășește cadrul articolului de față.

Pentru cazul $S = \dfrac{Q}{\Psi_\delta} \to 0$ să scriem cele două relații fundamentale sub forma

$$\tau_{sw} = \frac{n}{1+n}\,u_e\,\frac{d\Psi_\delta}{dx} + \frac{2n}{1-n^2}\,\Psi_\delta\,\frac{du_e}{dx}\,\frac{E_e}{i_e} + \frac{1}{1+n}\,u_e\,\frac{dQ}{dx} - \frac{2n}{1-n^2}\,Q\,\frac{du_e}{dx}\,\frac{E_e}{i_e}, \tag{30'}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\Psi_\delta^2\right) + \frac{4}{2-n}\,\frac{1}{u_e}\,\frac{du_e}{dx}\,\frac{E_e}{i_e}\,\Psi_\delta^2 - \frac{n+2}{n}\,\mu_e\rho_e u_e K = 0. \tag{31'}$$

Pentru cazul $S = \dfrac{Q}{Q+\psi_\delta} \to 1$ ne interesează variația lui ψ_δ, așa că ecuațiile (30) și (31) devin

$$\tau_{sw} = \frac{n}{1+n}\,u_e\,\frac{d\psi_\delta}{dx} + \frac{2n}{1-n^2}\,\psi_\delta\,\frac{du_e}{dx}\,\frac{E_e}{i_e} + u_e\,\frac{dQ}{dx}, \tag{30''}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\psi_\delta^2\right) + \frac{4}{2-n}\cdot\frac{1}{u_e}\,\frac{du_e}{dx}\,\frac{E_e}{i_e}\,\psi_\delta^2 - \frac{n+2}{n}\,\mu_e\rho_e u_e K = 0. \tag{31''}$$

Se observă că ecuațiile (31′) și (31″) sînt identice ca formă, ceea ce arată că variația debitului dat de profilul vitezei în stratul limită este puțin influențată de transferul de fluid la perete, bineînțeles cînd acesta din urmă se găsește în jurul transferului uniform. Soluția ecuației (31′) cu condiția la limită $\Psi_\delta(0) = 0$, este imediată

$$\Psi_\delta^2 = \frac{n+2}{n}\left(\frac{i_e}{u_e^2}\right)^{\frac{2}{2-n}} \int_0^x \mu_e\rho_e u_e K \left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}} dx, \tag{32}$$

unde am considerat $E_e = i_e + \dfrac{u_e^2}{2} = \text{const.}$

Cu această valoare, notînd $C_{f_s} = \dfrac{2\,\tau_{sw}}{\rho_e u_e^2}$ se obține din relația (30′) formula următoare :

$$\frac{C_{f_s}}{C_{f_p}} = K \sqrt{\frac{\mu_e \rho_e u_e x}{\int_0^x \mu_e \rho_e u_e K \left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}} dx} \cdot \left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}}} +$$

$$+ \frac{4}{(1-n)(2-n)} \cdot \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \frac{E_e}{i_e} \sqrt{\frac{x \int_0^x \mu_e \rho_e u_e K \left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}} dx}{\mu_e \rho_e u_e \left(\frac{u_e^2}{i_e}\right)^{\frac{2}{2-n}}}} + \tag{33}$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{n(n+2)}}\, \sigma_s \sqrt{Re_x} - \frac{4n}{(1-n)\sqrt{n(n+2)}} \cdot \frac{Q}{\frac{dQ}{dx}} \frac{1}{u_e} \frac{du_e}{dx} \frac{E_e}{i_e}\, \sigma_s \sqrt{Re_x}$$

unde am pus

$$C_{f_p} = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{1+n} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_x}}\ , \quad Re_x = \frac{\rho_e u_e x}{\mu_e}\ , \quad \sigma_s = \frac{\rho_w v_w}{\rho_e u_e}.$$

O formulă analogă se obține din relația (30″) și de asemenea se găsește formula grosimii stratului conform relației (23).

a) Să considerăm cazul stratului limită laminar, fără succiune pe o placă în incompresibil. Vom obține din relațiile (21) și (32)

$$C_{f_p} \sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{n+2}{n}} \left(1 - \int_0^1 u_a d\eta\right), \tag{34}$$

unde ψ_δ a fost determinat cu ajutorul primei aproximații $u_a = \eta^n$. Din ecuația (19) putem scoate pe u_a de-a doua aproximație sub forma

$$u_a^2 = \frac{n+2}{n+1} \left(\eta - \frac{\eta^{2+n}}{2+n}\right) \cdot \tag{35}$$

Pentru a determina pe n să echivalăm expresiile u_a^2 date de prima și a doua aproximație, astfel încît să avem

$$\int_0^1 \frac{n+2}{n+1} \left(\eta - \frac{\eta^{2+n}}{2+n}\right) d\eta = \int_0^1 \eta^{2n}\, d\eta, \tag{36}$$

cu soluția acceptabilă $n = 0{,}265$. În acest mod soluția de-a doua aproximație devine

$$u_a \simeq 1{,}335\ \eta^{\frac{1}{2}}\ (1 - 0{,}2208\ \eta^{1{,}265} - 0{,}03\ \eta^{2{,}53}). \tag{37}$$

Cu această valoare obținem din relația (34) formula

$$C_{f_p}\sqrt{Re_x} = 0,661, \tag{38}$$

în bun acord cu soluția lui Blasius. Vom lucra peste tot numai cu prima aproximație, așa că va trebui să avem

$$C_{f_p}\sqrt{Re_x} = \frac{\sqrt{n(n+2)}}{1+n} = 0,661,$$

de unde scoatem valoarea

$$n = \frac{1}{3}, \tag{39}$$

care este valoarea lui n caracteristică stratului limită laminar în prima aproximație.

b) Strat limită laminar cu succiune pe placă, în fluid incompresibil. Cele două soluții asimptotice sînt deduse imediat din (30′) și (30″)

$$\begin{aligned} &\text{pentru } S \to 0, \qquad \frac{C_{F_s}}{C_{F_0}} = 1 + 1{,}135\frac{Q}{\sqrt{\mu_e\rho_e u_e x}}\,; \\ &\text{pentru } S \to 1, \qquad \frac{C_{F_s}}{C_{F_0}} = 1 + 1{,}51\frac{Q}{\sqrt{\mu_e\rho_e u_e x}}\,; \end{aligned} \tag{40}$$

unde $C_{F_s} = \int_0^x \tau_{sw}dx$, C_{F_0} fiind aceeași valoare în absența succiunii. Pentru succiunea uniformă, formulele de mai sus dau rezultate în bun acord cu cele găsite de Iglish, trecute în lucrarea [14].

c) Strat limită laminar fără succiune, pe un profil, în incompresibil. Formula (33) devine

$$\frac{C_f}{C_{f_p}} = \Bigg]\sqrt{\frac{xu_e^{3,4}}{\int_0^x u_e^{3,4}\,dx}} + 3{,}6\,\frac{1}{u_e}\,\frac{du_e}{dx}\Bigg]\sqrt{\frac{x\int_0^x u_e^{3,4}\,dx}{u_e^{3,4}}}, \tag{41}$$

cu rezultate analoge celor date de metoda Kármán-Pohlhausen. Ilustrarea calculelor se găsește în figura 6 unde s-au considerat două cazuri extreme : cilindrul circular cu $u_e = 2u_\infty \sin\pi\frac{x}{L}$ și problema lui Howarth cu $u_e = u_\infty\left(1 - \frac{x}{L}\right)$.

d) Strat limită laminar fără succiune pe placă în fluid compresibil. Formula (33) ne dă

$$\frac{C_{f\,\text{compr.}}}{C_{f\,\text{incompr.}}} = \sqrt{K}. \tag{42}$$

Punînd $M_a = \frac{\mu}{\mu_e} = \rho_a^{-s}$, avem $K = \int_0^1 \rho_a^{1-s}\, d\left(u_a^2\right)$, și ρ_a este dată de (29). Rezultatele arătate în figura 7 sînt în bun acord cu cele date de Kármán-Tsien [15], pentru $s = 0{,}75$.

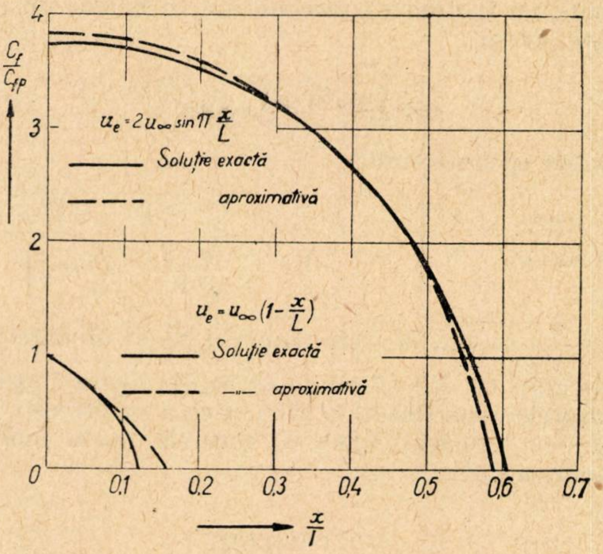


Fig. 6

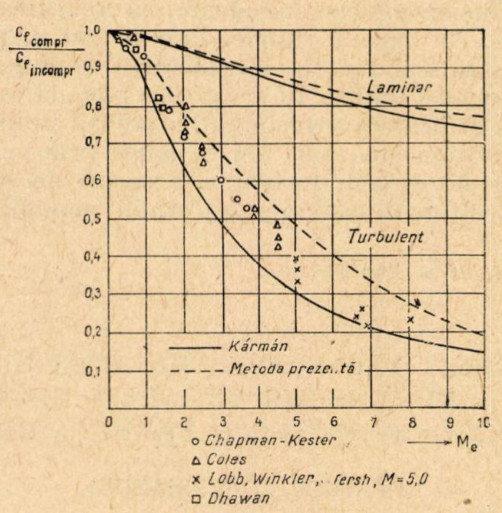


Fig. 7

e) Strat limită turbulent, fără succiune pe placă în fluid compresibil. Să punem $\tau = \rho \cdot \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$ așa că $M = \rho\varepsilon$. Din scurgerile turbulente prin canale, unde avem $u_a = \eta_0^{\frac{1}{N}}$, deducem

$$\varepsilon = C_t\,(R_e)\,u_a^{N-1}\left(1 - u_a^N\right), \tag{43}$$

în care C_t este o constantă depinzînd de numărul Reynolds. Pentru același număr Reynolds, cu ipoteza că mecanismul turbulent nu este afectat de compresibilitate, avem

$$K = \frac{C_t}{\rho_e \mu_e} \int_0^1 \rho_a^2 u_a^{N-1}\left(1 - u_a^N\right) d\left(u_a^2\right),$$

cu ajutorul căruia găsim formula

$$\frac{C_{f\,\text{compr.}}}{C_{f\,\text{incompr.}}} = \frac{1}{\Lambda_1} \sqrt{\frac{(1+N)(1+2N)}{N} \int_0^1 \frac{u_a^N\left(1 - u_a^N\right) du_a}{\left(1 - \frac{\Lambda_1 - 1}{\Lambda_1} u_a^2\right)^2}}, \tag{44}$$

unde $\Lambda_1 = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2$, M_e este numărul Mach al curentului exterior, ρ_a fiind dată de (29). Cu $N = 7$ găsim curba din figura 7 care arată un bun acord cu rezultatele experimentale [16] în ceea ce privește alura variației acestui raport cu numărul Mach. O formulă puțin modificată a fost obținută în lucrarea [17].

VI. CONCLUZII

S-a văzut, din exemplele precedente, că aplicarea metodei duce la rezultate explicite, cu calcule simple. Parametrul n, presupus constant în prima aproximație conduce la considerarea unui profil tip de viteze adimensionale în stratul limită. În acest sens metoda expusă reprezintă o formă practică de utilizare a principiului afinității profilelor. S-a realizat acest lucru prin introducerea unei noi variabile transversale. Calcule mai ample și procedee de detaliu pentru alte cazuri de scurgere în stratul limită au fost dezvoltate în disertația autorului, nepublicată.

Primită la redacție la 24 decembrie 1956.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПУТЕМ ПРИМЕНЕНИЯ ТИПОВЫХ ПРОФИЛЕЙ ДЛЯ СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе автор предлагает новый метод для определения характеристик пограничного слоя. Обнаружилось, что при использовании переменной $\eta_\delta = \frac{\Psi}{\Psi_\delta}$, где $\Psi = \int_0^y \rho u dy$, и $\Psi_\delta = \int_0^\delta \rho u dy$, про-

фили скоростей $\frac{u}{u_e} = u_a(\eta_\delta)$ имеют **полный** турбулентный характер. Аналогично по ступили с функцией $\frac{E-E_W}{E_e E_W} = E_a(\eta_\Delta)$.

Используя типовые профили $u_a = \eta_\delta^n$, $E_a = \eta_\Delta^{n_1}$ можно легко получить коэффициент трения, перенося и другие характерные величины пограничного слоя. В этом смысле уравнения пограничного слоя были преобразованы с помощью этой трансверсальной переменной и представлены в форме, удобной для интегрирования по $\eta_{\delta(\Delta)}$. Существенный параметр n предполагался постоянным, с одним характеристическим значением для ламинарного режима и с другим для турбулентного режима.

SUR LA DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES DE LA COUCHE LIMITE PAR L'EMPLOI DE PROFILS TYPES DE VITESSES ET TEMPÉRATURES

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, l'auteur expose une nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques de la couche limite. On a remarqué qu'en utilisant la variable transversale $\eta_\delta = \frac{\Psi}{\Psi_\delta}$ où $\Psi = \int_0^y \rho u dy$ et $\Psi_\delta = \int_0^\delta \rho u dy$ les profils de vitesses $\frac{u}{u_e} = u_a(\eta_\delta)$ ont le caractère *plein* turbulent. On a procédé par analogie pour la fonction

$$\frac{E - E_w}{E_e - E_w} = E_a(\eta_\Delta).$$

A l'aide des profils types $u_a = \eta_\delta^n$, $E_a = \eta_\Delta^{n_1}$ on peut facilement obtenir les coefficients de frottement, de transfert et les autres grandeurs caractéristiques de la couche limite.

Les équations de la couche limite ont été transformées en ce sens, à l'aide de cette variable transversale et ont été mises sous une forme adéquate à l'intégration par rapport à $\eta_{\delta(\Delta)}$. Le paramètre essentiel n a été supposé constant, avec une valeur caractéristique pour le régime laminaire et une autre, pour le régime turbulent.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Blasius, *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. ZAMM, 1908, t. 56.
2. D. R. Hartree, *On an Equation Occurring in Falkner and Skan's Approximate Treatment of the Equations of the Boundary Layer*. Proc. Cambr. Phil. Soc., 1937, t. 33, partea a II-a, p. 223.

3. A. Dorodnțîn, *Progranicinii sloi v sjimaemom gaze.* Prikl. Mat. Meh., 1942, t. VI.
4. L. Crocco, *Sullo strato limite laminare nei gaz lungo una lamina piana.* Rend. Math. Univ. Roma, 1941, t. V, nr. 2.
5. C. R. Illingworth, *Steady Flow in the Laminar Boundary Layer of the Gas.* Proc. Roy. Soc., 1949, vol. 200.
6. C. Ferrari, *The Turbulent Boundary Layer in a Compressible Fluid with Positive Pressure Gradient.* JAS, 1951, t. 7.
7. K. Stewartson, *Equivalent Compressible and Incompressible Floes.* Proc. Roy. Soc., 1949, vol. 200.
8. Th. Kármán, *Über laminare und turbulente Reibung.* ZAMM, 1921, t. 1.
9. K. Pohlhausen, *Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht.* ZAMM, 1921, t. 1, p. 235.
10. L. G. Loitianski, *Mehanika jidkosti i gaza.* Moscova, 1950, p. 564.
11. D. Morris a. J. Smith, Journal of Aeronautical Sciences, 1953, nr. 12.
12. I. Tani, *Priblihennee resenie uravnenii laminarnogo progranicinogo sloia.* Mehanika, 1955, nr. 3.
13. S. Pai, Journal of Applied Mechanics, 1953, t. 1, nr. 20.
14. H. Schlichting, *Grenzschicht-Theorie.* G. Braun, Karlsruhe, 1951.
15. Th. Kármán a. H. S. Tsien, *Boundary Layer in Compressible Fluids.* Journal of the Aeronautical Sciences, 1938, nr. 5.
16. A. Kuethe, *Some Features of Boundary Layers and Transition to Turbulent Flow.* Journal of Aeronautical Sciences, 1956, nr. 5.
17. Șt. Săvulescu, *O metodă expeditivă pentru studiul caracteristicilor stratului limită.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 7, 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

AEROMECANICĂ

DETERMINAREA EFECTULUI DE EJECȚIE LA PROFILE CU VOLET FLUID (JET-FLAP)

DE

LUCIAN DUMITRESCU

I. INTRODUCERE

În lucrarea de față ne ocupăm de profile aerodinamice prevăzute sau cu volet fluid sau, după o denumire uzuală, *jet-flap* [1], [2] şi [3]. La acestea, emisia unei pînze subţiri de fluid la bordul de fugă, sub o înclinaţie convenabilă, realizează hipersustentaţia.

După cum se constată din experienţele de vizualizare [1], [4] (fig. 1) antrenarea prin ejecție a aerului înconjurător de către pînza de jet, modifică substanţial spectrul scurgerii.

De aceea, ne-am propus să studiem în cele ce urmează efectul ejecţiei asupra mişcării în jurul unor asemenea profile.

Un prim efect asupra scurgerii este favorabil ; el constă în modificarea gradientului de viteze de-a lungul profilului, datorită antrenării aerului de către pînza de jet. Prin aceasta se evită desprinderea stratului limită pe extrados, deşi circulaţiile ce se obţin cu ajutorul voleţilor fluizi ating valori foarte mari. În anumite cazuri chiar, scurgerea se desprinde de profil în apropierea bordului de atac, dar efectul de ejecție provoacă relipirea ei, lăsînd o *bulă de separaţie* pe extrados [1].

Un al doilea efect al ejecţiei se produce asupra valorii portanţei. Întrucît antrenarea aerului se face disimetric faţă de profil, cîmpul de viteze indus prin ejecţie dă naştere unei circulaţii care are sens contrar celei dorite, micşorînd eficacitatea voletului fluid.

Faptul că într-adevăr ejecţia în partea inferioară a profilului este defavorabilă, se poate deduce din rezultatele lucrărilor [5], [6], [7] şi [8], în care se arată că existenţa unor absorbţii la partea superioară a profilului produce circulaţii pozitive, şi invers.

Ca metodă de lucru vom folosi pe cea indicată de N. N. Patraulea [3] şi [6], adăugînd la soluţia dată în aceste lucrări, pentru mişcarea în jurul profilelor cu volet fluid, influenţa ejecţiei pînzei de jet.

Preliminar studiului celor două efecte amintite, a apărut însă necesar să se determine ejecția produsă de o pînză de jet care se scurge paralel cu un curent uniform; aceasta face obiectul paragrafului următor.

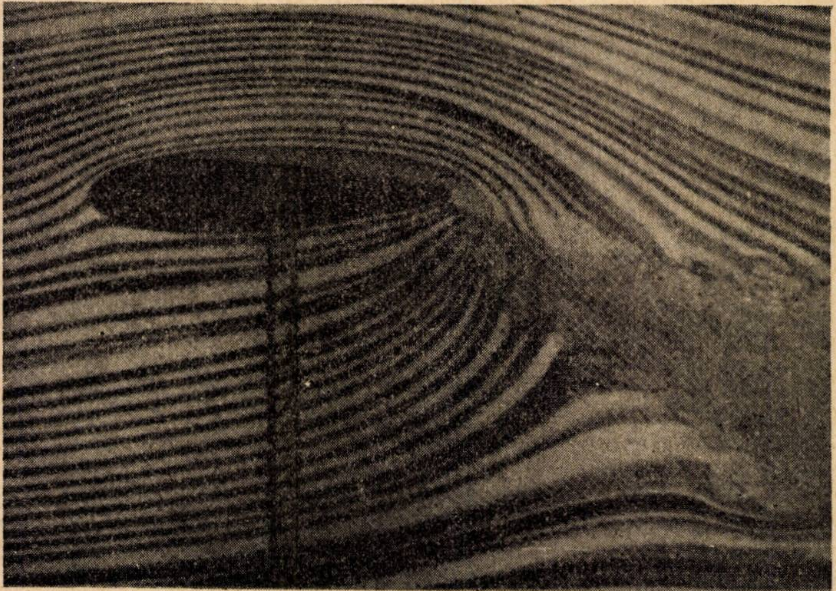


Fig. 1

II. AMESTECUL TURBULENT DINTRE UN JET PLAN ȘI UN CURENT UNIFORM

1. Punerea problemei

Presupunem că dintr-o fantă de lungime infinită iese un jet de aer, scăldat de un curent uniform cu viteza V_∞, paralel cu jetul (fig. 2).

Jetul antrenează prin frecare aerul înconjurător și astfel lățimea 2δ a jetului crește în aval.

Pentru rezolvarea problemei vom utiliza o metodă publicată de T. P. Torda, W. O. Ackermann și H. R. Burnett [9], extinzînd-o la cazul ce ne interesează*). Aceștia studiază problema antrenării de către aerul exterior, a unei pături în care vitezele sînt mai reduse, datorită existenței unui strat limită în amonte de zona de amestec. Toată problema revine deci la a inversa sensul de variație a vitezei în zona de amestec. Redăm aici pe scurt, după [9], ecuațiile folosite și modul de rezolvare.

---

*) Menționăm că rezultatele obținute de Tollmien, Reichardt sau Göertler, care s-au ocupat succesiv de problema unui jet care izvorăște într-un fluid în repaos, nu pot fi aplicate la cazul cînd există viteza V_∞.

2. Rezolvarea problemei

Acceptînd ipotezele obișnuite din teoria stratului limită, ecuațiile de impuls, energie și continuitate se scriu :

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial X} + \rho\, v \frac{\partial u}{\partial Y} = \frac{\partial \tau}{\partial Y}, \tag{1}$$

$$\rho\, u^2 \frac{\partial u}{\partial X} + \rho u v \frac{\partial u}{\partial Y} = u \frac{\partial \tau}{\partial Y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial X} + \frac{\partial \rho v}{\partial Y} = 0, \tag{3}$$

unde X, Y sînt coordonatele carteziene (fig. 2), u, v, componentele vitezei, ρ densitatea iar τ efortul tangențial.

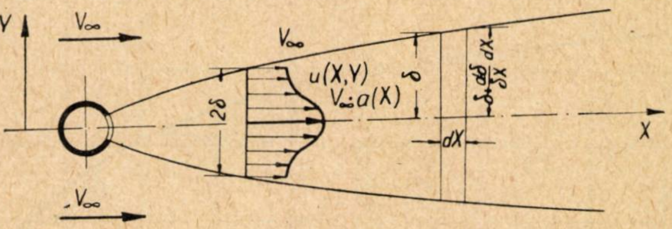


Fig. 2

Condițiile la limite sînt :

$$\left.\begin{aligned} Y = \pm\, \delta,\ u = V_\infty,\ \frac{\partial u}{\partial Y} = 0,\\ Y = 0\ \ ,\ \frac{\partial u}{\partial Y} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

După [9], pentru expresia forței tangențiale se folosește, în locul ipotezei lungimii de amestec, un coeficient de transfer ε definit astfel

$$\left.\begin{aligned} \tau = \rho\varepsilon \frac{\partial u}{\partial Y},\\ \varepsilon = 2\ k\ \delta\ (u_{\max} - u_{\min}),\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

unde k este o constantă iar $2\ \delta\ (x)$ lărgimea zonei de amestec. De asemenea, $u_{\min} = V_\infty$. Vom pune

$$u\ (X,\ 0) = u_{\max} = V_\infty \cdot\ a\ (X), \tag{6}$$

unde a este o viteză adimensională de-a lungul axei OX.

Se aproximează profilul vitezelor cu un polinom de gradul patru, care, cu notația

$$\eta = \frac{Y}{\delta} \tag{7}$$

se scrie, ținînd seama de condițiile la limite (4)

$$\frac{u}{V_\infty} = a\ (\eta^2 - 1)^2 - \eta^2\ (\eta^2 - 2). \tag{8}$$

Înlocuind u din (8) în ecuațiile problemei și efectuînd calculele, problema se rezolvă. Se obține astfel o relație între X și a

$$X + c_2 = \frac{c_1}{k} f(a), \tag{9}$$

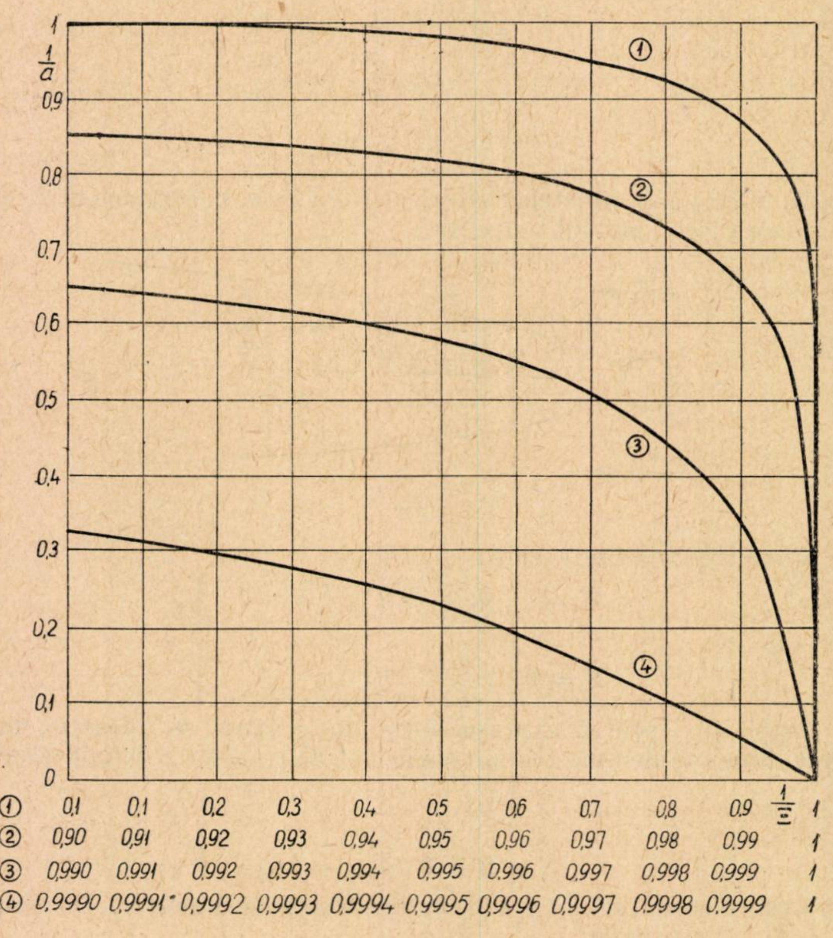


Fig. 3

unde

$$f(a) = \frac{A_1}{2\,(a-1)^2} + \frac{A_2}{a-1} + A_3 \ln \frac{16\,a+5}{a-1} + \frac{B_1}{16\,(16\,a+5)}, \tag{10}$$

$$\text{cu } A_1 = \frac{1}{252} = 0{,}003968\,;\; A_2 = \frac{812}{1324323} = 0{,}00061314\,;$$
$$A_3 = \frac{32}{1324323} = 0{,}0000241633\,;\; B_1 = \frac{14848}{189189} = 0{,}07848236. \tag{11}$$

Constantele c_1 și c_2 provin din integrare. De asemenea se găsește

$$\delta = \frac{c_1}{(a-1)(16a+5)} . \tag{12}$$

Avem deci lățimea zonei de amestec, precum și toate celelalte caracteristici ale mișcării, în funcție de X, prin intermediul parametrului a, cu ajutorul relației (9), care însă nu poate fi explicitată. De aceea, am făcut următoarea schimbare de variabilă :

$$\Xi = \frac{k}{c_1}(X + c_2) + 1, \tag{13}$$

și am reprezentat grafic variația lui $\frac{1}{a}$ cu $\frac{1}{\Xi}$ (fig. 3).

Cu ajutorul acestei diagrame se poate găsi a cînd se cunoaște X, și apoi toate caracteristicile necesare, inclusiv lățimea jetului 2δ.

3. Determinarea constantelor

Constantele c_1 și c_2 se determină din condițiile inițiale. Presupunem că la $X = 0$, cunoaștem lățimea jetului e și debitul care iese din fantă, Q_0. Debitul de aer într-o secțiune oarecare X, are expresia

$$Q = \frac{2\,V_\infty \delta}{15}(8\,a_0 + 7). \tag{14}$$

Vom considera o lățime fictivă de jet $2\delta^*$, legată de lățimea reală a fantei de evacuare e, prin condiția ca debitul real de aer care trece prin fantă, Q_0, să fie egal cu debitul dat de relația (14), în care se pune δ^* în loc de δ. Rezultă

$$e\,V_\infty\,a_0 = Q_0 = \frac{2V_\infty\delta^*}{15}(8a_0 + 7), \tag{15}$$

a_0 fiind valoarea lui a la $X = 0$.

Din (12) se deduce apoi

$$c_1 = \delta^*(a_0 - 1)(16\,a_0 + 5). \tag{16}$$

Pentru determinarea lui a_0, se pleacă de la valoarea cunoscută a debitului de impuls I, care are expresia

$$I = 2\rho\int_0^{\delta^*} u^2\,dY = \frac{2\rho V_\infty^2\,\delta^*}{315}(128\,a^2{}_0 + 80\,a_0 + 107). \tag{17}$$

Cunoscînd a_0, se găsește valoarea Ξ_0 cu ajutorul diagramei din figura 3 apoi din (13) constanta c_2.

Valoarea constantei k trebuie determinată experimental. Experiențele lui Liepmann și Laufer (citat după [9]) sugerează o valoare de ordinul lui 0,1 ; vom adopta mai jos această cifră, care va permite evaluarea ordinului de mărime a fenomenelor care ne interesează.

4. Efectul de ejecţie al pînzei de jet

Pentru studierea efectului pe care îl are antrenarea aerului de către pînza de jet, asupra scurgerii în jurul profilului, vom înlocui pînza de jet cu un strat de surse negative care se întind pînă la infinit aval. Ele vor produce aceeaşi mişcare în tot domeniul exterior zonei de amestec, presupusă îngustă. Determinarea intensităţii acestor surse se face calculînd debitul de aer exterior care este aspirat în intervalul dintre două secţiuni infinit vecine (fig. 2). Acest debit are expresia

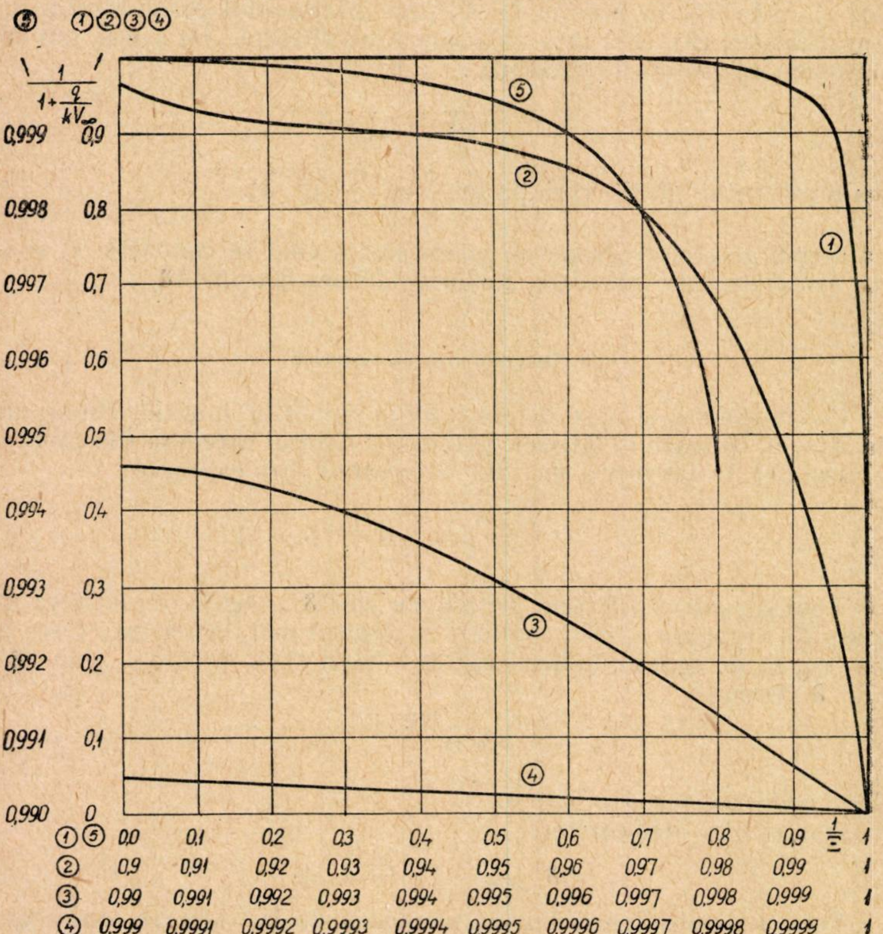


Fig. 4

$$d\,Q' = 2\,\frac{d}{dX}\left[\int_0^{\delta} u\,d\,Y - V_\infty \delta\right] dX \tag{18}$$

(s-a ţinut astfel seama de creşterea de secţiune a zonei de amestec). De

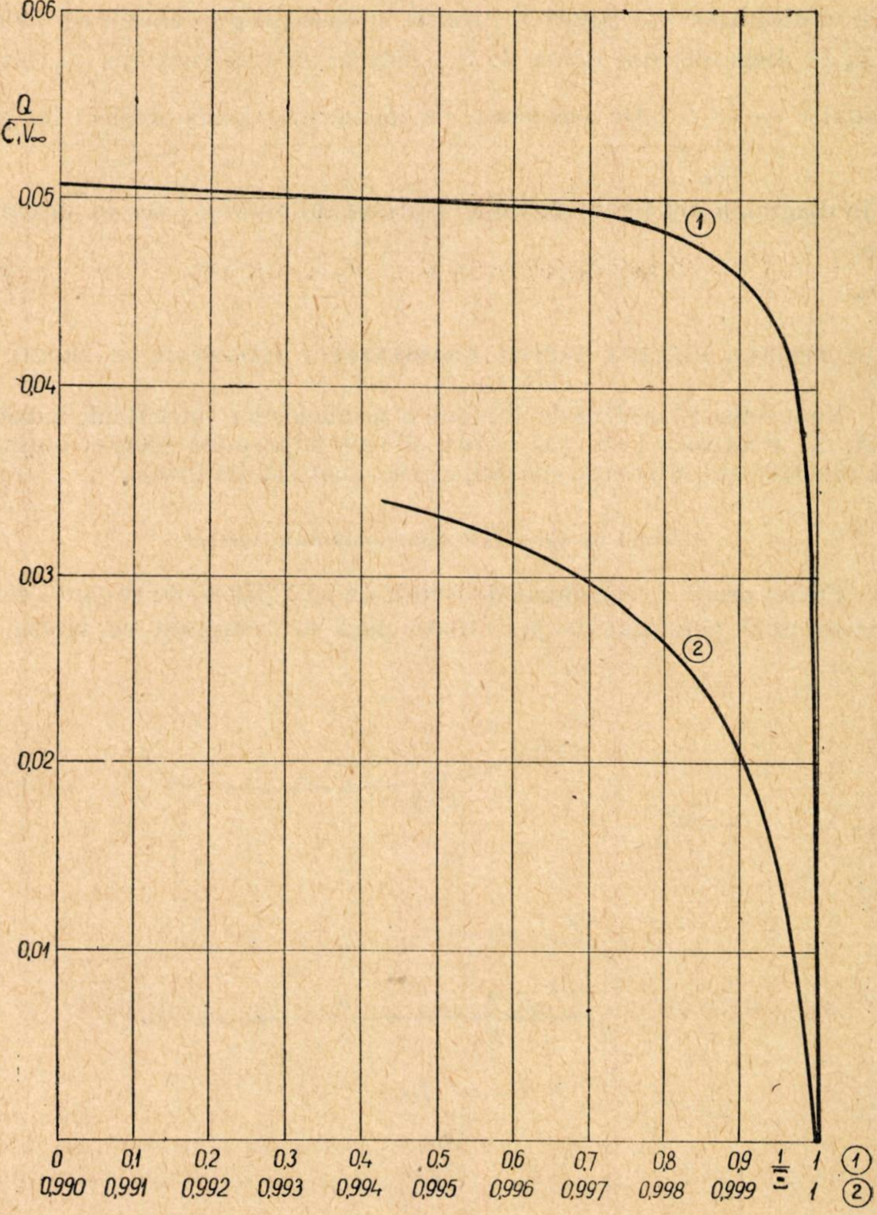

0,06
Q
C₁V∞
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
①
②
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
0,990
0,991
0,992
0,993
0,994
0,995
0,996
0,997
0,998
0,999
1
1/Ξ

Fig. 5

aici rezultă intensitatea surselor $q = \frac{dQ'}{dX}$. S-a reprezentat grafic, cu ajutorul diagramei din figura 3, variația intensității q a surselor ca funcție de X, în diagrama din figura 4. S-a luat în abscisă variabila $\frac{1}{\Xi}$, iar în ordonată $\frac{1}{1+\frac{1}{kV_\infty}q}$. De asemenea, s-a reprezentat grafic debitul integrat Q', în diagrama din figura 5, unde s-a luat în abscisă $\frac{1}{\Xi}$ iar în ordonată $\frac{1}{c_1}\frac{Q'}{V_\infty}$.

III. EFECTUL EJECȚIEI ASUPRA GRADIENTULUI VITEZELOR PE PROFIL

Vom relua procedeul de studiere a profilelor cu volet fluid, introdus de N. N. Patraulea [3] și [6], și vom suprapune soluției obținute fără considerarea influenței ejecției, efectul acesteia din urmă.

1. Profil cu volet fluid fără considerarea ejecției

Fie un profil ϖ, continuat de o linie de jet λ (fig. 6,a) ; se caută determinarea unui potențial de perturbație față de scurgerea cu viteza $\overline{V}_\infty$.

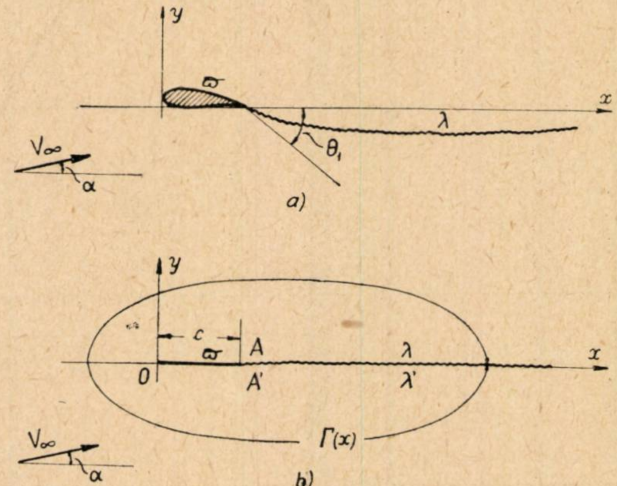


Fig. 6

Pentru linearizarea problemei, se pun condițiile la limită pe linia ox, care este asimilată cu linia de jet (fig. 6,b).

Aproximația ce se face astfel, se justifică ținînd seama că linia λ este locul unei pînze de vîrtejuri ; valoarea vitezei verticale v induse de aceste vîrtejuri, (viteză care produce circulația), în dreptul profilului, nu se modifică mult printr-o deplasare transversală a vîrtejurilor.

Condițiile la limite pentru potențialul de perturbație se scriu

$$v_n = -\overline{V}_\infty \cdot \overline{n} \quad \text{pe } \omega \tag{19}$$

și

$$\frac{c}{2} k_j\, v(x) = \Gamma - \Gamma(x) \text{ pe } \lambda \tag{20}$$

cu notația

$$k_j = \frac{I}{\rho/2\; V_\infty^2\, c} \cos^2 \alpha, \tag{21}$$

I fiind debitul de impuls al jetului.

Problema se rezolvă cu ajutorul reprezentării conforme a planului $z = x + iy$ cu tăietura $\lambda AOA'\lambda'$, pe semicercul de rază unitate din planul $\zeta = \xi + i\,\eta$, prin intermediul transformării [3]

$$Z = \frac{4c\,\zeta^2}{(\zeta^2 + 1)^2}. \tag{22}$$

Se obține configurația din figura 7.

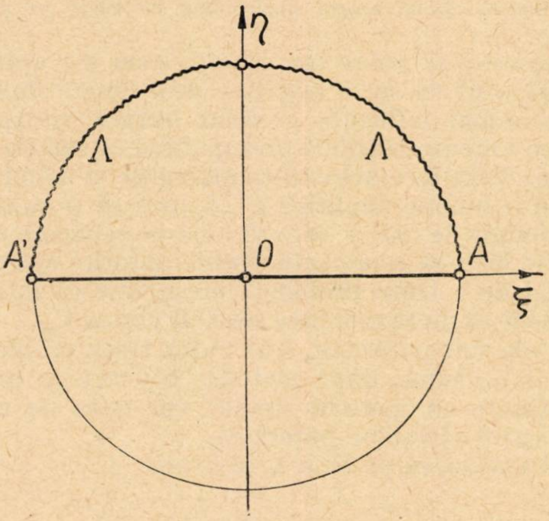


Fig. 7

În acest plan, potențialul complex de perturbație are expresia

$$f(\zeta) = -\Gamma - \frac{\Gamma}{\pi i} \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + f_1(\zeta) - \overline{f_1\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} + \sum_1^\infty A_n \zeta^n. \tag{23}$$

Funcția cunoscută

$$f_1(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(\xi)d\xi}{\xi - \zeta}, \tag{24}$$

împreună cu imaginea sa, se introduce pentru satisfacerea condiției la limită pe profil (19); coeficienții A_n se determină din (20), care se scrie

$$\begin{aligned} &\frac{8}{k_j}\,|\sin\sigma|\,\Sigma\, A_n \cos n\sigma + |\cos^3\sigma|\,\Sigma_n\, A_n \cos n\sigma = \\ &= -\frac{2\,|\cos^3\sigma|}{V_\infty c}\cdot\frac{d\psi^1}{d\sigma} + \frac{|\cos^3\sigma|}{\cos\sigma}\cdot\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} \end{aligned} \tag{25}$$

unde

$$\psi_1(\sigma) = \mathcal{I}m\, f_1(e^{i\sigma}). \tag{26}$$

Pentru aflarea circulației, se aplică relația

$$\Gamma - \Gamma_{\text{profil}} = \frac{c}{2}\, k_i\, v\,(c + 0). \tag{27}$$

2. Efectul ejecției asupra gradientului de viteze pe profil

Efectul ejecției se poate studia, așa cum s-a arătat mai sus, prin dispunerea unui strat de surse negative de-a lungul liniei de jet λ. Dacă ne interesează numai influența surselor asupra vitezelor orizontale pe profil, nu se face o eroare sensibilă presupunînd că sursele se află pe axa ox, ca și vîrtejurile. Vom face această aproximație și astfel vom reduce problema la a găsi o funcție analitică $g(\zeta)$, care să se adauge potențialului complex $f(\zeta)$ definit de (23) și care să aibă pe semicerc o variație a părții imaginare, astfel încît să reprezinte sursele datorite ejecției.

Acest mod de a trata problema presupune că intensitatea surselor nu este mare, încît să nu se modifice sensibil viteza V_∞.

Dacă sursele sînt puternice, s-ar putea trata problema ținînd seama de cîmpul indus de surse, după metoda [10] într-un mod mai laborios. Rezultatele obținute cu metoda simplă vor avea de aceea mai puțină exactitatea în cazul ejecțiilor puternice.

Va trebui așadar, ca pe linia λ, să avem

$$\mathcal{I}m\, g(e^{i\sigma}) = \frac{1}{2}[Q'(\sigma) - Q'_0], \tag{28}$$

$Q'(\sigma)$, fiind determinat din figura 5.

Pe linia λ′, vom avea $\mathcal{I}m\, g(e^{i\sigma}) = -\frac{1}{2}[Q'(\sigma) - Q'_0]$.

Prin aceasta am făcut implicit ipoteza că antrenarea prin ejecție în cazul cînd pînza de jet se află într-un cîmp de viteze disimetric se produce la fel ca atunci cînd curentul exterior este uniform.

În semicercul inferior se utilizează prelungirea prin simetrie. Vom pune funcția $g(\zeta)$ sub forma

$$g(\zeta) = \frac{Q'_\infty - Q'_0}{\pi} \ln(\zeta^2+1) + V_\infty c \sum_2^\infty B_n \zeta^n . \tag{29}$$

Aici avem

$$Q'_\infty = Q'(\infty) = \frac{16}{315} V_\infty c_1. \tag{30}$$

Se vede că B_n sînt *reali* și de rang *par*.

Din motive de simetrie, prezența funcției $g(\zeta)$ nu modifică ecuația (25), astfel încît coeficienții A_n nu se schimbă; determinarea coeficienților B_n se face cu ajutorul relației (28).

În acest scop se poate păstra un număr de termeni și scrie că relația (28) se verifică în tot atîtea puncte din primul cadran; de asemenea, se poate folosi un aparat pentru analiza armonică. Potențialul complex de perturbație pentru scurgerea în jurul profilului cu volet fluid, ținînd seama de efectul ejecției, este atunci

$$F(\zeta) = f(\zeta) + g(\zeta). \tag{31}$$

Se poate deduce de aici în particular viteza tangențială pe profil.

3. Exemplu numeric

Vom considera pentru simplificare în cele ce urmează cazul unui profil rectiliniu, fără incidență. În acest caz funcțiunea $f_1(\zeta)$ (24) este identic nulă. Vom lua pentru coeficientul k_j valoarea particulară

$$k_j = 3{,}46. \tag{32}$$

În aceste condiții, coeficienții A_n au următoarele valori:

$$A_1 = \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} \cdot 0{,}52 ; \; A_3 = \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} \cdot 0{,}134 ; \; A_5 = \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} \cdot 0{,}0155. \tag{33}$$

Alegem pentru θ_1 valoarea

$$\theta_1 = -0{,}774, \tag{34}$$

astfel încît să avem să obținem din ecuația circulației (27), $\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = -1$ ceea ce corespunde unui coeficient de portanță cu valoare ridicată, $C_z = 2\pi$.

Pe de altă parte, conform (18) şi (21), vom avea

$$k_j = 2\,\frac{\delta^*}{c}\,\frac{128\,a_0^2 + 80\,a_0 + 107}{315} \tag{35}$$

(presupunînd că jetul este format din aer incompresibil).

Vom lua pentru calculele ulterioare, trei valori uzuale ale parametrului $2\delta^*$

$$a)\ 2\frac{\delta^*}{c} = 0{,}02\,; \quad b)\ 2\frac{\delta^*}{c} = 0{,}04\,; \quad c)\ 2\frac{\delta^*}{c} = 0{,}10.$$

Pentru fiecare caz, relaţia (35) determină valoarea parametrului a_0, şi de aici a tuturor caracteristicilor ejecţiei, inclusiv lăţimea fantei e.

Se găsesc următoarele valori :

$$a)\ 2\frac{\delta^*}{c}=0{,}02\,;\ a_0=10\,;\ \frac{e}{c}=0{,}012\,;\ \frac{c_1}{c}=14{,}85\,;\ \Xi_0=1{,}000183\,;\ \frac{c_2}{c}=0{,}0272\,;$$

$$b)\ 2\frac{\delta^*}{c}=0{,}04\,;\ a_0=6{,}95\,;\ \frac{e}{c}=0{,}024\,;\ \frac{c_1}{c}=13{,}80\,;\ \Xi_0=1{,}00029\,;\ \frac{c_2}{c}=0{,}040\,;$$

$$c)\ 2\frac{\delta^*}{c}=0{,}10\,;\ a_0=4{,}27\,;\ \frac{e}{c}=0{,}064\,;\ \frac{c_1}{c}=11{,}95\,;\ \Xi_0=1{,}00051\,;\ \frac{c_2}{c}=0{,}061.$$

Originea liniei de surse se află în punctul $x = c$, astfel încît vom avea

$$x = c + X = c\left[1 - \frac{c_2}{c} + \frac{c_1}{ck}(\Xi - 1)\right],\ (\Xi_0 < \Xi < \infty\ ). \tag{36}$$

Relaţia (36) se particularizează pentru cazurile considerate.

Cum, prin diagrama din figura 5, se determină variaţia debitului Q' ca funcţie de Ξ, relaţia (36) dă legătura dintre Q' şi x.

În aceste condiţii, relaţia (28) pentru determinarea coeficienţilor B_n devine

$$\Sigma\ B_n \sin n\sigma = \frac{1}{2\,V_\infty\,c}\left[Q'(\sigma) - Q'_0\right] - \frac{Q'_\infty - Q'_0}{\pi\,V_\infty\,c}\cdot\sigma. \tag{37}$$

Rezolvarea s-a făcut cu ajutorul unui aparat de analiză armonică. Potenţialul complex de perturbaţie fiind determinat, s-a putut trasa, în diagramele din figura 8, variaţia vitezei $u\,(x)$ pe extradosul profilului, dedusă din (31), pentru cazul cînd nu se ţine seama de efectul de ejecţie al pînzei de jet, şi pentru cele trei cazuri considerate mai sus.

Se poate observa modificarea în sens favorabil a gradientului de viteze.

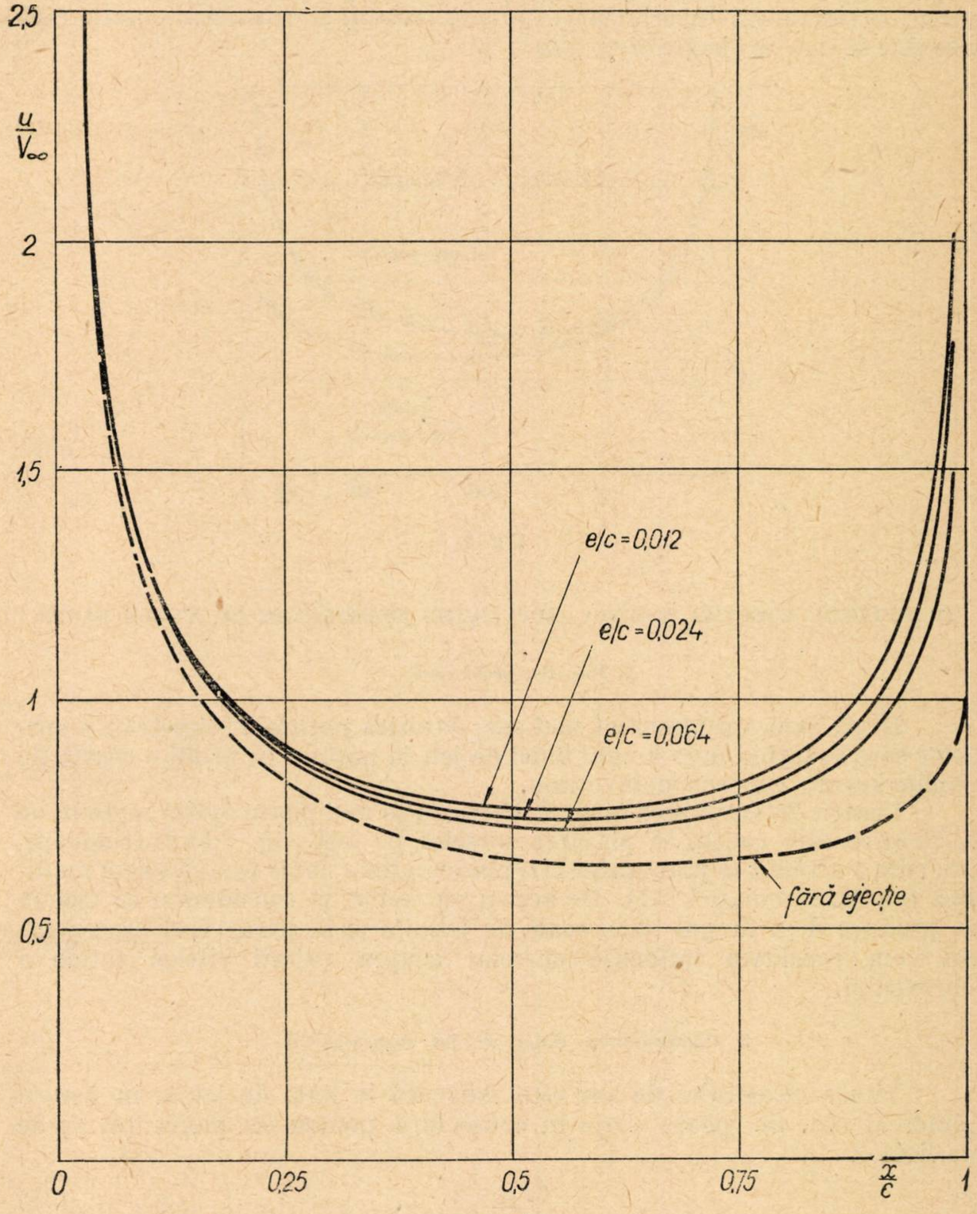

2,5
$\frac{u}{V_\infty}$
2
1,5
1
0,5
0
0,25
0,5
0,75
$\frac{x}{c}$
1
e/c = 0,012
e/c = 0,024
e/c = 0,064
fără ejecție

Fig. 8

Pentru comparație cu rezultatele precedente, în figura 9, reprodusă după [12], este redată distribuția presiunilor pe extradosul unui profil suflat, determinată experimental (puncte izolate) și calculată teoretic fără a se ține seama de ejecție (linie plină)*).

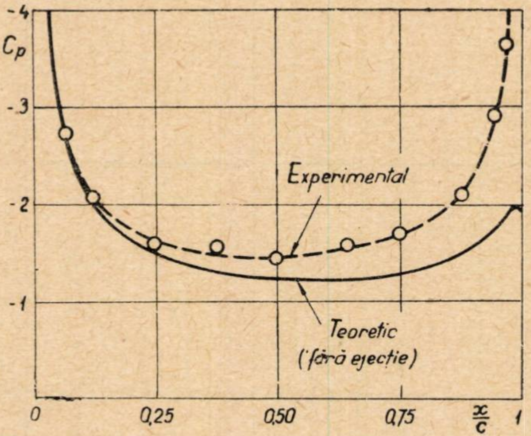


Fig. 9

IV. EFECTUL EJECȚIEI ASUPRA CIRCULAȚIEI PROFILELOR CU VOLET FLUID

1. Punerea problemei

După cum am remarcat mai sus, datorită poziției nesimetrice a surselor care se întind de-a lungul liniei de jet, ia naștere pe profil o circulație suplimentară, cu sens nefavorabil.

Pentru determinarea acestui efect, nu se mai poate aplica metoda de liniarizare care constă în plasarea surselor pe axă (fig. 6,*b*). Într-adevăr, așa cum s-a văzut în paragraful III, plasarea unor surse pe axa ox nu modifică ecuația circulației (31). De aceea, va trebui să considerăm că ejecția se produce de-a lungul liniei reale de jet. Ca și în paragraful precedent, nu vom considera influența surselor asupra valorii vitezei totale a curentului.

2. Determinarea liniei de jet transformate

Viteza curentului de aer este tangentă la linia de jet λ, în fiecare punct al său. Se poate scrie în consecință pentru un punct (x, y) de pe linia λ

$$\frac{dy}{dx} \cong \frac{v}{V_\infty} \cdot \tag{38}$$

---

*) În ceea ce privește valoarea surselor de ejecție, s-ar putea considera orice distribuție, obținută pe cale experimentală sau teoretică fără ca principiul metodei expuse să sufere. Rezultatele prezentate aici oferă cel puțin ordinul de mărime al fenomenelor.

Se poate considera că viteza verticală v într-un punct de pe linia de jet nu diferă sensibil de valoarea sa în punctul de pe axa Ox, care are aceeași abscisă. În aceste condiții se poate integra ecuația (38) și se obține

$$y = \frac{1}{V_\infty} \int_1^x v\,(x,\ 0)\, dx = -\frac{1}{V_\infty}\, \psi\,(x,\ 0) + \text{const.} \tag{39}$$

Vom face ipoteza suplimentară că linia de jet dedusă neglijînd efectul de ejecție, nu diferă mult de cea reală; aceasta revine la a calcula $\psi\,(x, 0)$ din expresia potențialului de la (23), unde nu intervine ejecția. Se obține

$$\begin{aligned} \frac{y}{c} = -\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| - \mathcal{I}m\,[f_1\,(e^{i\theta}) - \overline{f_1\,(e^{-i\theta})}] - \\ - \Sigma A_n \sin n\theta + C. \end{aligned} \tag{40}$$

Constanta C se determină din condiția ca pentru $\theta = 0$, $y = 0$. Relația dintre x și θ se deduce din expresia transformării conforme (26)

$$x = \frac{c}{\cos^2 \theta}. \tag{41}$$

Linia transformată a curbei definite de (40), în planul ζ va fi obținută cu ajutorul unei aproximații. Vom presupune că punctul $z = x + iy$ se transformă în punctul $\zeta = (1 - \varepsilon)\, e^{i\theta}$ cu aproximațiile următoare: valoarea lui ε este suficient de mică pentru a neglija patratele sale, față de unitate; apoi, argumentul θ este același ca pentru punctul $z = x$. Din calcule rezultă

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} \cdot \frac{y}{c}. \tag{42}$$

Pentru cazurile practice, $(C_z > 0)$ rezultă $\Gamma < 0, y < 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

3. Rezolvarea problemei

Pentru introducerea efectului de ejecție, vom plasa de-a lungul liniei de jet transformate (definită prin relația $\zeta = r\, e^{i\theta}$, unde $r = 1 - \varepsilon$), surse negative cu intensitatea $- q$ (calculată în paragraful II), precum și imagini convenabil alese, pentru simetrie (fig. 10). Funcția analitică $h\,(\zeta)$ care se adaugă la potențialul complex $f\,(\zeta)$ (23), este

$$h\,(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} q \frac{dx}{d\theta} \ln \frac{(\zeta - re^{i\theta})\left(\zeta - \frac{1}{r}\, e^{i\theta}\right)(\zeta - re^{-i\theta})\left(\zeta - \frac{1}{r}\, e^{-i\theta}\right)}{\zeta^2 + 1}\, d\theta \tag{43}$$

(am considerat cazul practic $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ corespunzînd unei portanțe pozitive).

Introducerea funcției $h(\zeta)$ modifică ecuația (25) care servește la determinarea coeficienților A_n. Cum prin introducerea imaginilor convenabile, avem $\mathcal{Im}\, h(e^{i\sigma}) = \text{const.}$ nu intervine în ecuație decît circulația produsă de surse, și anume

$$\Gamma_Q(\sigma) = \mathcal{Re}\,[h(e^{i(\pi-\sigma)}) - h(e^{i\sigma})]. \tag{44}$$

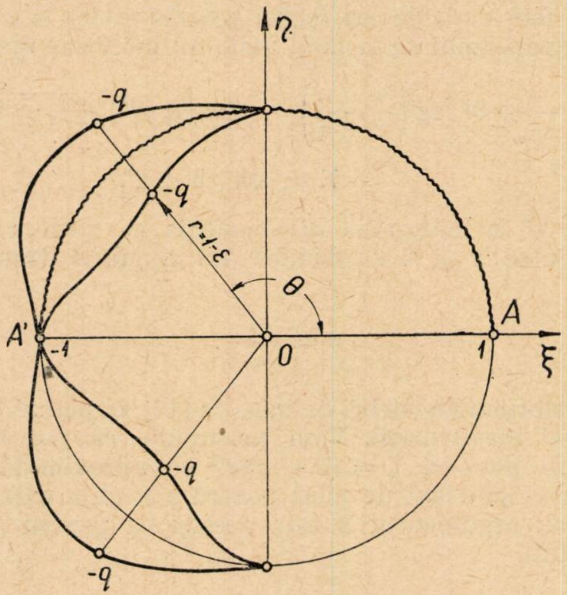


Fig. 10

Se găsește

$$\Gamma_Q(\sigma) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi} q\frac{dx}{d\theta}\ln\left|\frac{(e^{i\sigma}-re^{i\theta})\left(e^{i\sigma}-\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)(e^{i\sigma}-re^{-i\theta})\left(e^{i\sigma}-\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)}{(e^{i\sigma'}-re^{i\theta})\left(e^{i\sigma'}-\frac{1}{r}e^{i\theta}\right)(e^{i\sigma'}-re^{-i\theta})\left(e^{i\sigma'}-\frac{1}{r}e^{-i\theta}\right)}\right| d\theta, \tag{45}$$

cu $\sigma' = \pi - \sigma$.

Ecuația (25) devine

$$\begin{aligned}\frac{8}{K_j}|\sin\sigma|\,\Sigma A_n\cos n\sigma + |\cos^3\sigma|\,\Sigma_n A_n\cos n\sigma =\\ = -\frac{2|\cos^3\sigma|}{V_\infty c}\cdot\frac{d\psi_1}{d\sigma} + \frac{|\cos^3\sigma|}{\cos\sigma}\cdot\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} + \frac{4|\sin\sigma|}{k_j}\cdot\frac{\Gamma_Q(\sigma)}{V_\infty}.\end{aligned} \tag{46}$$

Determinarea coeficienților A_n se poate face din (46) scriind că relația este verificată într-un număr de puncte din primul cadran și păstrînd același număr de termeni din serie; rezultă un sistem de ecuații liniare în coeficienții A_n.

Dacă scriem

$$A_n = A_{n1} + A_{n2} \tag{47}$$

și determinăm coeficienții A_{n1} cu ajutorul relației (25) (fără influența ejecției), pentru determinarea coeficienților A_{n2} rămîne următoarea ecuație:

$$\frac{8}{k_j} | \sin \sigma | \Sigma A_{n2} \quad \cos n\sigma + | \cos^3 \sigma | \Sigma_n A_{n2} \cos n\sigma = \frac{4 | \sin^3 \sigma |}{k_j} \cdot \frac{\Gamma_Q(\sigma)}{V_\infty}. \tag{48}$$

Aplicarea relației (27) furnizează apoi circulația Γ în jurul aripii, deci portanța.

4. Exemplu numeric

Vom aplica cele de mai sus la cazurile numerice considerate în paragraful precedent.

Pentru valoarea coeficientului de jet $k_j = 3{,}46$, coeficienții A_{11}, A_{31}, A_{52}, coincid cu coeficienții A_1, A_3, A_5, dați de (33).

Cu ajutorul relațiilor (40), (41) și (42) în care se fac înlocuirile necesare, se obține curba transformată a liniei de jet, în planul ζ, care, împreună cu imaginile ei, au forma din figura 11.

Se calculează apoi grafic valoarea logaritmului care figurează în formula (45), pentru diverse valori ale unghiului θ, la trei poziții pentru $\sigma : 0, \frac{\pi}{6}$ și $\frac{\pi}{3}$. În aceste puncte vom calcula circulația suplimentară $\Gamma_Q\ (\sigma)$, pentru rezolvarea ecuației (48).

În formula (45) intervine $\frac{dx}{d\theta}$, care are expresia

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{2c \sin \theta}{\cos^3 \theta} \tag{49}$$

și intensitatea surselor q. Aceasta va fi luată din diagramele din figura 4, ținînd seama de relația dintre x și Ξ (36) aplicată la fiecare din cele trei cazuri numerice considerate în paragraful precedent.

Prin integrarea grafică a relației (45), în care acum se cunoaște variația lui q și a logaritmului care figurează sub semnul integral se poate determina valoarea circulației suplimentare $\Gamma_Q(\sigma)$ pentru valorile lui σ considerate.

Introducerea acestor valori în ecuația (48) permite aflarea coeficienților A_{12}, A_{32} și A_{52}

$a)\ \frac{e}{c} = 0{,}012$; $A_{12} = 0{,}391$; $A_{32} = -\ 0{,}109$; $A_{52} = -\ 0{,}0127$;

$b)\ \frac{e}{c} = 0{,}024$; $A_{12} = 0{,}281$; $A_{32} = -\ 0{,}0857$; $A_{52} = -\ 0{,}0047$;

$c)\ \frac{e}{c} = 0{,}064$; $A_{12} = 0{,}217$; $A_{32} = -\ 0{,}0735$; $A_{52} = -\ 0{,}0007$.

Din aplicația relației (27) se determină în sfîrșit valoarea circulației de pe profil, în cazul cînd se ține seama de efectul de ejecție. Față de valoarea $\frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = -1$ aleasă la începutul calculelor, în cazul neglijării efectului de ejecție al pînzei de jet, se găsesc următoarele valori :

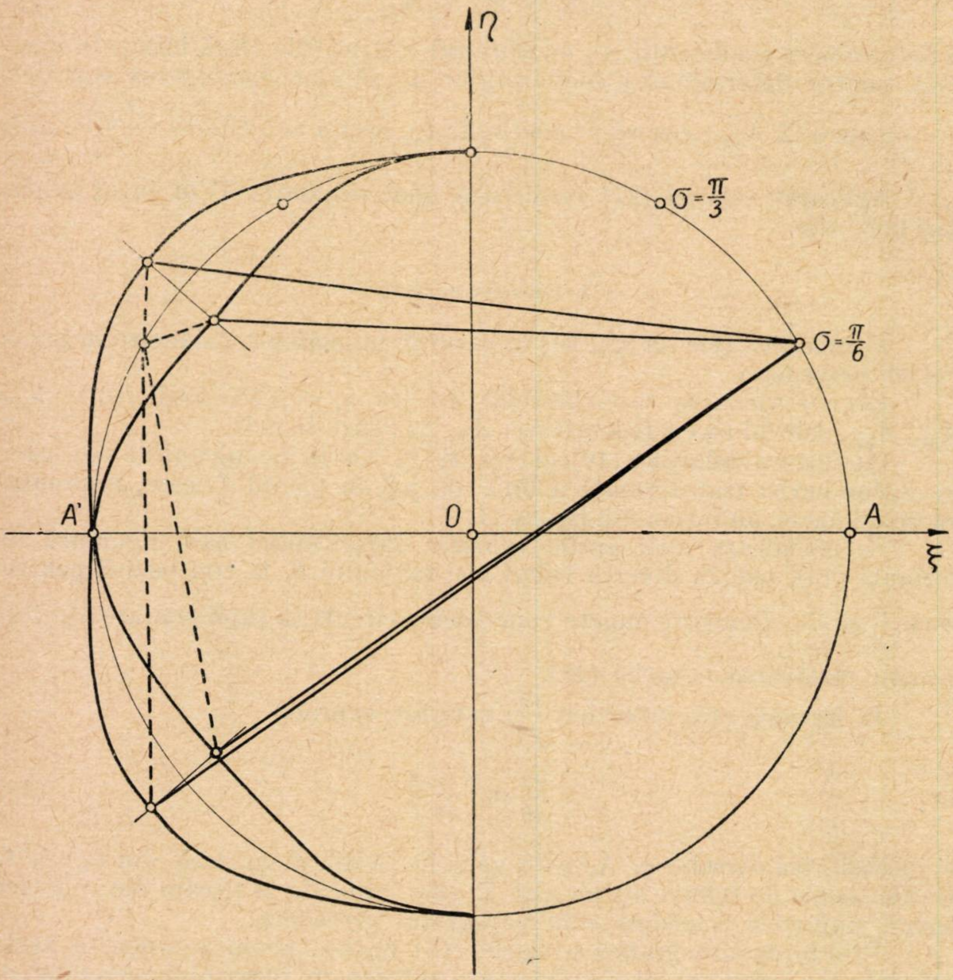


Fig. 11

$$\begin{aligned} a)\ \frac{e}{c} &= 0{,}012\,;\ \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = -\,0{,}20\,; \\ b)\ \frac{e}{c} &= 0{,}024\,;\ \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = -\,0{,}50\,; \qquad (50) \\ c)\ \frac{e}{c} &= 0{,}064\,;\ \frac{\Gamma}{\pi V_\infty c} = -\,0{,}72. \end{aligned}$$

Se constată că diminuarea de portanță datorită efectului de ejecție este considerabilă.

Remarcăm însă că în exemplele numerice alese s-au luat în mod voit valori mari ale parametrilor k, și θ_1, precum și a intensității ejecției q, pentru a pune în evidență cît mai bine efectele pe care ni le-am propus să le studiem. De asemenea, prin simplificare s-au păstrat doar trei termeni din seria coeficienților A_n. De aceea rezultatele de mai sus oferă mai ales aspectul calitativ al fenomenului. De altfel, la valori mari ale unghiului de lansare a jetului, nici teoria liniarizată a profilelor cu volet fluid nu mai dă rezultate în bună concordanță cu experiențele.

Rezultatele experimentale [4] confirmă existența fenomenului de scădere a portanței din cauza ejecției. Într-adevăr se poate observa (p. 17) că pentru obținerea aceleiași portanțe, la o valoare dată a coeficientului de jet, este necesar un unghi de lansare a jetului θ_1 cu atît mai mare, cu cît fanta de ejecție este mai îngustă, deci ejecția este mai puternică. Pierderile de portanță prin ejecție puse astfel în evidență ating 20% din valoarea totală, la o variație a lățimii fantei de la simplu la dublu.

CONCLUZII

În paragrafele precedente, am pus în evidență două efecte ale antrenării prin ejecție asupra mișcării în jurul profilelor cu volet fluid, și anume :

1) modificarea gradientului de viteze pe profil, cu efecte favorabile pentru stabilitatea stratului limită ;

2) apariția unei circulații suplimentare de sens contrar celei produse ca efect principal de pînza de jet deci cu efect defavorabil asupra portanței profilului.

Pentru a pune în evidență fiecare din aceste efecte, s-au folosit la schematizarea fenomenului fizic, ipoteze simplificatoare diferite, după caz. Astfel, la prima problemă, unde se cer vitezele orizontale pe profil, s-a presupus că sursele negative care reprezintă efectul ejecției pînzei de jet, sînt plasate de-a lungul axei Ox, deci simetric, și nu au influență asupra portanței.

Pentru cea de-a doua problemă, s-au plasat sursele pe linia de jet reală, transformată cu ajutorul reprezentării conforme (26). Cu ajutorul unui calcul grafic s-a putut determina circulația produsă de surse. Remarcăm că vitezele orizontale s-ar putea calcula și din expresia potențialului dedusă în acest din urmă mod ; calculele sînt însă mai laborioase, fără ca diferențele față de aproximația primei metode să fie mari.

Amintim că intensitatea stratului de surse care poate reprezenta efectul de ejecție al jetului a fost determinată în paragraful II, unde s-a studiat amestecul turbulent dintre un jet subțire și un curent uniform cu viteza V_∞, utilizînd o metodă dată în [9].

Din rezultatele prezentate se poate deduce că din punctul de vedere al portanței, este favorabilă utilizarea jeturilor de intensitate slabă dar cu debit mare (deci cu lățimi de fantă mari).

Dacă printr-o fragmentare în jerbe multiple a jetului se realizează ca ejecția să se producă pe extradosul profilului, efectul nefavorabil al

ejecției asupra portanței este înlocuit de un efect util; de asemenea, ejecția asigură și în acest caz stabilitatea stratului limită pe extrados. Se vede și pe această cale avantajul concepției de aripă suflată preconizată de N. N. Patraulea și studiată experimental în [11].

Primit la redacție la 5 februarie 1957.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЭЖЕКЦИИ ДЛЯ ПРОФИЛЕЙ С ТЕКУЧИМ ЗАКРЫЛКОМ (JET-FLAP)

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Захватывание внешнего воздуха, благодаря эжекции плоской струи профиля с текучим закрылком, имеет двойное влияние на движение вокруг профиля:

а) изменение градиента давления на верхней поверхности профиля в благоприятном направлении для поведения пограничного слоя;

в) понижение подъемной силы, благодаря асимметрической эжекции на верхней и нижней поверхностях профиля.

Эти явления излагаются в III и IV частях настоящей работы. Для дальнейших приложений, во II части излагается эжекция, вызванная пеленой струй, с применением метода, данного в [9].

Эффект эжекции заменяется линией отрицательных источников интенсивности *q;* на диаграмме рис. 4 дается изменение *q* вдоль струи [переменная Ξ связана с абсциссой X соотношением (13)].

В III части статьи излагается линеаризованная задача, путем размещения источников эжекции вдоль абсциссы *Ox,* или после конформного отображения (22) [3] вдоль полукруга единичного радиуса (рис. 7). Потенциал, вызванный эжекцией $g(\zeta)$ присоединяется к известному потенциалу $f(\zeta)$ (23) [3], представляющему движение вокруг крыла с текучим закрылком, без учета эжекции. Разложение $g(\zeta)$ в ряд Фурье осуществляется численно с помощью прибора для гармонического анализа. На рис. 8 показывается изменение скорости на верхнем контуре крыла.

Для определения понижения подъемной силы, благодаря эжекции (часть IV), источники эжекции нужно распределить на действительной линии струи. Посредством численных расчетов, приходят к результатам, данным в (50). Нужно только заметить, что эти результаты имеют качественное значение.

Понижение подъемной силы (достигающее 20%) подтверждается опытами (4); можно установить, что равенству подъемной силы и коэффициента струи, соответствует при более узкой щели (т. е. более интенсивной эжекции), — большой угол выхода θ_1.

Можно сделать вывод, что для того чтобы уменьшить потери в подъемной силе, благодаря эжекции, надо использовать слабые струи с большим расходом; если фрагментированием струи в пучок локализировать эжекцию на верхней поверхности крыла, то потери подъемной силы исчезают без нарушения устойчивости пограничного слоя. Это свидетельствует о преимуществе сдувания крыла, предложенного в (11).

DÉTERMINATION DE L'EFFET D'ÉJECTION, POUR DES PROFILS À VOLET FLUIDE (JET-FLAP)

(RÉSUMÉ)

L'entraînement par éjection du courant général, par la nappe de jet d'un profil à volet fluide (*jet-flap*), produit deux effets sur le mouvement autour du profil :

a) une modification du gradient des pressions sur le profil, dans un sens favorable pour la stabilité de la couche limite, et

b) une diminution de portance, résultant du fait que l'éjection se produit dyssymétriquement sur l'extrados et l'intrados de l'aile.

Ces deux effets sont mis en évidence dans les parties III et IV du présent article. En vue d'applications ultérieures, la IIe partie est consacrée à l'étude de l'éjection d'une nappe de jet. On utilise une méthode de [9] et on présente les résultats sous forme de diagrammes.

L'effet d'éjection étant remplacé par une ligne de sources négatives d'intensité q, la figure 4 donne les valeurs de q, le long du jet, (la variable Ξ étant liée à l'abscisse X par la relation (13)).

Dans la IIIe partie de l'article, le problème est linéarisé en plaçant les sources d'éjection sur l'abscisse O_x ou, après la transformation conforme (2) [3], sur le demicercle de rayon égal à l'unité (fig. 7).

Le potentiel dû à l'éjection, $g(\zeta)$, s'ajoute au potentiel connu $f(\zeta)$ (23) [3], qui représente le mouvement autour d'un profil à volet fluide, sans éjection.

Le développement en série Fourier de $g(\zeta)$ (29) est fait numériquement, à l'aide d'un appareil d'analyse harmonique ; la figure 8 représente la variation de la vitesse sur l'extrados de l'aile.

Pour l'étude de la diminution de portance provoquée par l'éjection (IVe partie), on doit placer les sources d'éjection sur la ligne réelle du jet. A l'aide de calculs numériques, on aboutit aux résultats des formules (50). On doit toutefois remarquer que ces résultats ont surtout une valeur qualitative.

Les expériences [4] mettent en évidence les pertes de portance par éjection (qui s'élèvent jusqu'à 20%) ; on y constate que, à égalité de portance et de coefficient de jet k_j, à une fente plus mince (donc à une éjection plus intense), correspond un angle d'émission du jet, θ_1, plus grand.

On peut conclure que, pour réduire les pertes de portance dues à l'éjection, on devrait utiliser des jets de faible intensité et de grand débit ; si, par une fragmentation du jet en gerbes multiples, on localise l'éjection sur l'extrados de l'aile, les pertes de portance disparaissent, la stabilité de la couche limite demeurant assurée. Ceci montre l'avantage de la conception d'aile soufflée préconisée dans [3].

BIBLIOGRAFIE

1. I. M. Davidson, *The Jet-Flap*. Journal of the Royal Aeron. Society, ianuarie 1956, p. 26.
2. Maurice Roy, *Théorie du profil d'aile à jets*. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, 25 iunie 1956.
3. N. N. Patraulea, *Contributions théoriques à l'étude des profils à volet fluide (jet-flap)*. IXème Congrès International, de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 11 septembrie 1956, 1—240.
4. L. Malavard, Ph. Poisson-Quinton et P. Jousserandot, *Recherches théoriques et expérimentales sur le contrôle de la circulation par soufflage appliquée aux ailes d'avions*. O.N.E.R.A. Note technique, 1956, nr. 37.
5. N. N. Patraulea, *Le théorie des mouvements à sillages presque rectilignes et son application à l'hypersustentation par soufflage des ailes*. IXème Congrès International de Mécanique Appliquée, Bruxelles, 1956, I — 238.
6. — *Profile aerodianamice cu jeturi cu efect combinat*. Comunicările Acad. R.P.R., t. VII, nr. 2, 1957, p. 163.
7. N. N. Patraulea şi E. Larisch, *O teorie aerodinamică a profilelor de aripă cu volet de intrados permeabil*. Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 4, 1955, p. 689.
8. N. N. Patraulea a. E. Larisch *A Theory For Blown Airfoils and Airfoils With Porous Flaps*. Revue de Mécanique Appliquée, 1956, nr. 2.
9. T. P. Torda, W. O. Ackermann a. H. R. Burnett, *Turbulent Mixing of two Parallel Streams*. Journal of Applied Mechanics (Transactions of the ASME), martie 1953, vol. 20, nr. 1, p. 63.
10. N. N. Patraulea, *Profile aerodinamice cu volet fluid, în prezenţa unor singularităţi date* (acest volum)
11. N. N. Patraulea, L. Dumitrescu, C. Popescu, D. Căpriţă şi H. Gab, *Cercetări experimentale asupra profilelor aerodinamice suflate*, acest volum, p. 319.
12. D. A. Spence, *The Lift Coefficient of a Thin, Jet-Flapped Wing*. Proceedings of the Royal Society Londra, Seria A, decembrie 1956, nr. 1212.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

REZONANȚA SUBARMONICĂ A UNUI ROTOR, CU O CARACTERISTICĂ NELINIARĂ A REAZEMELOR

DE

ALEŠ TONDL

INTRODUCERE

Acest articol se referă la o lucrare precedentă a autorului [1] constituind în același timp și o continuare a ei. Prima lucrare a avut ca scop studiul vibrațiilor periodice ale unui rotor compus dintr-un singur disc fixat pe un arbore fără masă, perioada vibrațiilor fiind $2\pi/\omega$ (ω este viteza unghiulară de rotație a arborelui) și ținînd seama de caracteristica neliniară a reazemelor. În afară de aceasta, s-a constatat în aceeași lucrare, că din cauza amortizărilor prea mici, vibrațiile periodice, cu perioada de $2\pi/\omega$ nu sînt stabile pentru turații avînd o valoare de două ori mai mare decît turația critică a rotorului. Din cauza neliniarității sistemului și fiind vorba de o caracteristică asimetrică și neliniară a reacțiunilor din reazeme, se naște întrebarea dacă nu ar exista posibilitatea creării unor rezonanțe subarmonice de rangul al doilea, adică a unor vibrații a căror perioadă să fie egală cu $4\pi/\omega$. Lucrarea de față este consacrată studiului acestei probleme.

În acest articol nu vom repeta explicațiile cu privire la introducerea și deducerea ecuațiilor problemei, ci vom utiliza ecuațiile deduse în lucrarea [1]. Va fi totuși util să amintim notațiile și relațiile mai importante.

Fie discul avînd masa m și greutatea mg fixat în centrul unei axe pe care o considerăm de masă neglijabilă, avînd în dreptul discului o rigiditate egală cu c. Fie ε valoarea excentricității centrului de greutate. Să notăm cu x, y coordonatele centrului discului și cu $\bar{x}$, $\bar{y}$ pe acelea ale centrului de rotație, axa x avînd sensul și direcția gravitației terestre. Fie k coeficientul de amortizare al acestei gravitații. Rigiditatea reazemelor în direcție orizontală, adică în sensul axei y se presupune constantă și anume, ca avînd o caracteristică liniară. Reacțiunea reazemelor în sensul axei x a fost considerată ca fiind o funcție de x de forma

$$f(x) = c_1 x + b^2 x^2.$$

Vibrațiile în sensul axei y au fost considerate liniare. Pentru studiul vibrațiilor în sensul axei x s-a eliminat mai întîi variabila $\overline{x}$, obținîndu-se astfel mișcarea centrului de rotație (coordonata x).

Mișcarea centrului discului va fi atunci dată de relația

$$\overline{x} = \left(1 + \frac{c_1}{c}\right) x + \frac{b^2}{c} x^2.$$

Mai departe s-au utilizat următoarele notații :

$$\frac{k}{m} = \delta, \quad \frac{cc_1}{m(c + c_1)} = \Omega_1^2, \quad \frac{c}{m} = \Omega^2, \quad \mu = \frac{b^2}{c + c_1}, \quad e = \mu \frac{c}{c + c_1} \cdot$$

1. REZONANȚA SUBARMONICĂ

Vom pleca de la ecuația diferențială dedusă din mișcarea centrului de rotație (a se vedea [1], ecuațiile (1) și (6)) pe direcția verticală, adică în sensul axei x. Avem atunci

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \Omega^2{}_1 x + \mu\, [2\,(\dot{x}^2 + \ddot{x}x) + 2\,\delta\dot{x}x + \Omega^2 x^2] =$$
$$= \frac{c}{c + c_1}\,(g + \varepsilon\omega^2 \cos \omega t), \qquad (1.1)$$

unde $\mu = \dfrac{b^2}{c + c_1}$ reprezintă parametrul mic.

Să considerăm coeficientul de amortizare δ ca fiind foarte mic și să-l punem sub forma

$$\delta = \mu^2 \delta_0{}^{*)}. \qquad (1.1')$$

Să introducem și notația

$$\frac{c}{c + c_1} = \mu\, \frac{c}{b^2} \qquad (1.1'')$$

În acest mod ecuația diferențială (1.1) se poate scrie

$$\ddot{x} + \Omega_1^2 x = -\,\mu\, [\,2(\dot{x}^2 + \ddot{x}x) + \Omega^2 x^2 - P - Q \cos \omega t\,] -$$
$$-\,\mu^2\, \delta_0 \dot{x} - 2\mu^3 \delta_0 \dot{x} x, \qquad (1.2)$$

unde $\quad P = \dfrac{c}{b^2}\, g, \quad Q = \dfrac{c}{b^2} \varepsilon\, \omega^2.$

---

*) Această substituire trebuie efectuată sub această formă pentru a se obține un rezultat real [2].

Substituind mai departe expresia

$$\omega t = 2\,\tau, \tag{1.3}$$

în ecuația diferențială (1.2) putem exprima pe aceasta din urmă sub forma

$$\frac{1}{4}\,\omega^2 x'' + \Omega^2{}_1 x = -\mu\left[\frac{1}{2}\omega^2\,(x'^2 + x''x) + \Omega^2 x^2 - P - Q\cos 2\,\tau\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\,\mu^2\omega\,\delta_0 x' - \mu^3\omega\,\delta_0 x' x. \tag{1.4}$$

Să căutăm acum soluția periodică cu perioada 2 π sub forma

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \ldots \tag{1.5}$$

Frecvența ω poate fi și ea exprimată după cum urmează

$$\omega = \omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \ldots \tag{1.6}$$

presupunînd o convergență suficientă pentru a putea păstra numai primii doi termeni ai dezvoltării. Substituind în ecuația (1.4) seriile (1.5) și (1.6) și comparînd totodată coeficienții puterilor egale μ obținem următorul sistem

$$\frac{1}{4}\,\omega_0^2\,x_0'' + \Omega_1^2\,x_0 = 0,$$

$$\frac{1}{4}\,\omega_0^2 x_1'' + \Omega_1^2\,x_1 = -\frac{1}{2}\,\omega_0\omega_1 x_0'' - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,(x_0'^2 + x_0''\,x_0) - \Omega^2 x_0^2 +$$

$$+ P + Q\cos 2\,\tau, \tag{1.7}$$

$$\frac{1}{4}\,\omega_0^2 x_2'' + \Omega_1^2 x_2 = -\frac{1}{4}\,(\omega_1^2 + 2\,\omega_0\omega_2)\,x_0'' - \frac{1}{2}\,\omega_0\omega_1 x_1'' - \frac{1}{2}\,\omega_0^2\,(2x_0'x_1 +$$

$$+ x_0''x_1 + x_1''x_0) - 2\,\Omega^2 x_0 x_1 - \frac{1}{2}\omega_0\,\delta_0 x_0'\,.$$

Dacă prima ecuație a sistemului (1.7) trebuie să aibă o soluție periodică, cu perioada egală 2 π vom avea

$$\omega_0 = 2\,\Omega_1\,. \tag{1.8}$$

Soluția periodică va deveni

$$x_0 = A\cos\tau + B\sin\,\tau^{*}). \tag{1.9}$$

---

*) Valorile constantelor A, B sînt funcții de parametrii ecuației (1.4) și diferă foarte puțin de condițiile inițiale

$$x(0) = A, \quad x'(0) = B$$

din cauza neliniarității sistemului (1.7).

A doua ecuaţie a sistemului (1.7) devine

$$x_1'' + x_1 = \frac{\omega_1}{\Omega_1}(A \cos \tau + B \sin \tau) + \frac{P}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}(A^2 + B^2) +$$

$$+ \left[\frac{Q}{\Omega_1^2} + 2(A^2 - B^2)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\right]\cos 2\tau + 4AB\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right). \quad (1.10)$$

Dacă această ecuaţie trebuie să aibă de asemenea o soluţie periodică, coeficienţii termenilor de rezonanţă trebuie să fie nuli. Presupunînd că

$$A \neq 0, \ B \neq 0,$$

trebuie să obţinem de asemenea

$$\omega_1 = 0.$$

Soluţia ecuaţiei (1.10) va deveni atunci

$$x_1 = \frac{P}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}(A^2 + B^2) - \frac{1}{3}\left[\frac{Q}{\Omega_1^2} + 2(A^2 - B^2)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\right]\cos 2\tau -$$

$$- \frac{4}{3}AB\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\sin 2\tau = U - X\cos 2\tau - Y\sin 2\tau, \quad (1.11)$$

unde

$$U = \frac{P}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}(A^2 + B^2), \quad X = \frac{1}{3}\left[\frac{Q}{\Omega_1^2} + 2(A^2 - B^2)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\right],$$

$$Y = \frac{4}{3}AB\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right).$$

Pentru a treia ecuaţie a sistemului (1.7) vom avea următoarea expresie :

$$x_2'' + x_2 = -\frac{\omega_2}{\Omega_1}x_0'' - 2(2x_0'x_1' + x_0''x_1 + x_1''x_0) - 2\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}x_0 x_1 - \frac{\delta_0}{\Omega_1}x_0' .$$

Dacă substituim acum în membrul stîng al acestei ecuaţii valorile x_0, x_1 şi derivatele lor, trebuie să obţinem, admiţînd o soluţie periodică a acestei ecuaţii, pentru coeficienţii termenilor de rezonanţă, adică pentru valorile cos τ şi sin τ, valori nule.

Vom avea astfel expresiile

$$\left[\frac{\omega_2}{\Omega_1} + 2u\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) - X\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\right]A - \left[Y\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) + \frac{\delta_0}{\Omega_1}\right]B = 0, \quad (1.12)$$

$$\left[\frac{\omega_2}{\Omega_1} + 2U\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) + X\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\right]B - \left[Y\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) - \frac{\delta_0}{\Omega_1}\right]A = 0.$$

Totuşi, trebuie să ţinem seama că U, X, Y sînt în acelaşi timp funcţii de A, B.

Să împărțim prima ecuație cu A și a doua cu B. Adunîndu-le obținem expresia

$$2\frac{\omega_2}{\Omega_1} + 4\,U\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) - Y\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right) + \frac{\delta_0}{\Omega_1}\left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right) = 0, \quad (1.13)$$

iar scăzîndu-le obținem expresia

$$2\,X\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) + Y\left(1 - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)\left(\frac{B}{A} - \frac{A}{B}\right) + \frac{\delta_0}{\Omega_1}\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right) = 0. \quad (1.14)$$

Substituind acum pe X și Y vom obține o formă mai simplă a acestei ecuații, după cum urmează:

$$\frac{A}{B} + \frac{B}{A} = \frac{2}{3}\,\frac{Q}{\Omega_1\delta_0}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - 1\right) = 2\,M.$$

De unde, vom avea pentru

$$\frac{A}{B} = M \pm \sqrt{M^2 - 1}, \quad (1.15)$$

și pentru

$$\frac{A}{B} - \frac{B}{A} = \pm\sqrt{M^2 - 1}. \quad (1.15')$$

Substituind expresia (1.15′) în ecuația (1.13) și înlocuind expresiile U și Y putem obține ecuația următoare:

$$\frac{\omega_2}{\Omega_1} = \left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - 1\right)\left[2\,\frac{P}{\Omega_1^2} - \frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}(A^2 + B^2) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)(A^2 + B^2)\right] \pm$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{9}\,\frac{Q^2}{\Omega_1^4}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - 1\right)^2 - \frac{\delta_0^2}{\Omega_1^2}}. \quad (1.16)$$

Dacă vom considera această aproximație ca satisfăcătoare, atunci neglijînd valorile superioare (ω_2, ω_4, ...), putem obține pentru ω următoarea relație aproximativă:

$$\frac{\omega}{\Omega_1} \cong 2 + \left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - 1\right)\left[2\,e\frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{6}\left(4 + 5\,\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)(A^2 - B^2)\right] \pm$$
$$\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon e\omega^2}{3\,\Omega_1^2}\right)^2\left(\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} - 1\right)^2 - \frac{\delta^2}{\Omega_1^2}}, \quad (1.17)$$

unde

$$e = \mu\,\frac{c}{c + c_1}\cdot$$

Dacă mai scriem

$$\frac{\omega}{\Omega_1} = \eta,\ \frac{\delta}{\Omega_1} = D,$$

şi ţinem seama de faptul că

$$\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2} = 1 + \frac{c}{c_1}$$

obţinem ecuaţia (1.17) sub forma

$$\eta \cong 2 + \frac{c}{c^1}\left[2\,e\,\frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{6}\left(9 + 5\,\frac{c}{c_1}\right)(A^2+B^2)\right] \pm \sqrt{\frac{1}{9}\,\varepsilon^2 e^2 \eta\,\frac{4c^2}{c_1^2} - D^2}. \qquad (1.17')$$

Din această ecuaţie putem obţine mai departe condiţia suficientă pentru ca rezonanţa subarmonică să nu poată lua naştere, punînd $\eta \cong 2$

$$\frac{4}{3}\,\varepsilon\, e\,\frac{c}{c_1} < D. \qquad (1.18)$$

După cum se vede, cu cît sînt mai mari : coeficientul de neliniaritate e, excentricitatea ε şi raportul rigidităţilor $\frac{c}{c_1}$ şi cu cît este mai mică amortizarea relativă D, cu atît apariţia rezonanţei subarmonice devine mai posibilă. De aici şi influenţa defavorabilă a reazemenlor mai puţin rigide.

Din ecuaţia (1.17′) se poate deduce amplitudinea rezonanţei subarmonice. Astfel

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cong \sqrt{\frac{6\;c_1}{c\left(9 + 5\,\frac{c}{c_1}\right)}\left(2 - \eta + 2e\,\frac{g}{\Omega_1^2}\,\frac{c}{c_1} \mp \sqrt{\frac{1}{9}\,\varepsilon^2 e^2 \eta^4\,\frac{c^2}{c_1^2} - D^2}\right)}. \qquad (1.19)$$

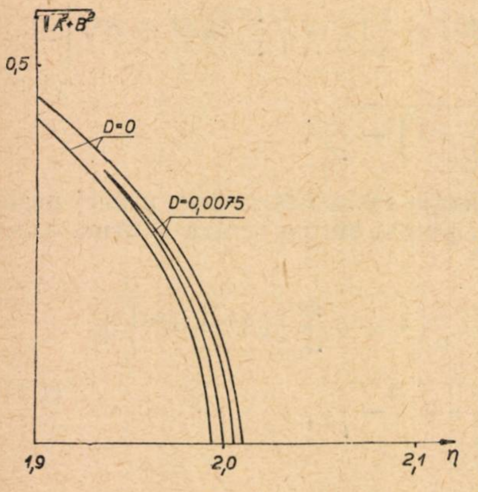


Fig. 1

După cum putem vedea, plecînd de la expresia (1.19), funcţia va avea două ramuri.

În figura 1 s-a construit diagrama amplitudinilor vibraţiilor într-o rezonanţă subarmonică în funcţie de coeficientul de acord η. Pentru acest calcul s-au ales următoarele valori :

$$\frac{c}{c_1} = 0{,}3\,;\; e = 0{,}2\ \mathrm{cm}^{-1}\,;\; \frac{g}{\Omega_1^2} =$$
$$= 0{,}02\ \mathrm{cm}\,;\; D = 0\,;\; D = 0{,}0075\,;$$
$$\varepsilon = 0{,}1\ \mathrm{cm}.$$

După cum reiese din expresia (1.19) şi din grafic, amortizarea are ca urmare joncţiunea celor două ramuri pentru o anumită valoare η.

Vom calcula acum coordonata x a centrului de rotaţie. Dacă ne limităm la aproximaţia

$$x \cong x_0 + \mu\, x_1$$

vom obține următoarele expresii :

$$x \cong A \cos \tau + B \sin \tau + \mu \left\{ \frac{c}{b^2} \frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c}{c_1}\right)(A^2 + B^2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\left[\frac{c}{b^2}\frac{\varepsilon\omega^2}{\Omega_1^2} + \frac{1}{2}(A^2 - B^2)\left(3 - \frac{c}{c_1}\right)\right]\cos 2\tau - \frac{1}{3} AB \left(3 - \frac{c}{c_1}\right) \sin 2\tau \right\} =$$

$$= \frac{c}{c + c_1} \frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2}\mu\left(1 + \frac{c}{c_1}\right)(A^2 + B^2) + \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\tau - \theta_1) - \tag{1.20}$$

$$- \frac{1}{6}\mu\left(3 - \frac{c}{c_1}\right)(A^2 + B^2) \cos (2\tau - \theta_2) - \frac{1}{3}\frac{c}{c + c_1}\frac{c\omega^2}{\Omega_1^2} \cos \tau,$$

unde

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{B}{A}, \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2AB}{A^2 - B^2}.$$

Dacă folosim acum relația de legătură (menționată în introducere) dintre coordonatele centrului de rotație x și centrul discului $\overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{c + c_1}{c} x + \frac{b^2}{c} x^2 = \frac{c + c_1}{c}(x + \mu x^2),$$

vom obține pentru $\overline{x}$ expresia aproximativă

$$\overline{x} \cong \frac{c + c_1}{c}(x_0 + \mu x_1 + \mu x_0^2) =$$

$$= \frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} e \frac{c}{c_1}\left(\frac{c + c_1}{c}\right)^2 (A^2 + B^2) + \frac{c + c_1}{c}\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\tau - \theta_1) + \tag{1.21}$$

$$+ \frac{1}{6} e \frac{c}{c_1}\frac{c + c_1}{c}(A^2 + B^2) \cos (2\tau - \theta_2) - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon\omega^2}{\Omega_1^2} \cos 2\tau.$$

Să notăm cu

$$\frac{c + c_1}{c}\sqrt{A^2 + B^2} = S \tag{1.22}$$

amplitudinea rezonanței subarmonice a centrului discului și să substituim pentru τ valoarea corespunzătoare. Atunci ecuația (1.21) se va putea scrie

$$\overline{x}(t) = \frac{g}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} e \frac{c}{c_1} S^2 + S \cos\left(\frac{1}{2}\omega t - \theta_1\right) +$$

$$+ \frac{1}{6} e \frac{c}{c_1} S^2 \cos (\omega t - \theta_2) - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon\omega^2}{\Omega_1^2} \cos \omega t. \tag{1.23}$$

2. STABILITATEA VIBRAŢIILOR ÎN REZONANŢA SUBARMONICĂ

Vom examina stabilitatea în sensul definiției lui Ljapunov, ca şi în cadrul soluției periodice, cînd perioada a fost egală cu 2π [1].

Vom pleca, astfel, de la ecuația diferențială (1.4) pe care o vom înmulți cu valoarea $4/\omega^2$

$$x'' + \frac{4\,\Omega_1^2}{\omega^2}x = -\mu\left[2\left(x'^2 + x''x\right) + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}x^2 - 4\frac{P}{\omega^2} - \right. \tag{2.1}$$

$$\left. - \frac{4\,Q}{\omega^2}\cos 2\tau\right] - 2\,\mu^2\frac{\delta_0}{\omega}x' - 4\,\mu^3\frac{\delta_0}{\omega}x'x.$$

Să notăm cu

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \ldots \tag{2.2}$$

soluția găsită pentru perioada $2\,\pi$ (substituind pe τ cu perioada $4\,\pi/\omega$) şi cu ξ coordonata mişcării perturbatoare. Obținem atunci substituind expresia

$$x = x(\tau) + \xi, \tag{2.3}$$

în ecuația (2.1), ecuația diferențială a mişcării perturbatoare care va fi neliniară şi cu coeficienții periodic variabili.

Pe baza teoremelor lui Ljapunov asupra studiului în primă aproximație, se poate examina stabilitatea soluției bazate pe partea liniară a ecuației diferențiale a mişcării perturbatoare, în măsura în care nu va fi vorba de aşa-zisele cazuri critice care, în sistemul nostru amortizat, constituie limita dintre cazurile labile şi stabile.

Substituind expresiile (2.3) în ecuația (2.1) obținem ecuația diferențială a mişcării perturbatoare în prima aproximație, după cum urmează :

$$\xi'' + \frac{4\,\Omega_1^2}{\omega^2}\xi = -\mu\{2\left[2x'(\tau)\,\xi' + x''(\tau)\,\xi + x(\tau)\,\xi''\right] +$$

$$+ 8\frac{\Omega^2}{\omega^2}x(\tau)\,\xi\} - 2\mu^2\frac{\delta_0}{\omega}\xi' - 4\mu^3\frac{\delta_0}{\omega}\left[x'(\tau)\,\xi + x(\tau)\,\xi'\right]. \tag{2.4}$$

În cele ce urmează vom adopta metoda pe care o găsim, de pildă, în publicația lui I. G. Malkin [3]. Soluțiile limită vor avea perioadele π şi 2π. Ele se vor găsi în apropierea valorilor [4]

$$\frac{4\,\Omega_1^2}{\omega^2} = \left(\frac{n}{2}\right)^2, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Deoarece ne ocupăm cu studiul soluției în jurul lui $\omega = 2\ \Omega_1$, vom avea $n = 2$.

De aceea vom introduce următoarea substituție :

$$\frac{4\,\Omega_1^2}{\omega^2} = 1 + \mu\,\alpha_1 + \mu^2\,\alpha_2 + \dots \tag{2.5}$$

Vom căuta soluția periodică pentru perioada 2 π sub forma

$$\xi = \xi_0 + \mu\xi_1 + \mu^2\xi_2 + \dots \tag{2.6}$$

Înlocuind (2.2), (2.5) și (2.6) în ecuația (2.4) și comparînd coeficienții puterilor egale μ, vom avea

$$\xi_0'' + \xi_0 = 0, \tag{2.7}$$

$$\xi_1'' + \xi_1 = -\,\alpha_1\,\xi_0 - 2\,[2\,x_0'(\tau)\,\xi_0' + x_0''(\tau)\,\xi_0 + x_0(\tau)\,\xi_0''] - 8\,\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,x_0(\tau)\,\xi_0,$$

$$\begin{aligned}\xi_2'' + \xi_2 = -\,\alpha_2\,\xi_0 - \alpha_1\,\xi_1 - 2\{\,2\,[x_0'(\tau)\,\xi_1' + x_1'(\tau)\,\xi_0'] + x_0''(\tau)\;\xi_1 + \\ + x_1''(\tau)\,\xi_0 + x_0(\tau)\,\xi_1'' + x_1(\tau)\,\xi_0''\} - 8\,\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,[x_1(\tau)\,\xi_0 + x_0(\tau)\,\xi_1] - 2\,\frac{\delta_0}{\omega}\,\xi_0'.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Prima ecuație are următoarea soluție :

$$\xi_0 = M_0\,\cos\,\tau + N_0\,\sin\,\tau, \tag{2.8}$$

unde M_0, N_0 reprezintă constante arbitrare. În a doua ecuație vom înlocui ξ_0 din ecuația (2.8) și $x_0(\tau)$ din ecuația (1.9), scriind în cele din urmă

$$\begin{aligned}\xi_1'' + \xi_1 = -\,\alpha_1\,(M_0\,\cos\,\tau + N_0\,\sin\,\tau) - 4\,\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,(AM_0 + BN_0) + \\ + 4\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)[(AM_0 - BN_0)\,\cos\,2\,\tau + (AN_0 - BM_0)\,\sin\,2\,\tau].\end{aligned} \tag{2.9}$$

Pentru ca această ecuație să aibă o soluție periodică, este necesar ca $\alpha_1\,M_0 = 0$, $\alpha_1\,N_0 = 0$ adică M_0, N_0 fiind constante arbitrare, α_1 trebuie să fie egal cu zero.

Soluția generală a ecuației (2.9) va fi astfel următoarea :

$$\begin{aligned}\xi_1 = M_1\,\cos\,\tau + N_1\,\sin\,\tau - 4\,\frac{\Omega^2}{\omega^2}\,(AM_0 + BN_0) - \\ -\,\frac{4}{3}\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)[(AM_0 - BN_0)\,\cos\,2\,\tau + (AN_0 + BM_0)\,\sin\,2\,\tau].\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dacă în ecuația a treia a sistemului (2.7) înlocuim valorile ξ_0, ξ_1, x_0, x_1 și derivatele lor, coeficienții termenilor de rezonanță, adică coeficienții lui cos τ și sin τ din primul membru al ecuației trebuie să fie neapărat nuli.

În acest mod obținem un sistem de două ecuații omogene în raport cu M_0 și N_0

$$\begin{aligned}
&\left\{\alpha_2 + 2\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[4\frac{\Omega^2}{\omega^2}A^2 - U + \frac{1}{2}X - \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right)(A^2+B^2)\right]\right\}M_0 +\\
&\qquad + \left\{2\frac{\delta_0}{\omega} + 2\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[4\frac{\Omega^2}{\omega^2}AB + \frac{1}{2}Y\right]\right\}N_0 = 0,\\
&\qquad \left\{-2\frac{\delta_0}{\omega} + 2\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[\frac{1}{2}Y + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}AB\right]M_0 +\right.\\
&+\left\{\alpha_2 + 2\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[-\frac{1}{2}X - U + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\left(A^2+B^2\right)\right]\right\}N_0 = 0
\end{aligned}\tag{2.11}$$

unde U, X, Y au aceleași semnificații ca în ecuația (1.11).

Condiția necesară și suficientă pentru ca M_0, N_0 să aibă valori diferite de zero este ca determinantul sistemului (2.11) să fie nul. Dezvoltînd acest determinant, obținem ecuația care dă valoarea căutată a lui α_2

$$\begin{aligned}
&\alpha_2^2 + 2\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)(A^2+B^2) - U + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}(A^2+B^2)\right]\alpha_2 +\\
&+4\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2\biggl\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)(A^2+B^2) - U\biggr]^2 + \biggl[\frac{2}{3}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)\biggl(A^2 +\\
&+B^2\biggr) - U\biggr]4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(A^2+B^2\right) - \frac{1}{4}X^2 + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}A^2\biggl[\frac{2}{3}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)(A^2+B^2) -\\
&\qquad - U - \frac{1}{2}X + 4\frac{\Omega^2}{\omega^2}B^2 - \left[4\frac{\Omega^2}{\omega^2}AB + \frac{1}{2}Y\right]^2\biggr\} + 4\frac{\delta_0^2}{\omega^2} = 0,
\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha_2)_{1,2} = \left(4\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)(A^2+B^2) - U + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}(A^2+B^2)\right]\pm\\
&\pm\sqrt{\begin{aligned}&4\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2\biggl\{\frac{1}{4}(X^2+Y^2) + 2\frac{\Omega^2}{\omega^2}X(A^2-B^2) +\\ &+ 4\frac{\Omega^4}{\omega^4}\left[(A^2+B^2)+4\frac{\Omega^2}{\omega^2}ABY\right]\biggr\} - 4\frac{\delta_0^2}{\omega^2}\end{aligned}}.
\end{aligned}\tag{2.13}$$

Dacă substituim această valoare în ecuația (2.5) și înlocuim pe U, X, Y din ecuația (1.11) și neglijînd termenii superiori α_3, α_4, ... vom obține pentru limitele zonei labile expresia

$$\begin{aligned}
&4\frac{\Omega_1^2}{\omega^2} \doteq 1 + \mu^2\biggl\{\left(4\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right)\left[(A^2+B^2)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}+\frac{4}{3}\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) - \frac{P}{\Omega_1^2}\right]\pm\\
&\pm\sqrt{\begin{aligned}&4\left(1-4\frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2\biggl\{\frac{1}{36}\frac{Q^2}{\Omega_1^4} + \frac{1}{9}(A^2+B^2)\biggl[\left(1-\frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) +\\ &+12\frac{\Omega^2}{\omega^2}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right) + 36\frac{\Omega^4}{\omega^4} + (A^2-B^2)\frac{1}{3}\frac{Q}{\Omega_1^2}\biggl[\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\Omega^2}{\Omega_1^2}\right)+2\frac{\Omega^2}{\omega^2}\biggr]\biggr\} + 4\frac{\delta_0^2}{\omega^2}\end{aligned}}.
\end{aligned}\tag{2.14}$$

Relația (2.14) este prea complicată, fapt care ar atrage dificultăți considerabile de calcul. De aceea vom căuta să simplificăm această relație.

Astfel se vede că valoarea expresiei de sub radical depinde de valorile A și B, adică de unghiul fazelor θ_1 (v. ecuația (1.20)). Valoarea maximă a expresiei de sub radical este atinsă pentru $\theta_1 = 0$ adică dacă avem

$$A^2 + B^2 = A^2, \; B = 0.$$

În cazul acesta vom avea și valoarea maximă pentru lățimea zonei labile. Dacă mai presupunem că $\delta_0 = 0$ putem obține expresia pentru lățimea maximă a zonei labile.

Înmulțind ecuația (2.14) cu

$$\frac{\omega^2}{\Omega_1^2} = \eta^2$$

vom avea pentru A^2

$$A^2 = \tag{2.15}$$

$$= \frac{4\,\eta^2 - \eta^4 - \left[\eta^2 - 4\left(1 + \frac{c}{c_1}\right)\right]\left[2\,e\frac{g}{\Omega_1^2}\,\eta^2 \mp \frac{1}{3}\,e\varepsilon\,\eta^4\right]}{2e^2\left(\frac{c+c_1}{c}\right)^2\left[4\left(1+\frac{c}{c_1}\right) - \eta^2\right]\left\{\eta^2\left[\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{c}{c_1}\right)\right] + \frac{4}{3}\left(1+\frac{c}{c_1}\right) \pm \left[\frac{1}{3}\eta^2 - \frac{1}{12}\left(1+\frac{c}{c_1}\right)\eta^2 + 2\left(1+\frac{c}{c_1}\right)\right.\right.}$$

În figura 2 s-a construit o diagramă a limitelor zonei labile pentru diferitele valori ale lui $\sqrt{A^2 + B^2}$ și A (ecuația (2.15) în funcție de η pentru următorul caz :

$$e = 0{,}2 \text{ cm}^{-1}; \; \frac{g}{\Omega_1^2} = 0{,}02 \text{ cm}; \; \frac{c}{c_1} = 0{,}3.$$

Se vede că partea inferioară a curbei amplitudinilor rezonanței subarmonice, nu va fi stabilă.

Să utilizăm rezultatele lucrării precedente și să construim, pe de altă parte, graficul dependenței de amplitudine (εX_1) a vibrațiilor periodice ale centrului discului cu o perioadă egală cu $2\pi/\omega$ ținînd seama de zona instabilă. Dacă mai utilizăm pe de o parte formula (1.22) și construim amplitudinea vibrațiilor centrului discului de rezonanță subarmonică (cu perioada egală cu $4\pi/\omega$) pentru valorile amintite ($c/c_1 = 0{,}3$; $e = 0{,}2$ cm^{-1} ; $g/\Omega_1^2 = 0{,}02$ cm) și pentru $D = 0$ și pentru $D = 0{,}0075$ în funcție de coeficientul de acord η, vom obține

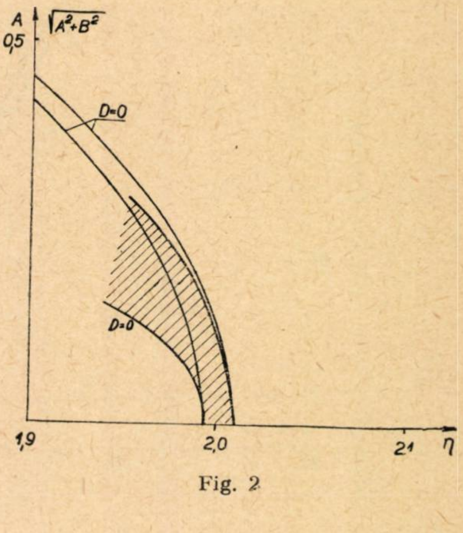


Fig. 2

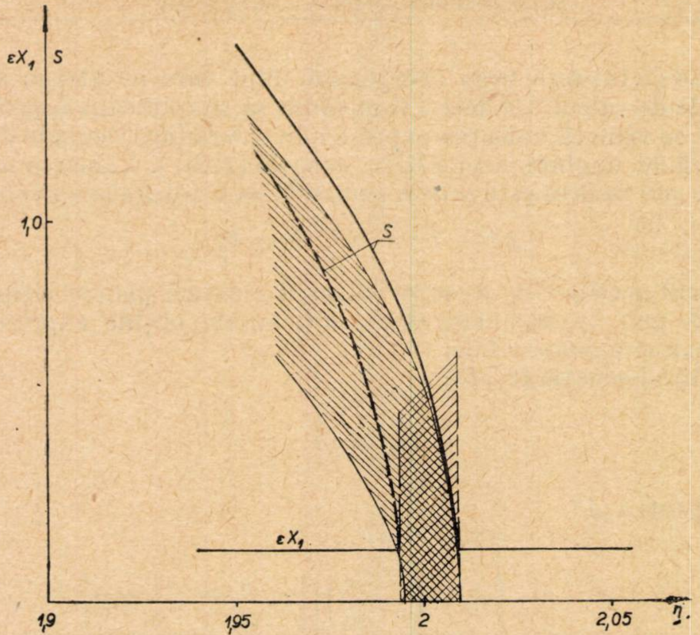


Fig. 3

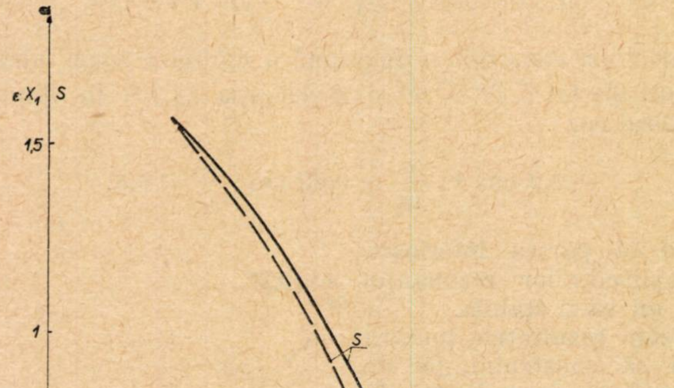


Fig. 4

diagramele din figurile 3 și 4. Pe figura 3 s-au reprezentat zonele nestabile ale vibrațiilor periodice cu o perioadă egală cu 2 π/ω și acelea ale rezonanței subarmonice.

Să presupunem acum că ω se găsește sub zona rezonanței subarmonice. Să facem să crească progresiv frecvența ω a rotației rotorului, și anume să mărim pe η (fig. 5). Pînă în punctul notat cu 1, mișcarea rotorului va corespunde perioadei 2 π/ω a cărei amplitudine va fi dată de coordonata $\overline{11}'$. În punctul 1 aceste vibrații își pierd deci stabilitatea și se produce rezonanța subarmonică cu o amplitudine egală cu $\overline{11}''$. Amplitudinea vibrațiilor crește atunci brusc. Apoi dacă η crește, amplitudinea rezonanței subarmonice începe să descrească pînă la punctul 2, unde vom avea vibrații periodice stabile cu o perioadă egală cu 2 π/ω. Sporind creșterea lui η mai departe, rezonanța subarmonică va dispare cu totul.

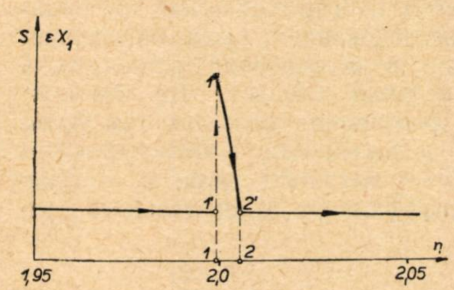


Fig. 5

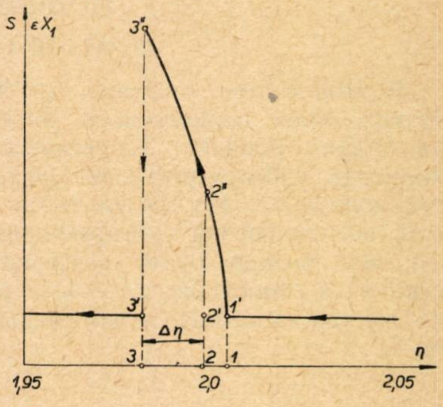


Fig. 6

În cazul contrar celui precedent, cu alte cuvinte dacă η descrește sub rezonanța subarmonică, aceasta va apărea pentru valoarea η dată de punctul 1 (fig. 6) și amplitudinea sa va fi egală cu aceea a vibrațiilor periodice cu perioada de 2 π/ω. Dacă η descrește mai departe, amplitudinea rezonanței subarmonice crește. Experiența ne arată că dispariția rezonanței subarmonice nu are loc pentru η dat de punctul 2 (unde vibrațiile cu perioada de 2 π/ω sînt deja stabile) dar există o oarecare întîrziere cînd rezonanța subarmonică dispare și amplitudinea scade la valoarea de $\overline{33}'$. Această întîrziere nu se poate determina prin metoda sus-menționată.

CONCLUZII

Făcînd un scurt rezumat al rezultatelor mai importante obținute, vedem că pentru o turație egală cu aproximativ dublul turației critice a rotorului, se poate produce în cazul unui rotor echilibrat insuficient și cu reazeme puțin rigide, o rezonanță subarmonică ce atrage întotdeauna după sine o mărire importantă a amplitudinii vibrațiilor.

Rezultă deci că, pe de o parte, turațiile de serviciu ale rotorului nu ar trebui să fie situate în zona în care turația ar fi dublă față de cea critică, iar pe de altă parte că rotorii trebuie să fie echilibrați perfect și reazemele suficient de rigide.

Primită la redacție la 15 septembrie 1956.

СУБГАРМОНИЧЕСКАЯ РЕЗОНАНЦИЯ РОТОРА С НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ УПРУГИХ СТОЕК ПОДШИПНИКОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой статье показано, что в случае нелинейной характеристики упругих стоек подшипников имеет место субгармоническая резонанция второго порядка. Теоретическим исследованием была определена амплитуда субгармонической резонанции и исследована устойчивость этих колебаний. Из результатов вычислений следует, что возможность возникновения субгармонической резонанции является тем большей, чем больше будет коэффициент нелинейности e, эксцентриситет диска ε и отношение жесткости c/c_1 (c — жесткость вала, c_1 — средняя жесткость стоек) и чем меньше коэффициент относительного трения D.

DIE UNTERHARMONISCHE RESONANZ EINES ROTORS MIT NICHTLINEARER CHARAKTERISTIK DER STÜTZEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Es wird gezeigt, dass im Falle nichltlinearer Charakteristik der Stützen eines Rotors eine subharmonische Resonanz zweiter Ordnung stattfindet.

Theoretisch wurde die Schwingungsweite der subharmonischen Resonanz festgestellt und die Stabilität dieser Schwingungen untersucht. Aus den Rechenergebnissen geht hervor, dass die Möglichkeit des Auftretens der subharmonischen Resonanz proportional mit dem Nichtlinearitätskoeffizienten e, der Exzentrizität der Scheibe ε und dem Steifheitsverhältnis c/c_1 (c — Steifheit der Welle und c_1 — mittlere Steifheit der Stützen) und umgekehrt proportional zu dem relativen Reibungskoeffizienten D wächst.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Tondl, *Mișcarea periodică a rotoarelor cu o caracteristică neliniară a reazemelor.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, 1957, p. 35.
2. N. W. Mc Lachlan, *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences.* Oxford University Press, 1950.
3. I. G. Malkin, *Teoriia ustoicivosti dvijenia.* Gostehizdat, Moscova, 1952.
4. L. Poůst, A. Tondl, *Úvod do theorie nelineárnich a quasiharmonických kmitoů mechanických soustav.* Nakladatelsví ČSAV, 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

VIBRAŢII

CALCULUL DINAMIC AL CADRELOR ELASTICE PE BAZA PRINCIPIULUI CONSERVĂRII ENERGIEI

DE

MIHAIL IFRIM

Studiile din ultimul timp legate exclusiv de calculul dinamic al clădirilor înalte, constituite din structuri elastice, au în general ca bază teoretică metodele clasice de rezolvare. Aceste metode clasice prezintă teoretic calcule analoge cu cele cunoscute din statica construcţiilor. Ele se rezumă la metoda deplasărilor sau metoda forţelor.

Fiind vorba de calculul dinamic al cadrelor elastice, în esenţă de determinarea primei frecvenţe a oscilaţiilor proprii, a primului mod de vibraţie, precum şi a determinării repartiţiei forţelor de inerţie pe înălţimea construcţiei, cele două metode de calcul se reduc în ultimă analiză în a scrie pe direcţia fiecărui grad de libertate dinamic, fie cîte o ecuaţie de continuitate dinamică a deformaţiilor, fie cîte o ecuaţie de echilibru dinamic. De aici rezultă un sistem de ecuaţii liniare şi omogene al cărui ordin este egal cu numărul gradelor de libertate dinamice ale sistemului.

Pentru obţinerea frecvenţei vibraţiilor proprii este necesar ca matricea sistemului canonic de ecuaţii să fie nulă. Rezultă deci condiţia

$$\left\| a_{ik} \right\|_1^n = 0, \qquad (1)$$

unde $n = 1, 2, \ldots$ (grade de libertate dinamice).

Această condiţie poate reprezenta fie anularea matricei reacţiunilor (cînd se lucrează în metoda deplasărilor), fie anularea matricei deplasărilor (cînd se utilizează metoda forţelor). În acelaşi mod pot fi determinate şi celelalte frecvenţe ale oscilaţiilor proprii, precum şi formele normale de vibraţie.

Urmînd această cale clasică s-au putut elabora o serie întreagă de studii precizîndu-se pentru cazuri concrete şi în cadrul anumitor ipoteze, formulări avantajoase privind calculul frecvenţelor proprii de oscilaţie şi a modurilor normale de vibraţie.

În studiul de față, se va aborda pentru rezolvarea acestor probleme, principiul conservării energiei elaborat în teoria oscilațiilor cu decenii în urmă, de către Lord Rayleigh; deși aproximativ din punct de vedere matematic acest procedeu utilizat în calculul cadrelor oferă aproximații practic acceptabile.

În privința calculului dinamic al cadrelor folosind principii energetice există relativ puține studii în literatura de specialitate. Se remarcă lucrările lui John A. Blume [1], O. Belluzzi [2] și M. Mișicu [3], din care unele sugestii au fost luate în considerare în studiul de față.

I

Referindu-ne la perturbații seismice se vor considera ca ipoteze generale de calcul concentrarea sarcinilor la nivelul fiecărui etaj și se va admite că oscilațiile predominante sînt cele orizontale (vibrații de translație).

Este știut că în timpul vibrațiilor, un sistem posedă în permanență o cantitate de energie, de valoare constantă (neglijînd disipațiile prin fenomene auxiliare). Această energie se compune dintr-o energie potențială P, și dintr-o energie cinetică C. În tot procesul oscilării aceste două energii se transformă schimbîndu-se din una în alta, încît suma lor rămîne mereu aceeași, adică

$$C + P = E \tag{2}$$

E fiind energia totală a sistemului.

Vom face două observații (fig. 1) în legătură cu oscilațiile unui sistem. Cînd punctele sistemului ating elongațiile maxime, energia sa potențială devine maximă (deformațiile fiind maxime), în timp ce energia cinetică se anulează (vitezele fiind zero). Cînd sistemul trece prin poziția inițială elongațiile lui fiind nule, energia cinetică este maximă (vitezele fiind maxime), iar energia potențială devine nulă (deformațiile fiind egale cu zero).

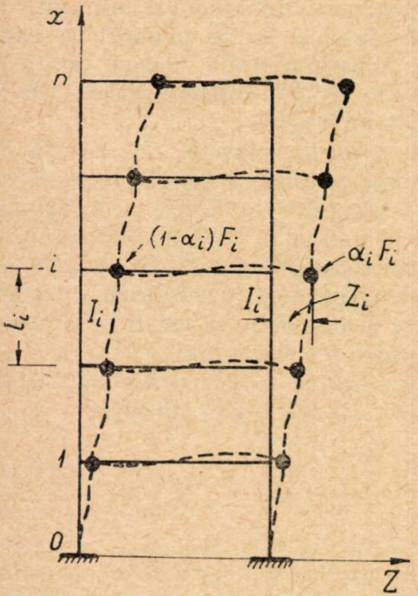


Fig. 1

Prin urmare, în primul caz energia potențială (egală cu lucrul mecanic de deformație) va fi

$$P = \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i(x)}{2}, \tag{3}$$

iar cea cinetică $C = 0$.

În al doilea caz, energia potențială $P = 0$, iar cea cinetică

$$C = \frac{\omega^2 \sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i^2 (x)}{g \quad 2} \tag{4}$$

(s-au considerat soluții ale deplasării de tip Fourier $Z_i\,(x,\,t) = Z_i\,(x) \sin\,(\omega t + \theta)$)
unde

F_i — sarcina concentrată la nivelul i,
Z_i — deplasarea corespunzătoare nivelului i,
ω — frecvența oscilațiilor proprii,
g — accelerația gravității.

Curba $Z_i\,(x)$ nu se cunoaște apriori și de aceea, în majoritatea cazurilor, ea se propune de o anumită formă. Vom presupune cu suficientă exactitate că *deformata dinamică coincide cu deformata statică a cadrului* încărcat cu sarcinile $F_i\,(x)$ lateral, adică pe direcția oscilațiilor.

Ținînd seama de conservarea energiei în timpul vibrațiilor de care s-a amintit și de relațiile (3) și (4) se poate scrie egalitatea

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i (x)}{2} = \frac{\omega^2 \sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i^2 (x)}{2g}, \tag{5}$$

de unde rezultă

$$\omega^2 = g \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i (x)}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} F_i Z_i^2 (x)}. \qquad (6)^{*})$$

Curba $Z_i\,(x)$ se calculează prin metodele statice cunoscute.

Se constată că valoarea frecvenței calculată cu formula (6) este totdeauna mai mare ca valoare cu 2—4% decît valoarea calculată prin metodele denumite exacte.

Utilizarea principiului energiei în calculul frecvențelor oscilațiilor proprii prezintă avantaje deosebite în ceea ce privește ușurința de calcul și simplitatea operațiilor ce se efectuează avîndu-se în vedere și precizia rezultatelor ce se obțin.

II

În cele ce urmează se expune *calculul frecvenței vibrațiilor proprii a cadrelor în ipoteza simplificatoare a riglelor infinit rigide și stîlpilor elastici* sau cum se mai numesc în literatură — a „cadrelor forfecate”.

---

*) Același rezultat s-ar fi obținut dacă s-ar fi derivat în raport cu timpul valoarea energiei totale (2) care fiind constantă se anula.

Această ipoteză în anumite condiții constructive este practic acceptabilă. În sensul acesta se găsesc justificări și aprecieri calitative și cantitative în valoroasele studii aparținînd lui M. Biot [4] și M. G. Salvadori [5].

Se va generaliza pentru acest caz unele rezultate în anumite condiții de calcul. Pentru aceasta se consideră cadrul din figura 2 pentru care se va presupune

— sarcinile concentrate la noduri,

— sarcina totală la nivelul fiecărui planșeu aceeași ($F_1 = F_2 = \ldots = F$),

— momentul de inerție al stîlpilor la un nivel de valoare egală,

— neglijabile deplasările pe verticală ale planșeelor.

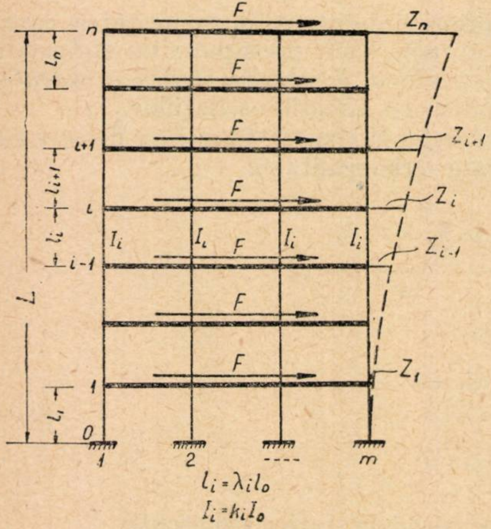


Fig. 2

În cazul acesta, formula (6) devine

$$\omega^2 = g \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} Z_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} Z_i^2} \cdot \tag{7}$$

Pentru calculul deplasărilor se poate scrie relația

$$Z_i = Z_{i-1} + \frac{\sum\limits_{j=i-1}^{j=n} F_j l_j^3}{12 E \sum\limits_{j=1}^{j=m} I_j} \cdot \tag{8}$$

S-au folosit notațiile

Z_i — deplasarea corespunzătoare nivelului i,

Z_{i-1}— deplasarea corespunzătoare nivelului i-1,

F_j — sarcina totală corespunzătoare nivelului j (aceeași pentru toate planșeele),

l_j — înălțimea nivelului j,

I_j — momentul de inerție al stîlpilor corespunzător nivelului j (avînd aceeași valoare),

n — numărul nivelelor (numerotarea făcîndu-se de jos în sus),

m — numărul unui rînd de stîlpi pe orizontală.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Știind că } & l_j = \lambda_j l_0 ;\ I_j = k_j I_0 \\ \text{sau} & l_i = \lambda_i \cdot l_0 ;\ I_i = k_i I_0 \end{array}\right\} \tag{9}$$

relația (8) se mai poate scrie

$$Z_i = Z_{i-1} + (n-i+1) \frac{\lambda_i^3}{k_i} \cdot \frac{F\, l_0^3}{12\, mEI_0} \cdot \tag{10}$$

Notînd

$$Z_0 = \frac{Fl_0^3}{12\ mEI_0} \tag{11}$$

formula (8) devine

$$Z_i = Z_0 \sum_{j=1}^{j=i} (n-j+1) \frac{\lambda_j^3}{k_j}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

unde $Z_i\ (x)$ reprezintă variația deplasărilor pe orizontală pentru un cadru de tipul celui din figura 2 încărcat lateral cu sarcini egale, la nivelul fiecărui planșeu.

În aceste condiții, relația (6) capătă aspectul

$$\omega^2 = \frac{g}{Z_0} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) \frac{\lambda_j^3}{k_j}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \left[\sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) \frac{\lambda_j^3}{k_j} \right]^2}. \tag{13}$$

Ținînd seama de (11) relația (13) devine

$$\omega^2 = 12 \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) \frac{\lambda_j^3}{k_j}}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \left[\sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) \frac{\lambda_j^3}{k_j} \right]^2} m \frac{gEI_0}{Fl_0^3}. \tag{14}$$

Notînd

$\frac{F}{g} = M$ (masa la nivelul fiecărui planșeu) obținem

$$\omega_{\mathrm{I}} = \xi_{\mathrm{I}} \sqrt{\frac{EI_0}{Ml_0^3}}, \tag{15}$$

în care

$$\xi_{\mathrm{I}} = 3{,}465 \sqrt{m \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) q_j}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} \left[\sum\limits_{j=1}^{j=i} (n-j+1) q_j \right]^2}}, \tag{16}$$

unde

$$q_j = \frac{\lambda_j^3}{k_j}.$$

Frecvența tehnică va avea valoarea

$$f_{\mathrm{I}} = \frac{\omega_{\mathrm{I}}}{2\pi}. \tag{17}$$

Aplicarea relației (15) pentru calculul primei frecvențe a oscilațiilor proprii în cazul unui cadru de tipul celui din figura 2, oferă rezultate din cele mai satisfăcătoare ca precizie.

Relația (6) se poate utiliza cu aceeași eficacitate și în calculul frecvenței de vibrație a cadrelor, avînd riglele elastice.

★

Formula (13), prin efectuarea unor operații suplimentare, se poate scrie

$$\omega^2 = \frac{g}{Z_0} \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} (n-i+1)^2 q_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} (n-i+1)^3 q_i^2 + \sum\limits_{i=2}^{i=n} (n-i+1)^2 q_i \left[\sum\limits_{j=1}^{j=i-1} (n-j+1) q_j \right]},$$

sau dezvoltînd

$$\omega^2 = \frac{g}{Z_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{n^2 q_1 + (n-1)^2 q_2 + (n-2)^2 q_3 + \ldots}{n^3 q_1^2 + (n-1)^3 q_2^2 + (n-2)^3 q_3^2 + \ldots + 2q_1 q_2 n (n-1)^2 + 2q_1 q_3 n (n-2)^2 + 2q_2 q_3 (n-1)(n-2) + \ldots}.$$

Utilizarea acestor relații poate fi uneori mai comodă.

Cînd sarcinile la nivelul fiecărui etaj sînt variabile pe înălțime ($F_i = \alpha_i F$) formulele stabilite rămîn aceleași cu observația că valoarea q_i are expresia

$$q_i = \frac{\lambda_i^3}{k_i} \alpha_i.$$

III

Urmărind variația deplasărilor unei structuri elastice corespunzătoare primei forme normale ale oscilațiilor proprii se constată că în cazul structurilor obișnuite (stîlpi verticali și rigle orizontale), aceste deplasări se pot considera că variază cu înălțimea, după o *lege liniară* (curba *b* din fig. 3). Pe baza acestei observații se poate deduce *o expresie simplă și ușor de aplicat pentru valoarea frecvenței oscilațiilor proprii* (ω).

În cazul cînd distanțele dintre planșee nu sînt egale, deplasarea nivelului *i* va avea expresia

$$Z_i = Z_n \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=i} l_j}{\sum\limits_{j=1}^{j=n} l_j} = Z_n \frac{\sum\limits_{j=1}^{j=i} \lambda_j \cdot l_0}{L} = Z_n \frac{l_0}{L} \sum_{j=1}^{j=i} \lambda_j. \tag{18}$$

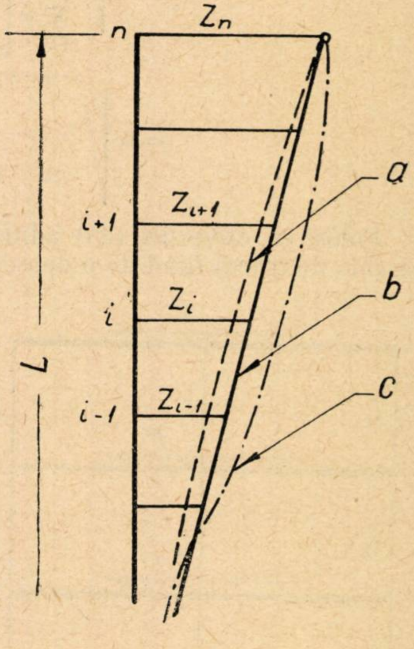
Prin urmare, valoarea frecvenței circulare va fi : (luînd în considerare aceleași ipoteze de calcul expuse la punctul II)

$$\omega^2 = \frac{g}{Z_n}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} Z_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} Z_i^2}, \tag{19}$$

sau ținînd seama de (18)

$$\omega^2 = \frac{g\cdot L}{Z_n\cdot l_0}\,\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\sum\limits_{j=1}^{j=i}\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{i=n}\left[\sum\limits_{j=1}^{j=i}\lambda_j\right]^2}, \tag{20}$$

unde Z_n se calculează cu formula (12) în cazul „cadrelor forfecate".



a. Curba corespunzătoare încărcării laterale cu sarcini statice.

b. Variația liniară a primei forme normale de oscilație (propuse).

c. Deformata dinamică corespunzătoare primei forme de oscilație.

Fig. 3

Pentru cazul particular cînd distanțele dintre planșee sînt egale ($\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$ iar $L = nl_0$), formula (20) devine

$$\omega^2 = g\frac{n}{Z_n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} i^2}\,. \tag{21}$$

Pentru structurile oarecare Z_n reprezintă elongația maximă a punctului n corespunzătoare încărcării statice laterale a cadrului, cu sarcinile existente la noduri.

Aplicată cazului *clădirilor forfecate* formula (21) capătă un aspect mai concis. Valoarea lui Z_n deducîndu-se de astădată din expresia

$$Z_i = Z_0 \sum_{j=1}^{j=i} \frac{(n-j+1)}{k_j}, \; (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{22}$$

Prin urmare, formula (21) se poate scrie și sub forma

$$\omega_I = \bar{\xi}_I \sqrt{\frac{E\, I_0}{M\, l_0^3}}, \tag{23}$$

în care

$$\bar{\xi}_I = 3{,}465 \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=n} i \qquad m.n}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} i^2 \left[\frac{n}{k_1} + \frac{n-1}{k_2} + \frac{n-2}{k_3} + \ldots\right]}} = 6 \sqrt{\frac{m.n}{(2n+1)\left[\frac{n}{k_1} + \frac{n-1}{k_2} + \frac{n-2}{k_3} + \ldots\right]}}. \tag{24}$$

Folosirea expresiei (23) aduce serioase înlesniri în ceea ce privesc operațiile de calcul fiind de o deosebită precizie.

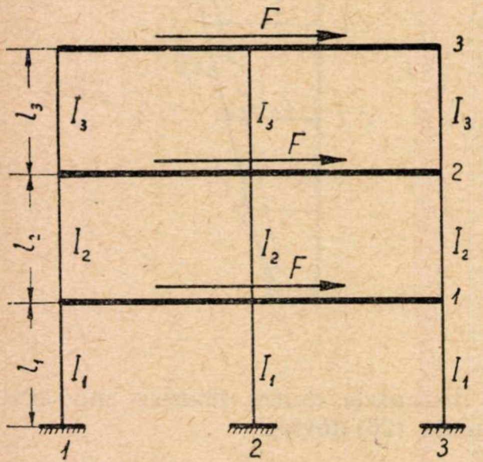


Fig. 4

Valoarea obținută prin expresia (15) este întotdeauna mai mare cu 2–4%, decît (ω) calculat exact, iar valoarea obținută cu formula (23) mai mare cu 1–3% față de valoarea exactă, adică

ω exact < ω calculat cu formula (23) < ω calculat cu formula (15).

IV

Cu scopul de a exemplifica cele expuse anterior, se prezintă calculul din figura 4, în trei moduri :

a) *utilizînd formula* (*15*) caracterizată prin coeficientul (16) ;

b) *utilizînd formula* (*23*) caracterizată prin coeficientul (24) și

c) *exact*, *utilizînd matricea reacțiunilor* (*1*) corespunzătoare metodei deplasărilor.

Caracteristicile geometrice şi statice sînt date în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

i	λ_i	k_i	F_i	$M_i = \frac{F_i}{g}$	Obs.
1	1	4,65	F	M	$m = 3$
2	1	2,40	F	M	$n = 3$
3	1	1,00	F	M	

a) Aplicarea formulei (15) se reduce la determinarea coeficientului ξ_{I} cu ajutorul expresiei (16)

$$\xi_{\mathrm{I}} = 3,465 \sqrt{\frac{\frac{3}{k_1} + \left[\frac{3}{k_1} + \frac{2}{k_2}\right] + \left[\frac{3}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right]}{\left[\frac{3}{k_1}\right]^2 + \left[\frac{3}{k_1} + \frac{2}{k_2}\right]^2 + \left[\frac{3}{k_1} + \frac{2}{k_2} + \frac{1}{k_3}\right]^2}}$$

ţinînd seama de caracteristicile din tabloul nr. 1 rezultă

$$\xi_{\mathrm{I}} = 4,35$$

şi prin urmare

$$\omega_{\mathrm{I}} = 4,35 \sqrt{\frac{EI_0}{Ml_0^3}}\,. \qquad (25)$$

Se poate face calculul deplasărilor Z_i mai întîi (tabloul nr. 2), care pot servi la cunoaşterea alurei primului mod normal de vibraţie în ipoteza enunţată în partea I şi apoi să se calculeze frecvenţa oscilaţiilor proprii cu ajutorul formulei (7).

Tabloul nr. 2

i	$Z_i = Z_0 \sum\limits_{j=1}^{j=i} (n - j + 1) \frac{\lambda_j^3}{k_j}$
1	$Z_1 = \frac{3}{4,65} Z_0$
2	$Z_2 = 2,3\ Z_1$
3	$Z_3 = 3,85\ Z_1$

Din tabloul nr. 2 rezultă

$$\omega_{\mathrm{I}}^2 = \frac{1 + 2,\ 3 + 3,\ 85}{1^2 + 2,\ 3^2 + 3,\ 85^2} \frac{g}{Z_1} = g \cdot \frac{7,15}{21,10} \cdot \frac{4,65}{3\ Z_0}$$

şi deci

$$\omega_{\mathrm{I}} = 4,35 \sqrt{\frac{E\ I_0}{M\ l_0^3}}$$

b) Analog se aplică formula (23). Se va determina de astădată coeficientul $\overline{\xi}_I$ din expresia (24)

$$\overline{\xi}_I = 3{,}465 \sqrt{\frac{1+2+3}{1^2+2^2+3^2} \cdot \frac{3\times 3}{\left[\frac{3}{4{,}65}+\frac{2}{2{,}4}+\frac{1}{1}\right]}} = 4{,}31$$

şi deci

$$\omega_I = 4{,}31 \sqrt{\frac{EI_0}{Ml_0^3}}. \qquad (26)$$

De remarcat că prin procedeele energetice se poate calcula în mod avantajos prima frecvenţă a vibraţiilor proprii, care de altfel prezintă cea mai mare importanţă practică, dacă se ia ca bază de calcul criteriul rezonanţei.

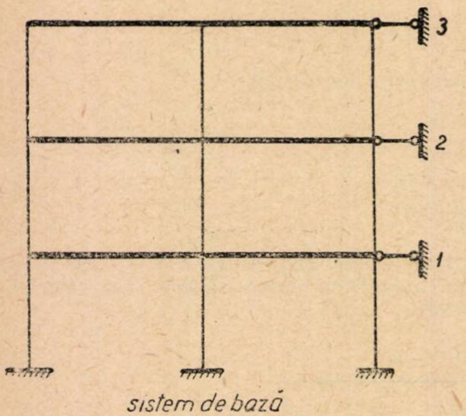


Fig. 5

Determinarea frecvenţelor superioare devine o problemă mai dificilă întrucît variaţia deplasărilor Z_i este greu de apreciat.

c) Pentru evaluarea exactităţii rezultatelor cuprinse în (25) şi (26) se va calcula acelaşi cadru utilizînd matricea reacţiunilor (1) corespunzătoare metodei deplasărilor. Pentru aceasta s-a folosit sistemul de bază din figura 5 obţinut prin introducerea unor penduli pe direcţia gradelor de libertate dinamice, care în cazul clădirilor forfecate sînt egale cu numărul planşeelor clădirii.

Luîndu-se drept necunoscute translaţiile pe direcţia gradelor de libertate dinamice (Z_1, Z_2, Z_3), la valoarea de amplitudine a deplasărilor unitare oscilatorii, sistemul canonic de ecuaţii va fi

$$\left.\begin{aligned} a_{11}^{\star} Z_1 + a_{12} Z_2 + a_{13} Z_3 &= 0, \\ a_{21} Z_1 + a_{22}^{\star} Z_2 + a_{23} Z_3 &= 0, \\ a_{31} Z_1 + a_{32} Z_2 + a_{33}^{\star} Z_3 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

unde

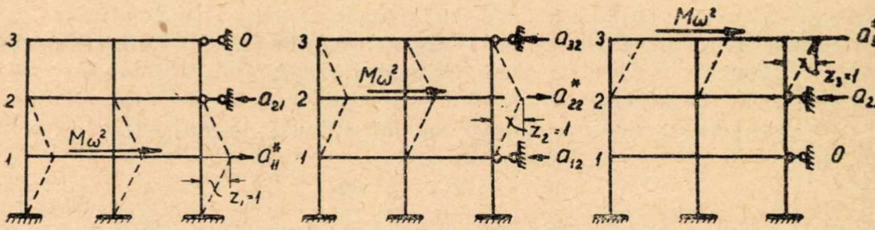
a_{ik} reprezintă reacţiunea dinamică în pendulul i cînd legăturii k i s-a dat o deplasare pulsatorie unitară,

$$a_{ii}^{\star} = a_{ii} - M_i\, \omega^2.$$

Pentru calculul coeficienților a_{ik} și a^{*}_{ii} (tabloul nr. 3), deplasările unitare date structurii se arată schematic în figura 6.

Ecuația din care se obține întreg spectrul frecvențelor proprii de vibrație (1) poate fi scrisă detaliat

$$\| a_{ik} \|_{1}^{3} = \begin{vmatrix} a^{*}_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a^{*}_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a^{*}_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$



(a) (b) (c)

Fig. 6

Tabloul nr. 3

a^{*}_{11}	$7{,}05\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3} - M\omega^2$	a_{12}	$-\,2{,}4\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3}$	a_{13}	0
a_{21}	$-\,2{,}4\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3}$	a^{*}_{22}	$3{,}4\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3} - M\omega^2$	a_{23}	$-\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3}$
a_{31}	0	a_{32}	$-\,\dfrac{36\,EI_0}{l_0^3}$	a^{*}_{33}	$\dfrac{36 \cdot EI_0}{l_0^3} - M\omega^2$

Folosind valorile cuprinse în tabloul nr. 3 și ținînd seama de notația

$$\frac{Ml_0^3}{EI_0}\,\omega^2 = v, \tag{29}$$

rezultă prin rezolvarea ecuației (28)

$$v_{\mathrm{I}} = 18{,}2. \tag{30}$$

Înlocuind în (29) se obține valoarea exactă a primei frecvențe de oscilație a vibrațiilor proprii

$$\omega_{\mathrm{I}} = 4{,}27\,\sqrt{\frac{EI_0}{Ml_0^3}}\,. \tag{31}$$

Comparînd valorile obținute anterior (25) și (26) cu valoarea exactă (31), rezultă pentru cazul ales următoarele diferențe :

— prin rezultatul obținut în *cazul a*), utilizînd formula (15), reiese o diferență în plus față de valoarea exactă de 1,88%.

— în *cazul b*), cînd s-a utilizat formula (23), a reieșit o diferență de 0,94 % în plus față de valoarea exactă.

Aceste rezultate confirmă că utilizarea principiului conservării energiei în calculul dinamic al cadrelor elastice este acceptabil din punct de vedere tehnic.

Aplicîndu-se aceleași formule propuse la alte structuri calculate în diverse lucrări, fie exact, fie prin procedee diverse, au rezultat diferențe în conformitate cu cele enunțate anterior.

Se constată că formula (23) care s-a propus pentru calculul primei frecvențe a oscilațiilor proprii pe lîngă faptul că este simplă și ușor de aplicat dă rezultate satisfăcătoare confirmate și prin alte verificări.

De asemenea, atît formula (7) cît și formula (21) dau rezultate bune în calculul structurilor, al căror raport dintre rigiditatea riglelor față de cea a stîlpilor este variabil.

Frecvențele de ordin superior se pot calcula aproximativ cu relația

$$\omega_n = (2n - 1)\, \omega_{\mathrm{I}} \tag{32}$$

unde $n = 1, 2, \ldots$ și reprezintă ordinul frecvenței de oscilație.

V

Calculul primei forme normale de oscilație se poate face exact din sistemul (27). Se calculează coeficienții a_{ik} și a^*_{ii} pentru valoarea lui ω (obținut prin oricare din procedee) și se obține un sistem omogen și liniar de ecuații, unde necunoscutele $Z_i\,(x)$ reprezintă deplasările corespunzătoare primei frecvențe proprii de oscilații. Se pot calcula numai raporturile dintre deplasări și de aceea se consideră întotdeauna o deplasare de valoare arbitrară, față de care se calculează celelalte. Alura curbei obținute este de tipul *c* din figura 3. Dacă se ia ca mod de vibrație aproximativ chiar deplasarea statică se obține o variație, ca în figura 3 (curba *a*).

Dacă se ia ca deformată corespunzătoare primei forme normale dreapta *b* din figura 3, așa cum de altfel s-a considerat la deducerea relației (23), se constată că abaterile față de deformata reală sînt foarte mici, practic neglijabile. De aceea, cu suficientă exactitate considerarea variației liniare a deplasărilor din primul mod de oscilație este satisfăcătoare.

Pentru determinarea variației formelor proprii normale superioare se poate utiliza, cu destulă exactitate, formula dată de M. G. Salvadori [5] (s-a adaptat notațiilor noastre).

$$Z_n\,(i) = \sqrt{\frac{2}{M_t}} \sin\,(2\,n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\sum\limits_{j=1}^{j=i} l_j}{L} \tag{33}$$

unde masa totală a clădirii,

$$M_t = nM, \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

VI

Cunoscînd valorile frecvențelor proprii de oscilare precum și spectrul formelor normale de vibrație se poate determina variația repartiției forțelor de inerție (Q_i) pe înălțimea clădirii corespunzătoare fiecărui ordin al frecvențelor

$$Q_n(i) = M_i\,\omega_n^2 Z_n(i). \tag{34}$$

Bazați pe teorema ortogonalității formelor proprii, care în cazul ipotezelor noastre se exprimă

$$\sum_i M_i Z_r(i) Z_s(i) = 0,\ r \neq s \tag{35}$$

se pot deduce, utilizînd diverse căi cunoscute, valorile forțelor de inerție la nivelul fiecărui etaj, în cazul diferitelor ordine de oscilație, dacă se consideră ca forțe excitatoare perturbațiile seismice.

Primită la redacție la 13 februarie 1957.

ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ УПРУГИХ РАМ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Принимая за теоретическую основу расчета принцип сохранения энергии, выдвинутый в теории колебаний лордом Рейлей, дается расчет собственных колебаний (ω) упругих рам в предположении масс, сосредоточенных в узлах рамы и существовании боковых вибраций (поступательных).

В статье расчеты сделаны, исходя из выражения (6). Далее специально развит расчет частоты собственных колебаний рам в упрощающем предположении бесконечно жестких ригелей.

Получены два выражения для частоты (ω). Первая формула (15), характеризуемая коэффициентом (16), выведена, считая, что динамическая деформированная форма рамы совпадает с статической деформированной формой рамы, подвергающейся боковой нагрузке (кривая *a*, рис. 3). Вторая формула (23), которая характеризуется коэффициентом (24), установлена в предположении линейной вибрации первой нормальной формы вибрации (кривая *b*, рис. 3). Она дает удовлетворительные результаты.

В IV части (рис. 4) дается численный пример, рассчитанный сначала точно, а затем при помощи формул (15) и (23). Получается приближение в 1,88% в плюс при расчете частоты собственных вариаций при помощи формулы (15), и в 0,94% — при применении выражения (23).

Формула (23), предлагаемая для расчета частот, ближе к точной формуле и в то же время имеет простую и удобную для пользования

форму. Как формула (7), так и (21) могут применяться и для расчета рам с любыми соотношениями между жесткостью ригелей и столбов.

В отношении расчета собственных нормальных форм вибрации даются некоторые указания в части V.

Изменение сил инерции по высоте получается классическими способами в условиях расчета частот и нормальных форм колебаний, изложенных в настоящей статье.

DYNAMIC CALCULUS OF ELASTIC FRAMES ON THE BASIS OF THE LAW OF CONSERVATION OF ENERGY

(ABSTRACT)

Considering the law of conservation of energy, enunciated by rayleigh, within the theory of vibrations, as a theoretical basis of computation, this paper presents the calculation of the frequencies of free oscillations (ω) of elastic frames in the hypotheses of concentrated mass at each story and of horizontal vibrations.

Furthermore, the calculation of the frequency of the free oscillations of frames in the hypothesis of infinitely rigid beams is expanded.

Two simple expressions for obtaining frequency (ω) are deduced. The first formula (15), characterized by the coefficient (16), was deduced considering that the dynamic deformation is coinciding with the static one of the frame under lateral load (curves *a*, fig. 3). The second formula (23), characterized by the coefficient (24), was obtained assuming that the deflections of the fundamental modes of vibrations vary according to a linear law.

A numerical example, calculated first by an accurate method, then with the aid of formulae (15) and (23), is presented in the fourth part (fig. 4). By applying the formulae (15) and (23), additional approximations of 1,88% and 0,94% are obtained respectively.

The value obtained by using formula (23) is closer to that calculated by the so-called accurate methods; at the same time, its expression is simple and easy to apply.

BIBLIOGRAFIE

1. John A. Blume, American Society of Civil Engineers, 1954, vol. 119.
2. O. Belluzzi, *La stabilità dell'equilibrio elastico, Le vibrazioni. Scienza delle construzioni*, Bologna, 1955, vol. IV, cap. 33—34.
3. M. Mişicu, *Asupra determinării vibraţiilor proprii ale construcţiilor*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, nr. 3—4, 1955, p. 447.
4. M. Biot, *Theory of Vibration of Buildings During Earthquake*. Z A M M, 1934, nr. 4, p. 213.
5. M. G. Salvadori, *Earthquake Stresses in Shear Buildings*. ASCE, 1954, vol. 119.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

TEORIA MECANISMELOR

CONTRIBUŢII LA CLASIFICAREA MECANISMELOR SPAŢIALE

DE

E. BUGAIEVSKI, R. BOGDAN şi C. PELECUDI

1. GENERALITĂŢI

Clasificarea mecanismelor pe consideraţii de structură are o importanţă deosebită deoarece permite studierea cinematică şi dinamică a cazurilor complicate prin descompunerea în cazuri simple.

Clasificările structurale ale mecanismelor şi în general ale lanţurilor cinematice se bazează pe următoarele criterii :

— numărul mişcărilor posibile ale elementelor componente, a cărui creştere îngreunează studiul lanţului ;

— gradul de determinare cinematică şi statică ;

— modul de legare a elementelor, adică formarea de contururi închise, care reprezintă zone în interiorul cărora transmiterea mişcării de la element la element se urmăreşte mai greu ;

— numărul de elemente, care cu cît este mai mare, amplifică operaţiile de calcul ;

— felul mişcărilor relative ale elementelor, după natura cuplelor, ceea ce imprimă anumite particularităţi de calcul.

Clasificările existente împart lanţurile în primul rînd după numărul m al mişcărilor posibile ale elementelor componente şi apoi procedează la subîmpărţiri după gradul de determinare al mişcării (gradul de mobilitate), numărul de contururi închise, numărul de elemente etc. În clasificări se foloseşte ca relaţie de bază ecuaţia gradului de mobilitate, stabilită sub forma generală de V. V. Dobrovolski

$$w = m\,n - \sum_{k=1}^{m=1} (m-k)\,p_k , \tag{1}$$

unde am notat*)

m — numărul mişcărilor posibile ale elementelor componente;
n — numărul elementelor mobile;
k — clasa*) unei cuple (numărul de grade de libertate pe care le lasă elementelor pe care le leagă);
p_k — numărul cuplelor aparţinînd unei clase anumite;
w — gradul de mobilitate al lanţului cinematic.

Numărul cuplelor (p_k) conţine p_{k_i} cuple interioare şi p_{k_e} cuple exterioare, care folosesc la legarea lanţului considerat de un alt lanţ sau de o bază. De asemenea elementele mobile pot fi împărţite analog în elemente interioare şi elemente exterioare (n_i respectiv n_e).

În domeniul mecanismelor plane există metode generale de calcul care se aplică lanţurilor cinematic şi static determinate ($w = 0$), în ordinea compunerii lor pentru obţinerea mecanismului considerat.

Deoarece grupele determinate (denumite şi assurice) sînt supuse unor metode de calcul cu atît mai complicate, cu cît numărul de conture închise şi al laturilor lor este mai mare, Baranov a introdus o simplificare aplicabilă în general în plan, care se bazează pe observaţia că orice grupă assurică se poate transforma într-un lanţ cu $w = 1$, prin extragerea unui element simplu (care intră în componenţa a două cuple); lanţul astfel obţinut se poate la rîndul său, descompune în grupe assurice mai simple. În felul acesta, introducînd o mişcare oarecare pentru acoperirea gradului de mobilitate obţinut, mărimea mecanică urmărită în studiul lanţului se prezintă sub forma unei mulţimi de soluţii de natura unui loc geometric, din care separăm valoarea reală ţinînd seama de condiţiile impuse de elementul extras. Aşa se pot studia prin descompunere în lanţuri simple şi lanţurile assurice complicate.

De asemenea, pentru o mai bună grupare a lanţurilor assurice plane asemănătoare, Baranov clasifică numai lanţurile închise, din care, prin considerarea oricărui element ca bază, se obţin toate variantele posibile.

În domeniul mecanismelor spaţiale nu sînt încă puse la punct metode de rezolvare generale pentru diferitele grupe assurice, iar cele existente nu pot fi aplicate la toate mecanismele oricît de complicate s-ar prezenta. Astfel întîlnim de obicei metode specifice pentru anumite cazuri, care adesea nu pot fi generalizate.

Anumite observaţii arată că este posibil şi avantajos ca împărţirea mecanismelor să se facă în primul rînd pe baza numărului de contururi închise şi de elemente, care indică complexitatea lor, celelalte criterii intervenind în subîmpărţiri ulterioare.

— Astfel, după cum arată V. V. Dobrovolski, fiecare lanţ cinematic poate fi considerat ca aparţinînd unei familii cu un *m* mai mare, prin introducerea unui număr determinat de legături suplimentare, care pentru familia cu cel mai mare m $(m = 6)$ se obține din relația

---

*) Menţionăm că notaţiile şi denumirile în cadrul subîmpărţirilor variază după autorii diferitelor clasificări, nefiind încă unificate. Pentru a evita anticipări de convenţie, s-au ales în prezenta lucrare notaţiile astfel ca să nu se producă repetări şi păstrăm toată rezerva asupra denumirilor.

$$q_6 = (6 - m)\left(\sum_{k=1}^{m-1} p_k - n\right). \tag{2}$$

Această relație poate fi generalizată pentru trecerea de la o familie m la familia m' căpătînd expresia

$$q_{m'} = (m' - m)\left(\sum_{k=1}^{m-1} p_k - n\right). \tag{2'}$$

De asemenea se observă că pentru n și p_k dați, gradul de mobilitate w crește proporțional cu m, dacă scriem relația (1) sub forma

$$w = m\left(n - \sum_{k=1}^{m-1} p_k\right) + \sum_{k=1}^{m-1} kp_k.$$

Rezultă de aici că se poate trece un lanț dintr-o familie în alta, modificîndu-i gradul de mobilitate, sau nu, și în felul acesta apar înrudiri între lanțuri de familii diferite.

— Se mai observă că dintr-un lanț transformat, după cum se va vedea, astfel ca toate cuplele sale să aibă $k = 1$, se poate obține un altul cu m mai mic prin rigidizarea unor anumite cuple; (eliminîndu-se în felul acesta anumite grade de libertate ale elementelor).

— De asemenea în cazul general, studiul unui mecanism cu un anumit m poate fi simplificat dacă se împarte în mod avantajos în i grupe (lanțuri) care fie că au un m inferior, fie că sînt de o categorie cunoscută (cu metodică de calcul cunoscută). Rezultatele trebuie bineînțeles compuse după aceea după natura legăturii acestor grupe între ele.

Dacă aceste grupe sînt static determinate $(w_i = 0)$, calculul nu prezintă o problemă specială. Dacă însă $w_i \neq 0$, apar la $w_i > 0$ mulțimi de soluții (prin introducerea unor mișcări arbitrare), iar la $w_i < 0$ condiții suplimentare. Deoarece însă într-un mecanism oarecare $w = \Sigma w_i$ și numărul elementelor conducătoare trebuie să fie egal cu gradul de mobilitate, rezultă că $\Sigma w_j = \Sigma w_l$ unde j și l reprezintă lanțurile cu grad de mobilitate pozitiv respectiv negativ (elementele conducătoare nu intră în componența acestor grupe). În felul acesta, toate mișcările arbitrare introduse în grupele pozitive se neutralizează prin condițiile impuse de cele negative și din mulțimile de soluții apărute se separă cele real valabile.

Dacă în timpul prelucrării unei grupe mulțimea soluțiilor unei anumite mărimi mecanice este de ordinul întîi — adică poate fi reprezentată ca un loc geometric liniar — valoarea reală poate fi ușor extrasă cînd se trece la studiul grupei următoare cu $w_i < 0$. Dacă însă apar mulțimi de ordin superior, calculul devine mult mai complicat și metodele grafice sînt chiar inaplicabile. De aceea este indicat ca împărțirea mecanismului pe grupe să se facă astfel încît să nu apară $w_j > +1$ și să nu se succeadă grupe mai multe cu $w_j = +1$, pentru ca asemenea mulțimi de ordin superior să nu se producă prin acumulare. În acest sens este ușor de văzut că o împărțire a mecanismului în cele mai simple grupe (cu număr de elemente $n_i = 1$) nu poate fi utilă în general, deoarece întregul proces de calcul se reduce la problema generală din mecanică a unui sistem de corpuri legate, prin numărul mare de parametri arbitrari și condiții care intervin. În felul acesta rezultatele simplificatoare ale teoriei mecanismelor nu mai pot fi folosite.

O asemenea împărțire a mecanismului în grupe eventual neassurice cu $-1 \leqslant w_i \leqslant +1$ poate uneori să nu fie încă convenabilă (grupele să nu fie de factură cunoscută), însă în orice caz ea permite o mai mare libertate de alegere a metodelor de calcul, decît împărțirea în grupe determinate cinematic și static ($w_i = 0$).

Încercările de împărțire avantajoasă a mecanismului pot fi făcute plecînd de la o împărțire prealabilă, fie assurică, fie pe grupe de anumite familii, prin transferarea de elemente de la o grupă la alta. Desigur, înainte de aceasta, trebuie identificate legăturile pasive și eliminate, întrucît nu influențează cinematica mecanismului.

Astfel se vede că este util să se conceapă o clasificare a diferitelor lanțuri cinematice avînd în vedere în primul rînd complexitatea lor, și nu „familia”, adică numărul de mișcări posibile ale elementelor. În cadrul unei asemenea orînduiri, subîmpărțirile pe baza celorlalte criterii lasă să se întrevadă legătura cea mai importantă între lanțuri care indică complicația calculului.

O astfel de clasificare, întocmită în lucrarea de față, se sprijină pe anumite relații structurale, arătate mai jos.

2. RELAȚII STRUCTURALE

a. *Relația de înlocuire a unei cuple de o clasă dată, prin cuple de o clasă dorită.*

O asemenea relație permite să se dea o formă comună tuturor lanțurilor cinematice, ceea ce ușurează compararea și studiul lor.

Formula se găsește prin egalarea gradului de libertate negativ (restricțiilor de mișcare) al cuplei de înlocuit, cu gradul de mobilitate al unui lanț cu un singur fel de cuple care îi va lua locul.

Notăm cu

k — clasa cuplei de înlocuit,
k' — clasa dorită a cuplelor de înlocuire,
$p'_{k'}$ — numărul cuplelor de clasa k',
n' — numărul elementelor lanțului de înlocuire.

Egalitatea menționată :

$$m\,n' - (m - k')\,p'_{k'} = -(m - k),$$

dă final relația căutată

$$p'_{k'} = \frac{m(n' + 1) - k}{m - k'}. \tag{3}$$

Dacă alegem elementele lanţului înlocuitor simple, ca de obicei, (n'_2 — cu cîte două cuple) atunci lanţul de înlocuire trebuie să fie deschis şi deci

$$p'_{k'} = n'_2 + 1. \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă

$$p'_{k'} = \frac{k}{k'} \text{ şi } n'_2 = \frac{k - k'}{k'}. \tag{5}$$

Dacă alegem $k' = 1$ (cuple inferioare) aşa cum de asemenea este indicat de multe ori, obţinem

$$p'_1 = \frac{m(n' + 1) - k}{m - 1} \tag{3'}$$

şi

$$p'_1 = k \quad \text{şi} \quad n'_2 = k - 1. \tag{5'}$$

Din aceste relaţii se recunosc uşor formulele cunoscute din plan ($m = 3$) unde pentru înlocuirea unei cuple superioare ($k = 2$) prin cuple inferioare se folosesc expresiile

$$p'_1 = \frac{3n' + 1}{2} \text{ şi } p'_1 = 2 \text{ cu } n'_2 = 1.$$

La lanţurile astfel modificate, care deci prezintă un singur k, gradul de mobilitate capătă forma mai simplă :

$$w = mn - (m - k)\, p_k. \tag{1'}$$

b. *Numărul de contururi închise ale unui lanţ cinematic*

Dacă legăm în modul cel mai simplu, adică cu un număr minim de cuple, n corpuri libere (viitoare elemente cinematice), astfel ca să formeze un lanţ, se vede că sînt necesare $n - 1$ cuple, deoarece fiecărui element îi trebuie o singură cuplă pentru a-l prinde de lanţ. Dacă mai introducem z cuple suplimentare, rezultă că prin fiecare din acestea un element care fusese introdus în lanţ (prin una din cele $n - 1$ cuple) este din nou legate de un alt element care şi el făcea parte din lanţ. În consecinţă pentru fiecare din cele z cuple suplimentare se formează cîte un contur închis, deci în total z contururi. Deci prin legarea oricum a n elemente am folosit

$$p_i = (n - 1) + z \text{ cuple}$$

şi întrucît z reprezintă şi numărul de contururi închise, acesta va fi dat de relaţia căutată*)

$$z = p_i - n + 1. \tag{6}$$

Această formulă este aplicabilă oricărui lanţ cinematic indiferent de structura sa spaţială şi de clasa k a cuplelor sale.

---

*) R. Kraus găseşte pe altă cale o relaţie asemănătoare, pe care o foloseşte pentru întocmirea unui tablou de mecanisme.

Trebuie observat că aici p_i cuprinde numai cuplele interioare, iar eventualele cuple exterioare, care folosesc la legarea lanţului de un alt sistem de corpuri, nu trebuie socotite, întrucît ele încep să existe ca atare abia cînd această legătură a fost efectiv făcută. Dacă totuşi am considera şi cuplele exterioare ar trebui să ţinem seama şi de elementele noi care intră în lanţ în felul acesta, şi am ajunge la aceeaşi relaţie (cu aceeaşi observaţie pentru p_i) într-un domeniu lărgit numeric.

Mai trebuie remarcat apoi că toate cuplele multiple (care într-un nod leagă n' elemente) trebuie convertite în cuple simple după relaţia cunoscută

$$\sum p_{n'} = \sum (n' - 1),$$

deoarece putem considera $n' - 1$ dintre elementele unui nod legate de unul din cele n' elemente, prin cîte o cuplă.

c. *Diferite forme ale relaţiei gradului de mobilitate, respectiv de libertate.*

Cu ajutorul relaţiei (6) putem scrie relaţia (1') într-o formă deosebită şi anume :

— prin înlocuirea numărului de cuple $p_{k_i} = z + n - 1$ rezultă gradul de mobilitate

$$w = kn - (m - k)\ (z - 1) - (m - k)\ p_{k_e}\ ; \qquad (7)$$

— prin înlocuirea numărului de elemente $n = p_{k_i} - z + 1$ rezultă gradul de mobilitate

$$w = kp_{k_i} - m\,(z - 1) - (m - k)\,p_{k_e}. \qquad (7')$$

Dacă considerăm lanţul fără cuple exterioare (p_{k_e}), deci liber în spaţiul cu m libertăţi de mişcare, se obţine gradul de libertate (al lanţului liber) :

$$v = kn - (m - k)\ (z - 1), \qquad (8)$$

sau

$$v = kp_{k_i} - m\ (z - 1). \qquad (8')$$

Este de remarcat că $v_{\min} = m$, adică lanţul liber se poate mişca cel puţin ca un corp liber. Astfel dacă rezultă $v < m$, înseamnă că lanţul are cuple suplimentare.

De asemenea se poate calcula gradul de mobilitate $w^{\star}$ al lanţului nelegat, faţă de unul din elementele sale, introducînd un număr $n^{\star} = n - 1$ de elemente în relaţia gradului de libertate, sau scriind

$$w^{\star} = v - m. \qquad (9)$$

Dacă un asemenea $w^{\star}$ apare negativ, înseamnă că lanţul are de asemenea cuple suplimentare, întrucît rezultă

$$v = w^{\star} + m < m.$$

Un lanţ cinematic poate avea însă $v \geqslant m$ sau $w^{\star} \geqslant 0$ dar să aibă un w negativ printr-un număr corespunzător de mare de cuple exterioare. În felul acesta, prin legarea sa cu un alt lanț, va neutraliza gradele de libertate corespunzătoare și deci va acționa într-o anumită măsură ca un mijloc de imobilizare.

d. *Modificarea gradului de mobilitate prin extragerea sau adăugarea unor elemente și cuple.*

Cunoașterea posibilităților de modificare a gradului de mobilitate prin adăugarea sau extragerea de elemente și cuple, ușurează încercările de subîmpărțire a mecanismelor în grupe convenabile din punctul de vedere al calculului. În felul acesta se poate obține o privire de ansamblu asupra rezultatelor în cazul transferului de elemente între grupe și în general în problemele de sinteză structurală.

Prin extragerea a n_1 elemente și p_{k_1} cuple din numărul total n respectiv p_k se obține din relația (1′)

$$w_{n_1} p_{k_1} = w - m\ (n_1 - p_{k_1}) - k\, p_{k_1}. \tag{10}$$

unde w este gradul de mobilitate al lanțului încă nemodificat.

Bineînțeles adăugarea de elemente și cuple poate fi privită ca o extragere negativă și valorile corespunzătoare trebuie introduse cu semnele respective în relația (10) care rămîne valabilă.

La extragerea unui element simplu

$$n_1 = 1 \text{ și } p_{k_1} = 2,$$

rezultă

$$w_{1,2} = w + m - 2k, \tag{10′}$$

iar dacă $k=1$ (uzual)

$$w_{1,2} = w + m - 2. \tag{10″}$$

Aceasta înseamnă că pentru orice $m > 2$ înlăturarea unui element simplu atrage după sine creșterea gradului de mobilitate și invers. Dacă $m = 2$, aceasta nu modifică pe w inițial, ceea ce era de așteptat, întrucît în această familie un element simplu constituie singur o grupă assurică.

De asemenea rezultă de aici situația cunoscută din plan ($m = 3$), că la extragerea unui element simplu unei grupe assurice ($w = 0$), se obține un lanț cu $w_{1,2} = 1$.

Din relația (10) mai putem găsi următoarele relații pentru realizarea unui grad de mobilitate dorit :

— numărul de cuple pe care trebuie să le aibă un element pentru ca prin eliminarea sa să rezulte un anumit $w_{1.p_{k_1}}$, este :

$$p_{k_1} = \frac{m - w + w_{1\,,\,pk_1}}{m - k}, \tag{11}$$

Cazuri particulare rezultă pentru

$$k \neq 1 \qquad\qquad k = 1$$

$$\text{la } w_{1.p_{k_1}} = \pm\ 1\,;\ p_{k_1} = \frac{m - w \pm 1}{m - k}\,;\, p_{1_1} = \frac{m - w \pm 1}{m - 1}\,; \tag{11′}$$

$$\text{la } w_{1.p_{k_1}} = 0\,;\ k_{k_1} = \frac{m - w}{m - k};\ p_{1_1} = \frac{m - w}{m - 1}\,; \tag{11″}$$

— pe de altă parte w inițial al unui lanț, pentru ca după extragerea unui element să se obțină un anumit $w_{1,p_{k_1}}$, este

$$w = w_{1,p_{k_1}} + m - (m - k)\, p_{k_1}. \tag{12}$$

De aici rezultă pentru $p_{k_1} = 2$ (element simplu)

$$w = w_{1,2} - m + 2k \tag{12'}$$

iar pentru $k = 1$:

la $w_{1,2} = +1$ $\quad w = 3 - m,$
la $w_{1,2} = -1$ $\quad w = 1 - m,$
la $w_{1,2} = 0$ $\quad w = 2 - m.$

Relații asemănătoare se obțin ușor în alte condiții, spre exemplu la adăugirea unui element.

e. *Determinarea numărului de elemente simple ale unui lanț cinematic.* Acest lucru interesează pentru că în general este de preferat să se lucreze cu elemente simple, întrucît ele atrag după sine un minimum de modificări ale lanțurilor.

Notînd cu indicii i și e elementele sau cuplele interioare respectiv exterioare, cu x numărul de cuple în componența cărora intră un element și scriind relația cunoscută

$$\sum_{x=2}^{x} x n_{ix} + \sum_{x=2}^{x} (x - 1)\, n_{ex} = 2p_{ki}, \tag{13}$$

obținem cu ajutorul formulei gradului de libertate sub forma

$$v = m\,(n_i + n_e) - (m - k)\, p_{ki}$$

relația elementelor simple

$$2kn_{i2} + (m + k)n_{e2} = 2v + \sum_{x=3}^{x} [(m - k)\, x - 2m]\, n_{ix} + $$
$$+ \sum_{x=3}^{x} [(m - k)\, x - 3m + k]\, n_{ex}. \tag{14}$$

În cazul lanțurilor închise $n_{ex} = 0$ și punînd $n_{ix} = n_x^{\star}$ se obține

$$2kn_2^{\star} = 2v + \sum_{x=3}^{x} [(m - k)x - 2\,m]\, n_x^{\star}. \tag{14'}$$

De aici, numărul minim de elemente simple rezultă (în cazul cînd paranteza relației (14') este mereu pozitivă)

$$n^{\star}_{2\min} = \frac{v_{\min}}{k} = \frac{m}{k},$$

întrucît atunci trebuie să fie $n_x = 0$ și $v_{\min} = m$.

Pentru lanțurile deschise se obține

$$n_{2\min} = n^{\star}_{2\min} - 1 = \frac{m-k}{k}, \tag{15}$$

deoarece acestea se pot realiza întotdeauna dintr-un lanț închis prin eliminarea unui element.

Valabilitatea relației (15) este, după cum s-a spus, condiționată de

$$(m - k)\, x - 2\, m \geqslant 0$$

Deoarece aici întotdeauna $x \geqslant 3$, trebuie să fie

$$k \leqslant \frac{m}{3}\,. \tag{16}$$

Această condiție poate fi satisfăcută oricînd pentru $m \geqslant 3$ prin alegerea unui k suficient de mic la uniformizarea lanțului (astfel alegerea obișnuită $k = 1$ este iarăși justificată).

Dacă $m = 2$ relația (15) poate avea loc numai întîmplător și anume în funcție de numărul elementelor multiple n_x.

Cu această îngrădire putem conta pe

$$n_2 \geqslant \frac{m-k}{k} = \frac{3-1}{1} = 2, \tag{17}$$

cu excepția lanțurilor care au $m = 2$, unde poate apărea și $n_2 = 0$.

Cu ajutorul relațiilor (6) și (13) se poate de asemenea găsi următoarea expresie a numărului de conture închise, și anume :

— pentru un lanț oarecare

$$z = 1 + \frac{1}{2} \sum_{x=3}^{x} (x - 2)\, n_{ix} + \frac{1}{2} \sum_{x=2}^{x} (x - 3)\, n_{ex}\,; \tag{18}$$

— pentru un lanț închis ($n_{ex} = 0, n_{ix} = n^{\star}_{x}$)

$$z = 1 + \frac{1}{2} \sum_{x=3}^{x} (x - 2)\, n^{\star}_{x}. \tag{18'}$$

f. *Numărul de cuple exterioare al unui lanț cu grad de mobilitate și număr de elemente dat.*

Întrucît elementele pot fi legate între ele în mai multe moduri fără ca prin aceasta să se modifice w, este indicat, în unele probleme de sinteză structurală, să se cunoască numărul punctelor de legătură (adesea maximul) ale unui lanț de un altul, care se poate obține.

În lanțul cu cuple uniformizate relația (1′) dă

$$p_k = \frac{m \cdot n - w}{m - k},$$

și scriind numărul de cuple sub forma

$$p_k = p_{k_i} + p_{k_e}$$

unde i și e indică cuplele interioare respectiv exterioare, găsim cu ajutorul relației (6) numărul de cuple căutat

$$p_{k_e} = \frac{k \cdot n - w}{m - k} - z + 1. \tag{19}$$

Maximul acestui număr are loc cînd elementele sînt legate în așa fel încît să fie $z = 0$ și are valoarea

$$p_{k_e} \leqslant \frac{k \cdot n - w}{m - k} + 1, \tag{20}$$

sau pentru $k = 1$

$$p_{k_e} \leqslant \frac{n - w}{m - 1} + 1. \tag{20'}$$

Și aici, prin particularizare, întîlnim cazul cunoscut al grupelor assurice plane

$$p_{k_e} \leqslant \frac{n}{2} + 1$$

3. CLASIFICAREA LANȚURILOR CINEMATICE

Întrucît orice lanț cinematic deschis poate fi considerat ca provenind dintr-un lanț închis prin eliminarea unui element oarecare, clasificarea lanțurilor închise va cuprinde toate cazurile posibile, arătînd în felul acesta și o anumită înrudire între ele.

Pentru ca toate lanțurile să fie aduse pe aceeași treaptă în vederea comparării lor, vom socoti că s-a făcut uniformizarea cuplelor conform celor arătate la punctul 2 a, alegînd $k = 1$.

În aceste condiții, împărțim lanțurile cinematice în primul rînd după valorile n și z, pentru care, unei anumite grupe de cazuri îi va corespunde un număr de cuple (fig. 1).

$n \diagdown z$	1	2	3	4	– – – – –	z
2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}		P_{2z}
3	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_{34}		P_{3z}
4	P_{41}	P_{42}	P_{43}	P_{44}		P_{4z}
| | | | |						
n	P_{n1}	P_{n2}	P_{n3}	P_{n4}		P_{nz}

Fig. 1

$$p_{n.z} = n - 1 + z.$$

În cadrul unei asemenea grupe de lanțuri se obține pentru fiecare $m = 2 \div 6$ un anumit

$$w^{\star} = v - m = kp_{n.z} - mz, \tag{8''}$$

rezultînd astfel o subîmpărțire a lor.

În această clasificare intră în considerație numai $z \geqslant 1$ și $n \geqslant 2$, deoarece la valori mai mici ale lor lanțul este deschis și apare ca un caz particular al altuia.

Astfel s-a întocmit tabloul de clasificare arătat în figura 2, unde într-un careu oarecare se găsesc lanțurile cu n sau $n^* = n - 1$ elemente, după cum sînt închise respectiv deschise. Numărul de contururi închise al fiecărui lanț deschis care poate proveni din careul considerat depinde de numărul de cuple al elementului extras și se determină în fiecare caz din relația

$$z^* = z - (p_e - 1), \tag{21}$$

dedusă din (6), cu $p^* = p_{n\lambda} - p^*$ și $n^* = n - 1$, unde p_e este numărul de cuple menționat (care acum devin cuple exterioare).

Din fiecare lanț conținut în tabelă, pot proveni forme speciale după felul elementelor și al cuplelor și distribuția acestora (elemente simple și multiple și cuple de translație sau rotație). Acestea interesează însă ca forme particulare și alcătuirea lor nu constituie obiectul prezentei lucrări, cu atît mai mult cu cît multe dintre ele nu au încă o utilizare practică, și apar ca niște combinări posibile care deschid un cîmp de cercetare.

Tabloul astfel întocmit (fig. 2) are anumite particularități :

— În fiecare careu determinat de anumiți n și z, w^* scade, la creșterea lui m cu o unitate, cu cîte z unități.

— În fiecare coloană (z), w^* crește la un m constant proporțional cu n.

— Clasificările existente ale lanțurilor assurice (Assur, Artobolevski etc.), sînt cuprinse în schema din figura 3 și se aliniază, pentru fiecare m, după drepte care pornesc din careul $p_{m,1}$ ($n = m$; $z = 1$) și formează cu verticala un unghi definit prin relația

$$\operatorname{tg} \alpha_m = \frac{1}{m - 1}.$$

Aceste drepte trec deci prin careurile $z = 2$, $n = 2m - 1$ sau în general $z = z'$, $n = (m - 1)\, z' + 1$.

În total deosebim cinci asemenea drepte (drepte assurice) care sînt reprezentate punctat în figura 2, fiecare corespunzînd cîte unei familii m.

Lanțurile cu $w^* \neq 0$ se aliniază de asemenea după drepte, fiecărui m corespunzîndu-i un fascicul de paralele cu dreapta assurică corespunzătoare. Fiecare dintre aceste drepte se referă la un anumit w^* și pleacă din careul $z = 1$, $n = m + \overline{w}^*$. Pentru motive de claritate acestea nu sînt trecute pe figură.

Aceste locuri geometrice ale clasificărilor existente apar ca firești dacă ne reprezentăm pe o diagramă $m = f(z)$ (fig. 3) dreptele definite de gradul de mobilitate

$$w^* = k(n - 1) - (m - k)\, z. \tag{8'''}$$

Trebuie însă observat că pe aceste drepte se consideră numai punctele corespunzînd la valori întregi pentru n și z.

— Dreptele lanțurilor assurice împart diagrama (schema) în zone, după cum rezultă din figura 3.

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848

TABLOUL DE CLASIFICARE A LANȚURILOR CINEMATICE

n \ z	1	2	3	4	5	6
2	p=2 $W_2=$ ⓪ $W_3=-1$ $W_4=-2$ $W_5=-3$ $W_6=-4$	p=3 −1 −3 −5 −7 −9	p=4 −2 −5 −8 −11 −14	p=5 −3 −7 −11 −15 −19	p=6 −4 −9 −14 −19 −24	p=7 −5 −11 −17 −23 −29
3	p=3 +1 $\boxed{0}$ −1 −2 −3	p=4 ⓪ −2 −4 −6 −8	p=5 −1 −4 −7 −10 −13	p=6 −2 −6 −10 −14 −18	p=7 −3 −8 −13 −18 −23	p=8 −4 −10 −16 −22 −28
4	p=4 +2 +1 ◇0 −1 −2	p=5 +1 −1 −3 −5 −7	p=6 ⓪ −3 −6 −9 −12	p=7 −1 −5 −9 −13 −17	p=8 −2 −7 −12 −17 −22	p=9 −3 −9 −15 −21 −27
5	p=5 +3 +2 +1 △0 −1	p=6 +2 $\boxed{0}$ −2 −4 −6	p=7 +1 −2 −5 −8 −11	p=8 ⓪ −4 −8 −12 −16	p=9 −1 −6 −11 −16 −21	p=10 −2 −8 −14 −20 −26
6	p=6 +4 +3 +2 +1 –⓪–	p=7 +3 +1 −1 −3 −5	p=8 +2 −1 −4 −7 −10	p=9 +1 −3 −7 −11 −15	p=10 ⓪ −5 −10 −15 −20	p=11 −1 −7 −13 −19 −25
7	p=7 +5 +4 +3 +2 +1	p=8 +4 +2 ◇0 −2 −4	p=9 +3 $\boxed{0}$ −3 −6 −9	p=10 +2 −2 −6 −10 −14	p=11 +1 −4 −9 −14 −19	p=12 ⓪ −6 −12 −18 −24
8	p=8 +6 +5 +4 +3 +2	p=9 +5 +3 +1 −1 −3	p=10 +4 +1 −2 −5 −8	p=11 +3 −1 −5 −9 −13	p=12 +2 −3 −8 −13 −18	p=13 +1 −5 −11 −17 −23
9	p=9 +7 +6 +5 +4 +3	p=10 +6 +4 +2 △0 −2	p=11 +5 +2 −1 −4 −7	p=12 +4 $\boxed{0}$ −4 −8 −12	p=13 +3 −2 −7 −12 −17	p=14 +2 −4 −10 −16 −22
10	p=10 +8 +7 +6 +5 +4	p=11 +7 +5 +3 +1 −1	p=12 +6 +3 ◇0 −3 −6	p=13 +5 +1 −3 −7 −11	p=14 +4 −1 −6 −11 −16	p=15 +3 −3 −9 −15 −21
11	p=11 +9 +8 +7 +6 +5	p=12 +8 +6 +4 +2 –⓪–	p=13 +7 +4 +1 −2 −5	p=14 +6 +2 −2 −6 −10	p=15 +5 $\boxed{0}$ −5 −10 −15	p=16 +4 −2 −8 −14 −20
12	p=12 +10 +9 +8 +7 +6	p=13 +9 +7 +5 +3 +1	p=14 +8 +5 +2 −1 −4	p=15 +7 +3 −1 −5 −9	p=16 +6 +1 −4 −9 −14	p=17 +5 −1 −7 −13 −19
13	p=13 +11 +10 +9 +8 +7	p=14 +10 +8 +6 +4 +2	p=15 +9 +6 +3 △0 −3	p=16 +8 +4 ◇0 −4 −8	p=17 +7 +2 −3 −8 −13	p=18 +6 $\boxed{0}$ −6 −12 −18

Fig. 2

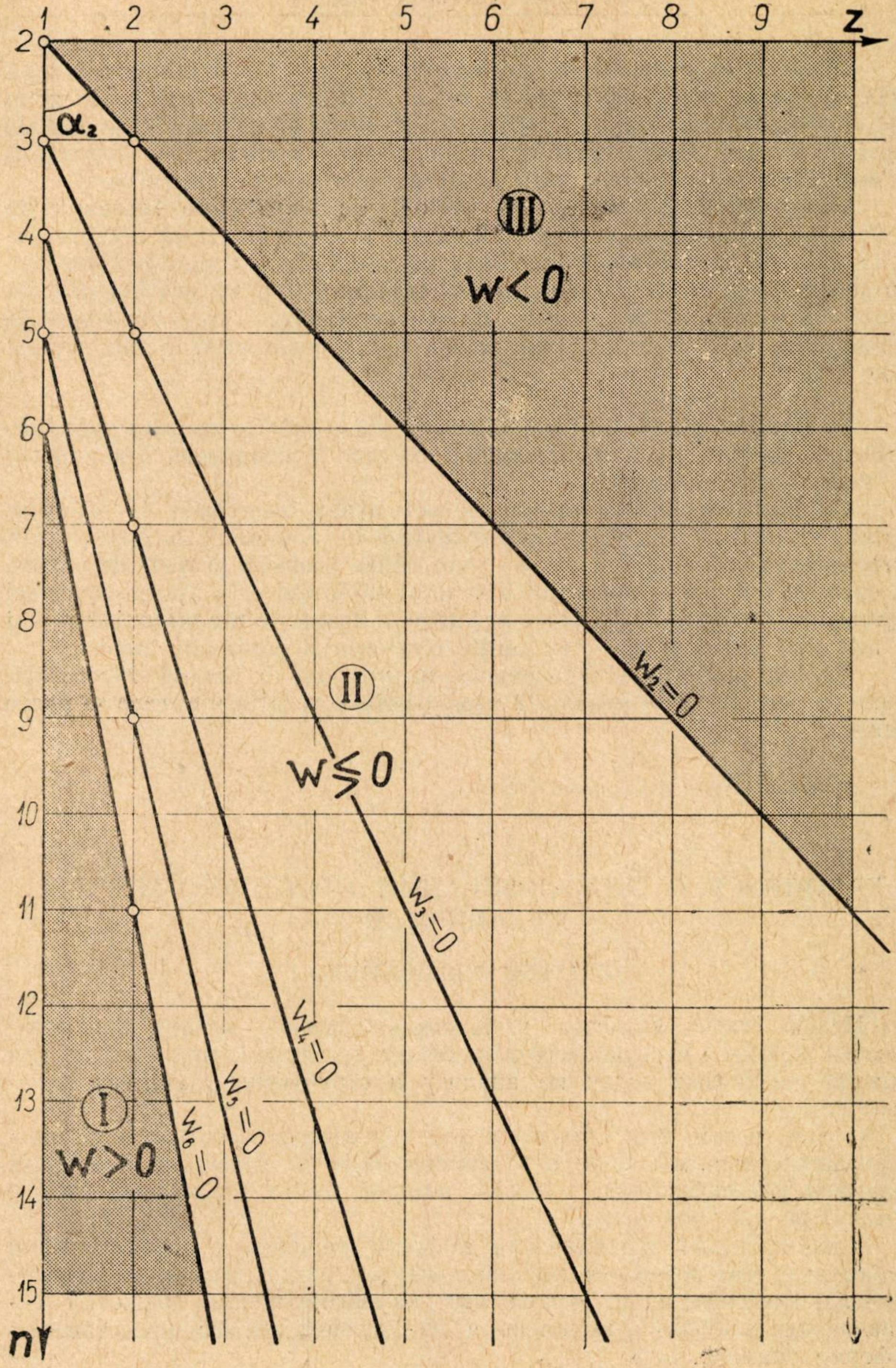

1
2
3
4
5
6
7
8
9
z
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
n
α_2
III
w<0
$w_2=0$
II
$w \lesseqgtr 0$
$w_3=0$
$w_4=0$
$w_5=0$
$w_6=0$
I
w>0

Fig. 3

În zona (I) se găsesc numai lanțurile $w^{*} > 0$, adică mobile; în zona (III), se găsesc numai lanțurile cu $w^{*} < 0$, adică fermele; iar în zona (II), de trecere, între dreptele definite de $w_2^{*} = 0$ și $w_6^{*} = 0$ se găsesc ambele feluri de lanțuri. Pentru fiecare familie *m* zona fermelor este delimitată de cea a lanțurilor mobile, prin dreapta assurică corespunzătoare.

Observăm de asemenea că tabloul de mecanisme întocmit de R. Kraus în scopuri de sinteză structurală poate fi privit ca o reprezentare sub formă de scheme a diferitelor aspecte de lanțuri care pot proveni din grupa cuprinsă în fiecare careu al tabloului (fig. 2), arătînd diferite combinări de elemente și cuple. Aceste combinări — spre deosebire de lucrarea de față — nu sînt însă întocmite în cazul unui *k* unic pentru toate cuplele.

În felul acesta tabloul din figura 2, dă o privire de ansamblu lanțurilor cinematice cu elemente rigide, pe care le ordonează din punctul de vedere al complexității.

Cu ajutorul acestui tablou se pot ușura încercările de separare a unui mecanism în grupe, construindu-l în domeniul în care — prin aprecierea valorilor pentru *n* și *z* — vor cădea probabil grupele de extras. În cazurile frecvente, domeniul căutat al tabloului este aproximativ cel reprezentat în figura 2, deoarece se întîlnesc destul de rar mecanisme — și cu atît mai puțin grupe — cu multe elemente și contururi închise.

Tabloul poate folosi de asemenea în probleme de sinteză structurală, deoarece permite să se întrevadă ușor diferitele rezultate la care se poate ajunge.

Primită la redacție la 19 ianuarie 1957.

К ВОПРОСУ О КЛАССИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Целью статьи является установление связей между кинематическими цепями, в первую очередь на основе критерия комплексности, для решения различных задач по анализу и структурному синтезу механизмов.

С этой целью был определен ряд структурных соотношений, позволяющих сравнивать цепи в указанном виде, и при их помощи была задумана классификация, в основе которой лежит число элементов и замкнутых контуров цепей.

Классификация представлена в форме таблицы с определенными свойствами, что позволяет пользоваться ею, как диаграммой. Существующие классификации, основанные на возможности движения составляющих элементов, включены в эту таблицу, где они представлены в форме прямых.

Таким образом таблица позволяет выявить некоторые общие черты различных цепей и, показывая результаты влияния изменения комплексности на структурные параметры, дает общие понятия о сходстве и различиях между ними.

CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES MÉCANISMES SPATIAUX

(RÉSUMÉ)

Dans cette étude, on cherche à établir des liaisons entre les chaînes cinématiques sous l'aspect, tout d'abord, de la complexité, afin de venir en aide aux différentes opérations qu'on rencontre dans les problèmes d'analyse et de synthèse structurale des mécanismes.

A cet effet, on a déterminé une série de relations structurales qui permettent la comparaison des chaînes sous l'aspect mentionné et, à l'aide de ces relations, on a conçu une classification basée sur le nombre d'éléments et de contours fermés des chaînes.

La classification est présentée sous la forme d'un tableau que certaines de ses propriétés permettent d'utiliser tout comme un diagramme. Les classifications existantes, basées sur les possibilités de mouvement des éléments composants sont comprises dans ce tableau et y sont représentées sous forme de lignes droites.

Le tableau permet ainsi de mettre en évidence certains traits communs aux différentes chaînes et, en mettant en évidence l'effet du changement de la complexité sur les paramètres structuraux, donne une vue d'ensemble sur leurs affinités et différences.

BIBLIOGRAFIE

1. Assur L. V., *Izledovanie ploskih sterjenvîh mehanismov s tociki zrenia ih strukturî i klasifikaţia*, IAN SSSR, 1952.
2. Artobolevski I. I., *Teoria mehanismov i maşin. Gosudarstvenoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî.* Moscova-Leningrad, 1953.
3. Baranov G. G., *Klaşifikaţia, stroenie, kinematika i kinetostatika ploskih mehanismov a parami pervovo roda.* Trudî seminara po TMM AN SSSR, t. V, ed. a 46-a, 1952.
4. Dobrovolski V. V., *Teoria mehanismov,* Maşghiz, Moscova, 1953.
5. Kojenikov S. N., *Teoria mehanismov i maşin.* Maşghiz, Kiev, 1954.
6. Kraus R., *Grundlagen des systematischen Geotribeaufbaus.* Verlag Technik — Berlin, 1952.
7. — *Getriebelehre.* Verlag Technik — Berlin, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

CU PRIVIRE LA PARAMETRII GEOMETRICI AI CUŢITULUI ARMAT CU PLĂCUŢĂ DE CARBURI METALICE

DE

M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU şi N. PASCU

S-au folosit următoarele notaţii :

δ_γ — uzura pe faţa de degajare, mm;
δ_α — uzura pe faţa de aşezare principală, mm;
δ_{α_1} — uzura pe faţa de aşezare secundară, mm;
s — avansul, mm/rot;
t — adîncimea, mm;
n — turaţia, rot/min;
γ° — unghiul de degajare;
α° — unghiul de aşezare principală;
α_1° — unghiul de aşezare secundar;
$\varkappa^\circ$ — unghiul de atac principal;
$\varkappa_1^\circ$ — unghiul de atac secundar;
λ° — unghiul de înclinare a muchii principale;
V — viteza de aşchiere, m/min;
T — durata de aşchiere, min;
K — coeficient global de corecţia vitezei;
K_1 — coeficient funcţie de caracterul mecanic al materialului de aşchiat;
K_2 — coeficient funcţie de sistemul de răcire adoptat;
K_3 — coeficient funcţie de modul de ascuţire al plăcuţei ;
K_4 — coeficient funcţie de neomogenitatea straturilor ecruisate etc.;
K_T — coeficient funcţie de durabilitatea economică aleasă a cuţitului;
τ_γ ; τ_α ; τ_{α_1} ; $\tau_\varkappa$; $\tau_{\varkappa_1}$; τ_λ — coeficienţi de corecţie a durabilităţii plăcuţei, funcţie de geometria sculei;
K_m — coeficient funcţie de materialul plăcuţei;
K_γ, K_α ; K_{α_1} ; $K_\varkappa$; $K_{\varkappa_1}$; K_λ — coeficienţi de corecţie ai vitezei, funcţie de geometria sculei.

★

Cercetări pentru determinarea parametrilor optimi ai aşchierii s-au făcut şi se fac în continuare, mai ales în ţările a căror industrie este mai dezvoltată. Necesitatea acestor cercetări rezultă din următoarele două aspecte :

1) Studiile efectuate în țări diferite, pe materiale cu caractere asemănătoare, au condus la rezultate deosebite ; acest aspect atrage după sine utilitatea efectuării cercetărilor asupra produselor indigene în cadrul fiecărei țări în parte, numai astfel putîndu-se obține norme de lucru cu bază tehnico-științifică și concluzii de generalizare pe baze reale.

2) Lipsa unei concordanțe între rezultatele obținute în diferite țări, demonstrează că știința nu stăpînește încă în acest domeniu fenomenele fizice. Astfel ea, pînă în prezent, nu a reușit să elaboreze, în general decît o serie de formule empirice ; sînt cunoscute doar cîteva încercări timide de a cuprinde interdependența parametrilor în formule teoretice.

Avînd în vedere această situație, colectivul I.M.A. de cercetare a așchierii metalelor, a început prin a efectua studii, ce pot produce ca prim rezultat, nomograme cerute insistent de industria prelucrătoare, pentru elaborarea unor norme tehnico-științifice. În același timp, observarea atentă a fenomenelor creează acestui colectiv posibilitatea să elucideze aspectele noi teoretice, ce se pun.

Pentru a se putea cuprinde întreaga gamă de parametri ce influențează așchierea s-a procedat inițial la următoarea grupare a acestor parametri :

a) geometria optimă a cuțitului ;
b) plăcuța dură optimă ;
c) influența avansului ;
d) influența adîncimii ;
e) influența vitezei de așchiere.

Studiul diferiților parametri s-a efectuat pe baza observării modului de evoluare a uzurii pe cele trei fețe ale cuțitului de strung, care sînt în contact cu așchia, cît și cu materialul de prelucrat ; este vorba de fața de degajare și fețele de așezare principală și secundară.

Menționăm de asemenea că s-a admis ca ipoteză valabilă faptul că se poate neglija interdependența între grupele de parametri indicate mai sus.

Tratarea acestui domeniu destul de larg va comporta mai multe studii ; în lucrarea de față ne vom ocupa numai de influența parametrilor geometriei cuțitului, aspect ce formează un tot unitar.

S-au așchiat bare laminate din material OL C 45 *) făcîndu-se de asemenea pentru fiecare epruvetă în parte încercările de rezistență uzuale, pentru a avea siguranță deplină asupra proprietăților mecanice ale materialelor prelucrate.

Cuțitul a fost armat cu plăcuța de carburi metalice S1 și uzurile au fost măsurate pe cale optică cu o eroare maximă de 25μ.

Au fost utilizate strungurile :

Tip S-3 fabricat de Uzina Iosef Rangheț-Arad ;

---

* Oțel carbon de calitate, prelucrat la cald, STAS 880—49 $\sigma_r = 60-70$ kgf/mm^2

Tip 1.A-62 de fabricație sovietică;

Uzura plafon admisă pe fața de așezare secundară a fost de 1 mm.

Regimul de lucru ales pentru experimentarea geometriei a fost: $V = 266$ mm/min; $s = 0{,}25$ mm/rot; $t = 0{,}3$ mm, pentru viteză admițîndu-se o eroare de $\pm 1{,}2\%$ maxim față de valoarea aleasă.

★

Pentru a se putea prezenta rezultatele cercetărilor printr-o nomogramă finală, utilă industriei, s-au acceptat inițial formulele empirice existente, care au dat satisfacție pînă în prezent, formule verificate, atît în lucrările din străinătate prin metode similare, sau cu radio-izotopi [1], cît și de colectivul nostru într-un studiu anterior.

Admitem deci o dependență de formă

$$V = \frac{C}{t^x s^y} K. \tag{1}$$

S-a căutat pe cale experimentală să se determine valoarea coeficientului C și a exponenților x și y. Admițînd că pentru un anumit material de prelucrat, exponenții x și y au valori constante într-un domeniu limitat de variație a vitezei și anume pentru o variație

$$\frac{V_{\max}}{V_{\min}} \approx 1{,}5, \tag{2}$$

formula de forma

$$VT^n = C_1 \tag{3}$$

permite o linearizare în coordonate logaritmice în limitele admisibile experimentale.

Pentru determinarea constantei C, s-a căutat separarea ei în factori legați de influența diferiților parametri incluși în fenomenul de așchiere. Astfel factorul de corecție poate fi scris sub forma:

$$K = K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha_1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa_1} \cdot K_\lambda .$$

★

Pentru determinarea geometriei optime a cuțitului de strung s-au studiat influențele pe care le au unghiurile γ, α, α_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$ și λ asupra modului cum variază uzura și deci durabilitatea cuțitului, armat cu o plăcuță de carburi metalice.

a. *Influența unghiului* γ *asupra uzurii cuțitului de strung.*

Așa cum am arătat, uzura a fost studiată urmărindu-se evoluția ei pe cele trei fețe ale cuțitului, fiind cunoscut faptul că această evoluție este inegală, după cum rezultă din toate figurile din lucrare, ea influențînd durabilitatea sculei așchietoare.

Dependența acestei uzuri de variația unghiului γ este arătată în figura 1. Alura curbelor se constată a fi asemănătoare, deasemenea și poziția maximelor. Acest aspect ușurează determinarea valorii optime a unghiului de degajare și anume $\gamma = +2°$. Tot în această figură se poate remarca faptul că uzura de pe fețele de așezare secundară și principală, este influențată în aceiași măsură de variația unghiului γ. Este interesant

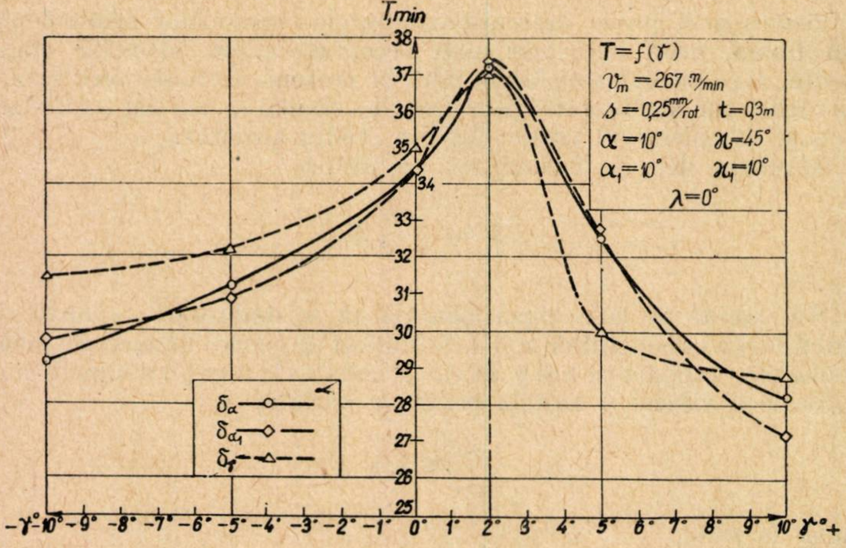


Fig. 1. — Influența unghiului γ asupra durabilității plăcuței S1 pentru uzură plafon pe cele trei fețe ale cuțitului în cazul strunjirii materialuilui OL C 45.

că uzura pe fața de degajare este influențată mai puțin de valorile negative ale unghiului γ; curba tinde mai repede către un palier pentru valori negative, decît pentru valorile pozitive ale acestui unghi.

Una din explicațiile ce se pot da acestui fenomen, este aceea că pentru o valoare optimă a unghiului de degajare, apare un echilibru de deformare elastică și plastică a sistemului piesă-cuțit-așchie, care conduce la o evoluție mai lentă a fenomenului de uzură. In cazul în care unghiul γ are valori mai mici ca $+2°$, componentele ce iau naștere din deformarea așchiei pe fața de degajare tind să îndepărteze cuțitul de piesă, fapt care atrage după sine un dezechilibru mai puțin pronunțat decît pentru cazul în care valoarea unghiului de degajare este mai mare ca $+2°$. Pentru acest caz cuțitul este împins de către așchie în material, accentuîndu-se importanța deformației plastice din zona de așchiere, fapt care atrage după sine o accelerare a fenomenului de uzură.

Rezultă din cele de mai sus, că la ascuțirea cuțitului pot să fie făcute erori în minus de la valoarea optimă determinată. Deci valoarea unghiului γ trebuie menținută între 0 și $+2°$.

În cazul în care condițiile de lucru cer o modificare a unghiului de degajare se constată o scădere a durabilității plăcuței pe care o vom prezenta sub forma unui coeficient τ_γ; acest coeficient reprezintă de fapt raportul dintre durabilitatea unghiului ales și durabilitatea pentru unghiul de degajare optim.

$$\tau_\gamma = \frac{T_\gamma}{T_{\gamma\,\mathrm{opt}}} . \tag{4}$$

Vom prezenta valorile coeficientului τ_γ în tabloul nr. 1.

Coeficientul τ_γ ajută de asemenea la determinarea altui coeficient util și anume K_γ\*), coeficient de corecție al vitezei, dedus cu ajutorul relației (3).

Tabloul nr. 1

γ°	τ_γ	K_γ
−10	0,79	0,90
− 5	0,84	0,92
0	0,92	0,96
+ 2	1	1
+ 5	0,88	0,94
+10	0,74	0,87

b. *Influența unghiului* α.

Experiențele efectuate pentru determinarea valorii optime a unghiului de așezare principal, ne-au condus la rezultatele prezentate în figura 2.

Ca și în cazul precedent, valorile optime ale acestui unghi de așchiere, au același caracter pe cele trei curbe de variație a uzurii indicate în figura 2, alura curbelor menținîndu-se deci și în acest caz asemănătoare.

Din diagramele prezentate, reiese că valoarea optimă a unghiului de așezare principal, este de 10°. Deoarece curbele nu se mai suprapun valoric, este necesar să se aleagă o singură curbă pentru determinarea coeficientului de corecție. S-a ales drept criteriu, uzura de pe fața de așezare secundară, deoarece această uzură are influență directă atît pentru calitatea suprafeței prelucrate, cît și asupra preciziei de prelucrare.

Tabloul nr. 2

α°	τ_α	K_α
5	0,86	0,93
8	0,88	0,94
10	1	1
15	0,89	0,95

Valorile pe care le iau coeficienții de corecție τ_α și K_α pentru diferite valori ale unghiului de așezare principal, sînt prezentate în tabloul nr. 2.

---

* Metoda de determinare a coeficientului $K_{\gamma\,\mathrm{etc.}}$, fiind legată de regimul de așchiere, ce nu formează subiectul acestui articol, va fi tratată ulterior.

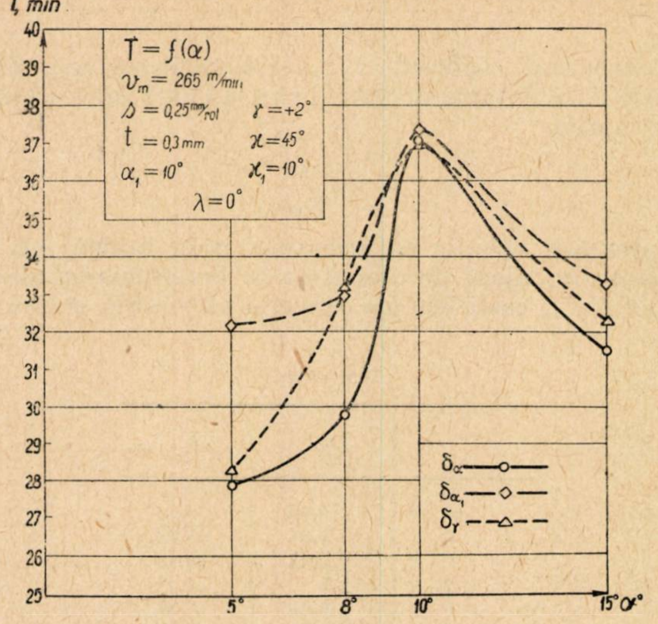


Fig. 2. — Influenţa unghiului α asupra durabilităţii plăcuţei S1 pentru o uzură plafon pe cele trei feţe ale cuţitului în cazul strunjirii materialului OL C 45.

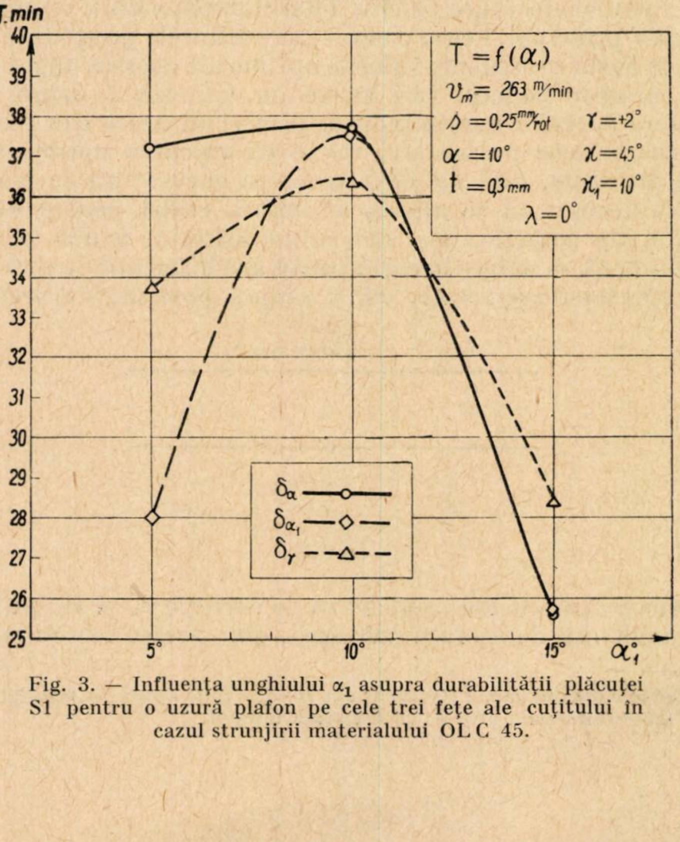


Fig. 3. — Influenţa unghiului α_1 asupra durabilităţii plăcuţei S1 pentru o uzură plafon pe cele trei feţe ale cuţitului în cazul strunjirii materialului OL C 45.

c. *Influența unghiului* α_1.

După cum se poate remarca din figura 3, influența pe care o are unghiul de așezare secundar față de uzura ce se dezvoltă pe fețele de degajare și așezare principală, se prezintă în mod deosebit față de uzura feței de așezare secundară. Putem remarca tendința de palier a curbelor δ_α și δ_γ pentru valori ce sînt mai mici decît valoarea optimă, care și în acest caz este egală cu 10°. Pentru valori ale unghiului α_1 mai mari decît 10° se remarcă tendința de producere a unei suprapuneri a curbelor datorită faptului că în aceste cazuri muchia așchietoare secundară se slăbește.

Pentru aceleași considerente ca și mai înainte, pentru determinarea coeficienților de corecție τ_{α_1} și K_{α_1} alegem curba de variație δ_{α_1} care ne conduce la datele din tabloul nr. 3.

După cum se poate vedea și din tabloul nr. 3, pentru o variație de numai 5° a unghiului de așezare secundar, se produce o micșorare a durabilității cuțitului între 25—32%, situație care are o influență deosebită asupra productivității sculei.

Tabloul nr. 3

α_1°	τ_{α_1}	K_{α_1}
5	0,75	0,88
10	1	1
15	0,68	0,84

De asemenea, pentru aceeași variație a unghiului α_1 rezultă că trebuie executată o micșorare a vitezei de așchiere între 12—16% din necesitatea de a readuce la condiții normale uzurile cuțitului.

d. *Influența unghiului* $\varkappa$.

Curbele obținute experimental (fig. 4) au aceeași alură fiind rotite una față de alta aproximativ în jurul punctului $\varkappa = 45°$.

Și în acest caz curba δ_{α_1} va fi aceea care ne va indica valorile de corecție pentru durabilitate și viteză de așchiere. Din diagramă (fig. 4), apare evident faptul că durabilitatea sculei așchietoare crește o dată cu micșorarea unghiului de atac principal. Micșorarea unghiului $\varkappa$ mărește suprafața de contact a cuțitului, cu materialul de prelucrat, iar datorită acestui fapt, repartiția eforturilor pe cele trei suprafețe de frecare se face în condiții mai bune, uzura evoluînd mai încet. Pentru valori mici ale unghiului, eforturile de încovoiere la care este supusă piesa de prelucrat cresc și ca urmare încep să apară vibrații.

Condițiile de rigiditate ale piesei sînt cele care limitează valoarea unghiului de atac principal. Prin faptul că în practică unghiul $\varkappa = 45°$ este un unghi curent folosit, durabilitatea cuțitului în acest caz a fost luată drept criteriu de comparație.

Se cunoaște din literatura de specialitate că teoria așchierii se baza la început pe unele relații în care viteza era direct proporțională cu secțiunea de așchiere la o putere oarecare. O astfel de relație nu a fost confirmată ulterior de lucrările experimentale, atunci cînd s-a ajuns la concluzia că avansul și adîncimea influențează independent asupra vitezei și că de asemenea există o inversare a gradului de influență, în momentul în care se lucrează cu avansuri mari față de cele normale.

Aceste concluzii au condus la formule empirice de tipul (1).

Făcînd o analiză a fenomenelor care se petrec în momentul în care unghiul de atac principal îşi schimbă valoarea, se constată că o dată cu micşorarea unghiului $\varkappa$ cu toate că avansul şi adîncimea rămîn constante, se consumă un efort de deformare necesar îndepărtării aşchiei, mai mic decît în cazul în care unghiul $\varkappa$ are valori mari. Această constatare ne conduce la premisa că durabilitatea cuţitului creşte datorită micşorării unghiului de atac principal, o dată cu creşterea perimetrului secţiunii de aşchiere.

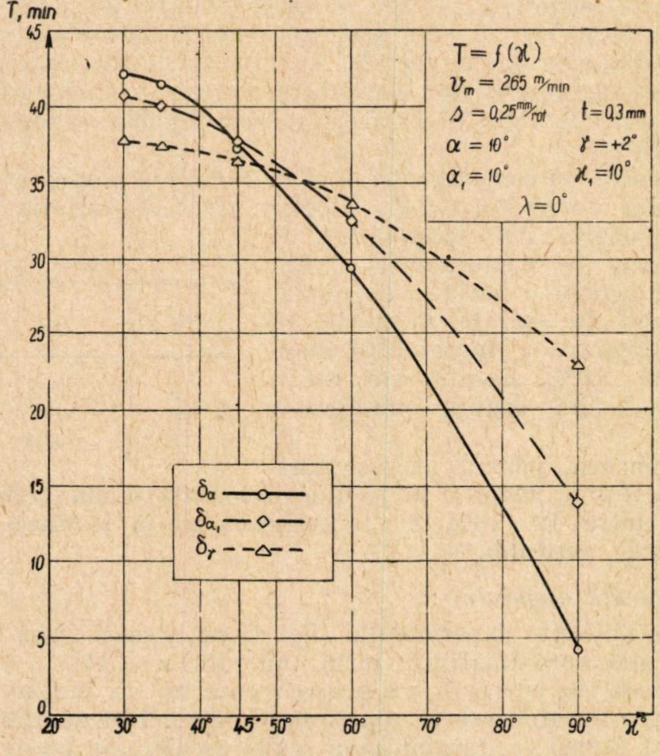


Fig. 4. — Influenţa unghiului $\varkappa$ asupra durabilităţii plăcuţei S1 pentru o uzură plafon pe cele trei feţe ale cuţitului în cazul strunjirii materialului OL C 45.

Tabloul nr. 4

$\varkappa°$	$\tau_{\varkappa}$	$K_{\varkappa}$
30	1,08	1,04
35	1,06	1,03
45	1,00	1,00
60	0,87	0,94
90	0,37	0,63

In tabloul nr. 4 sînt date valorile coeficienților de corecție $\tau_{\varkappa}$ și $K_{\varkappa}$ pentru durabilitate și viteză, avîndu-se în vedere că în practică unghiul de atac principal este determinat de rigiditatea piesei de prelucrat sau de forma geometrică a piesei.

e. *Influența unghiului* $\varkappa_1$.

Unghiul de atac secundar prin variația sa influențează aproape în aceeași măsură durabilitatea sculei indiferent de fața pe care urmărim

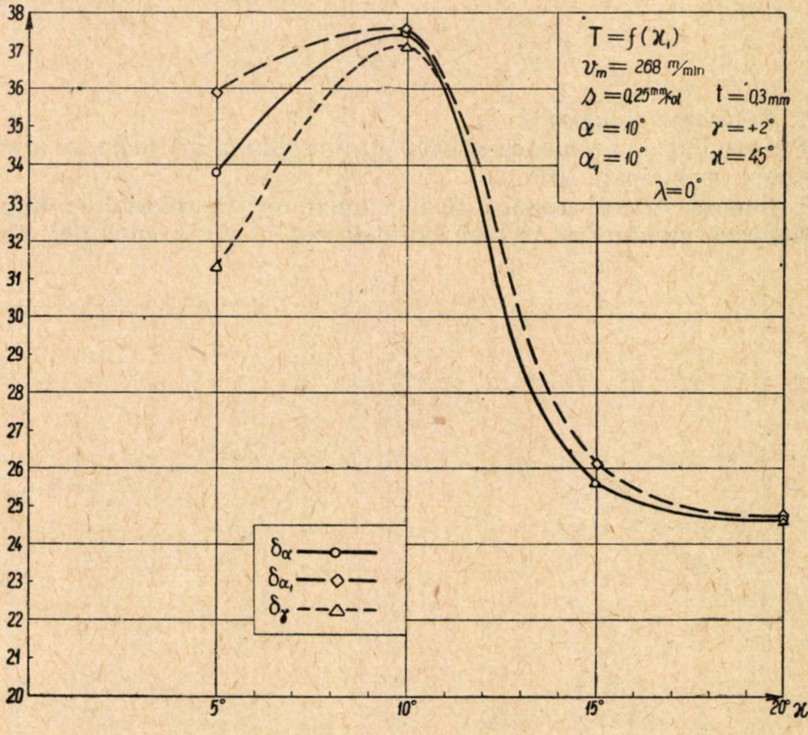


Fig. 5. — Influența unghiului $\varkappa_1$ asupra durabilității plăcuței S1 pentru o uzură plafon pe cele trei fețe ale cuțitului în cazul strunjirii materialului OL C 45.

evoluția uzurii. După cum se vede din figura 5, curbele prezintă un maximum pentru valoarea unghiului $\varkappa_1 = 10°$, iar pentru valori mai mari decît 10° ele sînt practic suprapuse.

Nu același lucru se întîmplă pentru valori ale unghiului $\varkappa_1$ mai mici decît 10°, în care caz se produce o diferențiere accentuată. Ca și mai înainte, pentru determinarea coeficienților de corecție $\tau_{\varkappa_1}$ și $K_{\varkappa_1}$ vom prefera curba de uzură δ_{α_1}. Analizînd această curbă observăm că este recomandabil ca unghiul de atac secundar să aibă valoarea de 10°, iar eroarea de ascuțire să fie în minus; aceste constatări apar din faptul că pentru valori cuprinse între 5—10°, curba prezintă o mică scădere față de cea manifestată la valori mai mari ca 10°. În tabloul nr. 5 dăm valoarea coeficienţilor de corecţie $\tau_{\varkappa_1}$ şi $K_{\varkappa_1}$ pentru situaţia în care din considerente locale, unghiul de atac secundar va fi ales cu o valoare diferită de cea optimă.

Tabloul nr. 5

$\varkappa_1^\circ$	$\tau_{\varkappa_1}$	$K_{\varkappa_1}$
5	0,95	0,98
10	1	1
15	0,69	0,85
20	0,66	0,83

f. *Influenţa unghiului* λ.

S-a studiat de asemenea şi influenţa unghiului de înclinare a muchiei aşchietoare principale (fig. 6).

Influenţa acestui unghi este mai mică decît a celorlalte; unghiul λ condiţionează eliminarea aşchiei înaintea sau în urma cuţitului. Ca şi în cazurile precedente ne menţinem pe curba de uzură δ_{α_1} care ne conduce la următoarele concluzii:

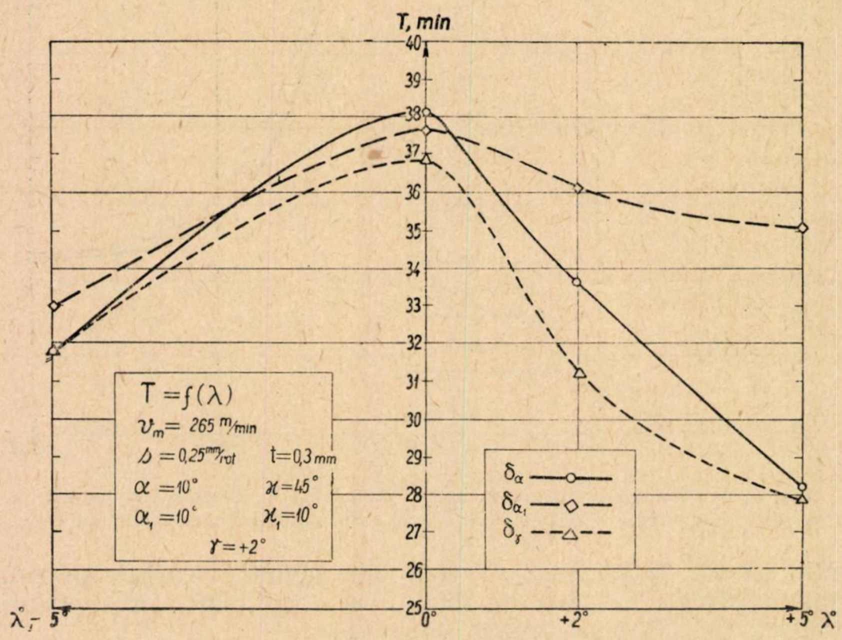


Fig. 6. — Influenţa unghiului λ asupra durabilităţii plăcuţei S1 pentru o uzură plafon pe cele trei feţe ale cuţitului în cazul strunjirii materialului OL C 45.

1) Valoarea optimă a unghiului λ este 0°, cuţitul avînd în acest caz durabilitatea maximă.

2) Pentru valori mai mici ca 0°, durabilitatea cuțitului scade accentuat.

3) Pentru valori mai mari ca 0°, curba tinde către un palier avînd o cădere mică față de valoarea stabilită ca optimă.

Avîndu-se în vedere aceste concluzii putem recomanda să se dea unghiului λ numai valoarea 0 sau mai mari pentru că în această direcție de variație observăm că pentru o creștere de 5° față de valoarea optimă se obține o micșorare a durabilității sculei numai cu 7 %. Aceste constatări apar clar din tabloul nr. 6, unde sînt prezentate de asemenea valorile coeficientului de corecție ale durabilității și vitezei.

Tabloul nr. 6

λ°	τ_λ	K_λ
−5	0,88	0,94
0	1	1
+2	0,96	0,98
+5	0,93	0,97

S-a constatat deci că în cursul așchierii oțelului OL C45 cu un cuțit armat cu plăcuță de carburi metalice, pentru unghiurile γ, α, α_1 și $\varkappa_1$ uzura este mai puțin accentuată pentru valori mai mici decît valorile optime. Pentru a explica aceasta considerăm că în fenomenul de uzură al cuțitului intervin mai ales următorii factori principali :

— suprafața de contact dintre piesă (stratul superficial deformat) și fața de așezare secundară a cuțitului ;

— creșterea în timp a suprafeței de contact piesă-sculă.

Cu cît unghiurile menționate sînt mai mici, cu atît suprafața de contact dintre piesă și sculă crește, scăzînd deci valoarea presiunii. Deci în cazul unghiurilor cu valori mai mici decît cele optime, suprafața de contact fiind mai mare și în același timp creșterea ei fiind mai rapidă (decît în cazul unghiurilor cu valori mai mari decît valorile optime), căderea durabilității față de valoarea optimă este mai lentă.

Rezultatele prezentate în lucrare oglindesc influența geometriei sculei asupra durabilității acesteia în cazul strunjirii pieselor din OL C 45.

Coeficienții de corecție au fost aleși, astfel încît dacă în practică se folosește o valoare a unghiului necuprinsă în tablourile prezentate în această lucrare, să se poată totuși determina valoarea coeficientului în ipoteza făcută de noi că există între valorile prezentate o variație liniară.

Pentru a se putea aprecia mai bine importanța pe care o prezintă geometria sculei, prezentăm următoarea situație :

Să considerăm că prin ascuțirea cuțitului de strung armat cu o plăcuță de carburi metalice se obține următoarea geometrie a sculei așchietoare :

$$\gamma = 5^\circ \qquad \varkappa = 45^\circ$$
$$\alpha = 8^\circ \qquad \varkappa_1 = 5^\circ$$
$$\alpha_1 = 8^\circ \qquad \lambda = -5^\circ$$

Acestor valori le corespund următorii coeficienţi de corecţie pe baza tablourilor prezentate în lucrare:

$\tau_\gamma = 0{,}88$ $K_\gamma = 0{,}94$
$\tau_\alpha = 0{,}88$ $K_\alpha = 0{,}94$
$\tau_{\alpha_1} = 0{,}90$ $K_{\alpha_1} = 0{,}95$
$\tau_\varkappa = 1{,}00$ $K_\varkappa = 1{,}00$
$\tau_{\varkappa_1} = 0{,}95$ $K_{\varkappa_1} = 0{,}98$
$\tau_\lambda = 0{,}88$ $K_\lambda = 0{,}94$

Pe baza acestor valori, care pot fi asimilate cu nişte randamente, aşa cum reiese din relaţia $\tau_0 = \tau_\gamma . \tau_\alpha ...$ şi $K_0 = K_\gamma . K_\alpha ...$, unde τ_0 şi K_0 sînt valorile globale ale coeficienţilor de corecţie ai durabilităţii sculei şi al vitezei de aşchiere funcţie de geometria sculei aşchietoare, se constată că geometria cuţitului atrage după sine o scădere cu 42% a durabilităţii sculei, iar pentru menţinerea durabilităţii sculei în aceleaşi condiţii ca în cazul existenţei unei geometrii optime, este necesară o scădere a vitezei cu 23%.

CONCLUZII

Din cele expuse rezultă necesitatea determinării cu precădere a unei geometrii optime a sculei aşchietoare şi tot o dată influenţa parametrilor acestei geometrii asupra uzurii cuţitului şi deci a durabilităţii lui.

În cazul oţelului romînesc OL C45 aşchiat cu plăcuţa de carburi metalice, se desprind recomandările trecute în tabloul nr. 7 privind unghiurile de aşchiere.

Tabloul nr. 7

Unghiul	Valoare optimă	Sensul erorii admisibile
γ	+ 2°	minus
α	10°	,,
α_1	10°	,,
$\varkappa$	45°	,,
$\varkappa_1$	10°	,,
λ	0°	plus

Se constată deci că în general sînt permise erori de ascuţire în minus faţă de valorile optime cu excepţia unghiului λ.

Uzura datorită variaţiei unghiului $\varkappa$ este o funcţie de grosimea şi lăţimea aşchiei. O dată cu creşterea acestor dimensiuni creşte şi durabilitatea sculei.

In cazul unghiurilor γ, α, α_1 şi $\varkappa_1$ uzura depinde de creşterea suprafeţei de contact între faţa de aşchiere secundară şi stratul superficial deformat, elasto-plastic al piesei, şi repartiţia presiunilor pe această suprafaţă.

Derogările de la datele prescrise în această lucrare impun folosirea coeficienților de corecție indicați, situație care conduce de fapt la micșorarea vitezei de așchiere pentru a se menține o durabilitate optimă a sculei între două ascuțiri.

Primită la redacție la 5 februarie 1957.

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРАХ НАПАЙНОГО РЕЗЦА С ПЛАСТИНКОЙ ИЗ ТВЕРДЫХ СПЛАВОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей статье коллектив Института прикладной механики, изучающий резание металлов, представляет первую работу по наилучшей геометрии токарного напайного резца с пластинкой из твердого сплава, при резании румынской стали OL C-45 (СТАС — 880-41; $\sigma_r = 60—70$ кг/мм^2).

Приходят к выводу, что можно допускать (кроме угла λ отрицательные погрешности при заточке пластинки. Даются также справочные коэффициенты скорости при несоблюдении оптимальных значений углов резца.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Влияние угла γ на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

Рис. 2. — Влияние угла α на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

Рис. 3. — Влияние угла α_1 на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

Рис. 4. — Влияние угла $\varkappa$ на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

Рис. 5. — Влияние угла $\varkappa$ на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

Рис. 6. — Влияние угла λ на прочность пластинки S1 при предельном износе на трех гранях, при обработке стали OL C 45.

UEBER GEOMETRISCHE PARAMETER DES SCHNEIDEWERKZEUGS MIT HARTMETALLPLÄTTCHEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Das Kollektiv für Mettallzerspannung des Institutes für angevandte Mechanik bringt hier seine ersten Ergebnisse über den günstigsten Spannwinkel der Drehbankwerkzeuge mit Hartmetallplättchen bei der Zerspannung rumänischen Stahls OL C45 (STAS 880-49 ; $\sigma_r = 60 - 70$ kg/mm^2).

Es ergibt sich die Schlussfolgerung, dass (mit Ausnahme des Winkels λ) negative Fehler beim Schleifen des Plättchens zulässig sind. Es werden weiter Bechtigungskoeffizienten für die Geschwindigkeit im Falle der Nichteinhaltung der günstigsten Werte für die Winkel des Spannwerkzeugs angegeben.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN

Abb. 1. — Einfluss des Winkels γ auf die Dauerhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchst verschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, bei Drehen von OL C 45 — Stahl.

Abb. 2. — Einfluss des Winkels α auf die Dauerhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchstverschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, beim Drehen von OL C45—Stah.

Abb. 3. — Einfluss des Winkels α_1 auf die Dauerhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchstverschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, beim Drehen von OL C 45 — Stahl.

Abb. 4. — Einfluss des Winkels ϰ auf die Dauerhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchstverschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, beim Drehen von OL C 45 — Stahl.

Abb. 5. — Einfluss des Winkels $\varkappa_1$ auf die Daurhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchstverschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, beim Drehen von OL C 45 —Stahl.

Abb. 6. — Einfluss des Winkels λ auf die Dauerhaftigkeit des Plättchens S1 bei Höchstverschleiss auf den drei Oberflächen des Werkzeugs, beim Drehen von OL C 45 — Stahl.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Cu privire la studiul uzurii cuțitelor de strung (iradiate) pentru determinarea parametrilor optimi de așchiere.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, ianuarie—martie 1957, p. 265.
2. I. M. Besprozvanîi, *Osnovî teorii rezaniia metallov.* Mașghiz, Moscova, 1949.
3. M. I. Clușin, *Rezanie metallov.* Mașghiz, Moscova, 1953.
4. G. I. Granovski, *Kinematika rezaniia.* Mașghiz, Moscova, 1949.
5. M. E. Merchant, Hans Ernest a. E. J. Krabacher, *Radioactive Cutting Tools, for Rapid Tool-Life Lesting.* Transaction of the ASME, NewYork, mai 1953, vol. 175, nr. 4.
6. A.V. Paukin, *Transformația gheometrii rezțov.* Stanki i instrument, 1940, nr. 8—9.
7. I. I. Reznikov, *Ucenie o rezanii metallov.* Mașghiz, Moscova, 1947.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

ELASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

STUDIU COMPARATIV ÎNTRE DIVERSE METODE PENTRU CALCULUL FUNDAŢIILOR MASIVE DE MAŞINI

DE

GH. BUZDUGAN

1. INTRODUCERE

În practica de la noi din ţară, se cunosc şi se aplică două metode pentru calculul fundaţiilor de maşini : metoda sovietică, expusă în lucrările [1] şi [2] şi metoda germană, fundamentată prin lucrarea [3]. Numeroase alte publicaţii, din ţările respective sau cele învecinate, folosesc una sau alta din aceste metode, uneori pe amîndouă, arătînd relaţiile de calcul specifice fiecăreia dintre ele. Dat fiind modul de prezentare a relaţiilor de calcul, se ajunge la impresia că aceste metode ar fi esenţial diferite ; de aici, rezultă dorinţa proiectantului de a cunoaşte care dintre metode este mai apropiată de adevăr, respectiv pe care să o utilizeze.

Cu prilejul unei lucrări întocmite recent*) ne-am văzut în situaţia de a prezenta fondul teoretic al ambelor metode şi am stabilit, cu această ocazie, paralelismul ce există între aceste metode, în dorinţa de a risipi ezitările proiectantului.

Vom limita expunerea ce urmează la un singur tip de fundaţii, şi anume, cele masive. Acestea sînt blocuri mari, mai grele decît maşinile aşezate pe ele şi sînt considerate rigide.

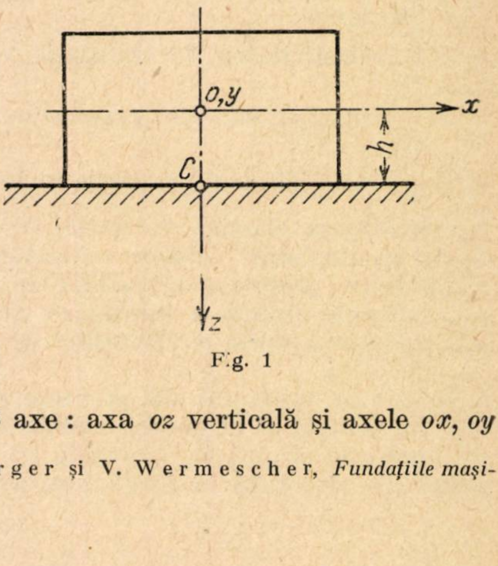


Fig. 1

2. NOTAŢII

Se consideră ansamblul maşină-fundaţie ca un singur corp rigid, de masă *m*. Mişcările acestuia se raportează la un sistem de 3 axe : axa *oz* verticală şi axele *ox*, *oy* orizontale, punctul O (fig. 1) fiind centrul de greutate al rigidului. Deplasările corespunzătoare celor 6 grade de libertate ale sistemului sînt :

---

*) Gh. Buzdugan, L. Hamburger şi V. Wermescher, *Fundaţiile maşinilor* (în curs de publicare).

z, translaţie verticală,
x, translaţie orizontală,
y, translaţie orizontală,
φ_x, rotaţie în jurul axei ox,
φ_y, rotaţie în jurul axei oy,
ψ, rotaţie în jurul axei oz.

Diversele mărimi care apar în cele ce urmează sînt

C_z, coeficient de contracţie elastică uniformă, sau coeficient elastic pentru translaţie verticală, în kg/cm^3 sau t/m^3;
C_φ, coeficient elastic pentru rotaţie în jurul unei axe orizontale, în kg/cm^3 sau t/m^3;
C_x, coeficient elastic pentru translaţie orizontală, în kg/cm^3 sau t/m^3;
$G = mg$, greutatea ansamblului maşină-fundaţie;
J_x, J_y (sau simplu J), momentele de inerţie ale masei m faţă de axele centrale;
J_c, momentul de inerţie al masei m faţă de axa Cy, perpendiculară pe planul figurii 1, trecînd prin punctul C;
S, suprafaţa tălpii fundaţiei;
I_x, I_y (sau simplu I), momentele de inerţie ale suprafeţei S faţă de axele ce trec prin C, paralele cu axele ox, oy;
$i_{cy}^2 = \frac{I_y}{S}$, raza de inerţie a suprafeţei tălpii fundaţiei;
$i_y^2 = \frac{J_y}{m}$, raza de inerţie a masei m, în raport cu axa oy;
$k_z = C_z S$, constanta elastică pentru deplasări verticale, în kg/cm;
$k_x = C_x S$, constanta elastică pentru deplasări orizontale, în kg/cm;
$k_\varphi = C_\varphi I$, constanta elastică pentru rotaţii în jurul unei axe orizontale, în kgcm;
$\delta_z = \frac{1}{k_z}$, elasticitatea de translaţie verticală, în cm/kg;
$\delta_x = \frac{1}{k_x}$, elasticitatea de translaţie orizontală, în cm/kg;
$\varphi_y = \frac{1}{k_\varphi}$, elasticitatea de rotaţie în jurul axului orizontal oy, în rad/kgcm;
δ_0, deplasarea elastică verticală, în cm;
δ_x, δ_1, δ_2, deplasări elastice orizontale, în cm;
p_z, pulsaţia proprie a vibraţiilor de translaţie verticale, în s^{-1};
p_x, pulsaţia proprie a vibraţiilor de translaţie orizontale în s^{-1};
p_φ, pulsaţia proprie a vibraţiilor de rotaţie în jurul unui ax orizontal, în s^{-1};
h, înălţimea centrului de greutate O al ansamblului fundaţie-maşină, faţă de centrul C al păturii elastice, în m (fig. 1);
$p_{1,2}$, pulsaţii proprii în vibraţiile cu două grade de libertate (translaţii orizontale şi rotaţii în jurul unui ax orizontal);

$n_{1,2} = \frac{30\ p_{1,2}}{\pi}$, turații proprii, în rot/min;

$n_0 = \frac{30\ p_z}{\pi}$, turație proprie, corespunzînd vibrațiilor verticale în rot/min;

P_{zo}, P_{xo}, P_{vo}, amplitudini ale forțelor perturbatoare periodice.

3. CALCULUL PULSAȚIILOR PROPRII, ÎN CELE DOUĂ METODE

Elementul esențial în calculul fundațiilor masive este determinarea pulsațiilor proprii (pulsațiile vibrațiilor libere). Acestea indică dacă există sau nu pericol de rezonanță. Vom arăta relațiile respective, în cele două metode, numai pentru vibrațiile verticale și pentru cele de translație orizontală, combinată cu rotație în jurul unui ax orizontal. Nu se vor da demonstrațiile, ele găsindu-se, cu ușoare modificări de notații, în lucrările citate la bibliografie.

3.1. METODA SOVIETICĂ

Pentru translații verticale, ecuația

$$m\ddot{z} + k_z z = 0 \tag{1}$$

duce la determinarea pulsației proprii

$$p_z^2 = \frac{k_z}{m}. \tag{2}$$

Dacă se consideră vibrațiile proprii în planul vertical *xoz*, se obține sistemul de ecuații

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x} + C_x S x - C_x S h\,\varphi = 0,\\ &J\ddot{\varphi} - C_x\,Sxh + (C_\varphi\,I - mgh + C_x\,Sh^2)\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Luînd soluții de forma

$$x = C \sin(pt + \alpha),$$
$$\varphi = B \sin(pt + \alpha)$$

se obține, după o serie de transformări, ecuația pulsațiilor

$$p^4 - \left(\frac{C_\varphi\,I - mgh}{J} + \frac{C_x S}{m}\cdot\frac{mh^2 + J}{J}\right)p^2 + \frac{C_\varphi\,I - mgh}{J}\cdot\frac{C_x S}{m} = 0. \tag{4}$$

Ținînd seama de pulsațiile proprii ale vibrațiilor de translație orizontală pură

$$p_x^2 = \frac{C_x S}{m} = \frac{k_x}{m}, \tag{5}$$

și rotație pură

$$p_\varphi^2 = \frac{C_\varphi\,I - Gh}{J_c} = \frac{k_\varphi - mgh}{J_c} \approx \frac{k_\varphi}{J_c}, \tag{6}$$

și folosind notațiile

$$J_c = J + mh^2; \quad \gamma = \frac{J}{J_c} \tag{7}$$

se ajunge la expresia pulsațiilor proprii

$$p_{1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma}\left[p_\varphi^2 + p_x^2 \pm \sqrt{(p_\varphi^2 + p_x^2)^2 - 4\gamma p_\varphi^2 p_x^2}\right]. \tag{8}$$

În relația (6), s-a neglijat cuplul mgh, care este extrem de mic, în comparație cu k_φ.

3.2. METODA GERMANĂ

Pentru translații verticale, se calculează deplasarea elastică datorită greutății proprii

$$\delta_0 = \frac{G}{k_z} = \frac{G}{C_z S}, \tag{9}$$

din care se află pulsația proprie

$$p_z = \sqrt{\frac{k_z}{m}} = \sqrt{\frac{G}{\delta_0} \cdot \frac{g}{G}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_0}}, \tag{10}$$

sau, transformînd în turații

$$n_0 = \frac{60\ p_z}{2\pi} = \frac{60\sqrt{g}}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_0}} = \frac{300}{\sqrt{\delta_0}}\,\text{rot/min}. \tag{11}$$

Pentru vibrațiile cu două grade de libertate, în planul vertical xoz, se consideră că centrul maselor execută o translație în lungul axei x, cu elasticitatea δ_x și o rotație în jurul centrului elastic, cu elasticitatea φ_y.

În metoda germană oscilațiile de translație și rotație se înlocuesc prin două rotații, în jurul a doi poli. Se consideră blocul mașină-fundație din figura 2, cu centrul de greutate în O și centrul forțelor elastice în C. Punctul C se află, în cazul unei pături elastice de plută, cauciuc etc., la mijlocul înălțimei acesteia. El are proprietatea că o forță orizontală aplicată la nivelul său produce asupra fundației numai translație, nu și rotație.

Să presupunem că într-un punct oarecare F se aplică o forță orizontală P și să calculăm deplasarea $OO' = \delta$ a centrului de greutate, datorită celor două mișcări. În mișcarea de translație, forța P produce deplasarea

$$P\delta_x.$$

În mișcarea de rotație, momentul forței P față de centrul elastic este

$$M = P\,(p + h),$$

iar unghiul corespunzător lui

$$\varphi = M\varphi_y = P\,(p + h)\varphi_y,$$

căruia îi corespunde o deplasare orizontală a lui O

$$\varphi h = P\,(p + h)\varphi_y h.$$

În consecință, deplasarea lui O este

$$\delta = OO' = P\delta_x + P\,(p + h)\,\varphi_y h.$$

Deplasarea datorită unei forțe unitare este

$$\frac{\delta}{P} = \delta_x + ph\,\varphi_y + h^2\varphi_y. \tag{12}$$

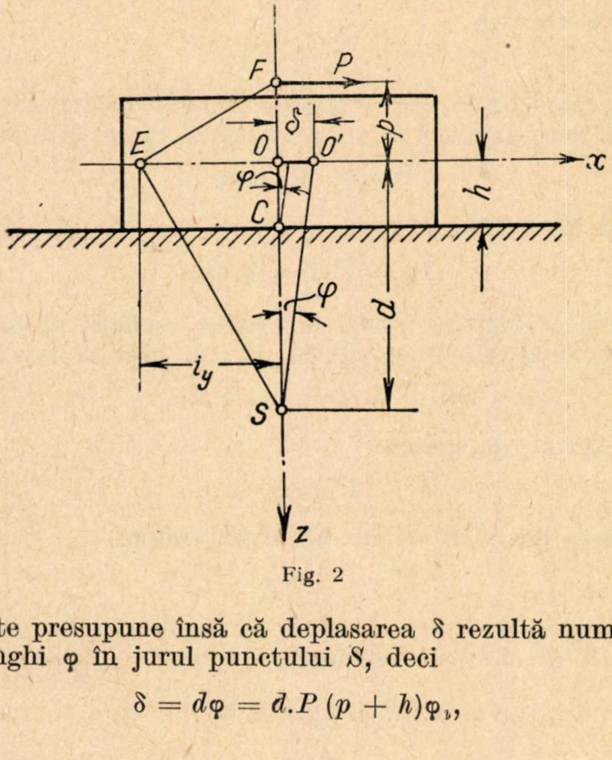


Fig. 2

Se poate presupune însă că deplasarea δ rezultă numai din rotirea cu același unghi φ în jurul punctului S, deci

$$\delta = d\varphi = d.P\,(p + h)\varphi_y,$$

respectiv

$$\frac{\delta}{P} = pd\varphi_y + hd\varphi_y. \tag{13}$$

Din identificarea relațiilor (12) și (13) rezultă, după împărțirea cu φ_y

$$\frac{\delta_x}{\varphi_y} + ph + h^2 = pd + hd. \tag{14}$$

O altă relație între d și p se poate stabili pe considerații de vibrații. Mișcarea oscilatorie în jurul punctului S poate fi considerată ca rezultînd din suprapunerea unei translații și a unei rotații în jurul centrului de greutate, ambele de aceeași pulsație. În vibrația liberă, singura forță exterioară orizontală este forța elastică, de valoare $k_x\ \delta$, de sens contrar mişcării. Ecuația mişcării translatorii este, cu variabila δ

$$m\ddot{\delta} = -k_x\delta,$$

şi are pulsația proprie

$$p_x^2 = \frac{k_x}{m}. \tag{15}$$

Pentru a scrie ecuația mişcării de rotație, se fac următoarele considerente :

Dacă acționează forța P, în situația de echilibru, există egalitate între P şi forța elastică

$$P - k_x\ \delta = 0,$$

precum şi între momentul forței P față de punctul O şi momentul rezistent M_r (datorit forțelor elastice şi momentului de răsturnare al greutății G)

$$P \cdot p - M_r = 0.$$

Înlocuind $P = k_x\delta$, se află

$$M_r = P \cdot p = k_x\ \delta p.$$

Dacă forța P dispare brusc, se produc oscilații proprii de rotație în jurul axei oy, datorite momentului M_r, în baza ecuației

$$J\ddot{\varphi} = -M_r = -k_x\ \delta p.$$

Ținînd seama de relația

$$\delta = d\varphi,$$

care se derivează de două ori în raport cu timpul

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{d}\ddot{\delta},$$

ecuația mişcării de rotație devine

$$\frac{J}{d}\ddot{\delta} + k_x p\delta = 0,$$

avînd pulsația proprie

$$p_\varphi^2 = \frac{k_x pd}{J}. \tag{16}$$

Egalînd valorile (15) şi (16) rezultă

$$\frac{k_x}{m} = \frac{k_x pd}{J},$$

respectiv

$$pd = \frac{J}{m} = i_y^2. \tag{17}$$

Se elimină p din sistemul de ecuații (14) și (17)

$$p = \frac{i_y^2}{d},$$

$$\frac{\delta_x}{\varphi_y} + \frac{i_y^2 h}{d} + h^2 = i_y^2 + hd,$$

sau

$$d^2 - \frac{\frac{\delta_x}{\varphi_y} + h^2 - i_y^2}{h} d - i_y^2 = 0. \tag{18}$$

Rezolvînd ecuația se află rădăcinile

$$d_{1,2} = d_0 \pm \sqrt{d_0^2 + i_y^2}, \tag{19}$$

unde s-a notat, pentru simplificare

$$d_0 = \frac{\frac{\delta_x}{\varphi_y} + h^2 - i_y^2}{2h} = \frac{\frac{k_\varphi}{k_x} + h^2 - i_y^2}{2h}. \tag{20}$$

Dacă din același sistem (14), (17) se elimină d, se află alte distanțe polare, p_1 și p_2:

$$p_{1,2} = -\,d_0 \pm \sqrt{d_0^2 + i_y^2}\,, \tag{21}$$

unde d_0 are aceeași expresie (20). Se vede că

$$d_1 = -\,p_2\,;\; d_2 = -\,p_1, \tag{22}$$

iar punctele F și S sînt polii celor două oscilații proprii ale fundației.

Concluzia esențială ce rezultă de aici este că exercitînd un impuls în unul din poli, de exemplu F, se nasc numai oscilații de rotație în jurul lui S și reciproc.

Aceasta permite a se înlocui greutatea G prin două greutăți G_1 și G_2 ca în figura 3, ale căror valori se află prin ecuația de momente

$$G_1 = G\frac{d_1}{d_1 + d_2} = G\frac{p_2}{p_1 + p_2},$$
$$G_2 = G\frac{d_2}{d_1 + d_2} = G\frac{p_1}{p_1 + p_2}. \tag{23}$$

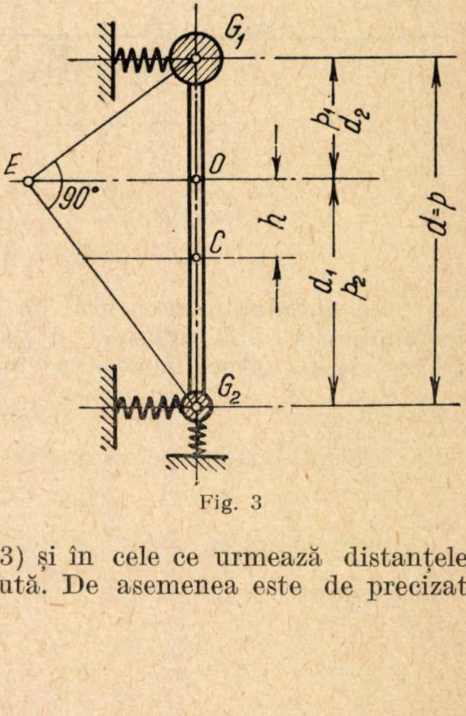


Fig. 3

Trebuie subliniat că în relația (23) și în cele ce urmează distanțele d_1, d_2, p_1, p_2 se iau în valoare absolută. De asemenea este de precizat că aceste segmente p_1, p_2 nu au nimic comun cu pulsațiile proprii p_1, p_2 din relația (8).

Prin reducerea din figura 3, am obținut două corpuri, fiecare cu un singur grad de libertate. Vom calcula deplasările orizontale ale greutăților G_1, G_2.

Pentru deplasarea δ_1 a greutății G_1, se presupune că forța G_1 este orizontală și se aplică un raționament analog celui anterior

$$\delta_1 = G_1\,\delta_x + G_1\,(p_1+h)\,\varphi_v\,(p_1+h) = G_1\,[\delta_x + (p_1+h)^2\varphi_v].$$

Analog

$$\delta_2 = G_2\,[\delta_x + (p_2 - h)^2\,\varphi_v].$$

Printr-o serie de transformări [2], aceste deplasări pot fi scrise

$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{G}{k_x}\cdot\frac{p_2}{p_2 - h}, \\ \delta_2 &= \frac{G}{k_x}\cdot\frac{p_1}{p_1 + h}. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Cu aceste valori, se scriu relații analoge cu (11), dînd cele două turații proprii

$$n_1 = \frac{300}{\sqrt{\delta_1}}\,;\ n_2 = \frac{300}{\sqrt{\delta_2}}. \qquad (25)$$

Se poate da și altă expresie pentru d_0. Să presupunem că în centrul elastic C (fig. 4) se aplică un cuplu M, care produce o rotire a blocului de fundație cu unghiul φ. Pe un element de suprafață se produce reacțiunea elastică

$$dF = k_z\cdot z = C_z\,dA\cdot z = C_z\,dA\cdot x\varphi.$$

Momentul tuturor forțelor elastice dF față de axa perpendiculară pe desen, trecînd prin C, este

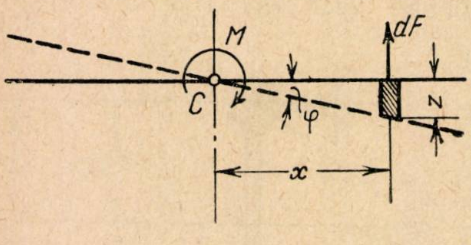


Fig. 4

$$L_\varphi = \int x\,dF = C_z\varphi \int x^2 dA = C_z\varphi\, I.$$

La rîndul său, momentul de inerție I poate fi exprimat ca produs între aria S a tălpii fundației și pătratul razei de inerție față de axa care trece prin C, perpendiculară pe planul figurii

$$I = S\,i_{cv}^2\,. \qquad (26)$$

Făcînd înlocuirea, rezultă

$$L_\varphi = C_z S i_{cv}^2\,\varphi = k_z i_{cv}^2\,\varphi.$$

Prin definiție, cuplul forțelor elastice este

$$L_\varphi = k_\varphi\cdot\varphi,$$

de unde rezultă

$$k_\varphi = k_z i_{cy}^2 . \tag{27}$$

În acest fel, expresia (20) se transformă în

$$d_0 = \frac{i_{cy}^2 \frac{k_z}{k_x} + h^2 - i_v^2}{2h} . \tag{28}$$

În rezumat, calculul frecvențelor proprii prin metoda germană se face aplicînd relațiile (28) sau (20), (21), (24) și (25).

4. STABILIREA PARALELISMULUI ÎNTRE CELE DOUĂ METODE

Pentru vibrații proprii verticale, identitatea între expresiile (2) și (11) este evidentă, din însuși modul cum a fost stabilită relația (11). Demonstrații analoge se pot face pentru alte forme de vibrații cu un singur grad de libertate ale fundației : translații orizontale, rotații în jurul unei axe verticale etc.

Să stabilim că există o astfel de identitate și pentru vibrațiile cu două grade de libertate, examinate mai sus, ale căror relații de calcul sînt, aparent, atît de diferite.

Pentru a evita confuzia de notații, datorită semnificației cu totul diferită a mărimilor p_1, p_2 în cele două metode, să notăm pulsațiile proprii, în ambele cazuri, cu $\omega_{1,2}$.

Relația (8) devine

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2\gamma}\left[p_\varphi^2 + p_x^2 \pm \sqrt{(p_\varphi^2 + p_x^2)^2 - 4\gamma p_\varphi^2 p_x^2}\right], \tag{29}$$

iar relația (10) se scrie

$$\omega_z^2 = \frac{g}{\delta_0} .$$

În mod analog

$$\omega_1^2 = \frac{g}{\delta_1} ; \quad \omega_2^2 = \frac{g}{\delta_2} . \tag{30}$$

Se poate face demonstrația ușor arătînd că suma $\omega_1^2 + \omega_2^2$ și produsul $\omega_1^2 \omega_2$ sînt identice, în ambele metode.

Pentru suma pulsațiilor proprii, în metoda sovietică, se folosesc relațiile între rădăcini și coeficienți la ecuația bipătrată (4) :

$$w_1^2 + \omega_2^2 = -\frac{b}{a} = \frac{C_\varphi\, I - mgh}{J} + \frac{C_x S}{m} \cdot \frac{mh^2 + J}{J} .$$

Neglijînd pe mgh, în baza relației (6) și înlocuind $C_xS = k_x$, $C_\varphi I = k_\varphi$, rezultă

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k_\varphi}{J} + \frac{k_x}{m} \cdot \frac{mh^2 + mi_y^2}{mi_y^2},$$

iar, conform relației (27)

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{i_{cv}^2\, k_z}{mi_y^2} + \frac{k_x}{m} \cdot \frac{h^2 + i_y^2}{i_y^2}. \tag{31}$$

Din metoda germană, se poate scrie

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{g}{\delta_1} + \frac{g}{\delta_2} = g\left[\frac{k_x}{mg} \cdot \frac{p_2 - h}{p_2} + \frac{k_x}{mg} \cdot \frac{p_1 + h}{p_1}\right],$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k_x}{m}\left[\frac{2p_1p_2 + h(p_2 - p_1)}{p_1p_2}\right] = \frac{k_x}{m}\left[2 + \frac{h(p_2 - p_1)}{p_1p_2}\right].$$

Însă

$$p_2 - p_1 = -2d_0;\; p_1p_2 = -i_y^2,$$

deci

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k_x}{m}\left[2 + \frac{2hd_0}{i_y^2}\right].$$

Se înlocuește d_0 cu expresia (28)

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{k_x}{m}\left[2 + \frac{2h}{i_y^2} \cdot \frac{i_{cv}^2\,\frac{k_z}{k_x} + h^2 - i_y^2}{2h}\right] = \frac{k_x}{mi_y^2}\left(i_y^2 + h^2 + i_{cv}^2\frac{k_z}{k_x}\right),$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \frac{i_{cv}^2\, k_z}{mi_y^2} + \frac{k_x}{m} \cdot \frac{h^2 + i_y^2}{i_y^2}. \tag{32}$$

Relațiile obținute, (31) și (32), sînt identice.

Produsul pulsațiilor, în metoda sovietică, pe baza ecuației (4) este, neglijînd pe mgh

$$\omega_1^2\, \omega_2^2 = \frac{c}{a} = \frac{C_\varphi I}{J} \cdot \frac{C_xS}{m} = \frac{k_\varphi}{mi_y^2} \cdot \frac{k_x}{m} = \frac{i_{cv}^2\, k_z}{mi_y^2} \cdot \frac{k_x}{m}. \tag{33}$$

În metoda germană, se poate scrie

$$\omega_1^2\, \omega_1^2 = \frac{g^2}{\delta_1\delta_2} = \frac{g^2}{\frac{m^2g^2}{k_x^2} \cdot \frac{p_1p_2}{(p_2 - h)(p_1 + h)}} = \frac{k_x^2}{m^2} \cdot \frac{(p_2 - h)(p_1 + h)}{p_1p_2}.$$

Se fac înlocuirile

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = \frac{k_x^2}{m^2}\cdot\frac{\left(d_0 - h + \sqrt{d_0^2 + i_y^2}\right)\left(-d_0 + h + \sqrt{d_0^2 + i_y^2}\right)}{i_y^2},$$

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = \frac{k_x^2}{m^2}\cdot\frac{\left[\sqrt{d^2 + i_y^2} + (d_0 - h)\right]\left[\sqrt{d_0^2 + i_y^2} - (d_0 - h)\right]}{i_y^2},$$

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = \frac{k_x^2}{m^2}\left[1 + \frac{h}{i_y^2}(2d_0 - h)\right] = \frac{k_x^2}{m^2}\left[1 + \frac{h}{i_y^2}\left(\frac{i_{cv}^2\frac{k_z}{k_x} + h^2 - i_y^2}{h} - h\right)\right],$$

$$\omega_1^2\,\omega_2^2 = \frac{k_x^2}{m^2}\left[1 + \frac{i_{cv}^2\frac{k_z}{k_x} - i_x^2}{i_y^2}\right] = \frac{k_x}{m}\cdot\frac{i_{cv}^2\,k_z}{m i_y^2}. \qquad (34)$$

Relațiile (33) și (34) sînt identice.

În consecință, metodele sovietică și germană, pentru calculul pulsațiilor proprii ale vibrațiilor cu două grade de libertate, la fundații masive, sînt — cu premizele demonstrației făcute — identice.

5. FACTORI CE DUC LA DEOSEBIRI ÎNTRE METODELE SOVIETICĂ ȘI GERMANĂ

Între cele două metode există și o serie de deosebiri, care este bine să fie relevate.

Astfel, la determinarea pulsațiilor proprii prin metoda germană, s-a folosit relația (27)

$$k_\varphi = k_z\, i_{cv}^2\,.$$

Aceasta admite că la oscilațiile de rotație pătura elastică se comportă la fel ca la cele de translație, între cei doi coeficienți existînd factorul de proporționalitate geometric i_{cv}^2.

La elemente elastice discrete, de exemplu arcuri de oțel, scurtările acestora sînt date de aceleași relații, fie că ele provin din translații verticale, fie din rotații în jurul unor axe orizontale. În asemenea cazuri, se poate scrie

$$i_{cv}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n},$$

unde x_i este distanța axei fiecărui element la axa de rotație, iar n numărul elementelor.

În schimb, terenul de fundație are proprietăți elastice care variază cu tasarea z, ceea ce face ca relația (27) să nu mai fie corectă. Metoda sovietică ține seama de acest fapt, prin aceea că se folosesc în calcul coeficienții C_φ, deduși pe cale experimentală, nu pe baza relației (27). Folosind valorile experimentale pentru C_φ, pulsațiile proprii calculate prin metoda sovietică nu mai sînt identice cu cele din metoda germană; diferențele sînt însă destul de mici.

În cele două metode există însă o deosebire principială atunci cînd se trece la studiul vibrațiilor forțate. În ce privește modul de calcul al amplitudinilor vibrațiilor forțate, s-ar putea arăta, în mod asemănător demonstrației de mai sus, că se ajunge la aceleași rezultate.

Studiind vibrațiile forțate, se pune întrebarea dacă mărimile obținute sînt acceptabile sau nu.

La aceasta, ambele metode răspund pe baza măsurătorilor făcute pe fundații de mașini care au funcționat satisfăcător.

În metoda sovietică se pune accentul în special *pe mărimea amplitudinilor* acestor vibrații, dîndu-se tabele de cifre admisibile confirmate de practică.

Metoda germană, deși indică de asemenea cifre pentru amplitudinile admisibile, se ocupă în special de efectul dinamic produs pe talpa fundației. În acest sens, se determină așa-numitele *forțe statice înlocuitoare*, care caută să determine un echivalent static al forțelor perturbatoare periodice, cu ajutorul unor relații de forma

$$P = \mu \eta P_0. \tag{35}$$

Aici s-a notat

P_0, amplitudinea forței perturbatoare periodice;

η, factorul de amplificare al vibrației forțate;

μ, un coeficient de oboseală al terenului.

În ceea ce privește factorul de amplificare, el are expresia clasică

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}, \tag{36}$$

unde ω este pulsația forței perturbatoare, iar p pulsația proprie de vibrație a fundației.

În ceea ce privește μ, valorile lui pot fi cuprinse între 1 și 3, analog fenomenului de oboseală al metalelor. Alegerea valorii respective este destul de relativă.

Rezultă, din cele arătate, că pentru studiul vibrațiilor forțate, pornind de la două criterii deosebite — valori admisibile pentru amplitudini, respectiv valori admisibile pentru forțele statice înlocuitoare, care decurg din presiunile admisibile pe teren — cele două metode pot duce la rezultate diferite. Pentru proiectanți, ar fi util ca noile cercetări să stabilească corelații între mărimile de mai sus, astfel ca deosebirile între cele două metode, rezultînd din aceste criterii, să dispară.

În tot cazul, din cele arătate mai sus, proiectantul trebuie să fie convins că în ceea ce privește determinarea pulsațiilor proprii, deci stabilirea pericolului de rezonanță, cele două metode duc la rezultate identice sau foarte apropiate.

Primită la redacție la 1 decembrie 1956.

СРАВНИТЕЛЬНОЕ ОБСЛЕДОВАНИЕ РАЗНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА СПЛОШНЫХ ФУНДАМЕНТОВ ДЛЯ МАШИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В РНР, как и в соседних странах, известны и применяются при проектировании фундаментов для машин два метода: советский, описанный в работах [1] и [2], и германский, описанный в работе [3].

На первый взгляд применяемые расчетные соотношения кажутся совершенно различными, что привело к обсуждению вопроса, какой из методов следует предпочитать.

Для наиболее часто встречающегося случая массивных (сплошных) фундаментов в статье устанавливается, что формулы для расчета собственных пульсаций при некоторых предпосылках — идентичны.

По советскому методу расчет собственных пульсаций поступательных горизонтальных и вращательных вибраций вокруг горизонтальной оси (вибрации с двумя степенями свободы) производится по формулам (5), (6), (7) и (8). По германскому методу эти величины определяются из формул (28) или (20), (21), (24) и (25).

В работе Рауша дается соотношение (20). Если допустить условия (26), (27), то можно вывести соотношение (28), заменяющее соотношение (20). При этом условии статьи в параграфе 4 устанавливаются соотношения (31), (32), соответственно (33), (34), показывающие, что значения собственных пульсаций, полученные по обоим методам — идентичны.

В заключение в параграфе 5 показывается также сходство, существующее между обоими методами, на основе сделанных доказательств, а также и различия, вызванные другими сторонами задачи, которые рассматриваются различно в обоих методах.

ÉTUDE COMPARÉE ENTRE DIFFÉRENTES MÉTHODES DE CALCUL DES FONDATIONS MASSIVES POUR MACHINES

(RÉSUMÉ)

On connaît et l'on utilise, dans ce pays tout comme dans les pays voisins, deux méthodes pour les projets de fondations pour machines : la méthode soviétique, présentée dans les travaux [1] et [2], et la méthode allemandedécrite dans le travail [3].

A première vue, les relations de calcul utilisées semblent être tout-à-fait différentes, ce qui donne lieu à des discussions sur la préférence à donner à l'une ou à l'autre de ces méthodes.

En étudiant le cas le plus fréquent, celui *des fondations massives*, l'auteur montre que les relations pour *le calcul des pulsations propres* sont, *avec certaines prémisses*, *identiques*.

Dans la méthode soviétique, le calcul des pulsations propres des vibrations de translation horizontale et de rotation autour d'un axe horizontal (vibrations à deux degrés de liberté) est effectué à l'aide des formules (5), (6), (7) et (8). Dans la méthode allemande, les mêmes grandeurs sont déterminées à l'aide des formules (28) ou bien (20), (21), (24) et (25).

Dans le traité de Rausch on donne la relation (20). Si l'on admet les conditions (26), (27), on peut établir la relation (28) qui remplace (20). A cette condition on établit, au paragraphe 4 de cet article, les relations (31) et (32), respectivement (33) et (34) qui montrent que les valeurs des pulsations propres, obtenues par les deux méthodes, sont identiques.

Au paragraphe 5, on démontre en conclusion, en vertu de la démonstration faite, la ressemblance qui existe entre les deux méthodes ainsi que les différences dues à d'autres aspects du problème, que les deux méthodes envisagent de façons différentes.

BIBLIOGRAFIE

1. D. D. Barkan, *Dinamika osnovanii i fundamentov.* Stroivoenmorizdat, Moscova, 1948.
2. O. A. Savinov, *Fundamenti pod maşin.* Leningrad, 1955.
3. E. Rausch, *Maschinenfundamente und andere dynamische Bauaufgaben.* Berlin, ed. VDI, 1936, 1940, 1942, partea 1, 2, 3.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

ELASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA CALCULULUI GRINZILOR PEREȚI CU O SINGURĂ DESCHIDERE*)

DE

PETRE P. TEODORESCU

6. CAZURILE DE ÎNCĂRCARE ELEMENTARE

În cele ce urmează vom da formulele de calcul pentru celelalte cazuri de încărcare elementare. Folosim notațiile din Anexă**).

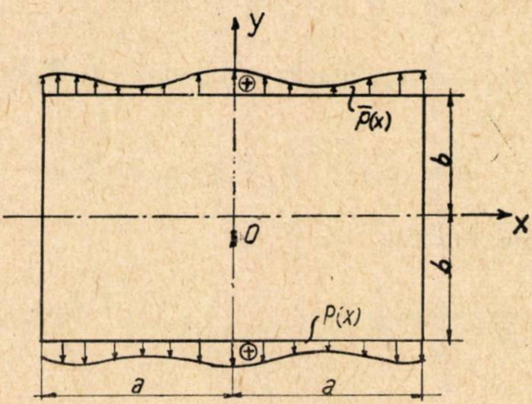


Fig. 4

a) Cazul de încărcare nr. 1 : încărcare normală, simetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 4). Luînd perioadele $L_x = 4a$ și $L_y = 4b$ și încărcarea

$$\overline{p}(x) = p(x) = \sum_n b_n \cos \alpha_n x \tag{36}$$

---

*) Continuarea articolului publicat în numărul precedent al acestei reviste la p. 115.

**) Vezi articolul nostru din numărul precedent.

găsim funcția eforturilor

$$F(x,y) = -\sum_k \frac{\Psi_{11}(\alpha_k y)}{\alpha_k^2} b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n^2} \Psi_3(\alpha_n y) \cos \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m^2} \Psi_3'(\beta_m x) \cos \beta_m y. \tag{37}$$

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\sigma_x = -\sum_k \Psi_{11}(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_5(\alpha_n y) \cos \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_3'(\beta_m x) \cos \beta_m y,$$

$$\sigma_y = \sum_k \Psi_{11}(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_3(\alpha_n y) \cos \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_5'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \tag{38}$$

$$\tau_{xy} = -\sum_k \Psi_{12}(\alpha_k y)\, b_k \sin \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_4(\alpha_n y) \sin \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_4'(\beta_m x) \sin \beta_m y,$$

iar deplasările de relațiile

$$Eu = -(1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{11}(\alpha_k y)}{\alpha_k} b_k \sin \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{5-3}(\alpha_n y) \sin \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi_{2-4}'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \tag{39}$$

$$Ev = (1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{12}(\alpha_k y)}{\alpha_k} b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{2-4}(\alpha_n y) \cos \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi_{5-3}'(\beta_m x) \sin \beta_m y.$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\overline{B}_i = d_n\,, \tag{40}$$

unde

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\mu_{ln}^{\prime 2}\,\mu_{li}^{\prime 2}}{\varphi_1(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in},\ n \neq i),$$

$$b_{nn} = \varphi_1^{\prime}(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^{\prime 4}}{\varphi_1(l\lambda)}, \tag{40'}$$

$$d_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, b_n \operatorname{th}\alpha_n b + \frac{2}{\pi}\sum_l \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\mu_{ln}^{\prime 2}\,\mu_{lk}^{\prime}}{l\varphi_1(l\lambda)}\, b_k,$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\,\overline{D}_l = c_m, \tag{41}$$

unde

$$a_{ml} = -\sum_i \frac{\mu_{mi}^{\prime 2}\,\mu_{li}^{\prime 2}}{\varphi_1^{\prime}(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm},\ m \neq l),$$

$$a_{mm} = \varphi_1(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^{\prime 4}}{\varphi_1^{\prime}(i\lambda')}, \tag{41'}$$

$$c_m = \frac{2}{\pi m}\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, \mu_{mk}^{\prime} b_k - \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, \mu_{mk}^{\prime 2}\,\overline{\varphi}_1^{\prime}(k\lambda')\, b_k.$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, \overline{\varphi}_1^{\prime}(n\lambda')\, b_n - \frac{1}{\varphi_1^{\prime}(n\lambda')}\sum_l \mu_{ln}^{\prime 2}\overline{D}_l\,, \\ \overline{D}_m &= \frac{2}{\pi m\varphi_1(m\lambda)}\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, \mu_{mk}^{\prime} b_k - \frac{1}{\varphi_1(m\lambda)}\sum_i \mu_{mi}^{\prime 2}\,\overline{B}_i\,. \end{aligned} \tag{42}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) &= -\overline{p}(x) + \pi\lambda' \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\overline{B}_n \cos\alpha_n x - \sum_m \overline{D}_m \Psi_3^{\prime}(\beta_m x), \\ \sigma_y(\pm a, y) &= \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\, \Psi_{11}(\alpha_k y)\, b_k - \sum_n \overline{B}_n \Psi_3(\alpha_n y) + \\ &\quad + \pi\lambda \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}\, m\overline{D}_m \cos\beta_m y. \end{aligned} \tag{43}$$

b) Cazul de încărcare nr. 2 : încărcare normală, simetrică în raport cu axa Oy și antisimetrică în raport cu axa Ox (fig. 5). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 4b$ și încărcarea

$$\overline{p}(x) = -\,p(x) = \sum_n b_n \cos \gamma_n x, \tag{44}$$

găsim funcția eforturilor

$$F(x,y) = -\sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_2(\gamma_n y) \cos \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m^2} \Psi_7'(\beta_m x) \sin \beta_m y. \tag{45}$$

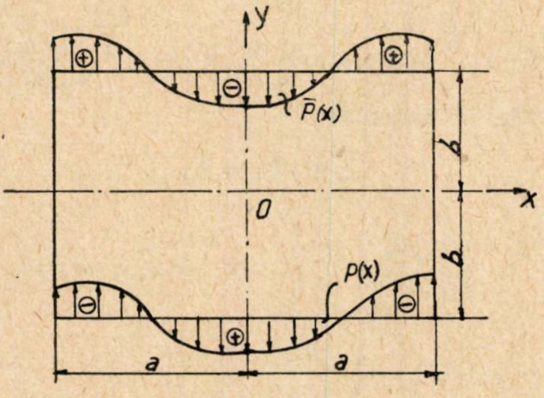


Fig. 5

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \, \Phi_4(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_7'(\beta_m x) \sin \beta_m y,\\
\sigma_y &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_2(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_9'(\beta_m x) \sin \beta_m y,\\
\tau_{xy} &= \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \, \Phi_3(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_8'(\beta_m x) \cos \beta_m y,
\end{aligned} \tag{46}$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned}
Eu &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{4-2}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi_{6-8}'(\beta_m x) \sin \beta_m y,\\
Ev &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{1-3}(\gamma_n y) \cos \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi_{9-7}'(\beta_m x) \cos \beta_m y + E r_0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\overline{B}_i = d_n , \tag{48}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_l \frac{\nu_{ln}'^2 \nu_{li}'^2}{\chi_1(l\lambda)} \quad (b_{ni} = b_{in}, \quad n \neq i), \\ b_{nn} &= \Psi_2'(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu_{ln}'^4}{\chi_1(l\lambda)}, \\ d_n &= (-1)^n b_n , \end{aligned} \tag{48'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\overline{D}_l = c_m , \tag{49}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\nu_{mi}'^2 \nu_{li}'^2}{\psi_2'(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm}, \ m \neq l), \\ a_{mm} &= \chi_1(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu_{mi}'^4}{\psi_2'(i\lambda')}, \\ c_m &= -\sum_k (-1)^k \frac{\nu_{mk}'^2}{\Psi_2'(k\lambda')} b_k . \end{aligned} \tag{49'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{\Psi_2'(n\lambda')}\left[(-1)^n b_n - \sum_l \nu_{ln}'^2 \overline{D}_l\right], \\ \overline{D}_m &= -\frac{1}{\chi_1(m\lambda)} \sum_i \nu_{mi}'^2 \overline{B}_i . \end{aligned} \tag{50}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) = {} & \pm \overline{p}(x) \pm 2 \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \left(\frac{\gamma_n b}{\operatorname{ch}\gamma_n b}\right)^2 \cos \gamma_n x \pm \\ & \pm 2 \sum_m \overline{D}_m \frac{\beta_m a}{\operatorname{sh}\beta_m a} (\beta_m a \operatorname{cth} \beta_m a \operatorname{ch} \beta_m x - \beta_m x \operatorname{sh} \beta_m x), \\ \sigma_y(\pm a, y) = {} & 2 \sum_n \overline{B}_n \frac{\gamma_n b}{\operatorname{ch}\gamma_n b} (\gamma_n b \operatorname{th} \gamma_n b \operatorname{sh} \gamma_n y - \gamma_n y \operatorname{ch} \gamma_n y) - \\ & - 2 \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \left(\frac{\beta_m a}{\operatorname{sh}\beta_m a}\right)^2 \sin \beta_m y. \end{aligned} \tag{51}$$

Luînd perioadele $L_x = 4a$ şi $L_y = 2b$ şi încărcarea

$$\overline{p}\,(x) = -\,p\,(x) = \sum_n b_n \cos \alpha_n x, \tag{52}$$

găsim funcţia eforturilor

$$F\,(x,y) = -\sum_k \frac{\Psi_{14}(\alpha_k y)}{\alpha_k^2}\, b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n^2} \Psi_8\,(\alpha_n y\,) \cos \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_3'\,(\,\delta_m x) \sin \delta_m y. \tag{53}$$

Eforturile unitare vor fi în acest caz date de relaţiile

$$\sigma_x = -\sum_k \Psi_{14}\,(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} B_n \Psi_{10}\,(\alpha_n y) \cos \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_3'\,(\,\delta_m x) \sin \delta_m y, \tag{54}$$

$$\sigma_y = \sum_k \Psi_{14}\,(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_8\,(\alpha_n y) \cos \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^m \overline{D}_m\, \Phi_5'\,(\,\delta_m x) \sin \delta_m y, \tag{54'}$$

$$\tau_{xy} = -\sum_k \Psi_{13}\,(\alpha_k y)\, b_k \sin \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_9\,(\alpha_n y) \sin \alpha_n x -$$

$$- \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_4'\,(\,\delta_m x) \cos \delta_m y,$$

iar deplasările de relaţiile

$$Eu = -(1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{14}\,(\alpha_k y)}{\alpha_k}\, b_k \sin \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n}\, \Psi_{10-8}\,(\alpha_n y) \sin \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m}\, \Phi_{2-4}'\,(\,\delta_m x) \sin \delta_m y, \tag{55}$$

$$Ev = (1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{13}\,(\alpha_k y)}{\alpha_k}\, b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n}\, \Psi_{7-9}\,(\alpha_n y) \cos \alpha_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m}\, \Phi_{5-3}'\,(\,\delta_m x) \cos \delta_m y + Ev_0\,.$$

Coeficienţii $\overline{B}_n$ sînt daţi de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\, \overline{B}_i = d_n\,, \tag{56}$$

unde

$$\begin{aligned}
b_{ni} &= -\sum_l \frac{\nu_{ln}^2\,\nu_{li}^2}{\varphi_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in},\ n \neq i),\\
b_{nn} &= \varkappa_1'(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu_{ln}^4}{\varphi_2(l\lambda)},\\
d_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, b_n \operatorname{cth} \alpha_n b - \frac{1}{\pi}\sum_l\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\nu_{ln}^2\,\nu_{lk}}{l\varphi_2(l\lambda)}\, b_k,
\end{aligned} \tag{56'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\overline{D}_l = c_m, \tag{57}$$

unde

$$\begin{aligned}
a_{ml} &= -\sum_i \frac{\nu_{mi}^2\,\nu_{li}^2}{\varkappa_1'(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm},\ m \neq l),\\
a_{mm} &= \varphi_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu_{mi}^4}{\varkappa_1'(i\lambda')},\\
c_m &= -\frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\nu_{mk} b_k - \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\nu_{mk}^2\,\overline{\varkappa}_1'(k\lambda') b_k.
\end{aligned} \tag{57'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned}
\overline{B}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\overline{\varkappa}_1'(n\lambda')\, b_n + \frac{1}{\varkappa_1'(n\lambda')}\sum_l \nu_{ln}^2\,\overline{D}_l,\\
\overline{D}_m &= \frac{1}{\varphi_2(m\lambda)}\left[-\frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\nu_{mk} b_k + \sum_i \nu_{mi}^2\,\overline{B}_i\right].
\end{aligned} \tag{58}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, \pm b) &= \mp\,\overline{p}(x) \pm \pi\lambda' \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, n\,\overline{B}_n \cos \alpha_n x \mp \sum_m \overline{D}_m \Phi_3'(\delta_m x),\\
\sigma_y(\pm a, y) &= \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}}\,\Psi_{14}(\alpha_k y) b_k - \sum_n \overline{B}_n \Psi_8(\alpha_n y) +\\
&\quad + 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m\, m\,\overline{D}_m \sin \delta_m y.
\end{aligned} \tag{59}$$

Condiția de echilibru a eforturilor totale pe contur este îndeplinită dacă $\overline{N}_y = N_y = 0$. Pentru aceasta dezvoltările în serie (44) și (52) nu au termen liber iar coeficienții ultimei dezvoltări trebuie să verifice relația

$$\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_n}{n} = 0. \tag{60}$$

c) Cazul de încărcare nr. 3 : încărcare normală, antisimetrică în raport cu axa Oy şi simetrică în raport cu axa Ox (fig. 6). Luînd perioadele $L_x = 2a$ şi $L_y = 4b$ şi încărcarea

$$\overline{p}(x) = p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x, \tag{61}$$

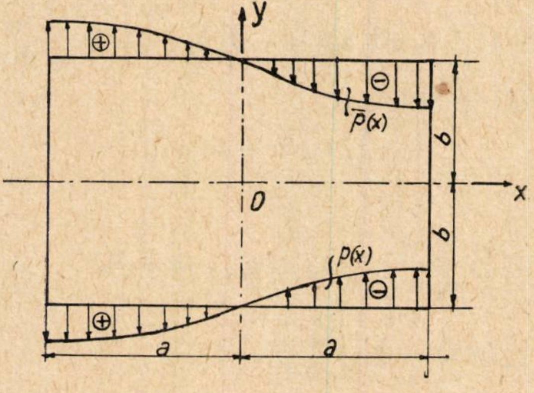


Fig. 6

găsim funcţia eforturilor

$$F(x,y) = -\sum_k \frac{\Phi_{11}(\gamma_k y)}{\gamma_k^2} a_k \sin \gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_3(\gamma_n y) \sin \gamma_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m^2} \Psi_8'(\beta_m x) \cos \beta_m y. \tag{62}$$

Eforturile unitare vor fi date de relaţiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_k \Phi_{11}(\gamma_k y)\, a_k \sin \gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_5(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_8'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \sigma_y &= \sum_k \Phi_{11}(\gamma_k y) a_k \sin \gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_3(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_{10}'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \tau_{xy} &= \sum_k \Phi_{12}(\gamma_k y)\, a_k \cos \gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_4(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\ &\quad + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi_9'(\beta_m x) \sin \beta_m y, \end{aligned} \tag{63}$$

ar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned} Eu &= (1+\mu)\sum_k \frac{\Phi_{11}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \cos\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{5-3}(\gamma_n y)\cos\gamma_n x + \\ &\quad + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi'_{7-9}(\beta_m x)\cos\beta_m y + Eu_0 , \\ Ev &= (1+\mu)\sum_k \frac{\Phi_{12}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \sin\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{2-4}(\gamma_n y)\sin\gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi'_{10-8}(\beta_m x)\sin\beta_m y. \end{aligned} \tag{64}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\overline{B}_i = d_n , \tag{65}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_l \frac{\nu'^2_{ln}\nu'^2_{li}}{\varkappa_1(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in} ,\ n \neq i), \\ b_{nn} &= \varphi'_2(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu'^4_{ln}}{\varkappa_1(l\lambda)} , \\ d_n &= (-1)^n a_n \operatorname{th}\gamma_n b - \frac{2}{\pi}\sum_l\sum_k (-1)^k \frac{\nu'^2_{ln}\nu'_{lk}}{l\varkappa_1(l\lambda)} a_k , \end{aligned} \tag{65'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\overline{D}_l = c_m , \tag{66}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\nu'^2_{li}\nu'^2_{mi}}{\varphi'_2(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm} ,\ m \neq l), \\ a_{mm} &= \varkappa_1(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu'^2_{mi}}{\varphi'_2(i\lambda')} , \\ c_m &= -\frac{2}{\pi m}\sum_k (-1)^k \nu'_{mk} a_k + \sum_k (-1)^k \nu'^2_{mk}\overline{\varphi}'_2(k\lambda') a_k . \end{aligned} \tag{66'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^n \overline{\varphi}'_2(n\lambda') a_n + \frac{1}{\varphi'_2(n\lambda')}\sum_l \nu'^2_{ln}\overline{D}_l , \\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varkappa_1(m\lambda)}\left[-\frac{2}{\pi m}\sum_k (-1)^k \nu'_{mk} a_k + \sum_i \nu'^2_{mi}\overline{B}_i\right]. \end{aligned} \tag{67}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\sigma_x(x, \pm b) = -\overline{p}(x) + 2\pi\lambda' \sum_n (-1)^n n\overline{B}_n \sin\gamma_n x - \sum_m \overline{D}_m \Psi_8'(\beta_m x), \tag{68}$$

$$\sigma_y(\pm a, y) = \pm\sum_k (-1)^k \Phi_{11}(\gamma_k y) a_k \mp \sum_n \overline{B}_n \Phi_3(\gamma_n y) \pm \pi\lambda \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} m\overline{D}_m \cos\beta_n y$$

d) Cazul de încărcare nr. 4 : încărcare normală, antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 7). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$, încărcarea va fi

$$\overline{p}(x) = -p(x) = \sum_n a_n \sin\gamma_n x \tag{69}$$

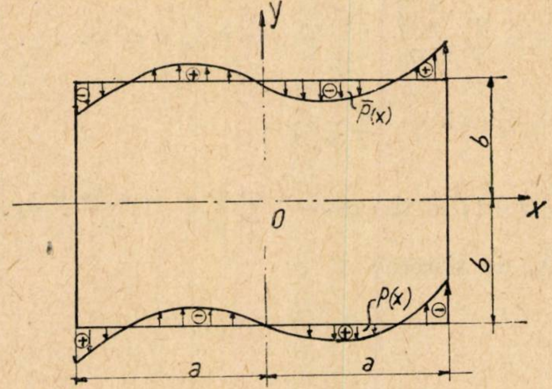


Fig. 7

Condiția de echilibru a eforturilor totale pe contur ($\overline{M}_y = M_y = 0$) ne conduce la

$$\sum_n (-1)^n \frac{a_n}{n} = 0. \tag{70}$$

Funcția eforturilor va fi de forma

$$F(x, y) = -\sum_k \frac{\Phi_{14}(\gamma_k y)}{\gamma_k^2} a_k \sin\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_8(\gamma_n y) \sin\gamma_n x +$$

$$+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_8'(\delta_m x) \sin\delta_m y. \tag{71}$$

Eforturile unitare sînt date de relațiile

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \sin\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_{10}(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_8'(\delta_m x) \sin\delta_m y, \\ \sigma_y &= \sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \sin\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_{10}'(\delta_m x) \sin\delta_m y, \\ \tau_{xy} &= \sum_k \Phi_{13}(\gamma_k y)\, a_k \cos\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_9(\gamma_n y) \cos\gamma_n x - \\ &\quad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_9'(\delta_m x) \cos\delta_m y,\end{aligned} \tag{72}$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned}Eu &= (1+\mu)\sum_k \frac{\Phi_{11}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \cos\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{10-8}(\gamma_n y)\cos\gamma_n x + \\ &\quad + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{7-9}'(\delta_m x) \sin\delta_m y - E\omega_0 y, \\ Ev &= (1+\mu)\sum_k \frac{\Phi_{13}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \sin\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{7-9}(\gamma_n y)\sin\gamma_n x + \\ &\quad + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{10-8}'(\delta_m x) \cos\delta_m y + E\omega_0 x.\end{aligned} \tag{73}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n, \tag{74}$$

unde

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\mu_{ln}^2 \mu_{li}^2}{\varkappa_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in},\ n \neq i),$$

$$b_{nn} = \varkappa_2'(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^4}{\varkappa_2(l\lambda)}, \tag{74'}$$

$$d_n = (-1)^n a_n \operatorname{cth}\gamma_n b - \frac{1}{\pi}\sum_l \sum_k (-1)^k \frac{\mu_{ln}^2 \mu_{lk}}{l\varkappa_2(l\lambda)} a_k$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\overline{D}_l = c_m\,, \tag{75}$$

unde

$$a_{ml} = -\sum_i \frac{\mu_{mi}^2\,\mu_{li}^2}{\varkappa_2'(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm}\,,\ m \neq l),$$

$$a_{mm} = \varkappa_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^4}{\varkappa_2'(i\lambda')}\,, \tag{75'}$$

$$c_m = \frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k \mu_{mk}\, a_k - \sum_k (-1)^k \mu_{mk}^2\, \overline{\varkappa}_2'(k\lambda')\, a_k\,.$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^n\, \overline{\varkappa}_2'(n\lambda')\, a_n - \frac{1}{\varkappa_2'(n\lambda')}\sum_l \mu_{ln}^2\,\overline{D}_l\,,\\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varkappa_2(m\lambda)}\left[\frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k \mu_{mk}\, a_k - \sum_i \mu_{mi}^2\,\overline{B}_i\right]. \end{aligned} \tag{76}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) &= \mp\, \overline{p}(x) \pm 2\pi\lambda' \sum_n (-1)^n n\overline{B}_n \sin\gamma_n x \mp \sum_m \overline{D}_m \Phi_8'(\delta_m x),\\ \sigma_y(\pm a, y) &= \pm \sum_k (-1)^k \Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \mp \sum_n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \pm 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m m\overline{D}_m \sin\delta_m y. \end{aligned} \tag{77}$$

e) Cazul de încărcare nr. 5: încărcare tangențială, simetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 8). Luînd perioadele $L_x = 4a$ și $L_y = 4b$ și încărcarea

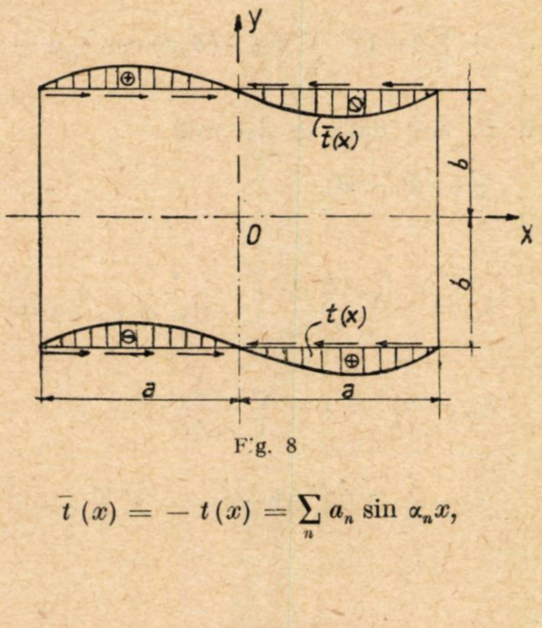


Fig. 8

$$\overline{t}(x) = -\,t(x) = \sum_n a_n \sin\alpha_n x, \tag{78}$$

găsim funcția eforturilor sub forma

$$F(x,y) = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n^2} \Psi_3(\alpha_n y) \cos \alpha_n x + \\ + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m^2} \Psi'_3(\beta_m x) \cos \beta_m y. \tag{79}$$

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_5(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi'_3(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \sigma_y &= -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_3(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi'_5(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \tau_{xy} &= \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_4(\alpha_n y) \sin \alpha_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m \Psi'_4(\beta_m x) \sin \beta_m y, \end{aligned} \tag{80}$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned} Eu &= -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{5-3}(\alpha_n y) \sin \alpha_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi'_{2-4}(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ Ev &= \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{2-4}(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m} \Psi'_{5-3}(\beta_m x) \sin \beta_m y. \end{aligned} \tag{81}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n , \tag{82}$$

unde

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\mu'^2_{ln} \mu'^2_{li}}{\varphi_1(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in} , \ n \neq i),$$

$$b_{nn} = \varphi'_1(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu'^4_{ln}}{\varphi_1(l\lambda)} , \tag{82'}$$

$$d_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n ,$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml} \overline{D}_l = c_m , \tag{83}$$

unde

$$a_{ml} = -\sum_i \frac{\mu'^2_{mi} \mu'^2_{li}}{\varphi'_1(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm} , \ m \neq l),$$

$$a_{mm} = \varphi_1(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu'^4_{mi}}{\varphi'_1(i\lambda')} , \tag{83'}$$

$$c_m = -\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\mu'^2_{mk}}{\varphi'_1(k\lambda')} a_k .$$

Putem exprima un şir de coeficienţi cu ajutorul celorlalţi prin relaţiile

$$\overline{B}_n = \frac{1}{\varphi_1'(n\lambda')}\left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n - \sum_l \mu_{ln}'^2 \overline{D}_l\right], \qquad (84)$$
$$\overline{D}_m = -\frac{1}{\varphi_1(m\lambda)} \sum_i \mu_{mi}'^2 \overline{B}_i .$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\sigma_x(x, \pm b) = \pi\lambda' \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \overline{B}_n \cos \alpha_n x - \sum_m \overline{D}_m \Psi_3'(\beta_m x), \qquad (85)$$
$$\sigma_y(\pm a, y) = -\sum_n \overline{B}_n \Psi_3(\alpha_n y) + \pi\lambda \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} m \overline{D}_m \cos \beta_m y.$$

f) Cazul de încărcare nr. 6 : încărcare tangenţială, simetrică în raport cu axa Oy şi antisimetrică în raport cu axa Ox (fig. 9). Luînd perioadele $L_x = 4a$ şi $L_y = 2b$, încărcarea va fi de forma

$$\overline{t}(x) = t(x) = \sum_n a_n \sin \alpha_n x \qquad (86)$$

şi obţinem funcţia eforturilor

$$F(x, y) = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n^2} \Psi_8(\alpha_n y) \cos \alpha_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_3'(\delta_m x) \sin \delta_m y. \qquad (87)$$

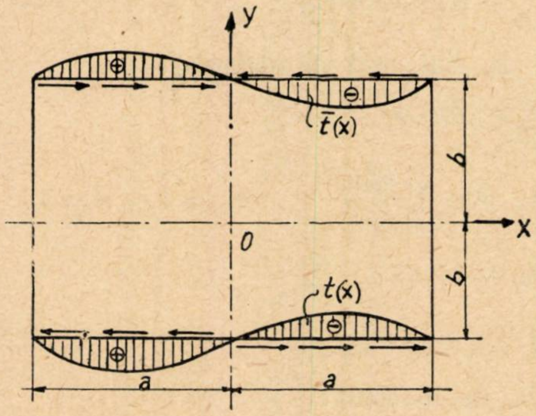


Fig. 9

Eforturile unitare vor fi date de relaţiile

$$\sigma_x = -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_{10}(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_3'(\delta_m x) \sin \delta_m y,$$
$$\sigma_y = -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_8(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_5'(\delta_m x) \sin \delta_m y, \qquad (88)$$
$$\tau_{xy} = \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_9(\alpha_n y) \sin \alpha_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_4'(\delta_m x) \cos \delta_m y,$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned} Eu &= -\sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{10-8}(\alpha_n y) \sin\alpha_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{2-4}(\delta_m x) \sin\delta_m y, \\ Ev &= \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\sigma_n} \Psi_{7-9}(\alpha_n y) \cos\alpha_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{5-3}(\delta_m x) \cos\delta_m y + Ev_0. \end{aligned} \tag{89}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n , \tag{90}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_l \frac{\nu_{ln}^2 \nu_{li}^2}{\varphi_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in} , \ n \neq i), \\ b_{nn} &= \varkappa'_1(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu_{ln}^4}{\varphi_2(l\lambda)} , \\ d_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n , \end{aligned} \tag{90'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml} \overline{D}_l = c_m , \tag{91}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\nu_{mi}^2 \nu_{li}^2}{\varkappa'_1(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm} , \ m \neq l), \\ a_{mm} &= \varphi_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu_{mi}^4}{\varkappa'_1(i\lambda')} , \\ c_m &= -\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\nu_{mk}^2}{\varkappa'_1(k\lambda')} a_k . \end{aligned} \tag{91'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{\varkappa'_1(n\lambda')} \left[(-1)^{\frac{n-1}{2}} a_n + \sum_l \nu_{ln}^2 \overline{D}_l \right] , \\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varphi_2(m\lambda)} \sum_i \nu_{mi}^2 \overline{B}_i . \end{aligned} \tag{92}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) &= \pm \pi\lambda' \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \overline{B}_n \cos\alpha_n x \mp \sum_m \overline{D}_m \Phi'_3(\delta_m x), \\ \sigma_y(\pm a, y) &= -\sum_n \overline{B}_n \Psi_8(\alpha_n y) + 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m m \overline{D}_m \sin\delta_m y. \end{aligned} \tag{93}$$

g) Cazul de încărcare nr. 7 : încărcare tangențială, antisimetrică în raport cu axa Oy și simetrică în raport cu axa Ox (fig. 10). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 4b$, încărcarea va fi de forma

$$\overline{t}\,(x) = -\,t\,(x) = \sum_n b_n \cos \gamma_n x, \tag{94}$$

fără termen liber, pentru a putea fi îndeplinită condiția de echilibru pe contur $\left(\overline{T}_x = T_x = 0\right)$; găsim funcția eforturilor

$$F(x,y) = \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2}\, \Phi_3(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m^2}\, \Psi_8'(\beta_m x) \cos \beta_m y. \tag{95}$$

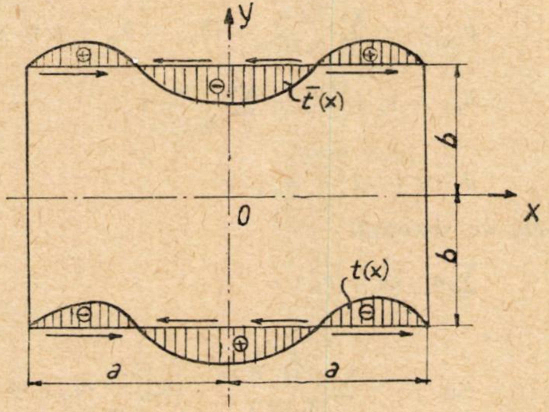


Fig. 10

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_5(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m\, \Psi_8'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \sigma_y &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_3(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m\, \Psi_{10}'(\beta_m x) \cos \beta_m y, \\ \tau_{xy} &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_4(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \overline{D}_m\, \Psi_9'(\beta_m x) \sin \beta_m y, \end{aligned} \tag{96}$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned} Eu &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n}\, \Phi_{5-3}(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m}\, \Psi_{7-9}'(\beta_m x) \cos \beta_m y + Eu_0, \\ Ev &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n}\, \Phi_{2-4}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\overline{D}_m}{\beta_m}\, \Psi_{10-8}'(\beta_m x) \sin \beta_m y. \end{aligned} \tag{97}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\,\overline{B}_i = d_n\,, \tag{98}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_l \frac{\nu_{ln}^{\prime 2}\,\nu_{li}^{\prime 2}}{\varkappa_1(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in}\,,\ n \neq i),\\ b_{nn} &= \varphi_2^{\prime}(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu_{ln}^{\prime 4}}{\varkappa_1(l\lambda)}\,,\\ d_n &= (-1)^{n+1}\,b_n\,, \end{aligned} \tag{98'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\,\overline{D}_l = c_m\,, \tag{99}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\nu_{li}^{\prime 2}\,\nu_{mi}^{\prime 2}}{\varphi_2^{\prime}(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm},\ m \neq l),\\ a_{mm} &= \varkappa_1(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu_{mi}^{\prime 4}}{\varphi_2^{\prime}(i\lambda')}\,,\\ c_m &= -\sum_k (-1)^k \frac{\nu_{mk}^{\prime 2}}{\varphi_2^{\prime}(k\lambda')}\,b_n\,. \end{aligned} \tag{99'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{\varphi_2^{\prime}(n\lambda')}\left[(-1)^{n+1}\,b_n + \sum_l \nu_{ln}^{\prime 2}\,\overline{D}_l\right],\\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varkappa_1(m\lambda)} \sum_i \nu_{mi}^{\prime 2}\,\overline{B}_i\,. \end{aligned} \tag{100}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) &= 2\pi\lambda' \sum_n (-1)^n\, n\,\overline{B}_n \sin\gamma_n x - \sum_m \overline{D}_m \Psi_8^{\prime}(\beta_m x),\\ \sigma_y(\pm a, y) &= \mp \sum_n \overline{B}_n \Phi_3(\gamma_n y) \pm \pi\lambda \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}}\, m\,\overline{D}_m \cos\beta_m y. \end{aligned} \tag{101}$$

h) Cazul de încărcare nr. 8: încărcare tangențială, antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 11). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$, încărcarea va fi de forma

$$\overline{t}\,(x) = t(x) = \sum_n b_n \cos\gamma_n x, \tag{102}$$

fără termen liber, pentru a putea fi îndeplinită condiția de echilibru pe contur $\left(\overline{T}_x = T_x = 0\right)$; găsim funcția eforturilor

$$F(x, y) = \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_8 (\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_8' (\delta_m x) \sin \delta_m y. \quad (103)$$

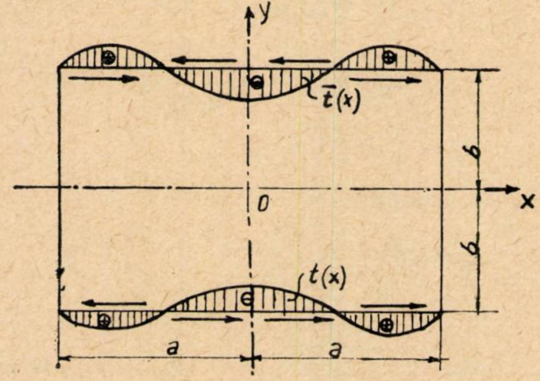


Fig. 11

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_{10} (\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_8' (\delta_m x) \sin \delta_m y, \\ \sigma_y &= - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_8 (\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_{10}' (\delta_m x) \sin \delta_m y, \qquad (104) \\ \tau_{xy} &= - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_9 (\gamma_n y) \cos \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_9' (\delta_m x) \cos \delta_m y, \end{aligned}$$

iar deplasările de relațiile

$$\begin{aligned} Eu &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{10-8} (\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\ &+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{7-9}' (\delta_m x) \sin \delta_m y - E \omega_0 y, \\ Ev &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{7-9} (\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \qquad (105) \\ &+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{10-8}' (\delta_m x) \cos \delta_m y + E \omega_0 x. \end{aligned}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n , \quad (106)$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_{l} \frac{\mu_{ln}^{2}\mu_{li}^{2}}{\varkappa_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in}\,,\ n \neq i), \\ b_{nn} &= \varkappa_2'(n\lambda') - \sum_{l} \frac{\mu_{ln}^{4}}{\varkappa_2(l\lambda)}\,, \\ d_n &= (-1)^{n+1} b_n\,, \end{aligned} \tag{106'}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum a_{nl}\,\overline{D_l} = c_m, \tag{107}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_{i} \frac{\mu_{mi}^{2}\mu_{li}^{2}}{\varkappa_2'(i\lambda')} \quad (a_{ml} = a_{lm},\ m \neq l), \\ a_{mm} &= \varkappa_2(m\lambda) - \sum_{i} \frac{\mu_{mi}^{4}}{\varkappa_2'(i\lambda')}, \\ c_m &= \sum_{k} (-1)^{k} \frac{\mu_{mk}^{2}}{\varkappa_2'(k\lambda')} b_k. \end{aligned} \tag{107'}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= \frac{1}{\varkappa_2'(n\lambda')}\left[(-1)^{n+1} b_n - \sum_{l} \mu_{ln}^{2} D_l\right], \\ \overline{D}_m &= -\frac{1}{\varkappa_2(m\lambda)} \sum_{i} \mu_{mi}^{2}\,\overline{B}_i\,. \end{aligned} \tag{108}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \pm b) &= \pm\, 2\pi\lambda' \sum_{n} (-1)^{n}\, n\overline{B}_n \sin\, \gamma_n x \mp \sum_{m} \overline{D}_m\, \Phi_8'(\delta_n x), \\ \sigma_y(\pm\, a,\ y) &= \mp \sum_{n} \overline{B}_n\, \Phi_8(\gamma_n y) \pm 2\pi\lambda \sum_{m} (-1)^{m} m\, \overline{D}_m \sin\, \delta_m y. \end{aligned} \tag{109}$$

i) Cazul de încărcare nr. 9: încărcare compusă, normală, antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 12). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$ pentru cele două direcții, încărcările vor fi de forma

$$\begin{aligned} \overline{p}(x) &= -\,p(x) = \sum_{n} a_n \sin\, \gamma_n x, \\ \overline{p}'(y) &= -\,p'(y) = \sum_{m} a_m' \sin\, \delta_m y. \end{aligned} \tag{110}$$

Condiția de echilibru pe contur ($\overline{M}_x + \overline{M}_y = 0$) ne va da relația

$$\pi\lambda K_0 = \lambda^2 \sum_{n} (-1)^{n} \frac{a_n}{n} = \sum_{m} (-1)^{m} \frac{a_m'}{m}. \tag{111}$$

Găsim funcția eforturilor

$$F(x,y) = -\sum_k \frac{\Phi_{14}(\gamma_k y)}{\gamma_k^2} a_k \sin \gamma_k x - \sum_j \frac{\Phi'_{14}(\delta_j x)}{\delta_j^2} a'_j \sin \delta_j y +$$
$$+\sum_n (-1)^n \frac{\bar{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_8(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{D_m}{\delta_m^2} \Phi'_8(\delta_m x) \sin \delta_m y + K_0 xy. \tag{112}$$

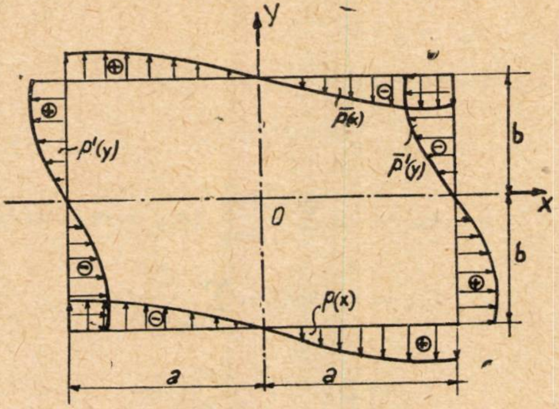


Fig. 12

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\sigma_x = -\sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y) a_k \sin \gamma_k x + \sum_j \Phi'_{14}(\delta_j x) a'_j \sin \delta_j y -$$
$$-\sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_{10}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_n \Phi'_8(\delta_m x) \sin \delta_m y,$$
$$\sigma_y = \sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y) a_k \sin \gamma_k x - \sum_j \Phi'_{14}(\delta_j x) a'_j \sin \delta_j y -$$
$$-\sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \sin \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi'_{10}(\delta_m x) \sin \delta_n y, \tag{113}$$
$$\tau_{xy} = \sum_k \Phi_{13}(\gamma_k y) a_k \cos \gamma_k x + \sum_j \Phi'_{13}(\delta_j x) a'_j \cos \delta_j y -$$
$$-\sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_9(\gamma_n y) \cos \gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi'_9(\delta_m x) \cos \delta_m y - K_0$$

iar deplasările de relațiile

$$Eu = (1+\mu) \sum_k \frac{\Phi_{14}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \cos \gamma_k x + (1+\mu) \sum_j \frac{\Phi'_{14}(\delta_j x)}{\delta_j} a'_j \sin \delta_j y +$$
$$+\sum_n (-1)_n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{10-8}(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{7-9}(\delta_m x) \sin \delta_m y -$$
$$-[(1+\mu) K_0 + E\omega_0]\, y, \tag{114}$$
$$Ev = (1+\mu) \sum_k \frac{\Phi_{13}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \sin \gamma_k x + (1+\mu) \sum_j \frac{\Phi'_{13}(\delta_j x)}{\delta_j} a'_j \cos \delta_j y +$$
$$+\sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{7-9}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{10-8}(\delta_m x) \cos \delta_m y -$$
$$-[(1+\mu) K_0 - E\omega_0]\, x.$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\,\overline{B}_i = d_n, \tag{115}$$

unde

$$\begin{aligned} b_{ni} &= -\sum_l \frac{\mu_{ln}^2\,\mu_{li}^2}{\varkappa_2(l\lambda)} \quad (b_{ni} = b_{in}\ ,\ n \neq i),\\ b_{nn} &= \varkappa_2'(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^4}{\varkappa_2(l\lambda)}, \end{aligned} \tag{115'}$$

$$\begin{aligned} d_n &= (-1)^n a_n \operatorname{cth}\gamma_n b + \frac{1}{\pi n}\sum_j (-1)^j \mu_{jn}\, a_j' -\\ &- \sum_j (-1)^j \mu_{jn}^2\,\overline{\varkappa}_2(j\lambda)\, a_j' - \frac{1}{\pi}\sum_l\sum_k (-1)^k \frac{\mu_{ln}^2\,\mu_{lk}}{l\varkappa_2(l\lambda)}\, a_k, \end{aligned}$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\,\overline{D}_l = c_m, \tag{116}$$

unde

$$\begin{aligned} a_{ml} &= -\sum_i \frac{\mu_{mi}^2\,\mu_{li}^2}{\varkappa_2'(i\lambda')} \quad (a_{ml} = a_{lm}\ ,\ m \neq l),\\ a_{mm} &= \varkappa_2\,(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^4}{\varkappa_2'(i\lambda')}, \end{aligned} \tag{116'}$$

$$\begin{aligned} c_m &= (-1)^m a_m' \operatorname{cth}\delta_m a + \frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k \mu_{mk}\, a_k -\\ &- \sum_k (-1)^k \mu_{mk}^2\,\overline{\varkappa}_2'(k\lambda')\, a_k - \frac{1}{\pi}\sum_i\sum_j (-1)^j \frac{\mu_{mi}^2\,\mu_{ji}}{i\varkappa_2'(i\lambda')}\, a_j'. \end{aligned}$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^n\,\overline{\varkappa}_2'(n\lambda')\,a_n + \frac{1}{\varkappa_2'(n\lambda')}\left[\frac{1}{\pi n}\sum_j (-1)^j \mu_{jn}\, a_j' - \sum_l \mu_{ln}^2\,\overline{D}_l\right],\\ \overline{D}_m &= (-1)^m\,\overline{\varkappa}_2(m\lambda)\,a_m' + \frac{1}{\varkappa_2(m\lambda)}\left[\frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k \mu_{mk}\, a_k - \sum_i \mu_{mi}^2\,\overline{B}_i\right]. \end{aligned} \tag{117}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, \text{[illegible]}) &= \mp\,\overline{p}(x) \pm \sum_j (-1)^j\,\Phi_{14}'(\delta_j x)\, a_j' \pm 2\pi\lambda' \sum_n (-1)^n n\,\overline{B}_n \sin\gamma_n x \mp\\ &\mp \sum_m \overline{D}_m\,\Phi_8'(\delta_m x), \end{aligned} \tag{118}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(\pm a, y) &= \mp\,\overline{p}'(y) \pm \sum_k (-1)^k\,\Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \mp \sum_n \overline{B}_n\,\Phi_8(\gamma_n y) \pm\\ &\pm 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m m\,\overline{D}_m \sin\delta_m y. \end{aligned}$$

j) Cazul de încărcare nr. 10 : încărcare compusă, tangențială, antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 13). Luînd perioadele $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$, încărcările vor fi de forma

$$\begin{aligned} \overline{t}\,(x) &= t\,(x) = b_0 + \sum_n b_n \cos\gamma_n x, \\ \overline{t}'\,(y) &= t'\,(y) = b_0' + \sum_m b_m' \cos\delta_m y. \end{aligned} \tag{119}$$

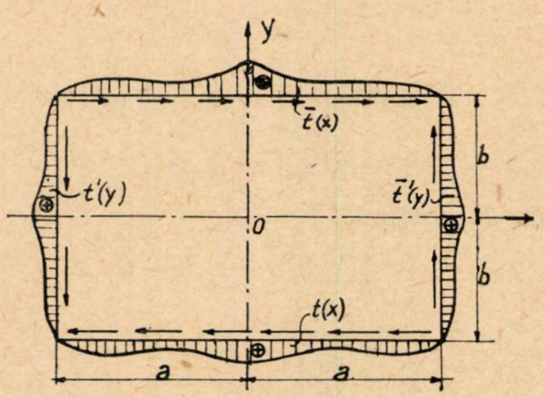


Fig. 13

Condiția de echilibru pe contur ne va da relația

$$b_0 = b_0', \tag{120}$$

astfel încît $a\overline{T}_y + b\overline{T}_x = 0$.

Găsim funcția eforturilor

$$F\,(x,y) = \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2}\, \Phi_8\,(\gamma_n y) \sin\gamma_n x + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2}\, \Phi_8'\,(\delta_m x) \sin\delta_m y. \tag{121}$$

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_{10}\,(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m\, \Phi_8'\,(\delta_m x) \sin\delta_m y, \\ \sigma_y &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_8\,(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m\, \Phi_{10}'\,(\delta_m x) \sin\delta_m y, \\ \tau_{xy} &= -\sum_n (-1)^n \overline{B}_n\, \Phi_9\,(\gamma_n y) \cos\gamma_n x - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m\, \Phi_9'\,(\delta_m x) \cos\delta_m y, \end{aligned} \tag{122}$$

iar deplasările de relațiile

$$
\begin{aligned}
Eu &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{10-8}(\gamma_n y) \cos \gamma_n x + \\
&\quad + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{7-9}(\delta_m x) \sin \delta_m y - E\omega_0 y, \\
Ev &= \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{7-9}(\gamma_n y) \sin \gamma_n x + \\
&\quad + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi'_{10-8}(\delta_m x) \cos \delta_n y + E\omega_0 x.
\end{aligned}
\tag{123}
$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n, \tag{124}$$

unde

$$
\begin{aligned}
b_{ni} &= - \sum_l \frac{\mu_{ln}^2 \mu_{li}^2}{\varkappa_2(l\lambda)} \qquad (b_{ni} = b_{in}\ ,\ n \neq i), \\
b_{nn} &= \varkappa'_2(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^4}{\varkappa_2(l\lambda)}, \\
d_n &= (-1)^{n+1} b_n + \sum_j (-1)^j \frac{\mu_{jn}^2}{\varkappa_2(j\lambda)} b'_j,
\end{aligned}
\tag{124'}
$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_i a_{ml} \overline{D}_l = c_m, \tag{125}$$

unde

$$
\begin{aligned}
a_{ml} &= - \sum_i \frac{\mu_{mi}^2 \mu_{li}^2}{\varkappa'_2(i\lambda')} \qquad (a_{ml} = a_{lm}\ ,\ m \neq l), \\
a_{mm} &= \varkappa_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^4}{\varkappa'_2(i\lambda')}, \\
c_m &= (-1)^{m+1} b'_m + \sum_k (-1)^k \frac{\mu_{mk}^2}{\varkappa'_2(k\lambda')} b_k.
\end{aligned}
\tag{125'}
$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$
\begin{aligned}
\overline{B}_n &= \frac{1}{\varkappa'_2(n\lambda')} \left[(-1)^{n+1} b_n - \sum_l \mu_{ln}^2 \overline{D}_l \right], \\
\overline{D}_m &= \frac{1}{\varkappa_2(m\lambda)} \left[(-1)^{m+1} b'_m - \sum_i \mu_{mi}^2 \overline{B}_i \right].
\end{aligned}
\tag{126}
$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, \pm b) &= \pm\, 2\pi\lambda' \sum_n (-1)^n n \overline{B}_n \sin \gamma_n x \mp \sum_m \overline{D}_m \Phi_8'(\delta_m x),\\ \sigma_y(\pm a, y) &= \mp \sum_n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \pm 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m m \overline{D}_m \sin \delta_n y.\end{aligned} \tag{127}$$

k) Cazul de încărcare nr. 11 : încărcare compusă, normală și tangențială, simetrică în raport cu axa Oy și antisimetrică în raport cu axa Ox (fig. 14). Luînd perioadele $L_x = 4a$ și $L_y = 2b$, încărcările vor fi de forma

$$\begin{aligned}\overline{p}(x) &= -\, p(x) = \sum_n b_n \cos \alpha_n x,\\ \overline{t}'(y) &= -\, t'(y) = b_0' + \sum_m b_m' \cos \delta_m y.\end{aligned} \tag{128}$$

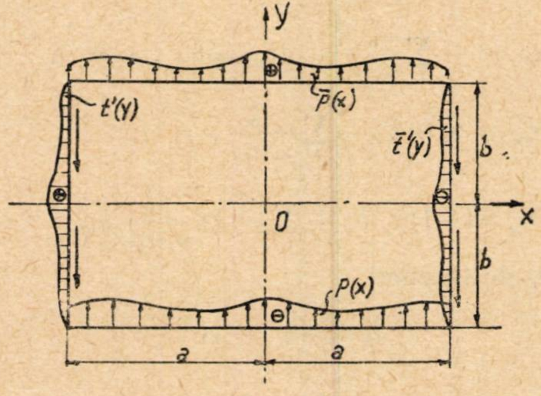


Fig. 14

Condiția de echilibru pe contur $(\overline{N}_y = \overline{T}_y)$ ne va da relația

$$\frac{\pi}{2}\lambda' b_0' + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{b_n}{n} = 0. \tag{129}$$

Găsim funcția eforturilor

$$\begin{aligned}F(x,y) = &-\sum_k \frac{\Psi_{11}(\alpha_k y)}{\alpha_k^2} b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n^2} \Psi_8(\alpha_n y) \cos \alpha_n x +\\ &+ \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_3'(\delta_m x) \sin \delta_m y.\end{aligned} \tag{130}$$

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\sum_k \Psi_{14}(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_{10}(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \\
&\qquad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_3'(\delta_m x) \sin \delta_m y, \\
\sigma_y &= \sum_k \Psi_{14}(\alpha_k y)\, b_k \cos \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_8(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \\
&\qquad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_5'(\delta_m x) \sin \delta_m y. \\
\tau_{xy} &= -\sum_k \Psi_{13}(\alpha_k y)\, b_k \sin \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{B}_n \Psi_9(\alpha_n y) \sin \alpha_n x - \\
&\qquad - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_4'(\delta_m x) \cos \delta_m y,
\end{aligned}
\tag{131}
$$

iar deplasările de relațiile

$$
\begin{aligned}
Eu &= -(1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{14}(\alpha_k y)}{\alpha_k} b_k \sin \alpha_k x - \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{10-8}(\alpha_n y) \sin \alpha_n x + \\
&\qquad + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{2-4}'(\delta_m x) \sin \delta_m y, \\
Ev &= (1+\mu) \sum_k \frac{\Psi_{13}(\alpha_k y)}{\alpha_k} b_k \cos \alpha_k x + \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\overline{B}_n}{\alpha_n} \Psi_{7-9}(\alpha_n y) \cos \alpha_n x - \\
&\qquad - \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{5-3}'(\delta_m x) \cos \delta_m y + Ev_0.
\end{aligned}
\tag{132}
$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni} \overline{B}_i = d_n, \tag{133}$$

unde

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\nu_{ln}^2 \nu_{li}^2}{\varphi_2(l\lambda)} \quad (b_{ni} = b_{in}\ ,\ n \neq i),$$

$$b_{nn} = \varkappa_1'(n\lambda') - \sum_l \frac{\nu_{ln}^4}{\varphi_2(l\lambda)}, \tag{133'}$$

$$d_n = (-1)^{\frac{n-1}{2}} b_n \operatorname{cth} \alpha_n b - \sum_j (-1)^j \frac{\nu_{jn}^2}{\varphi_2(i\lambda)} b_j' - \frac{1}{\pi} \sum_l \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{\nu_{ln}^2 \nu_{lk}}{l\varphi_2(l\lambda)} b_k,$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml} \overline{D}_l = c_m, \tag{134}$$

unde

$$a_{ml} = -\sum_i \frac{\nu_{mi}^2 \nu_{li}^2}{\varkappa_1'(i\lambda')} \quad (a_{ml} = a_{lm}\ ,\ m \neq l),$$

$$a_{mm} = \varphi_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\nu_{mi}^4}{\varkappa_1'(i\lambda')}, \tag{134'}$$

$$c_m = (-1)^{m+1} b_m' - \frac{1}{\pi m} \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \nu_{mk} b_k - \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \nu_{mk}^2 \overline{\varkappa}_1'(k\lambda') b_k.$$

Putem exprima un şir de coeficienţi cu ajutorul celorlalţi prin relaţiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \overline{\varkappa}_1'(n\lambda') b_n + \frac{1}{\varkappa_1'(n\lambda')} \sum_l \nu_{ln}^2 \overline{D}_l, \\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varphi_2(m\lambda)} \left[(-1)^{m+1} b_m' - \frac{1}{\pi m} \sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \nu_{mk} b_k + \sum_i \nu_{mi}^2 \overline{B}_i \right]. \end{aligned} \tag{135}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\sigma_x(x, \pm b) = \mp \overline{p}(x) \pm \pi\lambda' \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} n \overline{B}_n \cos \alpha_n x \mp \sum_m \overline{D}_m \Phi_3'(\delta_m x),$$

$$\begin{aligned} \sigma_y(\pm a, y) = &\sum_k (-1)^{\frac{k-1}{2}} \Psi_{14}(\alpha_k y) b_k - \sum_n \overline{B}_n \Psi_8(\alpha_n y) + \\ &+ 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m m \overline{D}_m \sin \delta_m y. \end{aligned} \tag{136}$$

1) Cazul de încărcare nr. 12 : încărcare compusă, normală şi tangenţială, antisimetrică în raport cu ambele axe de coordonate (fig. 15). Luînd perioadele $L_x = 2a$ şi $L_y = 2b$, încărcările vor fi de forma

$$\begin{aligned} \overline{p}(x) &= -p(x) = \sum_n a_n \sin \gamma_n x, \\ \overline{t}'(y) &= t'(y) = b_0' + \sum_m b_m' \cos \delta_m y. \end{aligned} \tag{137}$$

Condiţia de echilibru pe contur $(a\overline{T}_y = \overline{M}_y)$ ne dă relaţia

$$\pi\lambda' b_0' = \sum_n (-1)^n \frac{c_n}{n}. \tag{138}$$

Găsim funcția eforturilor

$$F(x,y) = -\sum_k \frac{\Phi_{14}(\gamma_k y)}{\gamma_k^2} a_k \sin\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n^2} \Phi_8(\gamma_n y) \sin\gamma_n x + \\ + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m^2} \Phi_8'(\delta_m x) \sin\delta_m y. \tag{139}$$

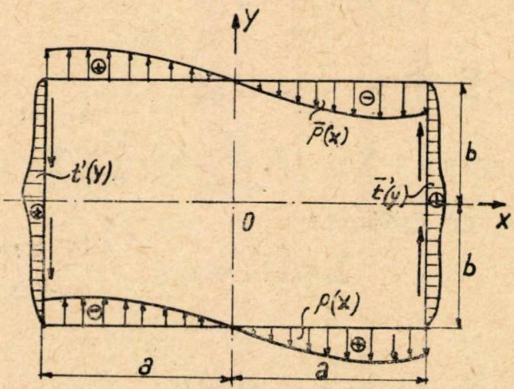


Fig. 15

Eforturile unitare vor fi date de relațiile

$$\sigma_x = -\sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \sin\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_{10}(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \\ - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_8'(\delta_m x) \sin\delta_m y,$$

$$\sigma_y = \sum_k \Phi_{14}(\gamma_k y)\, a_k \sin\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_8(\gamma_n y) \sin\gamma_n x - \\ - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_{10}'(\delta_m x) \sin\delta_m y, \tag{140}$$

$$\tau_{xy} = \sum_k \Phi_{13}(\gamma_k y)\, a_k \cos\gamma_k x - \sum_n (-1)^n \overline{B}_n \Phi_9(\gamma_n y) \cos\gamma_n x - \\ - \sum_m (-1)^m \overline{D}_m \Phi_9'(\delta_m x) \cos\delta_m y,$$

iar deplasările de relațiile

$$Eu = (1+\mu) \sum_k \frac{\Phi_{14}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \cos\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{10-8}(\gamma_n y) \cos\gamma_n x + \\ + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{7-9}'(\delta_m x) \sin\delta_m y - E\omega_0 y,$$

$$Ev = (1+\mu) \sum_k \frac{\Phi_{13}(\gamma_k y)}{\gamma_k} a_k \sin\gamma_k x + \sum_n (-1)^n \frac{\overline{B}_n}{\gamma_n} \Phi_{7-9}(\gamma_n y) \sin\gamma_n x + \\ + \sum_m (-1)^m \frac{\overline{D}_m}{\delta_m} \Phi_{10-8}'(\delta_m x) \cos\delta_m y + E\omega_0 x. \tag{141}$$

Coeficienții $\overline{B}_n$ sînt dați de sistemul

$$\sum_i b_{ni}\,\overline{B}_i = d_n\,, \tag{142}$$

unde

$$b_{ni} = -\sum_l \frac{\mu_{ln}^2\,\mu_{li}^2}{\varkappa_2(l\lambda)} \quad (b_{ni} = b_{in}\;,\; n \neq i),$$

$$b_{nn} = \varkappa_2'(n\lambda') - \sum_l \frac{\mu_{ln}^4}{\varkappa_2(l\lambda)}\,, \tag{142'}$$

$$d_n = (-1)^n\,a_n \operatorname{cth}\gamma_n b + \sum_j (-1)^j \frac{\mu_{jn}^2}{\varkappa_2(j\lambda)}\,b_j' - \frac{1}{\pi}\sum_l \sum_k (-1)^k \frac{\mu_{ln}^2\,\mu_{lk}}{l\varkappa_1(l\lambda)}\,a_k,$$

iar coeficienții $\overline{D}_m$ de sistemul

$$\sum_l a_{ml}\,\overline{D}_l = c_m\,, \tag{143}$$

unde

$$a_{ml} = -\sum_i \frac{\mu_{mi}^2\,\mu_{li}^2}{\varkappa_2'(i\lambda')} \quad (a_{ml} = a_{lm}\;,\; m \neq l),$$

$$a_{mm} = \varkappa_2(m\lambda) - \sum_i \frac{\mu_{mi}^4}{\varkappa_2'(i\lambda')}\,, \tag{143'}$$

$$c_m = (-1)^{m+1}\,b_m' + \frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k\,\mu_{mk}\,a_k - \sum_k (-1)^k\,\mu_{mk}^2\,\overline{\varkappa}_2'(k\lambda')\,a_k\,.$$

Putem exprima un șir de coeficienți cu ajutorul celorlalți prin relațiile

$$\begin{aligned} \overline{B}_n &= (-1)^n\,\overline{\varkappa}_2'(n\lambda')\,a_n - \frac{1}{\varkappa_2'(n\lambda')}\sum_l \mu_{ln}^2\,\overline{D}_l\,,\\ \overline{D}_m &= \frac{1}{\varkappa_2(m\lambda)}\left[(-1)^{m+1}\,b_m' + \frac{1}{\pi m}\sum_k (-1)^k\,\mu_{mk}\,a_k - \sum_i \mu_{mi}^2\,\overline{B}_i\right]. \end{aligned} \tag{144}$$

Pe contur putem scrie expresiile eforturilor unitare normale sub forma

$$\begin{aligned} \sigma_x(x,\pm b) &= \mp\,\overline{p}(x) \pm 2\pi\lambda' \sum_m (-1)^n\,n\,\overline{B}_n \sin\gamma_n x \mp \sum_m \overline{D}_m\,\Phi_8'(\delta_m x)\,,\\ \sigma_y(\pm a,y) &= \pm \sum_k (-1)^k\,\Phi_{14}(\gamma_k y)\,a_k \mp \sum_n \overline{B}_n\,\Phi_8(\gamma_n y) \pm\\ &\qquad \pm\, 2\pi\lambda \sum_m (-1)^m\,m\,\overline{D}_m \sin\delta_m y. \end{aligned} \tag{145}$$

Cazurile de încărcare compusă pe care le-am studiat sînt cele ce nu se pot descompune în alte cazuri mai simple, nefiind îndeplinite condițiile de univocitate ale funcției eforturilor (echilibru pe contur).

Cu ajutorul celor 12 cazuri de încărcare se poate studia orice caz de încărcare cu eforturi, folosind suprapunerea efectelor.

7. EXEMPLU NUMERIC DE CALCUL

Vom studia problema consolei scurte pentru pod rulant, caz de care s-a ocupat recent D. Moraru [4], folosind următoarele ipoteze simplificatoare*) :

— există două console (de dimensiuni $2a/3 \times 2b$) simetrice în raport cu stîlpul (de grosime $2a/3$) şi încărcate simultan cu o sarcină uniform distribuită ;

— reacţiunea din stîlp este uniform distribuită iar sarcina care provine din stîlp nu influenţează starea de efort din console.

Obţinem astfel cazul de încărcare din figura 16, simetric în raport cu axa Oy, pe care-l vom descompune în două cazuri de încărcare *a*) şi *b*), după proprietăţile de simetrie şi antisimetrie în raport cu axa Ox (fig. 17). De altfel, fiecare din aceste cazuri, luat în parte, poate prezenta un interes deosebit. Astfel, dacă în cazul de încărcare *a*) facem abstracţie de o compresiune simplă, obţinem un caz de încărcare de forma celui din figura 18 ; iar cazul de încărcare *b*) reprezintă forfecarea unei grinzi perete sau a unei piese pentru organe de maşini (fig. 17, *b*).

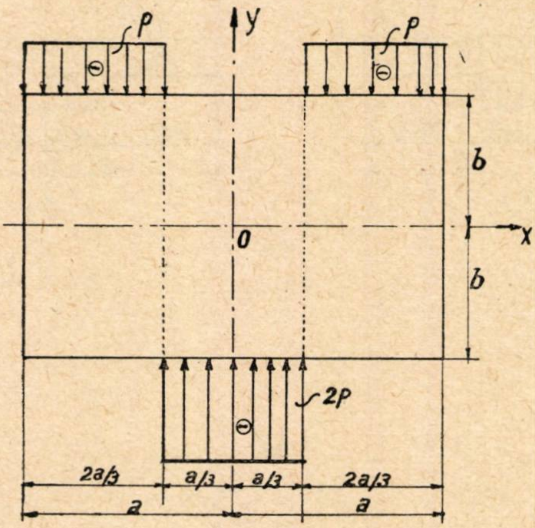


Fig. 16

Vom efectua calculul în ipoteza că

$$\lambda = \frac{a}{b} = \frac{3}{2}\,,\ \lambda' = \frac{2}{3}\,. \tag{146}$$

a) Pentru cazul de încărcare *a*) vom folosi rezultatele date la punctul 5, pentru cazul de încărcare nr. 1.

---

*) Folosim notaţiile din lucrarea noastră, diferite de cele din lucrarea [4].

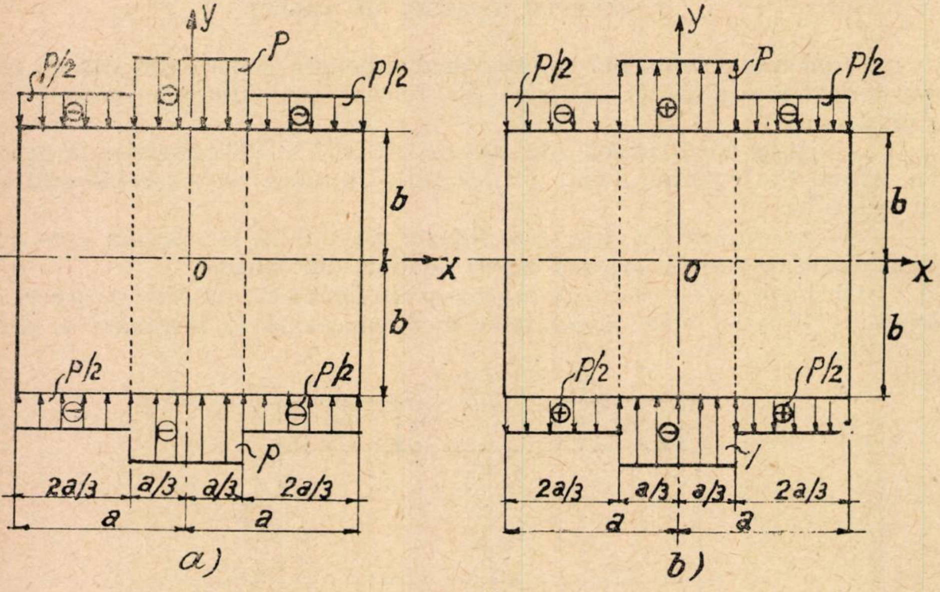

y
P/2
P
P/2
b
0
x
b
P/2
P/2
P
2a/3
a/3
a/3
2a/3
a
a
a)
y
P/2
P
P/2
b
0
x
b
P/2
P/2
2a/3
a/3
a/3
2a/3
a
a
b)

Fig. 17

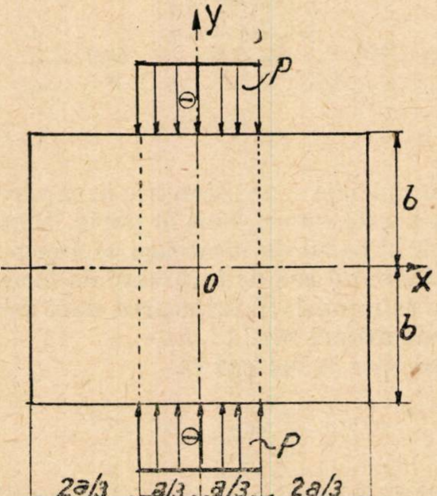

y
P
b
0
x
b
P
2a/3
a/3
a/3
2a/3
a
a

Fig. 18

În cazul nostru avem

$$b_0 = -\frac{2}{3}p\ ,\ b_n = -\frac{p}{\pi n}\sin\frac{n\pi}{3} = \pm\frac{p\sqrt{3}}{2\pi n} = \pm\, 0{,}2758\frac{p}{n}\,, \tag{147}$$

deci încărcarea va fi

$$\overline{p}\,(x) = p\,(x) = -\frac{2}{3}p - \frac{p}{\pi}\sum_n \frac{1}{n}\ \sin\frac{n\pi}{3}\cos\gamma_n x. \tag{148}$$

Calculul coeficienților b_{ni} se face cu ușurință *), folosind formulele (27). De exemplu, coeficientul b_{11} este dat de relația (unde am mers pînă la $l = 7$)

$$\begin{aligned} b_{11} &= 2{,}4332 - \left(\frac{0{,}7250}{4{,}7203} + \frac{0{,}1293}{9{,}4248} + \frac{0{,}0322}{14{,}1372} + \frac{0{,}0111}{18{,}8496} + \right. \\ &\left. + \frac{0{,}0047}{23{,}5619} + \frac{0{,}0023}{28{,}2743} + \frac{0{,}0013}{32{,}9867}\right) = 2{,}4332 - (0{,}1536 + 0{,}0138 + \\ &+ 0{,}0023 + 0{,}0006 + 0{,}0002 + 0{,}0001 + 0{,}0000) = 2{,}2626. \end{aligned} \tag{g}$$

Nu este nevoie să mergem pînă la patru zecimale exacte. Datorită convergenței rapide a seriilor am făcut însă calculul în acest fel. Mergînd pînă la $n = 5$ am găsit sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} &2{,}2626\ \overline{B}_1 - 0{,}2089\ \overline{B}_2 - 0{,}1703\ \overline{B}_3 - 0{,}1343\ \overline{B}_4 - 0{,}1071\ \overline{B}_5 = 0{,}2758p, \\ &-0{,}2089\,\overline{B}_1 + 3{,}9207\,\overline{B}_2 - 0{,}2708\,\overline{B}_3 - 0{,}2377\,\overline{B}_4 - 0{,}2062\,\overline{B}_5 = -0{,}1379\,p, \\ &-0{,}1703\ \overline{B}_1 - 0{,}2708\,\overline{B}_2 + 5{,}9982\,\overline{B}_3 - 0{,}2753\,\overline{B}_4 - 0{,}2557\,\overline{B}_5 = 0, \\ &-0{,}1343\,\overline{B}_1 - 0{,}2377\,\overline{B}_2 - 0{,}2753\,\overline{B}_3 + 8{,}0945\,\overline{B}_4 - 0{,}2775\,\overline{B}_5 = 0{,}0690p, \\ &-0{,}1071\ \overline{B}_1 - 0{,}2062\ \overline{B}_2 - 0{,}2557\ \overline{B}_3 - 0{,}2775\ \overline{B}_4 + 10{,}2003\,\overline{B}_5 = -0{,}0552p. \end{aligned} \tag{149}$$

După cum se observă cu ușurință , coeficienții necunoscutelor de pe diagonala principală sînt mult mai mari decît coeficienții necunoscutelor de pe aceeași linie. Rezolvăm sistemul prin iterație, convergența fiind foarte rapidă ; sînt suficiente trei aproximații. Găsim

$$\begin{aligned} &\overline{B}_1 = 0{,}1198p,\ \overline{B}_2 = -0{,}0283p,\ \overline{B}_3 = 0{,}0023p, \\ &\overline{B}_4 = 0{,}0096p,\ \overline{B}_5 = -0{,}0044p. \end{aligned} \tag{150}$$

---

*) Se folosesc rigla de calcul și tabelele cu valori numerice ale funcțiilor introduse, care nu au putut fi incluse în această lucrare ; aceste funcții se găsesc intabulate în Disertația de Candidat în științe tehnice a autorului, depusă la biblioteca Institutului de construcții, București.

Cu ajutorul acestor valori și folosind formulele (25) putem calcula pe $\overline{D}_m$; de exemplu

$$\begin{aligned}\overline{D}_1 = &-\frac{1}{4{,}7203}\,[0{,}8521\cdot 0{,}1198p + 0{,}9216\,(-0{,}0283p) + \\ &+ 0{,}6400\cdot 0{,}0023p + 0{,}4324\cdot 0{,}0096p + 0{,}3020\,(-0{,}0044p)] = -0{,}0170p.\end{aligned} \tag{h}$$

Găsim astfel

$$\begin{aligned}&\overline{D}_1 = -0{,}0170p\ ,\ \overline{D}_2 = -0{,}0028p,\ \overline{D}_3 = -0{,}0009p,\\ &\overline{D}_4 = -0{,}0004p\ ,\ \overline{D}_5 = -0{,}0002p.\end{aligned} \tag{151}$$

Se observă că acești coeficienți descresc rapid.

Folosind procedeul indicat la punctul 4, putem calcula

$$\begin{aligned}\overline{B}_6 = &-\frac{1}{12{,}5664}\,[0{,}2215\,(-0{,}0170p) + 0{,}6400\,(-0{,}0028p) + \\ &+0{,}9216\,(-0{,}0009p)+1{,}0000\,(-0{,}0004p)+0{,}9518\,(-0{,}0002p)] = 0{,}0006p.\end{aligned} \tag{150'}$$

Putem deci să ne limităm la primii 6 coeficienți $\overline{B}_n$. Cu ajutorul acestor coeficienți și folosind formulele (30) putem să determinăm starea de tensiune în interiorul grinzii perete. De exemplu pentru centrul grinzii perete ($x = 0, y = 0$) vom avea

$$\begin{aligned}\sigma_x\,(0,0) = &-0{,}1198p\,(-0{,}5985)\cdot 1 + (-0{,}0283p)\,(-0{,}4075)\cdot 1 - \\ &-0{,}0023p\,(-0{,}1245)\cdot 1 - (0{,}0170p)\cdot 0{,}4875\cdot 1 - 0{,}0028p\cdot 0{,}0159.1 = \\ &= 0{,}0715p + 0{,}0116p + 0{,}0003p + 0{,}0083p + \\ &+ 0{,}0000p = 0{,}0917p \cong 0{,}092p.\end{aligned} \tag{i}$$

Folosind formulele (32) și (33) putem calcula eforturile unitare pe contur. De exemplu,

$$\begin{aligned}\sigma_y\,(\mathrm{a},0) = &-0{,}6667p + 2\left[0{,}1198p\,\frac{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 \operatorname{cth}\frac{2\pi}{3}}{\operatorname{sh}\frac{2\pi}{3}} - \right.\\ &\left. -0{,}0283p\,\frac{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \operatorname{cth}\frac{4\pi}{3}}{\operatorname{sh}\frac{4\pi}{3}} + 0{,}0023p\,\frac{(2\pi)^2 \operatorname{cth} 2\pi}{\operatorname{sh} 2\pi}\right] - \\ &-2\,(-1)\,(-0{,}0170p)\left(\frac{\frac{3\pi}{2}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi}{2}}\right)^2\cdot 1 = -0{,}6667p + 0{,}2680p - \\ &-0{,}0306p + 0{,}0007p - 0{,}0003p = 0{,}4289p \cong -0{,}429\,p.\end{aligned} \tag{j}$$

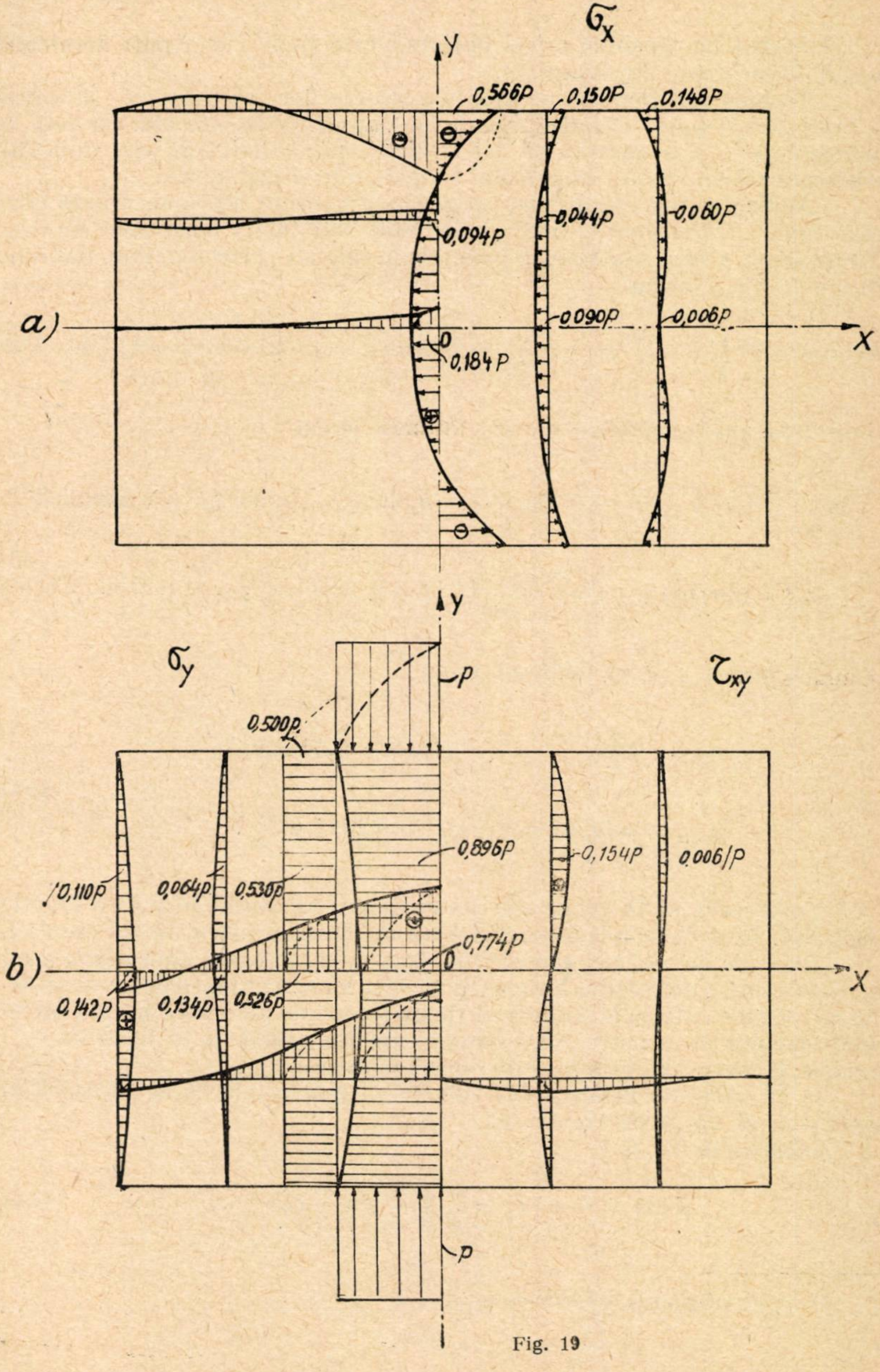

σx
y
0,566P
0,150P
0,148P
⊖
⊖
0,094P
0,044P
-0,060P
a)
0,090P
0,006P
x
0
0,184P
⊕
⊖
y
σy
p
τxy
0,500p
0,896P
-0,154P
0,006P
0,110P
0,064p
0,530p
⊕
b)
0,774P
0
x
0,142P
0,134p
0,526p
⊕
p

Fig. 19

Starea de tensiune astfel obținută este dată*) în figura 19 pentru cazul de încărcare din figura 18.

Trebuie să remarcăm apariția eforturilor unitare de întindere $\sigma_x(x,0)$ și $\sigma_y(\pm a,y)$ datorită raportului λ apropiat de unitate. În ceea ce privește pe σ_y, se observă că are o distribuție diferită de cea uniformă (corespunzătoare unui compresiuni simple), din același motiv.

Analog se pot calcula deplasările u și v, seriile corespunzătoare fiind mai rapid convergente decît cele care ne dau eforturile unitare. Vom calcula aceste deplasări în punctele în care au valori maxime. Folosind formulele (31) găsim

$$Ev(o,b) = 2b\sum_{n}(-1)^n\overline{B}_n + b\sum_{m}\frac{\overline{D}_m}{\operatorname{sh} m\pi}[1-\mu-(1+\mu)\,m\pi\operatorname{cth} m\pi] + bb_0 \tag{152}$$

și o relație analogă pentru $u\,(a,0)$. Numeric avem

$$\begin{gathered}Ev\left(0,\frac{2a}{3}\right) = 2\,\frac{2a}{3}\,[-\,0{,}1198p + (-\,0{,}0283p) - 0{,}0023p + 0{,}0096p\,- \\ -\,(-\,0{,}0044p)] + \frac{2a}{3}\,\frac{(-\,0{,}0170p)}{11{,}5489}\,[1-\mu-(1+\mu)\cdot\pi\cdot 1] + \frac{2a}{3}\left(-\,\frac{p}{3}\right)\end{gathered} \tag{k}$$

și analog pentru $u\,(a,\,0)$. Obținem astfel

$$\begin{aligned} v_{max} &= v\left(0,\frac{2a}{3}\right) = (-\,0{,}4011 + 0{,}0041\,\mu)\,\frac{pa}{E}\,, \\ u_{max} &= u\,(a,\,0) = (0{,}0081 + 0{,}2911\,\mu)\,\frac{pa}{E}\,. \end{aligned} \tag{153}$$

Se observă că în prima din aceste relații termenul cu μ este practic neglijabil. În a doua relație coeficientul lui Poisson joacă un rol esențial.

Relațiile de mai sus ne confirmă faptul, că, în cazul unor dimensiuni de același ordin de mărime ale grinzii perete, nu mai putem calcula deplasările pe căi elementare, ci trebuie să ținem seama de deformabilitatea întregului element de construcție, — după cum s-a arătat și în lucrarea [8]; aceasta se poate face prin metoda de calcul expusă.

b) În cazul de încărcare *b*) vom folosi rezultatele de la puntul 6 *b*) pentru cazul de încărcare nr. 2.

Încărcarea va fi

$$\overline{p}\,(x) = -\,p\,(x) = \frac{3p}{\pi}\sum_{n}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\gamma_n x. \tag{154}$$

---

*) Ne-am mărginit la trei zecimale exacte.

Folosind formulele (48) găsim sistemul de ecuații

$$\begin{aligned}
&1{,}3977\,\overline{B}_1-0{,}2504\,\overline{B}_2-0{,}1805\,\overline{B}_3-0{,}1382\,\overline{B}_4-0{,}1094\,\overline{B}_5=-0{,}8274p,\\
&-0{,}2504\,\overline{B}_1+3{,}9012\,\overline{B}_2-0{,}2558\,\overline{B}_3-0{,}2288\,\overline{B}_4-0{,}2008\,\overline{B}_5=0{,}4137p, \qquad \text{(i)}\\
&-0{,}1805\,\overline{B}_1-0{,}2558\,\overline{B}_2+6{,}0053\,\overline{B}_3-0{,}2708\,\overline{B}_4-0{,}2536\,\overline{B}_5=0,\\
&-0{,}1382\,\overline{B}_1-0{,}2288\,\overline{B}_2-0{,}2708\,\overline{B}_3+8{,}0959\,\overline{B}_4-0{,}2767\,\overline{B}_5=-0{,}2069p,\\
&-0{,}1094\,\overline{B}_1-0{,}2008\,\overline{B}_2-0{,}2536\,\overline{B}_3-0{,}2767\,\overline{B}_4+10{,}1784\,\overline{B}_5=0{,}1655p,
\end{aligned}$$

care ne dă coeficienții

$$\begin{gathered}
\overline{B}_1 = -0{,}5847p,\ \overline{B}_2 = 0{,}0656p,\ \overline{B}_3 = -0{,}0160p,\\
\overline{B}_4 = -0{,}0339p,\ \overline{B}_5 = 0{,}0100p.
\end{gathered} \tag{155}$$

Folosind formulele (50) putem calcula și coeficienții

$$\begin{gathered}
\overline{D}_1 = 0{,}1985\,p,\ \overline{D}_3 = 0{,}0414\,p,\ \overline{D}_5 = 0{,}0119\,p,\\
\overline{D}_7 = 0{,}0051p,\ \overline{D}_9 = 0{,}0026p
\end{gathered} \tag{156}$$

și apoi succesiv

$$\overline{B}_6 = -0{,}0037p,\ \overline{D}_{11} = 0{,}0017p. \tag{157}$$

Cu ajutorul relațiilor (46) și (51) putem calcula starea de tensiune care este dată în figura 20 pentru cazul de încărcare din figura 17*b*. Se observă că, datorită raportului λ ales, distribuția eforturilor σ_x $(0, y)$ de încovoiere diferită mult de cea liniară iar distribuția eforturilor τ_{xy} $(a/3, y)$ și τ_{xy} $(2a/3, y)$ de forfecare se apropie mult de cea parabolică.

c) Suprapunînd efectele, găsim starea de tensiune din figura 21, corespunzătoare cazului de încărcare din figura 16.

Aceasta ne permite să tragem unele concluzii în legătură cu consolele scurte, să studiem distribuția liniilor de eforturi etc.*) Menționăm că nu este nevoie să menținem a doua ipoteză restrictivă, de neglijare a sarcinii care provine din stîlp, deoarece am studiat cazul de încărcare *a*).

Putem interpreta cazul de încărcare studiat (fig. 16) și ca o grindă perete pe reazeme foarte late (o treime din deschidere), acționată de o sarcină uniform distribuită. Se observă că distribuția de eforturi diferă de cea cunoscută, datorită influenței mari pe care o au reazemele.

Pentru o lățime c de reazem mai mică decît un sfert din deschidere ($c < a/2$), fibra neutră se găsește sub fibra medie (în regiunea $y > 0$), așa cum se întîmplă în mod obișnuit la grinzile pereți pe mai multe reazeme. În cazul limită $c = a/2$, se observă că, prin descompunerea în două cazuri de încărcare, cazul de încărcare *a*) devine o compresiune simplă; deci fibra neutră se confundă cu fibra medie. Pentru $c > a/2$ (în cazul nostru $c = 2a/3$) fibra neutră se găsește deasupra fibrei medii (în regiunea $y < 0$), cum s-a indicat în figura 21*a*).

---

*) Problema nu se încadrează în limitele studiului actual și va constitui obiectul altor preocupări.

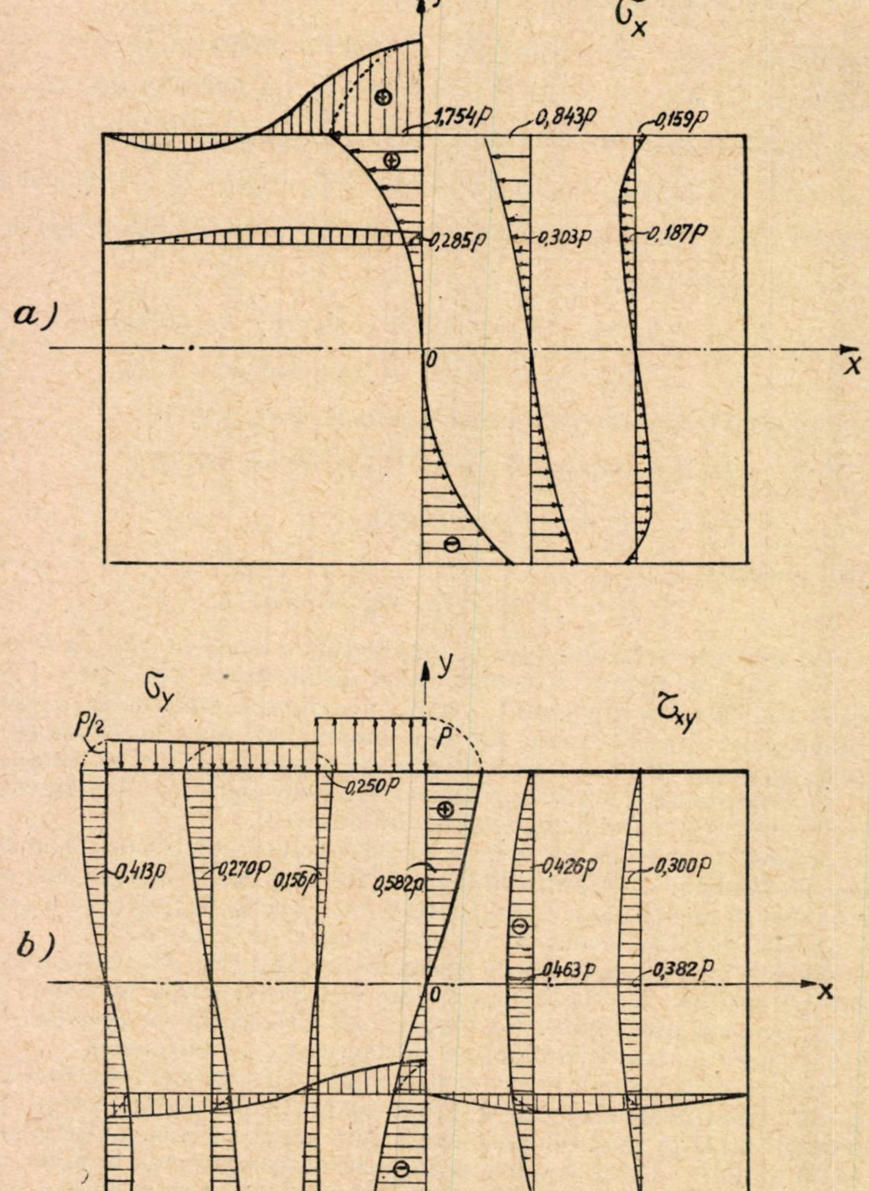

y
σ_x
⊕
⊕
1,754p
0,843p
0,159p
0,285p
0,303p
0,187p
a)
0
x
⊖
y
σ_y
τ_xy
P/2
P
0,250P
⊕
0,413P
0,270P
0,156P
0,582P
0,426P
0,300P
⊖
b)
0,463P
0,382P
0
x
⊖
P/2
P

Fig. 20

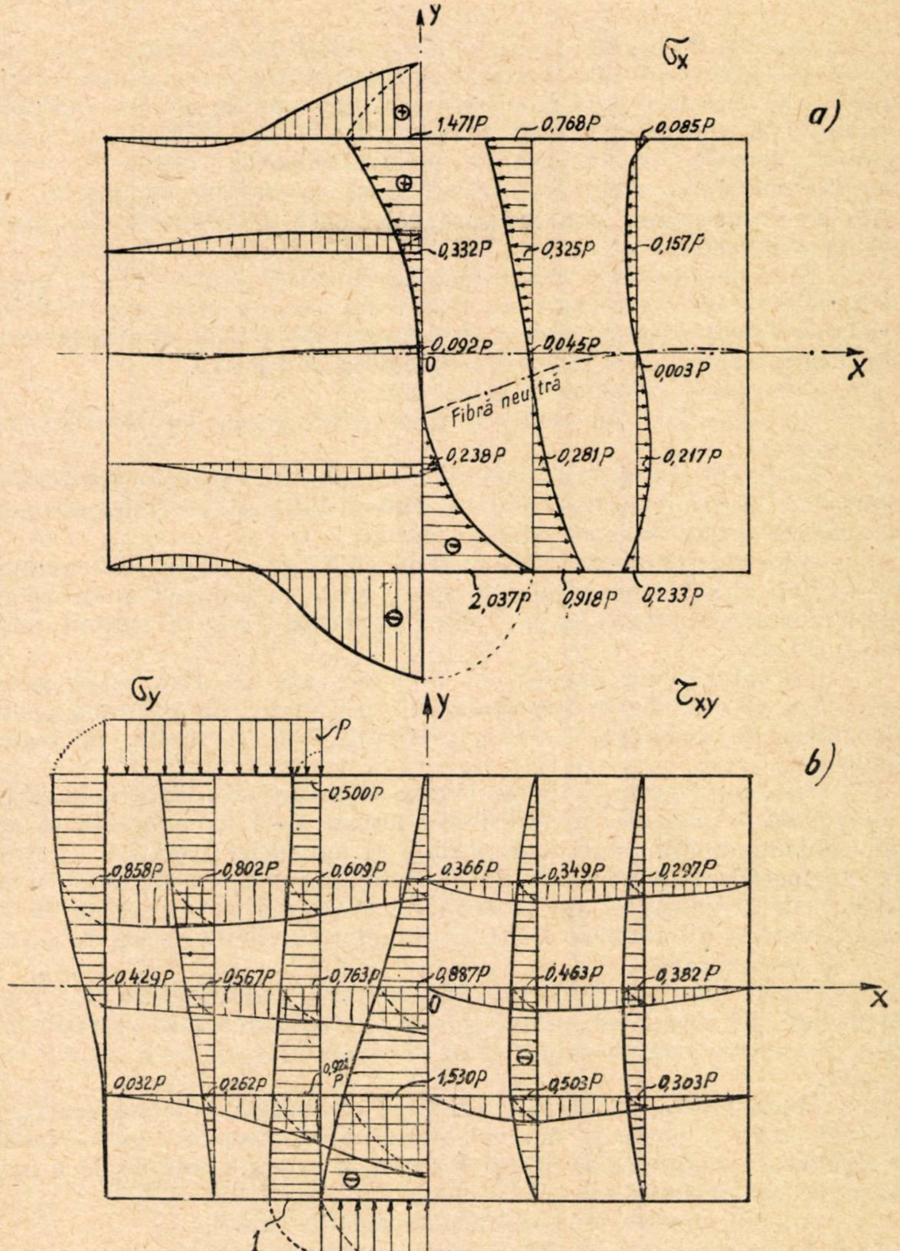

y
σ_x
a)
1.471P
0,768P
0,085P
0,332P
0,325P
0,157P
0,092P
0,045P
0
X
0,003P
Fibră neutră
0,238P
0,281P
0,217P
2,037P
0,918P
0,233P
σ_y
y
τ_{xy}
P
b)
0,500P
0,858P
0,802P
0,609P
0,366P
0,349P
0,297P
0,429P
0,567P
0,763P
0,887P
0,463P
0,382P
0
x
0,032P
0,262P
0,92 P
1,530P
0,503P
0,303P
1
2P

Fig. 21

8. CONCLUZII

a) Metoda de calcul expusă se poate folosi pentru studiul unei mari varietăți de elemente de construcție,de exemplu grinzi pereți pentru silozuri, buncăre monocelulare etc., frontoane pentru scene de teatru, diafragme (orizontale și verticale) pentru construcții mijlocii și înalte în regiuni seismice, console scurte pentru poduri rulante, colțuri de cadru, gusee la construcții metalice, diverse piese la organe de mașini, elemente de construcție pentru vase, elemente de construcție pentru aripi de avion etc.

b) Este necesar să se aplice metoda de calcul pentru $\lambda \leqq 2$; pentru $\lambda > 2$ calculul este suficient de exact cu metode mai aproximative. Metoda de calcul expusă permite efectuarea unui studiu care să precizeze o clasificare tehnică (vezi [1]) a grinzilor după raportul λ.

c) Avantajele metodei de calcul sînt :

— Se poate face un studiu al unei grinzi perete cu exactitatea pe care o dorim.

— Se poate studia orice caz de încărcare, de exemplu încărcări cu sarcini concentrate (spre deosebire de metoda diferențelor finite, de exemplu, aplicată curent în cazul grinzilor pereți).

— Spre deosebire de alte metode (diferențe finite, de exemplu) care ne dau valori numerice în puncte, obținem expresii analitice atît pentru eforturile unitare cît și pentru deplasări (care altminteri nu se puteau calcula).

— Putînd calcula deplasările se poate aprecia rigiditatea grinzii perete, ceea ce este foarte important în unele cazuri (de exemplu pentru diafragmele de rigidizare la construcții mijlocii și înalte, în regiuni seismice).

— Sistemul de ecuații liniare la care se ajunge este simetric în raport cu diagonala principală, are de obicei numai 4—5 necunoscute și este rapid convergent din punctul de vedere al metodelor iterative de rezolvare ; în metoda diferențelor finite întîlnim, în general, sisteme cu multe ecuații ; astfel, exemplul de calcul studiat de noi a fost tratat în [4] folosind metoda diferențelor finite și ajungîndu-se la un sistem de ecuații cu 42 de necunoscute.

— Seriile care ne dau eforturile unitare și deplasările sînt rapid convergente în interiorul grinzii perete ; rapiditatea convergenții descrește pe contur. Pentru contur s-au dat însă alte expresii rapid convergente.

— Toate funcțiile care intervin fiind întabulate, calculul practic se simplifică mult și poate fi efectuat suficient de mecanic. Aceste funcții sînt calculate cu multă exactitate (4 zecimale exacte), ceea ce dă o mare precizie de calcul (erori de ± 1 . . . 2 %).

— Calculul practic se poate face cu rigla de calcul.

d) Dezavantajele metodei de calcul sînt :

— Pentru fiecare raport între dimensiunile grinzii perete trebuie să facem un calcul separat, neputînd efectua astfel un calcul general (ca și în cazul metodei diferențelor finite).

— Putem uneori să introducem parametri ai încărcării (care să ne indice, de exemplu, o poziție arbitrară a unei sarcini concentrate). Calculul devine greoi (uneori chiar imposibil, trebuind să facem un studiu pentru fiecare caz în parte). Remarcăm totuși că, în sistemul de ecuații liniare pe care-l avem de rezolvat, încărcarea afectează numai termenii liberi.

e) Posibilități de extindere a metodei de calcul :

— Se poate aplica metoda de calcul propusă pentru cazul unor forțe masice oarecare sau pentru cazul unor forțe concentrate interioare, folosind rezultatele date de noi în [7].

— Se poate trece la calculul aproximativ al unei grinzi perete cu grosime *h* variabilă (de exemplu variind în trepte). Este o problemă care interesează diafragmele de rigidizare la construcții înalte în regiuni seismice.

— Se poate studia problema grinzii perete cu două sau trei deschideri, completînd rezultatele date de H. Parkus [5].

— Se poate trece la calculul unei grinzi perete cu goluri dreptunghiulare, încercînd o suprapunere specială a efectelor și folosind o metodă de calcul din aproape în aproape.

— Se poate încerca extinderea metodei de calcul atunci cînd două laturi nu mai sînt drepte, ci curbe oarecare, folosind rezultatele date de M. F. Pîhtunov [6]. De asemenea, se poate face un studiu analog în coordonate oblice, folosind rezultatele date de P. Lardy [3] sau în coordonate curbilinii oarecare, pentru un contur oarecare, folosind rezultatele date de E. Hampe [2].

— De asemenea se poate extinde metoda de calcul pentru problema plană a elastodinamicii, folosind rezultatele date de noi în [9] și [10].

Se poate efectua un stadiu analog în cadrul problemei spațiale a teoriei elasticității pentru cazul plăcii groase.

Primită la redacție la 2 august 1956.

К РАСЧЕТУ ОДНОПРОЛЕТНЫХ ВЫСОКИХ БАЛОК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор дает практические формулы расчета высокой балки для всех элементарных случаев нагрузки.

В численном примере показывается возможность практического применения этих результатов.

Выводы показывают преимущества и недостатки метода, область его применения и возможность распространения результатов.

SUR LE CALCUL DES POUTRES-PAROIS À UNE SEULE OUVERTURE

(RÉSUMÉ)

L'auteur donne les formules pratiques pour calculer une poutre-paroi dans tous les cas élémentaires de chargement qui peuvent survenir. Par un exemple numérique, on démontre la possibilité pratique d'appliquer ces résultats.

Les conclusions exposent les avantages et les désavantages de la méthode, le domaine d'application et la posibilité d'étendre les résultats.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cişmigiu, *Despre o clasificare tehnică a grinzilor drepte şi a bolţilor cilindrice.* Ind. constr. şi a mat. de constr., 1955, t. VI, nr. 6, p. 332.
2. E. Hampe, *Zur Berechnung beliebig begrenzten Scheiben (Rahmenecken, Bogenscheibenbrücken u.s.w.) mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion.* Baupl. u. Bautechnik, martie 1955, anul 9, caietul 3, p. 127.
3. P. Lardy, *Die strenge Lösung des Problems der schiefen Platte.* Schweitz. Bauz, 1949, vol. 67, nr. 15, p. 207; nr. 31, p. 419.
4. D. Moraru, *Discuţii asupra unghiului optim de aşezare şi dimensionare a armăturii ridicate în console scurte, conform STAS 1546-30.* Standardizarea, 1955, t. VII, nr. 8, p. 15.
5. H. Parkus, *Der wandartige Träger auf drei Stützen.* Dissertation, Oesterreichische Ing. Archiv, 1948, vol. II, caietul 3, p. 185.
6. M. F. Pîhtunov, *Variaţionnîi metod reşenia ploskoi zadaci teorii uprugosti dlia odnozviaznoi oblasti, organicennoì dvumia proizvolnîmi krivîmi i dvumia parallelnîmi. priamîmi.* Inj. sbornik, 1953, t. XV, p. 43.
7. P. P. Teodorescu, *O metodă de rezolvare a problemei plane a teoriei elasticităţii în cazul unor forţe masice oarecare.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 2, februarie 1956, p. 285.
8. — *O metodă de aproximare a condiţiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticităţii* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, iulie-septembrie 1956, p. 655.
9. — *Asupra unei metode generale de rezolvare a problemei plane a elastodinamicii.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 6, iunie 1956, p. 795.
10. — *O metodă de rezolvare în eforturi a problemei plane a micilor mişcări amortizate.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţ. şt. mat. şi fiz., t. VIII, nr. 4, octombrie-decembrie 1956, p. 723.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

ELASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

O METODĂ PENTRU CALCULUL DINAMIC AL TUBURILOR ȘI ÎNVELITORILOR CILINDRICE CIRCULARE

DE

V. VISARION

1. INTRODUCERE

În această lucrare sînt extinse rezultatele obținute în [1] pentru cazul calculului dinamic al tuburilor cu secțiune circulară și al învelitorilor cilindrice rezemate pe timpane. Rezultatele obținute în cadrul rigorii teoriei matematice a învelitorilor elastice-subțiri *) permit deducerea frecvențelor proprii pentru cazurile amintite, în orice condiții de margine.

Pe baza lor, pot fi obținute eforturile și deplasările în cazul solicitării de către forțe exterioare variabile în timp. Nu este tratat cazul rezonanței.

Pentru deducerea ecuației generale, sînt luate în considerație atît forțele de inerție, cît și cuplurile inerțiale produse de încovoierea învelitorii.

Rezultatele pot fi aplicate la calculul fuselajului de avion, al conductelor forțate, al învelitorilor cilindrice circulare și, în general, al oricărui tip de tub circular solicitat dinamic.

2. REDUCEREA SISTEMULUI DE ECUAȚII

În cele ce urmează vom da o rezolvare în eforturi a problemei, pe baza sistemului de ecuații de echilibru,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - \frac{Q_{\alpha}}{R} + X = 2\mathrm{g} h\ddot{u}, \\ &\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} + Y = 2\rho\, h\ddot{v}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

---

*) $\frac{h^2}{R}$ față de 1.

$$
\begin{aligned}
&\frac{N_\alpha}{R} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + Z = 2\rho h \ddot{w},\\
&\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + Q_\beta = -\frac{2}{3}\rho h^3\left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \alpha} + \frac{\ddot{u}}{R}\right),\\
&\frac{\partial M_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - Q_\alpha = -\frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial \beta},\\
&N_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha} + \frac{M_{\alpha\beta}}{R} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

a ecuației suplimentare

$$M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha} = 0, \tag{2.2}$$

precum și a sistemului de ecuații de continuitatea deformației în eforturi

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial(M_\alpha + M_\beta)}{\partial \alpha} - (1+\mu)\, Q_\alpha + \frac{h^2}{3}\left[\frac{\partial(N_\alpha + N_\beta)}{\partial\ \alpha} + (1+\mu)\, X - \right.\\
&\qquad\qquad \left. -2\rho h\, (1+\mu)\, \ddot{u}\right] = 0,\\
&\frac{\partial(M_\alpha + M_\beta)}{\partial \beta} - (1+\mu)\, Q_\beta = 0,\\
&\frac{1}{R}(M_\alpha + M_\beta) - (1+\mu)\frac{M_\alpha}{R} - \frac{h^2}{3}\left[\Delta\,(N_\alpha + N_\beta) + \right.\\
&\quad \left. + (1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha} + \frac{\partial Y}{\partial \beta}\right) - 2\rho h\,(1+\mu)\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \beta}\right)\right] = 0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.3}
$$

Au fost folosite următoarele notații (fig. 1, 2, 3 și 4).

N_α , N_β — forțele axiale,
$N_{\alpha\beta}$ — forța de lunecare,
M_α , M_β — momentele încovoietoare,
$M_{\alpha\beta}$ — momentul de torsiune,
Q_α , Q_β — forțele tăietoare,
R — raza de curbură a suprafeței mediane,
$2h$ — grosimea tubului,
μ — coeficientul lui Poisson,
ρ — masa specifică,
u, v, w — deplasările suprafeței mediane în lungul liniilor α, β și a normalei (drept linii α, β au fost luate secțiunile circulare și generatoarele suprafeței mediane),
X, Y, Z — componentele încărcării exterioare după α, β și normala interioară.

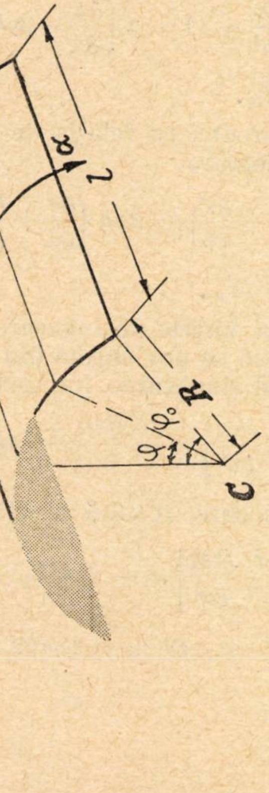


Fig. 1

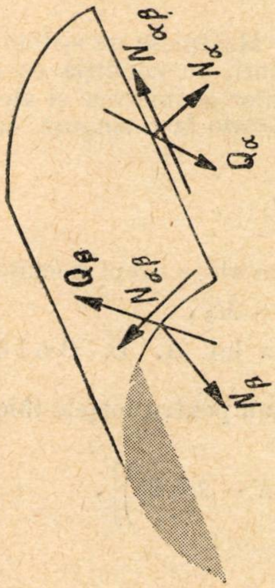

Q_β
N_αβ
N_β
N_αβ
N_α
Q_α

Fig. 2

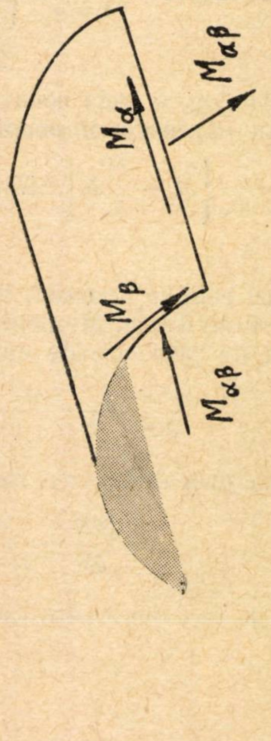

M_α
M_αβ
M_β
M_αβ

Fig. 3

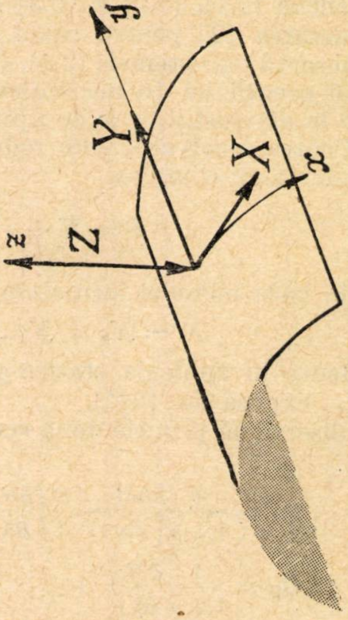


Fig. 4

Sistemele (2.1), (2.2) și (2.3) se bazează pe formularea în eforturi dată în lucrarea [2] pentru cazul general.

Se observă că sistemele (2.1), (2.2) și (2.3) alcătuiesc un sistem complet de 10 ecuații cu 10 necunoscute în eforturi, cu condiția ca să fie exprimate în eforturi $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$ cu ajutorul ecuațiilor geometrice și ale elasticității. Pentru rezolvare, vom reduce acest sistem la o singură ecuație aplicată efortului complex

$$\mathcal{E} = N + i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3'}{h^2}}M,$$

deoarece în baza metodei formulate în [1], vom alege drept necunoscute

$$N = N_\alpha + N_\beta\,,\ M = M_\alpha + M_\beta\,,$$

corespondente în analogia statico-geometrică a lui A. L. Goldenweizer, expusă în [2]*).

Se observă că primele două ecuații (2.3) dau pentru forțele tăietoare expresiile

$$Q_\alpha = \frac{1}{1+\mu}\left[\frac{\partial M}{\partial\alpha} - \frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial N}{\partial\alpha} + (1+\mu)\,(X - 2\rho h\,\ddot{u})\right)\right], \tag{2.4}$$

$$Q_\beta = \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial M}{\partial\beta}\,.$$

Din a treia ecuație (2.1), împreună cu relația de definiție a lui N, ezultă eforturile axiale

$$N_\alpha = Z - 2\rho h R\ddot{w} - \frac{1}{1+\mu}R\left\{\Delta M - \frac{h^2}{3R}\left(\frac{\partial^2 N}{\partial\alpha^2} + (1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha} - 2\rho h\frac{\partial\ddot{u}}{\partial\alpha}\right)\right)\right\}, \tag{2.5}$$

$$N_\beta = N - N_\alpha\,.$$

Analog, a treia ecuație (2.3), împreună cu relația de definiție a lui M, dau expresiile momentelor încovoietoare

$$M_\alpha = \frac{1}{1+\mu}\left\{M - \frac{h^2}{3}R\left[\Delta N + (1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha} + \frac{\partial Y}{\partial\beta}\right) - 2\rho h\left(\frac{\partial\ddot{u}}{\partial\alpha} + \frac{\partial\ddot{v}}{\partial\beta}\right)\right]\right\}, \tag{2.6}$$

$$M_\beta = M - M_\alpha\,.$$

În cele ce urmează vom considera forțele de lunecare și momentele de torsiune duale. Momentele de torsiune se pot obține din primele două ecuații de proiecție de cupluri; scriind dualitatea lor deducem ecuația

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\beta^2} - \frac{Rh^2}{3\,(1-\mu^2)}\left[\Delta\Delta N + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 N}{\partial\alpha^2}\right] = -\frac{2h^3}{3}\frac{1+\mu}{1-\mu}\rho L_2. \tag{2.7}$$

Analog, prin deducerea forțelor de lunecare, rezultă o altă ecuație

$$\frac{\partial^2 N}{\partial\beta^2} + \frac{R}{1-\mu}\left[\Delta\Delta M + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 M}{\partial\alpha^2}\right] = -\,2\rho h\,L_1 \tag{2.8}$$

---

*) În mod aproximativ, extinsă și la forțele și cuplurile de inerție.

Am notat*)

$$L_1 = \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \beta}\right) - R\,\Delta\Delta\,\ddot{w}.$$

Analogia statico-geometrică ne arată că ecuația (2.8) este analogă ecuației (2.7), întrucît N și M sînt cantități analoge. De aceea, L_2 va fi analogul lui L_1; după cum se va vedea, putem ocoli deducerea expresiei lui L_2 în mod explicit. Amplificînd ecuația (2.7) cu $i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{3}{h^2}}$, adunînd-o la (2.8) și utilizînd efortul complex $\mathfrak{S}$, deducem ecuația

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}\left[\Delta\Delta\,\mathfrak{S} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \alpha^2}\right] = -\,2\rho h\,L, \tag{2.9}$$

L depinzînd de derivatele deplasărilor.

Pentru ca expresia să fie unitară în $\mathfrak{S}$, trebuie ca L să fie exprimat în funcție tot de $\mathfrak{S}$. Vom face această operație pentru fiecare caz în parte, exprimînd deplasările în funcție de M și N.

3. RELAȚIILE DINTRE EFORTURI ȘI DEFORMAȚII, DEFORMAȚII ȘI DEPLASĂRI. EXPRIMAREA DEPLASĂRILOR ÎN FUNCȚIE DE N ȘI M

Sistemul ecuațiilor de legătură dintre deformații și deplasări este

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{w}{R},\ \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta};\ \omega = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta},\\ \chi_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha},\quad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2},\ \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial \beta} + \frac{1}{2R}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta}\right).\end{gathered} \tag{3.1}$$

În cele ce urmează vom deduce expresia deplasărilor în funcție de N și M, în primul rînd pentru cazul dezvoltării Fourier în lungul liniilor β, cînd aceste necunoscute sînt dezvoltate în funcție de $\cos\lambda_n\beta$ cu $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, unde l este lungimea elementului considerat, iar în al doilea rînd pentru cazul dezvoltării Fourier în lungul liniilor α a lui N și M în funcție, de $\cos\nu_m\alpha$ cu $\nu_m = \frac{m}{R}$.

Prima dezvoltare corespunde fizic învelitorilor cilindrice, rezemate la capete pe timpane, precum și unor anumite tipuri speciale de rezemare la capete a tuburilor circulare.

Cea de-a doua dezvoltare servește calculului tuburilor circulare cu prindere oarecare la capete.

---

*) Luînd $X=Y=Z=0$.

Astfel, în primul caz:

a. *Calculul deplasării v*

Expresiile ce leagă forțele axiale N_α şi N_β de alungirile ε_α şi ε_β

$$N_\alpha = \frac{2Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\alpha + \mu\,\varepsilon_\beta),$$

$$N_\beta = \frac{2Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_\beta + \mu\,\varepsilon_\alpha),$$

permit obținerea alungirilor ε_α şi ε_β sub forma

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{2Eh}(N_\alpha - \mu N_\beta),\\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{2Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha),\end{aligned} \tag{3.2}$$

de unde, prin intermediul relațiilor (3.1), rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{1}{2Eh}(N_\beta - \mu N_\alpha).$$

Se observă că pentru a n-a armonică a dezvoltării vom avea, notînd generic partea funcție de α şi t barat,

$$\bar{v} = \frac{1}{2Eh\lambda}(\bar{N}_\beta - \mu \bar{N}_\alpha),$$

Înlocuind pe N_α şi N_β în funcție de $\bar{N}$ şi $\bar{M}$ în baza relațiilor (2.5) obținem egalitatea căutată

$$\bar{v} = \frac{1}{2Eh\lambda}\left[N + R\left(\Delta\ M + \frac{h^2}{3R}\frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2} - 2\rho h\,(1+\mu)\,\ddot{w}\right)\right]. \tag{3.3}$$

b. *Calculul deplasării w*

În acelaşi mod, relațiile ce leagă momentele încovoietoare de deformațiile de încovoiere

$$M_\alpha = -\frac{2Eh^3}{3\,(1-\mu^2)}(\chi_1 + \mu\,\chi_2),$$

$$M_\beta = -\frac{2Eh^3}{3\,(1-\mu^2)}(\chi_2 + \mu\,\chi_1)$$

permit deducerea deformațiilor de încovoiere χ_1 şi χ_2,

$$\chi_1 = \frac{3}{2Eh^3}[\mu M_\beta - M_\alpha],$$

$$\chi_2 = \frac{3}{2Eh^3}[\mu M_\alpha - M].$$

În baza relațiilor (3.1), putem scrie încă

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = \frac{3}{2Eh^3}\,[\mu M_\alpha - M_\beta].$$

Întrucît deplasarea w este dezvoltată în serie Fourier după β, pentru cea de-a n-a armonică rezultă

$$\frac{\partial^2 w_n}{\partial \beta^2} = -\,\lambda_n^2 w_n\,,$$

astfel că

$$w = \frac{3}{2Eh\lambda_n^2}[M_\beta - \mu M_\alpha].$$

Înlocuind pe M_α și M_β în funcție de M și N, în baza relațiilor (2.6), rezultă

$$w = \frac{R}{2Eh}\,\frac{1}{\lambda_n^2}\left[\Delta N - \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} - 2\rho h\,(1+\mu)\left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial \beta}\right)\right]. \tag{3.4}$$

c. *Calculul deplasării u*

Observînd că $N_{\alpha\beta}$ este dezvoltat în serie după $\sin \lambda_{n\beta}$, din prima ecuație de echilibru rezultă

$$\overline{N}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\lambda_n}\left[-\,\frac{\partial \overline{N}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\overline{Q}_\alpha}{R} - \overline{X}\right],$$

pe care o transcriem în funcție de $\overline{N}$ și $\overline{M}$,

$$\overline{N}_{\alpha\beta} = \frac{R}{(1+\mu)\,\lambda_n}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\Delta \overline{M} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial \overline{M}}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{3R}\left(\frac{\partial^3 \overline{N}}{\partial \alpha^3} + \frac{1}{R^2}\,\frac{\partial \overline{N}}{\partial \alpha}\right) - (1+\mu)\,2\rho h\left(\frac{\partial \overline{\ddot{w}}}{\partial \alpha} - \frac{1}{R}\,\overline{\ddot{u}}\right)\right].$$

Pe de altă parte, din relațiile geometrice (3.1) rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \omega = \frac{1+\mu}{Eh} N_{\alpha\beta}\,,$$

astfel încît, u fiind dezvoltat în funcție de $\cos \lambda_n\,\beta$, rezultă

$$\overline{u} = -\,\frac{1}{\lambda_n}\left[\frac{1+\mu}{Eh}\,\overline{N}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha}\right].$$

Înlocuind pe $\overline{N}_{\alpha\beta}$ și $\frac{\partial \overline{v}}{\partial \alpha}$ în funcție de $\overline{N}$ și $\overline{M}$, în baza formulelor anterioare, obținem expresia căutată

$$u = \frac{1}{2Eh\lambda_n^2}\left\{\frac{\partial N}{\partial \alpha} - R\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\Delta M + \frac{2}{R^2}\,\frac{\partial M}{\partial \alpha} + \frac{h^3}{3R}\left(\frac{\partial^3 N}{\partial \alpha^3} + \frac{2}{R^2}\,\frac{\partial N}{\partial \alpha}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + \left[2\rho h\,(1+\mu)\left(R\frac{\partial \ddot{w}}{\partial \alpha} - 2\ddot{u}\right)\right]\right\}. \tag{3.5}$$

Cu ajutorul formulelor (3.3), (3.4) și (3.5) putem transcrie expresia lui L_1 în funcție de N și M, neglijînd însă valoarea

$$k = \frac{\rho\omega^2}{E\,\lambda_n^2}$$

față de unitate, ω fiind frecvența căutată. Această neglijare este foarte mică în toate cazurile. Se obține

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}\left(\Delta\Delta\,\mathcal{E} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2}\right) = \\ = k\left\{\Delta\,\mathcal{E} - R^2\Delta\Delta\,\mathcal{E} + i\,R\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{h^2}{3}}\left(\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\Delta\,\mathcal{E}\right)\right\}.\end{gathered} \tag{3.6}$$

În cel de-al doilea caz, al dezvoltării în serie Fourier pe direcția α, vom proceda în mod analog. Cu ajutorul sistemului (3.1) deducem

$$-\Delta w + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{\partial v}{\partial\beta}\right) = -\left(\chi + \frac{1}{R}\varepsilon_2\right) + \frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial\alpha}, \tag{3.7}$$

cu

$$\chi = \chi_1 + \chi_2.$$

Pe de altă parte,

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \varepsilon_1 + \frac{w}{R},\ \frac{\partial u}{\partial\alpha} = R\left(\chi_1 - \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}\right),$$

astfel încît

$$w = \frac{R^2}{1-n^2}\left(\chi_1 - \frac{1}{R}\varepsilon_1\right), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{R}{1-n^2}\left(\chi_1 - \frac{n^2}{R}\varepsilon_1\right). \tag{3.9}$$

Cu ajutorul relațiilor geometrice și al elasticității, rezultă

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha} = \frac{R}{1-n^2}\left(-\frac{3}{2Eh^3}(1-\mu)\,M + \frac{R}{2Eh}\left(\Delta N + \mu\,\frac{n^2}{R^2}\,N\right)\right),$$

astfel încît relația (3.6) devine

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}}\left[\Delta\Delta\,\mathcal{E} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2}\right] = \\ = \frac{\overline{k}}{n^2-1}\left\{\frac{1-2\mu\,n^2-n^2}{R^2}\,\mathcal{E} + 2\,\Delta\,\mathcal{E} - i\sqrt{\frac{3\,(1-\mu^2)}{h^2}}\,\frac{n^2+1}{R}\,\mathcal{E}\right\},\end{gathered} \tag*{(3.6′)*)}$$

---

*) Pentru fiecare armonică în parte.

expresie în care au fost neglijați termenii echivalenți cu $\overline{k}^2$ și $\frac{h^2}{R^2}$ față de unitate*). Termenul din dreapta al ecuației se obține cu ajutorul analogiei statico-geometrice din L,

$$L_1 = \frac{\omega^2 R^2}{2Eh\,(n^2-1)}\left[\frac{3}{h^2R^2}(1-\mu)\,(n^2+1)\,M + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{R^3}\left[(1-2\mu\, n^2 - n^2)N + 2R^2\Delta N\right]\right]. \tag{3.10}$$

Trebuie remarcat că, în acest caz, expresiile (3.6′) și (3.10) nu au sens pentru prima armonică, întrucît atunci cînd n tinde către 1, rezultă o nedeterminare. Ridicînd-o deducem

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

și

$$w = \frac{R^2}{1-n^2}\left(\chi_1 - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right),$$

relații care conduc la expresia

$$L_1' = \frac{\omega^2\, R^2}{2Eh}\left[\frac{3\,(1-\mu)}{R^2h^2}\,M - \frac{1+2\mu}{R^3}\,N\right] \tag{3.11}$$

și aproximativ cu ajutorul analogiei statico-geometrice, la expresia

$$L' = \frac{\omega^2\, R^2}{2Eh}\left[-\frac{1+2\mu}{R}\,\mathscr{E} - i\sqrt{\frac{3\,(1-\mu^2)}{h^2}}\,\mathscr{E}\right]. \tag{3.12}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (3.6′) și (3.12) putem trata toate cazurile enunțate anterior în diferite condiții de margine.

4. CALCULUL FRECVENȚELOR TUBURILOR CIRCULARE ÎN DOUĂ CAZURI SPECIALE DE PRINDERE LA CAPETE

Dacă considerăm că atît N și M sînt dezvoltate în serie dublă Fourier în funcție de cos λ_n β cos ν_m α, ne vom situa în cazul tuburilor cu rezemare la capete pe timpane**), iar în cazul dezvoltării în funcție de sin λ_n β cos ν_m α, în cazul tuburilor cu încastrare elastică la capete. Evident, se include și cazul mixt, cu o prindere la un capăt și cealaltă prindere la al doilea capăt.

---

*) $\overline{k} = \frac{\rho\omega^2}{E}R^2$.

**) Rezultanta eforturilor din secțiunea de capăt nu conține decît o componentă în planul secțiunii, care pentru tuburile lungi, conform principiilor lui Saint-Venant, poate fi considerat a fi reacțiunea provenită din simplă rezemare. În plus, rotirea și deplasarea în lung sînt permise

Dacă în loc de ν_m considerăm $\bar{\nu}_m = \frac{m}{R\varphi_0}$, obținem în cazul învelitorii cilindrice de lungime l şi de deschidere unghiulară φ_0, rezemată pe toate cele patru borduri pe timpane.

Într-adevăr, timpanul este foarte rigid în planul lui și foarte elastic transversal; o dezvoltare în $\cos \lambda_n \beta$ dă la capete

$$N_\beta = 0, \quad M_\beta = 0$$

şi

$$u = 0, \quad w = 0,$$

care sînt tocmai condițiile de rezemare pe timpane.

În aceste cazuri, pornim de la ecuația (3.6′), în care separăm partea reală şi cea imaginară; eliminînd pe M rezultă

$$\left(A_1^2 + A_2^2\right) N + 2k \left(A_4 A_2 - A_1 A_3\right) N = 0,$$

în care A_1, A_2, A_3 şi A_4 reprezintă următorii operatori diferențiali:

$$A_1 = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2},$$

$$A_2 = \left\{\Delta\,\Delta + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right\} \frac{hR}{\sqrt{3\,(1-\mu^2)}},$$

$$A_3 = \Delta - R^2 \Delta\Delta,$$

$$A_4 = R\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{h^2}{3}}\left(\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\,\Delta\right).$$

Luăm așa după cum am arătat

$$N = \mathfrak{N} \cos \nu_m \alpha \cos \lambda_n \beta \sin \omega t,$$

astfel încît

$$A_1^2 N = \lambda_n^4 N,$$

$$A_2^2 N = \left[(\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{1}{R^2}\nu_m^2\right] \frac{h^2 R^2}{3\,(1-\mu^2)} N,$$

$$A_1 A_3 N = -\lambda_n^2 \left[-(\nu_m^2 + \lambda_n^2) - R^2 (\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2\right] N,$$

$$A_2 A_4 N = \frac{h^2 R^2}{3\,(1-\mu)}\left[\left((\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{1}{R^2}\nu_m^2\right)\left(-\frac{2}{R^2}\nu_m^2 - \lambda_n^2 (\nu_m^2 + \lambda_n^2)\right)\right],$$

de unde obținem pentru k expresia

$$k = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_n^4 + \bar{m}\left[(\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{1}{R^2}\nu_m^2\right]^2}{\lambda_n^2\left[(\nu_m^2 + \lambda_n^2) + R^2 (\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2\right] + (1+\mu)\,\bar{m}\left[(\nu_m^2 + \lambda_n^2)^2 - \frac{1}{R^2}\nu_m^2\right]\left[\frac{2}{R^2}\nu_m^2 + \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + \nu_m^2)\right]}$$

$$\text{cu } \bar{m} = \frac{R^2 h^2}{3\,(1-\mu^2)}.$$

Această formulă conține valorile exacte ale frecvențelor proprii; trebuie însă remarcat că în anumite cazuri nu toți termenii ce intervin au aceeași importanță.

Astfel, în cazul tuburilor cu pereți groși*) și cu $\frac{l}{R} \gg 1$, putem neglija pe λ_n^2 în raport cu ν_m^2. Se deduce expresia **)

$$k = \frac{1}{2} \frac{\lambda_n^4 \left(1 + 2\,\overline{m}\,\nu_1^4\right)}{\lambda_n^2 \nu_1^2 \left(1 + 2\,\overline{m}\,\nu_1^4\right)} = \frac{1}{4} \frac{\lambda_n^2}{\nu_1^2}. \tag{4.2}$$

Pentru a m-a armonică

$$k = \frac{1}{2} \frac{\lambda_n^4 + \overline{m} \left[(m^2 - 1) \frac{1}{R^2} \right]^2 \nu_m^4}{\lambda_n^2 \, \nu_m^2 \, (1 + m^2) + \overline{m} \left[(m^2 - 1) \frac{1}{R^2} \right] \frac{2\nu_m^4}{R^2}}. \tag{4.3}$$

Formula (4.2) coincide cu cea care se obține dacă se consideră secțiunea rigidă (bară cu secțiune inelară).

Fără neglijarea lui μ obținem pentru $m = 1$,

$$k = \frac{1}{2} \frac{\lambda_n^4 + 2\overline{m}\,\lambda_n^4\,\nu_1^4}{2\lambda_n^2\,\nu_1^2 + 4\,(1 + \mu)\,\overline{m}\,\lambda_n^2\,v_1^6}, \tag{4.4}$$

dar eroarea formulei anterioare este foarte mică, de ordinul lui $5^0/_{00}$ pentru un tub cu caracteristicile

$$R = 1{,}2 \text{ cm}, \quad h = 0{,}2 \text{ cm}, \quad l = 100 \text{ cm}.$$

În acest caz, eroarea comisă prin utilizarea ecuației (4.4) în locul ecuației (4.1) este și mai mică și de ordinul $1^0/_{00}$.

Dacă tubul este deci suficient de gros și de lung, putem utiliza fără nici o grijă formula (4.3) a barei cu secțiune inelară, pentru care condiția de timpane este de fapt o condiție de simplă rezemare.

Relația (4.2) se mai scrie și sub forma

$$\omega = \frac{\lambda_n^2}{2\nu_1} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{4.5}$$

Pentru tubul considerat anterior, confecționat din oțel cu $E = 2{,}1 \times 10^6$ kg/cm², rezultă prima frecvență $\omega = 300$ Hz.

---

*) Teoria învelitorilor elastice subțiri permite calculul unor tuburi cu pereți groși, deoarece eroarea teoriei este $\frac{h^2}{R^2}$ față de 1.

**) Cu neglijarea lui μ, pentru $m = 1$.

Pentru frecvențe superioare, atîta timp cît λ_n rămîne mic față de ν_1 putem recurge ($m=1$), la relația

$$k = \frac{1}{4}\frac{\lambda_n^2}{\nu_1^2}.$$

Este de ales între această relație și cele cu $m \neq 1$. În acest caz rezultă

$$k = \frac{m^2-1}{2}\zeta\frac{1+\dfrac{\delta^2}{3(1-\mu^2)\zeta^2}}{(1+m^2)+\dfrac{2\delta^2}{3(1-\mu)\zeta}}, \tag{4.6}$$

unde

$$\zeta = \frac{1}{m^2-1}\frac{\lambda_n^2}{\nu_m^2}, \quad \delta = \frac{h}{R}.$$

Valoarea lui ζ care face minimă această expresie este

$$\zeta = \frac{1}{\varphi}\left(\sqrt{1+0{,}5\frac{1+m^2}{1+\mu}\varphi} - 1)\right), \tag{4.7}$$

unde

$$\varphi = \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)(1+m^2)}{\delta^2}$$

Cu ajutorul expresiei (4.7) se deduce, pentru $\dfrac{\lambda_n^2}{\nu_m^2}$,

$$\frac{\lambda_n^2}{\nu_m^2} = \frac{m^2-1}{\varphi}\left(\sqrt{1+0{,}5\frac{1+m^2}{1+\mu}\varphi} - 1\right), \tag{4.8}$$

Întrucît formula (4.6) a fost obținută prin neglijarea lui λ_n^2 în raport cu ν_m^2, trebuie să fie îndeplinită inegalitatea

$$\frac{m^2-1}{\varphi}\left(\sqrt{1+0{,}5\frac{1+m^2}{1+\mu}\varphi} - 1\right) \ll 1$$

pentru ca acest rezultat să fie valabil.

În caz contrar, lucrăm cu formula exactă.

Aceleași observații și formule se pot stabili și în cazul învelitorilor rezemate pe toate cele patru borduri, pe timpane. În acest caz însă trebuie să se înlocuiască m în formulele aterioare cu $\dfrac{m\pi}{\varphi_0}$ *).

Am tratat aceste cazuri particulare, datorită pe de o parte faptului că ele reprezintă aproximativ**), (pentru tuburile suficient de lungi) cazul simplei rezemări și al încastrării, iar pe de altă parte datorită marei simplități de formulare a acestui caz.

---

*) Învelitorile au o dublă simetrie în acest caz.

**) Pe baza principiului lui Saint-Venant.

5. CAZUL ÎNVELITORILOR CILINDRICE CIRCULARE CU REZEMARE OARECARE ÎN LUNGUL RIGLELOR MARGINALE

Admitem, de asemenea, învelitoarea rezemată la cele două capete pe timpane elastice, ceea ce revine la a dezvolta soluția în serie de cos $\lambda_n \beta$. Pentru aceasta recurgem la ecuația obținută, în cazul dezvoltării după β a soluției,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left(\Delta\Delta\, \mathcal{E} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \alpha^2}\right) =$$

$$= k\left\{\Delta \mathcal{E} - R^2 \Delta\Delta\, \mathcal{E} + iR\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{h^2}{3}}\left(\frac{2}{R^2}\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\,\Delta \mathcal{E}\right)\right\}.$$

Utilizăm o soluție de forma

$$\mathcal{E} = f_n(\lambda_n \alpha)\cos\lambda_n \beta \sin \omega t$$

în cazul general. Introdusă în ecuația anterioară, rezultă o ecuație diferențială ordinară cu coeficienți constanți, a cărei ecuație caracteristică este

$$r^4 + \frac{\gamma - \beta - 2\alpha}{\alpha} r^2 + \frac{\alpha + \beta - i\varkappa}{\alpha} = 0.$$

Notînd $r^2 = t$, se obține o ecuație de gradul doi

$$t^2 + \frac{\gamma - \beta - 2\alpha}{\alpha} t + \frac{\alpha + \beta - i\varkappa}{\alpha} = 0 \tag{5.1}$$

unde

$$\alpha = 1 + ik\frac{R}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)},$$

$$\beta = k[\varkappa - (1+\mu)],$$

$$\gamma = \frac{1}{R^2}[1 + k(1+\mu)],$$

$$\varkappa = \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{hR\lambda_n^2},$$

depinzînd evident și de k, deocamdată necunoscut. Această ecuație rezolvată se găsesc pentru r patru soluții complexe, două cîte două egale și de semn contrar

$$r_{1,2} = \pm(a_1 + i b_1), \tag{5.2}$$

$$r_{3,4} = \pm(a_2 + i b_2),$$

care dau pentru $f(\lambda\,\alpha)$ soluțiile

$$e^{(a_j+ib_j)\lambda\alpha}=e^{a_j\lambda\alpha}(\cos b_j\lambda\alpha+i\sin b_j\lambda\alpha),$$

$$e^{-(a_j+ib_j)\lambda\alpha}=e^{-a_j\lambda\alpha}(\cos b_j\lambda\alpha-i\sin b_j\lambda\alpha).$$

Întrucît și o combinație liniară este o soluție, vom considera ca soluții semisuma și semidiferența lor,

$$f_j^1(\lambda\alpha)=\mathrm{ch}\,a_j\lambda\alpha,\,b_j\lambda\beta\,\cos b_j\lambda\alpha+i\,\mathrm{sh}\,a_j\lambda\alpha\,\sin b_j\lambda\alpha \tag{5.3}$$

$$f_j^3(\lambda\alpha)=\mathrm{sh}\,a_j\lambda\alpha,\,b_j\lambda\beta\,\cos b_j\lambda\alpha+i\,\mathrm{ch}\,a_j\lambda\alpha\,\sin b_j\lambda\alpha\,.$$

Mai dispunem însă de un coeficient arbitrar complex, care ne permite să mai obținem încă două soluții independente, rezultate din (5.3) prin amplificare cu $-i$,

$$f_j^2(\lambda\alpha)=\mathrm{sh}\,a_j\lambda\alpha\,\sin b_j\lambda\alpha-i\,\mathrm{ch}\,a_j\lambda\alpha\,\cos b_j\lambda\alpha\,, \tag{5.4}$$

$$f_j^4(\lambda\alpha)=\mathrm{ch}\,a_j\lambda\alpha\,\sin b_j\lambda\alpha-i\,\mathrm{sh}\,a_j\lambda\alpha\,\cos b_j\lambda\alpha\,.$$

Cele opt soluții liniar independente anterioare introduc fiecare cîte o constantă arbitrară reală C_j^k. Aceste constante sînt suficiente punerii a cîte patru condiții de margine, pe fiecare din cele două generatoare de margine. Final soluția are forma

$$\mathcal{S}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{4}C_j^k\,f_j^k(\lambda_n\alpha)\cos\lambda_n\beta\,\sin\omega t \tag{5.5}$$

În cazul învelitorilor simetrice față de generatoarea de creștet, dispar unii termeni, astfel că

$$\mathcal{S}=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}C_j^k\,f_j^k(\lambda_n\alpha)\cos\lambda_n\beta\,\sin\omega t \tag{5.6}$$

Separînd în expresia efortului complex

$$\mathcal{S}=N+i\sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\,\frac{3}{h^2}}\,M$$

partea reală de cea imaginară, se deduc soluțiile pentru N și M,

$$N=\cos\lambda_n\beta\,\sin\omega t\sum_{j=1}^{2}(C_j^1\,\mathrm{ch}\,a_j\lambda_n\alpha\,\cos b_j\lambda_n\alpha+ \tag{5.7}$$

$$+\,C_j^2\,\mathrm{sh}\,a_j\lambda_n\alpha\,\sin b_j\lambda_n\alpha\,),$$

$$M=\sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\,\frac{h^2}{3}}\cos\lambda_n\beta\,\sin\omega t\sum_{j=1}^{2}(C_j^1\,\mathrm{sh}\,a_j\lambda_n\alpha\,\cdot$$

$$\sin b_j\lambda_n\alpha-C_j^2\,\mathrm{ch}\,a_j\lambda_n\alpha\,\cos b_j\lambda_n\alpha).$$

Toate forțele, momentele și deplasările se exprimă în funcție de N și M și deci de constantele de integrare. În felul acesta, și în acest caz introducerea efortului complex $\mathfrak{S}$ apare ca un artificiu de calcul, deoarece practic se utilizează N și M, calculul efectuîndu-se în întregime în domeniul real, cunoscute fiind soluțiile ecuației caracteristice.

Orice sistem de condiții de margine se va reduce la un sistem de patru ecuații omogene cu patru necunoscute, constantele de integrare. Coeficienții acestui sistem depind de k prin intermediul cantităților a_j și b_j, precum și direct. Pentru ca sistemul omogen anterior să aibă o soluție, trebuie ca determinantul său să fie nul,

$$\Delta\,(k) = 0, \tag{5.8}$$

ceea ce reprezintă o ecuație în k. Această ecuație trebuie rezolvată prin încercări printr-una din metodele cunoscute în acest caz.

Astfel, de exemplu în cazul unei învelitori rezemate pe timpane verticale, simetrice, în plin cintru, trebuie satisfăcute în lungul generatoarelor longitudinale condițiile

$$\begin{array}{lll} u = 0, & v = 0, & \\ & & \text{pentru } \varphi = \pm \dfrac{\pi}{2}, \\ R_\alpha = 0, & M_\alpha = 0, & \end{array}$$

R_α fiind forța tăietoare generalizată egală cu $Q_\alpha + \dfrac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}\cdot$

Exprimînd deplasările și eforturile în funcție de N, și renunțînd la pătratele lui k, obținem

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} - R\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\Delta M + \frac{2}{R^2}\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right] - (1+\mu)\,R^2\,k\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\Delta N - \frac{1}{R}\frac{\partial^3 M}{\partial \alpha^3}\right) = 0,$$

$$N + R\left[\Delta M + (1+\mu)\,kR\left(\Delta N - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} - \frac{h^2}{3}R\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\Delta N + (1+\mu)\,k\frac{\partial^3 N}{\partial \alpha^3}\right] = 0,$$

$$M - \frac{h^2}{3}R\left[\Delta N + (1+\mu)\,k\frac{\partial^2 N}{\partial \alpha^2}\right] = 0.$$

După cum se observă, în afară de N și M, ale căror expresii în funcție de constantele de integrare le avem prin formulele anterioare, mai intervin și $\dfrac{\partial M}{\partial \alpha}$, ΔM, ΔN ș.a.m.d. Intrucît ele sînt de forma

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} = \cos\,\lambda_n\beta\,\cos\,\omega t\sum_{j=1}^{2}\left(C_j^1\frac{\partial}{\partial \alpha}\,cc_j + C_j^2\frac{\partial}{\partial \alpha}\,ss_j\right),$$

unde

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} cc_j = \frac{1}{\cos \lambda_n \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \operatorname{ch} a_j \lambda \alpha \cos b_j \lambda \alpha \cos \lambda \beta,$$

vom da expresiile cantităților $\frac{\partial}{\partial \alpha} cc_j, \frac{\partial}{\partial \alpha} ss_j$, Δcc_j ş.a.m.d. pentru a ordona şi simplifica acest calcul.

Astfel, din calcul rezultă

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} cc_j = k_j^1 sc_j - k_j^2 cs_j, \ \frac{\partial}{\partial \alpha} ss_j = k_j^1 cs_j + k_j^2 sc_j,$$

$$\Delta cc_j = k_j^3 cc_j - k_j^4 ss_j, \quad \Delta ss_j = k_j^3 ss_j + k_j^4 cc_j,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} cc_j = k_j^5 cc_j - k_j^4 ss_j, \ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} ss_j = k_j^5 ss_j + k_j^4 cc_j,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta \ cc_j = k_j^6 sc_j - k_j^7 cs_j, \ \frac{\partial}{\partial \alpha} \Delta ss_j = k_j^6 cs_j + k_j^7 sc_j,$$

$$\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} cc_j = k_j^8 sc_j - k_j^9 cs_j, \ \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} ss_j = k_j^8 cs_j + k_j^9 sc_j,$$

unde

$$k_j^1 = \lambda a_j, \ k_j^2 = \lambda b_j,$$

$$k_j^3 = \lambda^2 (a_j^2 - b_j^2 - 1), \ k_j^4 = 2\lambda^2 a_j b_j, \quad k_j^5 = \lambda^2 (a_j^2 - b_j^2),$$

$$k_j^6 = \lambda^3 a_j (a_j^2 - 3b_j^2 - 1), \quad k_j^7 = \lambda^3 b_j (3 a_j^2 - b_j^2 - 1),$$

$$k_j^8 = \lambda^3 a_j (a_j^2 - 3b_j^2), \quad k_j^9 = \lambda^3 b_j (3 a_j^2 - b_j^2).$$

Cu ajutorul acestor expresii, sistemul anterior se transcrie cu uşurinţă în funcţie de constantele de integrare. Nu insistăm mai mult asupra acestui calcul, întrucît este elementar.

Pe această cale se poate ataca şi cazul grinzilor marginale elastice, întrucît cunoaştem expresia eforturilor marginale, cît şi a deplasărilor bordurii marginale, în funcţie de constantele de integrare. Încărcînd grinda marginală cu eforturile parametrice, acţiuni ale grindei, putem afla deplasările ei. Egalînd aceste deplasări cu cele ale învelitorii în dreptul generatoarei de margine, obţinem un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute*), care însă depinde acum şi de caracteristicile geometrice şi elastice ale sistemului de rezemare.

---

*) În cazul simetric.

6. CAZUL TUBURILOR CIRCULARE CU PRINDERI OARECARE LA CAPETE

În acest caz pornim de la ecuația (3.6′),

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left[\Delta\Delta\mathcal{E} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2}\right] =$$

$$= \frac{\overline{k}}{n^2-1}\left\{\frac{1 - 2\mu n^2 - n^2}{R^2}\mathcal{E} + 2\,\Delta\,\mathcal{E} - i\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2}}\,\mathcal{E}\right\},$$

pentru $m \neq 1$, sau de la ecuația (3.12),

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \beta^2} - \frac{ihR}{\sqrt{3(1-\mu^2)}}\left(\Delta\Delta\mathcal{E} + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\alpha^2}\right) =$$

$$= \overline{k}\left\{-\frac{1+2\mu}{R^2}\mathcal{E} - i\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{h^2}}\,\frac{1}{R}\,\mathcal{E}\right\},$$

pentru $m = 1$, întrucît în acest caz soluția este de forma

$$\mathcal{E} = f_n(\nu_n\beta)\cos\nu_n\alpha \sin\omega t.$$

Introdusă în ecuația diferențială (3.6′), rezultă o ecuație diferențială ordinară a cărei ecuație caracteristică este

$$r^4 - 2\overline{\alpha}_n r^2 + \overline{\beta}_n = 0, \tag{6.1}$$

unde

$$\overline{\alpha}_n = 1 - i\frac{\overline{k}\,\overline{\delta}}{n^2(n^2-1)} \text{ cu } \overline{\delta} = \frac{R}{h}\sqrt{3(1-\mu^2)}$$

$$\overline{\beta}_n = 1 - \frac{1}{n^2} + i\frac{\delta}{n^2} - \frac{\overline{k}}{n^2-1}\,\frac{\delta}{n^2}\left((n^2+1) + i\frac{1-2\mu n^2-3n^2}{n^2}\right).$$

Prin schimbarea $r^2 = t$ se reduce această ecuație la una de gradul doi,

$$t^2 - 2\,\overline{\alpha}_n\,t + \overline{\beta}_n = 0.$$

Cunoscînd soluțiile acestei ecuații, deducem pentru r, de asemenea, patru soluții două cîte două egale și de semn contrar

$$r_{1,2} = \pm(a_i + ib_j),\ r_{3,4} = \pm(a_2 + ib_2),$$

care dau analog pentru $f(\nu_n p)$, soluțiile

$$f_j^1(\nu_n\beta) = \operatorname{ch} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta + i \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta \sin b_j\nu_n\beta,$$

$$f_j^3(\nu_n\beta) = \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta + i \operatorname{ch} a_j\nu_m\beta \sin b_j\nu_n\beta,$$

$$f_j^2(\nu_n\beta) = \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta \sin b_j\nu_n\beta - i \operatorname{ch} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta,$$

$$f_j^4(\nu_n\beta) = \operatorname{ch} a_j\nu_n\beta \sin b_j\nu_n\beta - i \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta,$$

fiecare introducînd cîte o constantă arbitrară. În rest, rezolvarea problemei decurge analog cu a învelitorilor cilindrice; se obține un sistem omogen de ecuații în constantele introduse de soluțiile $f_j^k(\nu_n\beta)$. Acest sistem, pentru ca să admită o soluție diferită de zero, trebuie ca determinantul său să satisfacă egalitatea

$$\bar{\Delta}(\bar{k}) = 0$$

În acest caz, expresiile lui N și M, obținute prin separarea părții reale și a celei imaginare în expresia lui $\mathscr{E}$ sînt

$$N = \cos\nu_n\alpha \sin\omega t \sum_{j=1}^{2} (C_j^1 \operatorname{ch} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta \tag{6.2}$$

$$+ C_j^2 \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta \sin b_j\nu_n\beta),$$

$$M = \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{h^2}{3}} \cos\nu_n\alpha \sin\omega t \sum_{j=1}^{2} (C_j^1 \operatorname{sh} a_j\nu_n\beta.$$

$$\sin b_j\nu_n\beta - C_j^2 \operatorname{ch} a_j\nu_n\beta \cos b_j\nu_n\beta).$$

Pentru simplificarea calculului vom observa că expresiile derivatelor lui N și M se obțin în același mod ca în cazul învelitorilor cilindrice tratat în paragraful anterior, cu deosebire că λ_n trebuie înlocuit pretutindeni cu ν_n iar α cu β.

Și în acest caz, ca și în cazul anterior, se poate trata cazul reazemelor elastice pe calea indicată. Avem astfel posibilitatea obținerii frecvențelor pentru cazul cel mai general posibil de rezemare.

Mai este de remarcat, însă, că pentru prima armonică rezultă o altă ecuație caracteristică

$$r^4 - 2\bar{\alpha}_1 r^2 + \bar{\beta}_1 = 0, \tag{6.3}$$

unde

$$\bar{\alpha}_1 = 1$$

$$\bar{\beta}_1 = [i + \bar{k}(-\bar{\delta} + i(1+2\mu))]\,\bar{\delta}.$$

7. CALCULUL LA FORȚE EXCITATOARE

Nu vom trata decît cazul forțelor de forma

$$\sum_n F_n(\alpha, \beta) \cos\varphi_n t \; {}^{*)},$$

unde φ_n nu coincide cu nici una din frecvențele proprii ale învelitorii ω, pentru a evita astfel cazul rezonanței. Mai mult, pentru F_n nu vom admite decît expresii care pentru învelitorile cilindrice se pot descompune în serie Fourier pe direcția β,

---

*) S-au sin $\varphi_n t$ considerînd că la $t = 0$ avem o stare de completă relaxare.

$$\sum_{n=1} \sum_{j=1} \overline{F}_n^j(\alpha) \cos \lambda_j\beta \cos \varphi_n t$$

iar pentru tuburile circulare se pot descompune astfel:

$$\sum_{n=1} \sum_{j=1} \overline{F}_n^j(\beta) \cos \nu_n\alpha \cos \varphi_n t$$

Aceste condiții restrictive sînt necesare pentru a putea reduce și în cazul neomogen ecuația cu derivate parțiale ce caracterizează problema, tot la ecuații cu derivate ordinare.

Utilizînd în acest caz soluții de forma

$$\mathcal{E} = \sum_{n=1} \sum_{j=1} f_n^j(\nu_n\beta) \cos \nu_n\alpha \cos \varphi_n t,$$

reducem problema la o serie de probleme statice, pentru fiecare n cîte una. Rezolvarea decurge identic ca în cazul static, cu singura deosebire că ecuația caracteristică în ambele cazuri este diferită de cea care apare în cazul static, cînd $\omega = 0$.

Pentru ambele cazuri ecuația caracteristică este cea enunțată la paragrafele anterioare, cu singura deosebire că ele nu mai depind de parametrii k sau $\overline{k}$, întrucît acum ei au expresii numerice cunoscute

$$k = \frac{\rho\varphi_n^2}{E\lambda^2}, \quad \overline{k} = \frac{\rho\varphi_n^2}{E} R^2 .$$

În scrierea condițiilor de margine folosim în același mod tabloul derivatelor lui N și M, cu singura deosebire că acum ele nu vor mai depinde de parametrul necunoscut ω, ci vor fi simple cifre. Sistemele ce se obțin sînt cîte două sisteme liniare de patru ecuații cu opt necunoscute, termenii liberi fiind dați de către forțele exterioare. Nu insistăm prea mult asupra acestui caz, întrucît în afara expresiei ecuației caracteristice a eforturilor și deplasărilor în care intervin în plus și forțele de inerție date de formulele anterioare, metoda de calcul nu diferă cu nimic de cazul calculului static.

Primit la redacție la 15 noiembrie 1956.

МЕТОД ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТРУБ И КРУГЛО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе общий метод, предложенный для статического случая в [1], распространяется на динамический расчет цилиндрических оболочек и круглых труб.

Выводятся собственные частоты в общих условиях опирания с точностью математической теории упругих тонких оболочек. Результаты применяются для расчета на изгиб при внешних переменных нагрузках.

UNE MÉTHODE DE CALCUL DYNAMIQUE DES TUBES ET COUVERTURES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, une méthode générale, proposée pour le cas statique en [1] est étendue au calcul dynamique des couvertures cylindriques et des tubes circulaires.

On déduit les fréquences propres dans les conditions générales d'appui avec l'exactitude propre à la théorie mathématique des couvertures élastiques minces. Les résultats sont utilisés dans le calcul du fléchissement pour des forces extérieures variables au cours du temps.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Visarion, *O metodă generală de rezolvare a învelitorilor elastice subțiri*. Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 5, mai 1956, p. 635.
2. A. L. Goldenweizer, *Teoria uprughih tonkih obolocek*. Gostehizdat, Moscova, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

ELASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

O NOUĂ FORMULARE A PROBLEMEI GENERALE A ÎNVELITORILOR SUBŢIRI ELASTICE

DE

LIVIU LIBRESCU

Teoria matematică a învelitorilor subţiri elastice a fost tratată în ultimul timp într-un număr apreciabil de lucrări, căile de abordare şi rezolvare fiind foarte variate.

Astfel, W. Z. Chien în lucrarea [1] elaborează o metodă care conduce la construirea unui sistem de 6 ecuaţii în necunoscutele $p_{\alpha\beta}$ şi $q_{\alpha\beta}$ ($p_{\alpha\beta}$ şi $q_{\alpha\beta}$ reprezentînd deformaţiile tangenţiale, respectiv deformaţiile de încovoiere ale suprafeţei mediane). Este demn de semnalat că W. Z. Chien, neutilizînd nici o ipoteză, în afară de cea rezultată prin introducerea legii fizice a lui Hooke, reuşeşte să construiască o teorie, în care, ţinînd seama de forţele masice şi sarcinile exterioare, consideră starea de tensiune globală, nefragmentînd-o în stări de tensiuni elementare.

O expunere sistematică şi elegantă a rezultatelor parţiale obţinute de A. I. Goldenweiser în lucrările [2], [3], [4] şi [5], este dată în monografia sa [6], în care autorul construieşte o teorie foarte interesantă la baza căreia stau ipotezele clasice, ipoteza Love-Kirchoff, ipoteza nulităţii componentei σ^{33} a tensorului tensiune, teoria fiind dezvoltată în absenţa forţelor masice şi a sarcinilor exterioare.

O metodă de rezolvare a învelitorilor subţiri elastice i se datoreşte şi lui V. Visarion [7] care, bazat pe analogia statico-geometrică a lui A. Goldenweiser, reduce sistemul general de ecuaţii a învelitorilor la două ecuaţii cu derivate parţiale, de ordinul patru, în cantităţile

$$L = L^{11} + L^{22}, \quad T = T^{11} + T^{22}\,{}^{*})\text{.}$$

Metoda aceasta, este însă valabilă în cazul alegerii unui sistem de referinţă format din liniile de curbură ale suprafeţei mediane

În ceea ce priveşte utilizarea funcţiilor de eforturi în teoria învelitorilor, semnalăm că ele au fost deduse în absenţa forţelor masice şi a sarcinilor exterioare şi folosite în scopuri diferite.

---

*) Notaţiile noastre.

A. Goldenweiser, de exemplu, reușește să construiască cu ajutorul lor ingenioasa analogie statico-geometrică; A. Pucher și H. L. Langhaar le folosesc în lucrările [8] și [9] pentru studiul teoriei de membrană, A. Goldenweiser în lucrările [4], [5] și [6] și W. Zerna în lucrarea [10] le folosesc pentru deducerea ecuației rezolvente a efectului de contur simplu. Se poate spune deci că funcțiile de efort nu au avut o utilizare deplină, așa precum au avut-o în elasticitatea bi-și tridimensională. Obiectul acestei lucrări îl constituie utilizarea funcțiilor de efort la rezolvarea stării de tensiune globală, forțele masice și sarcinile exterioare fiind nenule.

I. EXTINDEREA FUNCȚIILOR DE EFORTURI ÎN CAZUL FORȚELOR MASICE ȘI A SARCINILOR EXTERIOARE

În acest scop, vom considera ecuațiile de echilibru deduse de A. I. Lurie în lucrarea [11] și reluate de A. Goldenweiser în lucrarea [4] sub forma

$$\sqrt{a}\, c^{\pi\mu} \frac{\partial \overline{P}_\mu}{\partial x^\pi} + \overline{F} = 0, \tag{1}$$

$$\sqrt{a}\, c^{\pi\mu} \left(\frac{\partial \overline{Q}_\mu}{\partial x^\pi} + \overline{r}_\mu \wedge \overline{P}_\pi \right) + \overline{M} = 0. \tag{2}$$

În aceste ecuații vectorii $\overline{P}_\mu$ și $\overline{Q}_\mu$ sînt definiți de relațiile

$$\overline{P}_\mu = c_{\alpha\mu}\, T^{\beta\alpha}\, \overline{r}_\beta + c_{\lambda\mu}\, N^\lambda\, \overline{n}, \tag{3}$$

$$\overline{Q}_\mu = c_\alpha^\lambda\, c_{\beta\mu}\, L^{\alpha\beta}\, \overline{r}_\lambda, \tag{4}$$

simbolurile din ecuațiile și relațiile anterioare avînd semnificațiile următoare :

$T^{\beta\alpha}$, tensorul eforturilor tangențiale,

N^α, tensorul eforturilor transversale,

$L^{\alpha\beta}$, tensorul momentelor,

$$\overline{F} = \sqrt{a}\left(F^\alpha \overline{r}_\alpha - F^3 \overline{n}\right), \tag{5}$$

vectorul forțelor masice și al sarcinilor exterioare,

$$\overline{M} = \sqrt{a}\, M^\alpha\, \overline{r}_\alpha, \tag{6}$$

vectorul momentelor exterioare, a, determinantul matricei $(a_{\alpha\beta})$, $a_{\alpha\beta}$ fiind coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței mediane nedeformate, componentele tensorului metric.

$a'_{\alpha\beta}$, aceeași semnificație ca $a_{\alpha\beta}$, însă pentru suprafața mediană deformată,

$c^{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, componentele contravariante, respectiv covariante, ale tensorului antisimetric definit astfel:

$$\begin{aligned} c^{12} &= -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad c^{\alpha\alpha} = 0, \\ c_{12} &= -c_{21} = \sqrt{a}, \quad c_{\alpha\alpha} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$\bar{r}_\alpha = \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}$, vectori fundamentali tangenți la curbele coordonate din planul suprafeței mediane a învelitoarei,

$\bar{n}$, versorul normalei la suprafața mediană, în direcția coordonatei x^3.

Expresiile tensorului eforturilor, tensorului momentelor, componentelor vectorului forțelor masice și al sarcinilor exterioare, componentelor momentului exterior, sînt deduse în [1], ele fiind date de relațiile*)

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \int_h \sigma^{\alpha\gamma} (a^\beta_\gamma - b^\beta_\gamma x^3) \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3, \\ N^\alpha &= \int_h \sigma^{\alpha 3} \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3, \\ L^{\alpha\beta} &= \int_h \sigma^{\alpha\gamma} (a^\beta_\gamma - b^\beta_\gamma x^3)\, x^3 \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} F^\alpha &= \int_h X^\gamma (a^\alpha_\gamma - b^\alpha_\gamma x^3) \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3 + \frac{p^\gamma_{(+)}}{|n_{(+)}|} (a^\alpha_\gamma - b^\alpha_\gamma h_{(+)}) \left(\frac{g_{(+)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{p^\gamma_{(-)}}{|n_{(-)}|} (a^\alpha_\gamma + b^\alpha_\gamma h_{(-)}) \left(\frac{g_{(-)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \\ F^3 &= \int_h X^3 \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3 + \frac{p^3_{(+)}}{|n_{(+)}|} \left(\frac{g_{(+)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{p^3_{(-)}}{|n_{(-)}|} \left(\frac{g_{(-)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} M^\alpha = \int_h X^r (a^\alpha_r - b^\alpha_r x^3)\, x^3 \left(\frac{g}{a}\right)^{\frac{1}{2}} dx^3) + \frac{p^\gamma_{(+)}}{|n_{(+)}|} (a^\alpha_\gamma - b^\alpha_\gamma h_{(+)})\, h_{(+)} \left(\frac{g_{(+)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \\ - \frac{p^\lambda_{(-)}}{|n_{(-)}|} (a^\alpha_\gamma + b^\alpha_\gamma h_{(-)})\, h_{(-)} \left(\frac{g_{(-)}}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{10}$$

---

*) Relațiile (8), (9) și (10) sînt puțin modificate față de cele date în [1], o parte din modificări fiind o consecință a faptului că noi am considerat

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2b_{\alpha\beta} x^3 + b^\lambda_\alpha b_{\beta\lambda} (x^3)^2 \tag{*}$$

și deci pentru λ_α [relația (3.9) [1]] rezultă

$$\lambda_\alpha = \lambda_{[0]\,\alpha} - b^\beta_\alpha \lambda_{[0]\,\beta} x^3.$$

(a se vedea lucrarea [1]).

unde

σ^{ij} sînt componentele tensorului tensiune al învelitoarei considerată ca un mediu tridimensional,

X^{γ} şi X^3 componentele forţelor masice,

p^{γ}, p^3 componentele sarcinilor exterioare,

$b_{\alpha\beta}$ coeficienţii celei de a doua forme fundamentale a suprafeţei mediane nedeformate ($b'_{\alpha\beta}$, are aceeaşi semnificaţie ca şi $b_{\alpha\beta}$, însă pentru suprafaţa mediană deformată),

g determinantul matricei (g_{ij}), g_{ij} fiind componentele tensorului metric tridimensional al învelitoarei (g'_{ij} are aceeaşi semnificaţie ca g_{ij}, dar pentru metrică deformată), Semnul $(+)$ sau $(-)$ plasat ca indice pe lîngă diferite mărimi, arată că acestea au valorile respectiv pentru $x^3 = +h_{(+)}$ (suprafaţa de mărginire exterioară), şi $x^3 = -h_{(-)}$ (suprafaţa de mărginire interioară).

Semnul h sub semnul integralei arată că integrarea se efectuează de la $x^3 = -h_{(-)}$ la $x^3 = +h_{(+)}$.

În aceste expresii (ca peste tot în lucrare), indicii notaţi cu litere greceşti pot lua valorile 1, 2 iar indicii notaţi cu litere latine pot lua valorile 1, 2, 3.

Punînd în ecuaţia (1) vectorul $\overline{F}$ sub forma

$$\overline{F} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\int_0^{x^{\alpha}} \overline{F}\, dx^{\alpha}, \tag{11}$$

se observă în mod simplu că ecuaţia este satisfăcută identic punînd

$$\overline{P}_{\mu} = \frac{\partial \overline{A}}{\partial x^{\mu}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} c_{\mu\nu}\int_0^{x^{\nu}} \overline{F}\, dx^{\nu}, \tag{12}$$

unde $\overline{A}$ este un vector arbitrar.

Înlocuind expresia lui $\overline{P}_{\mu}$ dată de (12) în ecuaţia (2) şi punînd vectorul $\overline{M}$ sub forma

$$\overline{M} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\int_0^{x^{\alpha}} \overline{M}\, dx^{\alpha}, \tag{13}$$

se obţine ecuaţia

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\overline{Q}_2 + \overline{r}_2 \wedge \overline{A} + \frac{1}{2}\int_0^{x^1} \overline{M}\, dx' - \frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^{x^{\lambda}}\int_0^{x^1} (c_{\cdot\lambda}^{\pi} F^3\, \overline{r}_{\pi} - F^{\delta} c_{\lambda\delta}\, \overline{n})\, dx^{\lambda}\, dx^1\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x^2}\left[\overline{Q}_1 + \overline{r}_1 \wedge \overline{A} - \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \overline{M}\, dx^2 + \frac{\sqrt{a}}{4}\int_0^{x^{\lambda}}\int_6^{x^2} (c_{\cdot\lambda}^{\pi} F^3 \overline{r}_{\pi} - F^{\delta} c_{\lambda\delta}\, \overline{n})\, dx^{\lambda}\, dx^2\right] = 0. \tag{14}$$

Ecuația (14) este verificată identic punînd

$$\overline{Q}_{\mu} = \frac{\partial \overline{B}}{\partial x^{\mu}} - r_{\mu} \wedge \overline{A} + \frac{1}{2\sqrt{a}} c_{\mu\nu} \int_0^{x^{\nu}} \overline{M}\, dx^{\nu} -$$

$$- \frac{1}{4} c_{\mu\rho} \int_0^{x^{\lambda}} \int_0^{x^{\rho}} [c_{\cdot\lambda}^{\pi} F^3 \overline{r}_{\pi} - F^{\delta} c_{\lambda\delta}\, \overline{n}]\, dx^{\lambda}\, dx^{\rho} \tag{15}$$

B fiind un vector de asemenea arbitrar.

Vom defini vectorii $\overline{A}$ și $\overline{B}$ prin expresiile

$$\begin{aligned} \overline{A} &= c_{\cdot\pi}^{\beta}\, \varphi^{\pi} \overline{r}_{\beta} + \eta\, \overline{n}, \\ \overline{B} &= \psi^{\pi} \overline{r}_{\pi} - \chi\, \overline{n}, \end{aligned} \tag{16}$$

unde φ^{π}, ψ^{π} sînt tensori arbitrari, iar η, χ scalari arbitrari (cu anumite restricții de continuitate și diferențiabilitate).

Identificînd expresiile lui $\overline{P}_{\mu}$ și $\overline{Q}_{\mu}$ din (3) și (4) cu acelea din (12), respectiv (15), și ținînd seama de (16) se obțin relațiile

$$T^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu}\, c_{\cdot\pi}^{\alpha}\, \nabla_{\mu}\, \varphi^{\pi} - c^{\beta\mu}\, b_{\mu}^{\alpha}\, \eta - \frac{1}{2} \int_0^{x^{\alpha}} F^{\alpha}\, dx^{\beta}, \tag{17}$$

$$N^{\delta} = c^{\delta\mu}\, c_{\cdot\pi}^{\beta}\, b_{\beta\mu} \varphi^{\pi} + c^{\delta\mu}\, \nabla_{\mu}\, \eta + \frac{1}{2} \int_0^{x^{\delta}} F^3\, dx^{\delta}, \tag{18}$$

$$L^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu}\, c_{\cdot\delta}^{\alpha}\, \nabla_{\mu}\, \psi^{\delta} + c^{\beta\mu}\, c_{\cdot\delta}^{\alpha}\, b_{\mu}^{\delta}\, \chi + 2c^{\alpha\beta}\, \eta -$$

$$- \frac{1}{2}\, c_{\cdot\delta}^{\alpha} \int_0^{x^{\beta}} M^{\delta}\, dx^{\beta} + \frac{1}{2} \int_0^{x^{\alpha}} \int_0^{x^{\beta}} F^3\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}, \tag{19}$$

$$\varphi^{\pi} = a^{\pi r} (\nabla_{\gamma}\, x - \psi^{\delta}\, b_{\delta\gamma} - \frac{1}{4} c_{\theta\gamma} c_{\nu\delta} \int_0^{x^{\nu}} \int_0^{x^{\theta}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta}), \tag{20}$$

care, după cum se observă ușor, permit exprimarea componentelor tensorilor eforturilor $T^{\alpha\beta}$, N^{δ} și tensorului momentelor $L^{\alpha\beta}$ în funcție de patru funcții potențiale η, χ, ψ^{δ}, și de forțele masice și sarcinile exterioare.

Se poate merge mai departe și să se exprime componentele tensorilor $T^{\alpha\beta}$, N^{δ} și $L^{\alpha\beta}$ prin cele trei funcții potențiale ψ^{δ}, χ aceasta dacă ținem seama de relația suplimentară nediferențială ce asigură dualitatea tensiunilor tangențiale în toate punctele pe grosimea învelitorii.

Această relație, în cazul cînd se mențin termenii ce conțin pe h la puterea cea mai mică, este

$$h^2\, c_{\gamma\alpha}\, b_{\beta}^{\gamma}\, T^{\alpha\beta} + 3c_{\alpha\beta}\, T^{\alpha\beta} = 0, \tag{21}$$

relație care, în cazul exactității Love-Kirchhof, devine

$$c_{\alpha\beta}\, L^{\alpha\beta} = 0. \tag{22}$$

În baza ecuației (22), din relația (19) se obține

$$\eta = \frac{1}{4}\, c^{\cdot\mu}_{\delta}\,(\nabla_{\mu}\, \psi^{\delta} + b^{\delta}_{\mu}\,\chi) - \frac{1}{8}\, a_{\beta\delta}\int_{0}^{x^{\beta}} M^{\delta}\, dx^{\beta}\,. \tag{23}$$

Ținînd seama de (23), relațiile (17), (18) și (19) devin

$$T^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu}\, c_{\cdot}^{\alpha}\, \nabla_{\mu}\, \varphi^{\pi} - \frac{1}{4}\, c^{\beta\mu}\, c^{\cdot\varphi}_{\delta}\, b^{\alpha}_{\mu}(\nabla_{\varphi}\, \psi^{\delta} + b^{\delta}_{\varphi}\,\chi) +$$

$$+ \frac{1}{8}\, c^{\beta\mu}\, a_{\lambda\omega}\, b^{\alpha}_{\mu}\int_{0}^{x^{\lambda}} M^{\omega}\, dx^{\lambda} - \frac{1}{2}\int_{0}^{x^{\beta}} F^{\alpha}\, dx^{\beta}\,, \tag{24}$$

$$N^{\delta} = c^{\delta\mu}\, c_{\cdot\pi}^{\beta}\, b_{\beta\mu}\, \varphi^{\pi} + \frac{1}{4} c^{\delta\mu}\, c^{\cdot\omega}_{\lambda}\, \nabla_{\mu}\,(\nabla_{\omega}\, \psi^{\lambda} + b^{\lambda}_{\omega}\,\chi) -$$

$$- \frac{1}{8}\, c^{\delta\mu}\, a_{\beta\omega}\, \nabla_{\mu}\int_{0}^{x^{\beta}} M^{\omega}\, dx^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x^{\delta}} F^{3}\, dx^{\delta}\,, \tag{25}$$

$$L^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu}\, c^{\cdot\alpha}_{\delta}\, \nabla_{\mu}.\psi^{\delta} + c^{\beta\mu}\, c^{\cdot\alpha}_{\delta}\, b^{\delta}_{\mu}\,\chi + \frac{1}{2}\, c^{\alpha\beta}\, c^{\cdot\mu}_{\delta}\,(\nabla_{\mu}\, \psi^{\delta} + b^{\delta}_{\mu}\,\chi) -$$

$$- \frac{1}{4}\, c_{\alpha\beta}\, a^{\omega\delta}\int_{0}^{x^{\omega}} M^{\delta}\, dx^{\omega} - \frac{1}{2}\, c^{\cdot\alpha}_{\delta}\int M^{\delta}\, dx^{\beta} + \frac{1}{2}\int_{0}^{x^{\alpha}}\int_{0}^{x^{\beta}} F^{3}\, dx^{\alpha}\, dx^{\beta}\,, \tag{26}$$

unde φ^{π} este dat de aceeași relație (20). În această lucrare nu vom folosi însă reprezentarea dată de relațiile, (24), (25) și (26) pentru componentele tensorilor eforturilor și ai momentelor.

În relațiile anterioare, ca peste tot în lucrare, ∇_{μ} este simbolul diferențierii covariante, $\nabla_{\mu}\ \varphi^{\pi}$ fiind dat de relația

$$\nabla_{\mu}\, \varphi^{\pi} = \frac{\partial \varphi^{\pi}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\pi}_{\lambda\mu}\, \varphi^{\lambda}, \tag{27}$$

unde $\Gamma^{\pi}_{\lambda\mu}$ sînt simbolii lui Christoffel de speța a doua corespunzînd metricei suprafeței mediane (nedeformate).

II. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE PENTRU FUNCȚIILE DE EFORTURI

1. Starea de tensiune globală

Tensorii eforturilor și tensorul momentelor exprimați prin relațiile (17), (18), (19) și (20) satisfac identic ecuațiile de echilibru (1) și (2). Pentru a avea însă o deformație reală oarecare, este necesar să verifice și ecuațiile de continuitate în eforturi.

De aceea, vom pleca de la ecuațiile de continuitate ale deformațiilor date în lucrarea [3] sub forma

$$
\begin{aligned}
c^{\alpha\theta}\, c^{\beta\sigma}\, \nabla_{\sigma}\, q_{\alpha\beta} - c^{\sigma\alpha}\, c^{\beta\lambda}\, b^{\theta}_{\sigma}\, \nabla_{\lambda}\, p_{\alpha\beta} &= 0, \\
b_{\alpha\beta}\, c^{\theta\alpha}\, c^{\nu\beta}\, q_{\theta\nu} + \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda}\, c^{\sigma\alpha}\, c^{\beta\lambda}\, p_{\alpha\beta} &= 0, \\
- c_{\alpha\beta}\, c^{\theta\alpha}\, c^{\nu\beta}\, q_{\theta\nu} + c^{\cdot\sigma}_{\alpha}\, c^{\alpha\omega}\, c^{\pi\beta}\, b_{\sigma\beta}\, p_{\omega\pi} &= 0,
\end{aligned}
\tag{28}
$$

unde tensorii $p_{\alpha\beta}$ și $q_{\alpha\beta}$, definiți prin relațiile

$$
\begin{aligned}
p_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}), \\
q_{\alpha\beta} &= -\,\beta_{\alpha\beta} + b^{\sigma}_{\beta}\, p_{\alpha\sigma}, \\
\beta_{\alpha\beta} &= b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta},
\end{aligned}
\tag{29}
$$

reprezintă deformațiile tangențiale, respectiv cele de încovoiere, ale suprafeței mediane. Ecuațiile de continuitate (28) pot fi exprimate în eforturi utilizînd relațiile deformații-eforturi. Aceste relații se obțin prin următorul proces:

a) Se pornește de la legea fizică tensiuni-deformații a mediului elastic omogen și izotrop

$$
\sigma^{ik} = (\lambda g^{ik}\, g^{mn} + 2\mu\, g^{im}\, g^{kn})\, e_{mn} \tag{30}
$$

(se va ține seama de convenția adoptată de noi asupra indicilor), unde

$$
e_{mn} = \frac{1}{2}\,(g'_{mn} - g_{mn}) \tag{31}
$$

reprezintă tensorul de deformație al mediului elastic tridimensional, iar λ și μ coeficienții lui Lamé.

Se introduce ipoteza nulității componentei σ^{33} a tensorului tensiune și, în acest caz, relația (30) devine

$$
\sigma^{ik} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}\, g^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta}\, (g^{ik} - g^{i3}\, g^{k3}) + 2\mu\, g^{i\alpha}\, g^{k\beta}\, e_{\alpha\beta} \tag{32}
$$

b) Componentele $e_{\alpha\beta}$ ale tensorului de deformație ale mediului tridimensional se obțin variind tensorul metric pentru mediul deformat și nedeformat (relația (31)), operație în care vom considera valabilă ipoteza Love-Kirchoff. În baza acestei ipoteze și a relației (*), $e_{\alpha\beta}$ este dat de relația

$$
e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(a'_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) - (b'_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})\, x^3 + \frac{1}{2}\,(b'^{\lambda}_{\alpha}\, b'_{\beta\lambda} - b^{\lambda}_{\alpha}\, b_{\beta\lambda})\, (x^3)^2 \tag{33}
$$

în care se va ține seama de expresiile (29) care au definit tensorii $p_{\alpha\beta}$ și $q_{\alpha\beta}$.

c) Se consideră relațiile (8) în care se introduce tensorul σ^{ik}, obținut prin considerațiile *a*) și *b*), reținîndu-se la sfîrșit numai termenii ce

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

conțin puterile cele mai mici ale lui h. Se obțin astfel relațiile care leagă tensorul momentelor și al eforturilor tangențiale de tensorii deformațiilor $p_{\alpha\beta}$ și $q_{\alpha\beta}$ [4]

$$T^{\alpha\beta}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}E^{\alpha\beta\varphi\gamma}p_{\varphi\gamma}\,, \tag{34}$$

$$L^{\alpha\beta}=\frac{2Eh^3}{3\,(1-\nu^2)}E^{\alpha\beta\varphi\gamma}q_{\varphi\gamma}, \tag{35}$$

unde

$$E^{\alpha\beta\varphi\gamma}=a^{\alpha\varphi}\,a^{\beta\gamma}+\nu c^{\alpha\varphi}\,c^{\beta\gamma}.$$

Din relațiile (34)și (35) se obține reciproc legea deformații-eforturi dată de relațiile

$$q_{\alpha\beta}=\frac{1}{2Eh}\,\frac{3}{h^2}\,P_{\alpha\beta\varphi\gamma}\,L^{\varphi\gamma}, \tag{36}$$

$$\begin{aligned} p_{\alpha\beta}&=\frac{1}{2Eh}\,P_{\alpha\beta\varphi\gamma}\,T^{\varphi\gamma},\\ P_{\alpha\beta\varphi\gamma}&=a_{\alpha\varphi}\,a_{\beta\gamma}-\nu\,c_{\alpha\varphi}\,c_{\beta\gamma}, \end{aligned} \tag{37}$$

relații ce vor fi utilizate la exprimarea ecuațiilor de continuitate (28) în eforturi.

În aceste expresii E și ν sînt coeficientul lui Young, respectiv coeficientul lui Poisson, legați de coeficienții lui Lamé λ și μ prin relațiile clasice.

Ținînd seama de relațiile (17), (18), (19) și (20) în ecuațiile de continuitate exprimate în eforturi, obținem următorul sistem de patru ecuații cu derivate parțiale în cele patru funcții de efort ψ^δ, η, χ :

$$\begin{aligned} &a^{\mu\sigma}\nabla_\sigma\nabla_\mu\,\psi^\theta+\nu K\,\psi^\theta+\nabla_\sigma\,b^{\sigma\theta}\chi+\nu c^{\sigma\mu}c^{\pi\theta}\,\nabla_\sigma\,b_{\pi\mu}\chi+\\ &+2\,(\nu-1)\,c^{\theta\sigma}\,\nabla_\sigma\eta+\frac{h^2}{3}\,[b^{\theta n}\,a^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\;\nabla_\mu\nabla_\gamma\chi-\\ &-b^{\theta\gamma}\,a^{\mu\lambda}\,\nabla_\lambda\nabla_\mu\,\psi^\delta\,b_{\delta\gamma}-b^{\theta\omega}\,c_{\varphi\omega}\,\nabla_\lambda\,b^{\varphi\lambda}\,\eta-\\ &-\nu\,b^\theta_\sigma\,c^{\lambda\mu}\,\nabla_\lambda\,b^\sigma_\mu\eta]=A^\theta\,(x^\alpha), \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &-b^\mu_\alpha\,\nabla_\mu\,\psi^\alpha-\nu\,b_{\alpha\beta}\,c^{\beta\mu}\,c^{\cdot\alpha}_{\sigma}\,\nabla_\mu\,\psi^\sigma+2\nu\,K\,\chi-b_{\alpha\beta}\,b^{\alpha\beta}\,\chi+\\ &+\frac{h^2}{3}[a^{\mu\lambda}a^{\omega\gamma}\;\nabla_\omega\,\nabla_\lambda\nabla_\mu\nabla_r\,\chi+a^{\mu\lambda}\,a^{\sigma\gamma}\,\nabla_\sigma\,\nabla_\lambda\,\nabla_\mu\,\psi^\delta\,b_{\delta\gamma}+\\ &+\nu\,\nabla_\lambda\,\psi^\delta\,b^\lambda_\delta\,K-c^{\sigma\cdot}_{\varphi}\,\nabla_\sigma\,\nabla^{\cdot\cdot}_{\lambda}\,b^{\varphi\lambda}\,\eta-\nu\,c^{\lambda\mu}\,\nabla_\sigma\,\nabla_\lambda\,b^\sigma_\mu\,\eta]=B\,(x^\alpha), \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} &(\nu-1)\,c^{\cdot\mu}_{\sigma}\,\nabla_\mu\,\psi^\rho+\psi\,(1-\nu)\,\eta-\frac{h^2}{3}\,[b^{\lambda\mu}\,\nabla_\mu\,\nabla_\lambda\;\chi+\\ &+\nu\,c^{\beta\mu}c^{\gamma\sigma}\,b_{\rho\beta}\,\nabla\,\mu\nabla_\gamma\,\chi-b^{\lambda\mu}\,\nabla_\mu\,\psi^\delta\,b_{\delta\lambda}-\nu\,c^{\beta\mu}\,c^{\gamma\sigma}\,b_{\sigma\beta}\,\nabla_\mu\,\psi^\delta\,b_{\delta\gamma}-\\ &-b_{\varphi\beta}\,b^{\varphi\beta}\,\eta+2\nu\,K\eta]=C\,(x^\alpha), \end{aligned} \tag{40}$$

unde $A^{\theta}(x^{\alpha})$, $B(x^{\alpha})$, $C(x^{\alpha})$ sînt funcții cunoscute ce se obțin prin efectuarea operațiilor cerute de simbolii ce operează asupra mărimilor F^{α}, F^{3}, M^{α}.

Funcțiile $A^{\theta}(x^{\alpha})$, $B(x^{\alpha})$, $C(x^{\alpha})$ sînt date de reațiile

$$\begin{aligned} A^{\theta}(x^{\alpha}) = {} & \frac{1}{2} c_{\gamma}^{\cdot\sigma} \nabla_{\sigma} \int_{0}^{x^{\gamma}} M^{\theta}\, dx^{\gamma} + \frac{1}{2} c_{\sigma}^{\cdot\theta} \nabla_{\gamma} \int_{0}^{x^{\gamma}} M^{\sigma}\, dx^{\gamma} + \\ & + \frac{1}{2} (c_{\varphi}^{\cdot\theta} c_{\gamma}^{\cdot\sigma} - \nu\, a_{\varphi}^{\theta} a_{\gamma}^{\theta}) \nabla_{\sigma} \int_{0}^{x^{\varphi}} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{3}\, dx^{\varphi}\, dx^{\gamma} + \\ & + \frac{h^{2}}{12} \Big[2 b_{\sigma}^{\theta} (c_{\varphi}^{\sigma\cdot} c_{\gamma}^{\cdot\lambda} + \nu\, a_{\varphi}^{\sigma} a_{\gamma}^{\lambda}) \nabla_{\lambda} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{\varphi}\, dx^{\gamma} + \\ & + b^{\theta\gamma} c_{\cdot\delta}^{\lambda} c_{\omega\gamma} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} \int_{0}^{x^{\mu}} \int_{0}^{x^{\omega}} F^{\delta}\, dx^{\mu}\, dx^{\omega} - \\ & - \nu b_{\pi}^{\theta} c^{\lambda\mu} c_{\nu\delta} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} \int_{0}^{x^{\rho}} \int_{0}^{x^{\pi}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\pi}, \Big] \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} B(x^{\alpha}) = {} & - \frac{1}{2} b_{\alpha\beta}\, c_{\gamma}^{\cdot\beta} \int_{0}^{x^{\gamma}} M^{\alpha}\, dx^{\gamma} - \frac{1}{2} \nu b_{\alpha\beta}\, c_{\sigma}^{\cdot\alpha} \int_{0}^{x^{\gamma}} M^{\sigma}\, dx^{\gamma} - \\ & - \frac{1}{2} b^{\lambda\theta} c_{\varphi\lambda} c_{\gamma\theta} \int_{0}^{x^{\varphi}} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{3}\, dx^{\varphi}\, dx^{\gamma} + \frac{1}{2} \nu b_{\varphi r} \int_{0}^{x^{\varphi}} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{3}\, dx^{\varphi}\, dx^{\gamma} - \\ & - \frac{h^{2}}{12} \Big[a^{\gamma\sigma} a^{\varphi\lambda} c_{\theta\gamma} c_{\nu\delta} \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} \nabla_{\varphi} \int_{0}^{x^{\nu}} \int_{0}^{x^{\theta}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta} + \\ & + \nu c^{\lambda\mu} c_{\nu\delta} \nabla_{\theta} \nabla_{\lambda} \nabla_{\mu} \int_{0}^{x^{\nu}} \int_{0}^{x^{\theta}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta} - \\ & - 2 (c_{\varphi}^{\sigma\cdot} c_{\gamma}^{\cdot\lambda} + \nu\, a_{\varphi}^{\sigma} a_{\gamma}^{\lambda}) \nabla_{\sigma} \nabla_{\lambda} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{\varphi}\, dx^{\gamma} \Big], \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} c(x^{\alpha}) = {} & - \frac{1}{2} (\nu + 1)\, a_{\sigma\gamma} \int_{0}^{x^{\gamma}} M^{\sigma}\, dx^{\gamma} - \frac{1}{2} (\nu - 1)\, c_{\varphi\gamma} \int_{0}^{x^{\varphi}} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{3}\, dx^{\varphi}\, dx^{\gamma} + \\ & + \frac{h^{2}}{3} \Big[- \frac{1}{4} b_{\sigma}^{\lambda} c_{\nu\delta} \nabla_{\lambda} \int_{0}^{x^{\nu}} \int_{0}^{x^{\sigma}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\sigma} - \\ & - \frac{1}{4} \nu\, b_{\sigma\beta}\, c_{\theta}^{\cdot\sigma} c^{\beta\mu} c_{\nu\delta} \nabla_{\mu} \int_{0}^{x^{\nu}} \int_{0}^{x^{\theta}} F^{\delta}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta} - \\ & - \frac{1}{2} b_{\sigma\beta}\, c_{\gamma}^{\cdot\beta} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{\delta}\, dx^{\gamma} - \frac{1}{2} \nu\, b_{\sigma\gamma}\, c_{\varphi}^{\cdot\sigma} \int_{0}^{x^{\gamma}} F^{\varphi}\, dx^{\gamma}. \end{aligned} \tag{43}$$

În aceste relații K este curbura gaussiană a suprafeței mediane definită de relația

$$K = \frac{1}{4} R_{\rho\mu\nu\delta}\, c^{\rho\mu}\, c^{\nu\delta}, \tag{44}$$

$R_{\rho\mu\nu\delta}$ fiind tensorul de curbură Riemann-Christoffel dat de relația Gauss-Codazzi

$$R_{\rho\alpha\beta\gamma} = b_{\rho\beta}\, b_{\alpha\gamma} - b_{\rho\gamma}\, b_{\alpha\beta}. \tag{45}$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuații cu derivate parțiale duce la găsirea funcțiilor ψ^{π}, η, χ și deci la găsirea prin intermediul relațiilor (17), (18), (19) și (20) a componentelor tensorilor eforturilor și momentelor. Aceste elemente cunoscute, tabloul stării globale de tensiune se completează, relațiile (36) și (37) permițînd determinarea componentelor tensorilor deformațiilor $p_{\alpha\beta}$ și $q_{\alpha\beta}$.

2. Cazul teoriei de membrană

Cazul teoriei de membrană duce la o simplificare substanțială a problemei.

În teoria de membrană a învelitorilor se consideră că tensorii momentelor și ai eforturilor transversale sînt nuli, adică

$$L^{\alpha\beta} = 0, \tag{46}$$

$$N^{\delta} = 0. \tag{47}$$

În baza acestor ipoteze ecuația (2) devine

$$\sqrt{a}\, c^{\alpha\mu} (\bar{r}_{\mu} \wedge c_{\delta\alpha} T^{\pi\delta} \bar{r}_{\pi}) + \overline{M} = 0, \tag{48}$$

de unde se obțin relațiile

$$c_{\pi\delta}\, T^{\pi\delta} = 0, \tag{49}$$

$$M^{\lambda} = 0, \tag{50}$$

prima ecuație exprimînd simetria tensorului $T^{\pi\delta}$ iar a doua relație nulitatea componentelor vectorului moment al forțelor exterioare.

Ținînd seama de relația (20) și de relația (47) care exprimă nulitatea tensorului eforturilor transversale, relația (18) devine

$$\begin{gathered} c^{\delta\mu} c^{\beta\gamma} b_{\beta\mu} \left(\nabla_{\gamma} \chi - \psi^{\lambda} b_{\lambda\gamma} - \frac{1}{4} c_{\theta\gamma} c_{\nu\omega} \int_0^{x^{\nu}} \int_0^{x^{\theta}} F^{\omega}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta} \right) + \\ + c^{\delta\mu} \nabla_{\mu} \eta + \frac{1}{2} \int_0^{x^{\delta}} F^{3}\, dx^{\delta} = 0. \end{gathered} \tag{51}$$

Înmulțind această relație cu $K^{-1} b_{\varphi\delta}$ și ținînd seama că

$$b_{\varphi\delta}\, b_{\beta\mu}\, c^{\delta\mu}\, c^{\beta\gamma} = - K\, a^{\gamma}_{\varphi},$$

se poate explicita expresia parantezei din relația (51)

$$\begin{aligned} a_{\varphi}^{\gamma}\left(\nabla_{\gamma}\chi - \psi^{\lambda} b_{\lambda\gamma} - \frac{1}{4} c_{\theta\gamma} c_{\nu\omega}\int_0^{x^{\nu}}\int_0^{x^{\theta}} F^{\omega}\, dx^{\nu}\, dx^{\theta}\right) = \\ = c^{\delta\lambda} K^{-1} b_{\varphi\delta} \nabla_{\lambda} \eta + \frac{1}{2} K^{-1} b_{\varphi\delta}\int_0^{x^{\delta}} F^3\, dx^{\delta}. \end{aligned} \tag{52}$$

Ținînd seama de expresia primului membru al relației (52), se poate deduce pe baza lui (17) expresia tensorului eforturilor tangențiale în funcție de o singură funcție potențială η,

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} = c^{\beta\mu} c^{\alpha\varphi} c^{\delta\lambda} \nabla_{\mu} K^{-1} b_{\varphi\delta} \nabla_{\lambda} \eta - c^{\beta\lambda} b_{\lambda}^{\alpha} \eta + \\ + \frac{1}{2} c^{\beta\mu} c^{\alpha\varphi} \nabla_{\mu} K^{-1} b_{\varphi\delta}\int_0^{x^{\delta}} F^3\, dx^{\delta} - \frac{1}{2}\int_0^{x^{\beta}} F^{\alpha}\, dx^{\beta}. \end{aligned} \tag{53}$$

Ecuația (49) este satisfăcută atunci cînd

$$\begin{aligned} c^{\gamma\mu} c^{\delta\lambda} \nabla K^{-1} b_{\gamma\delta} \nabla_{\lambda} \eta + 2H\eta - \frac{1}{2} c^{\mu\gamma} \nabla_{\mu} K^{-1} b_{\gamma\delta}\int_0^{x^{\delta}} F^3\, dx^{\delta} - \\ - \frac{1}{2} c_{\alpha\beta}\int_0^{x^{\beta}} F^{\alpha}\, dx^{\beta} = 0, \end{aligned} \tag{54}$$

unde H este curbura medie a suprafeței mediane dată de relația

$$H = \frac{1}{2} a^{\pi\lambda} b_{\pi\lambda}. \tag{55}$$

Ecuația (54) este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi liniară și neomogenă, fiind eliptică sau hiperbolică după cum K este pozitiv sau negativ.

Pentru o suprafață dată, coeficienții $b_{\alpha\beta}$ fiind cunoscuți, ecuația (54) se poate reduce ușor la una din formele canonice clasice pentru tipul de ecuație respectiv.

Funcția potențială η odată determinată din ecuația (54), componentele tensorului eforturilor tangențiale se obțin din relația (53). Tabloul stării de tensiune în teorie de membrană se completează dacă se determină componentele tensorului deformațiilor tangențiale $p_{\alpha\beta}$ ale suprafeței mediane, aceasta conform relației (37).

Deși tabloul stării de tensiune în teoria de membrană se reduce la determinarea totalității eforturilor tangențiale și a deformațiilor corespunzătoare, totuși calculele se pot continua și putem obține în loc de (46) și (47) valori diferite de zero pentru tensorii momentelor și ai eforturilor transversale.

Pentru aceasta dispunem într-o primă etapă de ecuațiile (28), din care se pot determina componentele deformației de încovoiere $q_{\alpha\beta}$

într-adevăr sistemul de ecuații (28) în care $p_{\alpha\beta}$ este presupus cunoscut este un sistem de patru ecuații în cele patru necunoscute $q_{\alpha\beta}$, tensorul $q_{\alpha\beta}$ fiind nesimetric). O dată $q_{\alpha\beta}$ cunoscut, se poate determina tensorul momentelor $L^{\alpha\beta}$ în baza lui (35).

Din ecuația de echilibru (1) se poate determina apoi N^{δ}, tensorul $L^{\alpha\beta}$ fiind presupus cunoscut. Operația de găsire a tensorilor $L^{\alpha\beta}$ și N^{δ} poate fi privită ca o operație de control, oferindu-ne posibilitatea să verificăm dacă într-adevăr cantitățile neglijate în trecere la teoria de membrană sînt mici.

III. CONCLUZII

Metoda expusă în prezenta lucrare permite deci determinarea stării de tensiune globală a învelitorilor subțiri arbitrare, prin rezolvarea sistemului de 4 ecuații cu derivate parțiale neomogen și liniar (38), (39) și (40) în cele patru funcții de efort ψ^{π}, η, χ.

Față de metodele expuse în alte lucrări, metoda noastră prezintă avantajul nefragmentării stării de tensiune în stări de tensiune elementare și a luării în considerație a forțelor masice și a sarcinilor exterioare.

Sistemului de ecuații (38), (39) și (40), i se poate aplica cu succes metoda integrării asimptotice.

În ceea ce privește cazul expus la II, 2, ecuația (54) cu derivate parțiale de ordinul doi este destul de bine studiată, așa încît noi nu ne vom opri asupra rezolvării ei.

Primită la redație la 24 decembrie 1956.

НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ТОНКИХ ГИБКИХ ОБОЛОЧЕК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В своей статье автор излагает новый метод, допускающий определение состояния общего напряжения полотна любой формы, учитывая массовые силы и внешние нагрузки.

Это достигается путем решения четырех уравнений с частными производными (38), (39), (40) и четырех уравнений напряжения ψ^{π}, η, χ.

С этой целью, структура уравнения (38), (39), (40) дает возможность успешного применения метода асимптотического интегрирования, описанного в [6].

После нахождения этих функций составляющие тензоров напряжений $T^{\alpha\beta}, N^{\alpha}$ и моментов $L^{\alpha\beta}$, а затем и деформаций $p_{\alpha\beta}, q_{\alpha\beta}$ определяются при помощи соотношений (17), соответственно (36), (37).

Во второй части рассматривается случай теории мембраны. На основе гипотез (46), (47), свойственных этой теории, получается одно уравнение с частными производными второго порядка (54), причем η — неизвестная функция.

Определение функции η приводит к нахождению составляющих тензора касательных напряжений $T^{\alpha\beta}$ (53) и составляющих тензора, соответствующих деформаций $p_{\alpha\beta}$ (37).

Наконец, дается метод контроля, позволяющий проверить насколько малы количества, опущенные при переходе к теории мембраны.

UNE NOUVELLE MANIÈRE DE FORMULER LE PROBLÈME GÉNÉRAL DES COQUES MINCES ÉLASTIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur expose une méthode qui permet de déterminer l'état de tension globale des coques d'une forme arbitraire, compte tenu des forces massiques et des charges extérieures. On y parvient, en résolvant les quatre équations aux dérivées partielles (38), (39), (40) dans les quatre fonctions d'efforts ψ^{π}, η, χ.

Dans ce but, la structure des équations (38), (39), (40) donne la possibilité d'utiliser avec succès la méthode de l'intégration asymptotique développée dans [6].

Une fois ces fonctions trouvées, les composantes des tenseurs des efforts $T^{\alpha\beta}$, N^{α}, des moments $L^{\alpha\beta}$ et des déformations $p_{\alpha\beta}$, $q_{\alpha\beta}$ sont déterminées, à l'aide des relations (17) respectivement (36), (37).

En II_b, on considère le cas de la théorie de membrane. Grâce aux hypothèses (46), (47), propres à cette théorie, on obtient une seule équation du deuxième ordre (54), ayant η pour fonction inconnue.

Après avoir trouvé cette fonction, on détermine les composantes du tenseur des efforts tangentiels $T^{\alpha\beta}$ (53) et les composantes du tenseur des déformations correspondantes $p_{\alpha\beta}$ (37). Enfin, on donne une méthode de contrôle, qui permet de vérifier si les quantités négligées, en partant de la théorie de membrane, sont petites.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Z. Chien, *The Intrinsic Theory of Thin Shell and Plates.* Quarterly of Applied Mathematics, 1944, vol. 1, nr. 4.
2. A. L. Goldenweiser, *Uravnenia teorii tonkih obolocek.* Prikl. Matem. Meh., 1940, t. IV, b2.
3. A. L. Goldenweiser i A. I. Lurie, *O matematikeskoi teoriii ravnovesia uprugih obolocek.* Prikl. Matem. Meh., 1947, t. XI, b5.
4. A. L. Goldenweiser, *Kacestvennoe issledovanie napriajenogo sostoiania tonkoi obolociki Prikl.* Matem. Meh., 1945, t. XI, C6.
5. — *Nekatorae priemă integrirnovania uravnenii teorii tonkih obolocek.* Prikl. Matem. Meh., 1946, t. X, b3.
6. — *Teoria uprugih tonkih obolocek.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
7. V. Visarion, *O metodă generală de rezolvare a invelitorilor elastici subțiri.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 5, martie 1956, p. 635.

8. A. Pucher, *Über den Spannungszustand in Gekrümmten Flächen.* Beton und Eisen,1934, vol. 33.
9. H. L. Langhaar, *An Invariant Membrane Stress Function for Shells.* Journal of Applied Mechanics, iunie, 1953, vol. 20, nr. 2.
10. W. Zerna, *Berechnung au der Rändern belasteter allgemeiner Schalen.* Z. angew. Math., Meh., 1950, vol. 30, caietul 11/12.
11. A. I. Lurie, *Obşceaia teoria uprughich tonkich obolocek.* Prikl. Matem. Meh., 1940, t. IV, b2.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

ELASTICITATE — REZISTENŢA MATERIALELOR

CU PRIVIRE LA INFLUENŢA UNUI MEDIU ELASTIC DE ÎNCASTRARE ASUPRA DISTRIBUŢIEI TENSIUNILOR ÎNTR-O CONSOLĂ

DE

ED. NICOLAU

Acest studiu experimental a fost întreprins pornind de la problema care se pune în proiectare, referitoare la influenţa pe care o exercită deformaţia terenului sau a masivului de fundaţie, asupra repartiţiei tensiunilor, în diafragmele de rigidizare utilizate la construcţiile cu sistem de rezistenţă din beton armat. Cazul mai interesant şi care a constituit obiectul acestei cercetări este acel al forţelor orizontale, paralele cu suprafaţa mediului de rezemare. Acest caz modelează, într-o primă aproximaţie, pe cel al sarcinilor dinamice provocate de cutremur şi transmise diafragmelor de rigidizare prin planşee.

Problema diafragmelor este legată prin forma suprastructurii de aceea a grinzilor pereţi, iar prin caracterul dependenţei de mediul de fundaţie de aceea a grinzilor pe mediu elastic.

Grinzile pereţi constituie elemente supuse unei stări de tensiune plane, iar rezolvarea lor a fost efectuată într-o serie de cazuri frecvente în practica construcţiilor, prin metodele elasticităţii plane. În toate aceste cazuri, soluţia se obţine pe cale directă, presupunîndu-se cunoscută situaţia pe contur, adică dîndu-se sarcinile sau deformaţiile pe contur. Sub acest aspect avem de-a face cu o problemă de elasticitate plană şi există numeroase metode practice de rezolvare rapidă şi suficient de exactă a cazurilor utilizate în mod curent. Punînd problema în acest mod, se neglijează faptul că tipul de solicitare, precum şi forma şi mărimea deformaţiilor de pe contur, sînt rezultatul conlucrării dintre două medii cu caracteristice elastice diferite şi care se găsesc în contact sub acţiunea unor forţe exterioare. O asemenea problemă de contact, a cărei soluţie este dată pentru diferite cazuri curente în practica de proiectare (în fundaţii), este aceea a grinzii pe mediu continuu. Pentru rezolvarea acestei probleme se admite o anumită ipoteză asupra legăturii dintre deformaţie şi solicitare, pe conturul pe care se stabilește contactul dintre : grindă și mediul de rezemare și apoi, în cele mai multe cazuri, se tratează grinda cu metodele rezistenței materialelor, adică considerînd-o ca o bară. Se deduc apoi tensiunile în mediul de fundare care este echivalat cu un semiplan sau un semispațiu elastic.

Încastrarea diafragmelor de rigidizare nu poate fi tratată însă în acest mod, deoarece diafragma nu poate fi asimilată cu o bară care are practic o variație liniară a deformației în întreaga secțiune. De aceea, avem de-a face cu o problemă de contact în cadrul teoriei elasticității. Rezolvarea analitică a unei asemenea probleme este în multe cazuri imposibilă și, în general, extrem de greoaie. În plus, ea impune asemenea ipoteze asupra naturii fizice a mediilor în contact, încît rezultatele obținute cu o mare rigoare matematică sînt aproximative pentru problema pusă de practică. Un studiu experimental, ca acela prezentat în această lucrare, poate să se efectueze asupra unui sistem mecanic ce modelează mai bine și mai complet realitatea, iar aproximațiile care rezultă pot din această cauză să nu fie mai mari decît acelea din cazul unui studiu teoretic. În orice caz, o asemenea cercetare experimentală, completată de analiza unui studiu teoretic, poate duce la concluzii de valoare practică.

Caracteristicile experimentărilor. Cercetările experimentale prezentate mai jos au fost făcute cu ajutorul metodei optice de cercetarea tensiunilor, fotoelasticimetria. Încercările au fost efectuate pe modele de plexiglas și pe juralit. Plexiglasul a fost întrebuințat în toate cazurile pentru trasarea izoclinelor, iar juralitul pentru fotografierea izocromaticelor. Modelul are forma dată în figura 1.

După cum se vede, este vorba de o consolă încastrată într-un mediu din același material, asigurîndu-se astfel continuitatea.

Încărcarea cu forța F a fost realizată prin intermediul unui jug cu dințișori, care transmite pe întreaga înălțime a consolei tracțiunea exercitată la capătul său de jos (fig. 2). S-a considerat deci modul în care planșeul transmite diafragmei de rigidizare forța masică a construcției. Prinderea mediului de încastrare s-a făcut rigid prin două plăci metalice.

Dimensiunile modelelor au fost aproximativ :

$$\begin{aligned} h &= 30 \text{ mm},\\ l &= 15-180 \text{ mm},\\ H &= 120 \text{ mm},\\ L &= 100 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Razele de curbură utilizate au fost de 25, 20, 15, 10, 5, 2.5 și 0 mm.

Grosimea plăcilor întrebuințate a fost cuprinsă între 5 și 6 mm.

Forțele care au acționat asupra modelelor au ajuns pînă la 30 kg.

Studiul izoclinelor. Din figura 3 se poate observa care este aspectul general al tablourilor de izocline. Izoclina de 45° coincide cu axa de simetrie a modelului.

Se poate observa că izoclina de parametru 0° este o curbă închisă care cuprinde un domeniu așezat în cea mai mare parte în mediul de încastrare și în mică măsură în consolă. De-a lungul unei drepte paralele cu lungimea

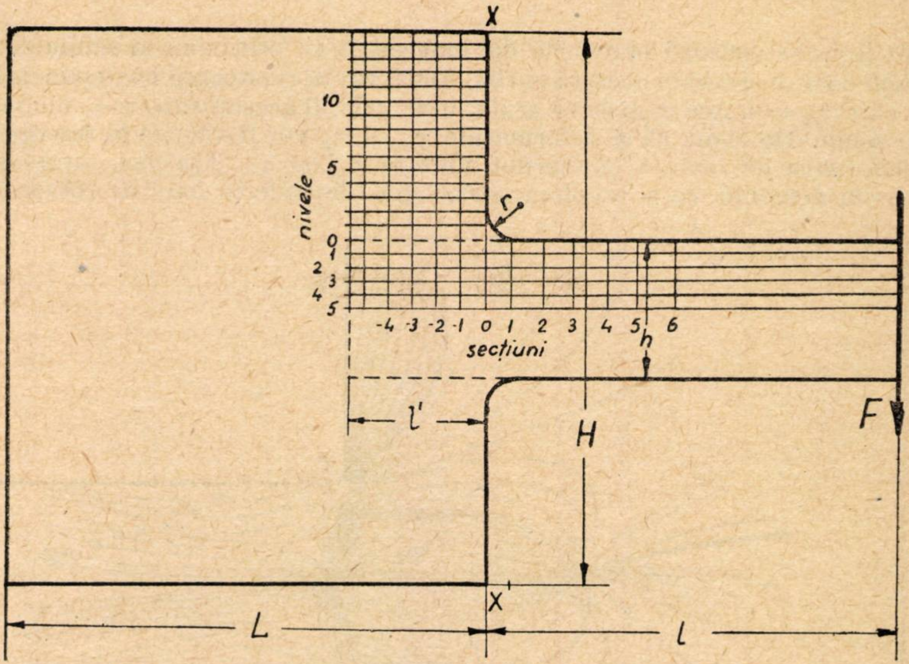
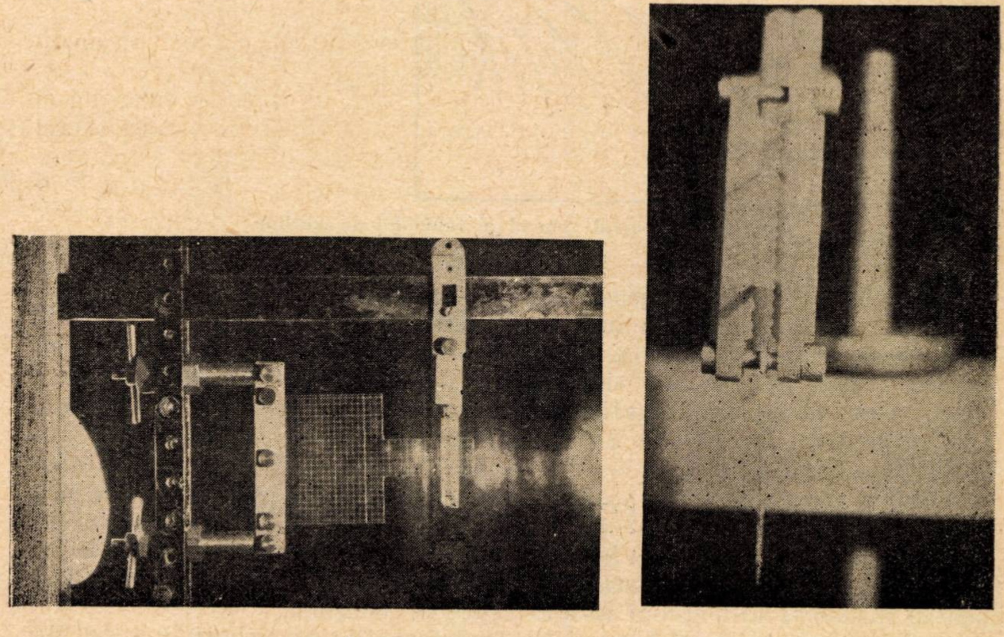

X
10
5
nivele
0
1
2
3
4
5
r
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6
secțiuni
h
l'
H
F
X'
L
l

Fig. 1. — Consolă încastrată. Schema modelului experimentat.



a) b)

Fig. 2. — Consolă încastrată : a) solicitarea modelului ; b) jugul de repartiţie a forţei.

sau lățimea consolei eforturile de lunecare trec prin zero și schimbă de semn cînd se străbate această curbă. Deci, curba reprezintă locul punctelor în care $\tau_{xy} = 0$. Așa cum se va arăta, în interiorul acestei zone și σ_x schimbă de semn. De sigur că și deformațiile γ_{xy} și ε_x vor fi diferite în funcție de schimbarea de semn a eforturilor unitare τ_{xy} și σ_x. Așa dar, întinderea acestui domeniu, ca și amplasamentul său, depinde în fond de rotația pe care o suferă consola în încastrare. Aceste elemente caracterizează deci, în mare măsură, gradul de încastrare elastică a consolei.

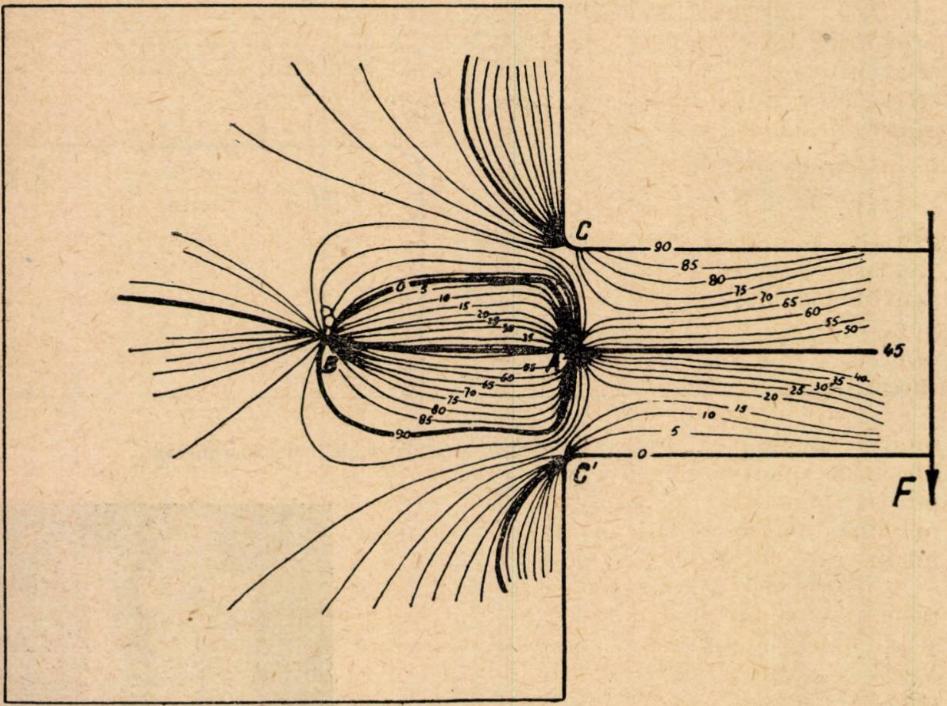


Fig. 3. — Aspectul general al tabloului de izocline.

Dacă examinăm numai deformația fibrei medii (axa de simetrie) limitele acestei izocline de 0° sînt marcate de două puncte singulare, puncte care din examenul izocromaticelor a rezultat că sînt și izotrope, $\sigma_1 = \sigma_2$. Din amplasarea lor pe axa de simetrie rezultă că eforturile sînt nule în aceste puncte (deci $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$). Așa cum au arătat cercetările sistematice întreprinse asupra variației poziției acestor puncte, o deosebită importanță are poziția punctului singular A din consolă, punct de deformație unghiulară nulă. De o parte și de alta a lui deformațiile unghiulare au sensuri diferite și de aceea el este caracteristic, atît pentru secțiunea de încastrare, cît și pentru influența forfecărilor asupra săgeților consolei.

Se știe că, în cazul încovoierii, la deformație contribuie în afară de rotația provocată de momentul încovoietor și aceea produsă de forțele tăietoare prin lunecări. La consolele cu raportul $\frac{l}{h}$ relativ mic, ultimul termen devine important în raport cu primul, nu poate fi neglijat în calculul săgeții și poate deveni chiar elementul preponderent.

Punctul singular despre care este vorba delimitează două zone : una, în spre consolă, în care influența lunecărilor amplifică săgeata provocată de momentul încovoietor, iar alta spre mediul de încastrare, în care se produce o micșorare a acestei săgeți. Rezultă de aci că amplificarea săgeții provocată de lunecări este cu atît mai însemnată cu cît punctul singular aflat în consolă este mai apropiat de secțiunea de încastrare sau chiar trece de ea, intrînd în mediul de încastrare. Încercările care s-au făcut cu ajutorul tablourilor de izocline au arătat că, printre factorii care determină poziția punctelor singulare, importanți sînt $\frac{h}{H}$, $\frac{l}{h}$ și r.

În diagramele prezentate în figura 4 se poate vedea cum variază distanța punctelor A și B de secțiunea limită a mediului de încastrare. Deplasarea ambelor puncte se face, în general după legi parabolice, diferite pentru A și B și, pentru lungimi relative din ce în ce mai mici, cele două puncte se îndreaptă spre coincidență, după care dispar. Prin apropierea punctelor A și B de sigur că și domeniul cuprins de izoclina de 0° se micșorează pînă la anihilare.

Este interesant de remarcat faptul că atunci cînd H și L cresc mult în raport cu h, punctul singular B se depărtează de A foarte mult, dispărînd apoi complet. Această observație face să se presupună că la poziția punctului B contribuie în mare măsură apropierea secțiunii maxime limită XX' de marginile mediului de încastrare, precum și modul său de prindere.

S-a urmărit și dependența dintre poziția punctului A și mărimea razei de curbură pentru racordarea de la nașterea consolei. S-a constatat și aici o dependență oarecum parabolică foarte apropiată de linia dreaptă. Variația poziției punctului singular A are loc în același sens, de la raze mari la raze mici de curbură, ca și de la lungimi relativ mici la cele mari de consolă. Rezultă deci, ceea ce era și de presupus, că efectul racordărilor la colțuri este echivalent într-o anumită măsură cu reducerea lungimii relative a consolei.

Din examinarea tuturor diagramelor prezentate, rezultă ca o concluzie importantă că, în cazul încastrării într-un mediu elastic, punctul singular se apropie cu atît mai mult de secțiunea-limită XX' cu cît raportul $\frac{l}{h}$ este mai mic. În cazul consolelor scurte $\left(\frac{l}{h} \leqslant 1{,}5\right)$ el trece chiar de partea cealaltă a secțiunii-limită. S-ar putea vorbi deci de o *lungime caracteristică* pentru deformația produsă de lunecări și care la consolele foarte scurte este mai mare decît lungimea efectivă a consolei.

Dacă se urmăresc tablourile de izocline (fig. 5) pentru diferite valori ale raportului $\frac{l}{h}$, se poate constata că izoclinele se îndesesc din ce în ce mai mult către axa longitudinală a consolei și că deci variația orientării direcției principale este cu atît mai lentă în treimile marginale și cu atît mai

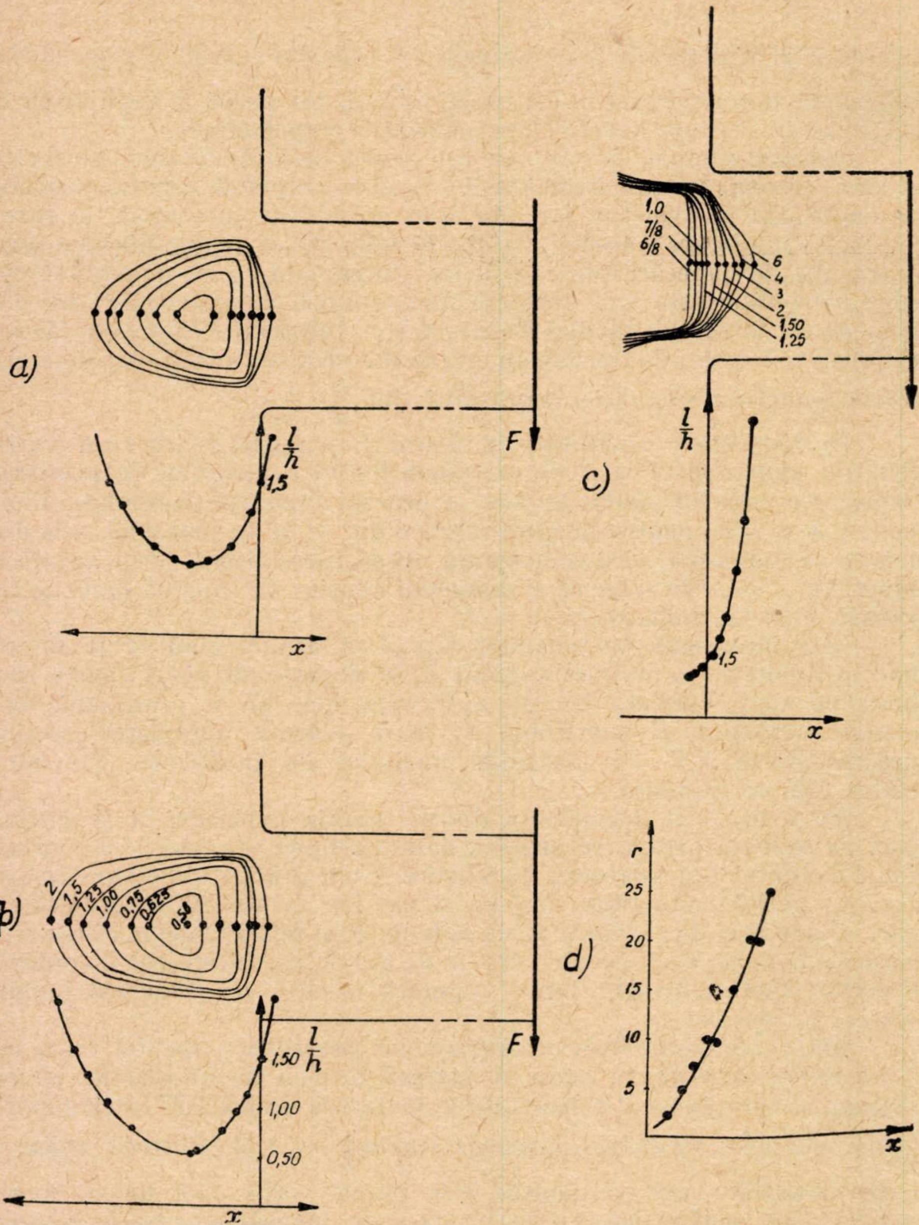


Fig. 4. — Variația poziției punctelor singulare izotrope: *a*) izoclina de 0° și diagrama deplasării punctelor *A* și *B* în funcție de $\frac{l}{h}$, pentru $\frac{h}{H} = \frac{1}{2,5}$; *b*) idem pentru $\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$; *c*) idem pentru $\frac{h}{H} = \frac{1}{8}$; *d*) diagrama deplasării punctului izotrop *A* cînd variază raza de curbură $\left(\frac{l}{h} = 2.\right)$

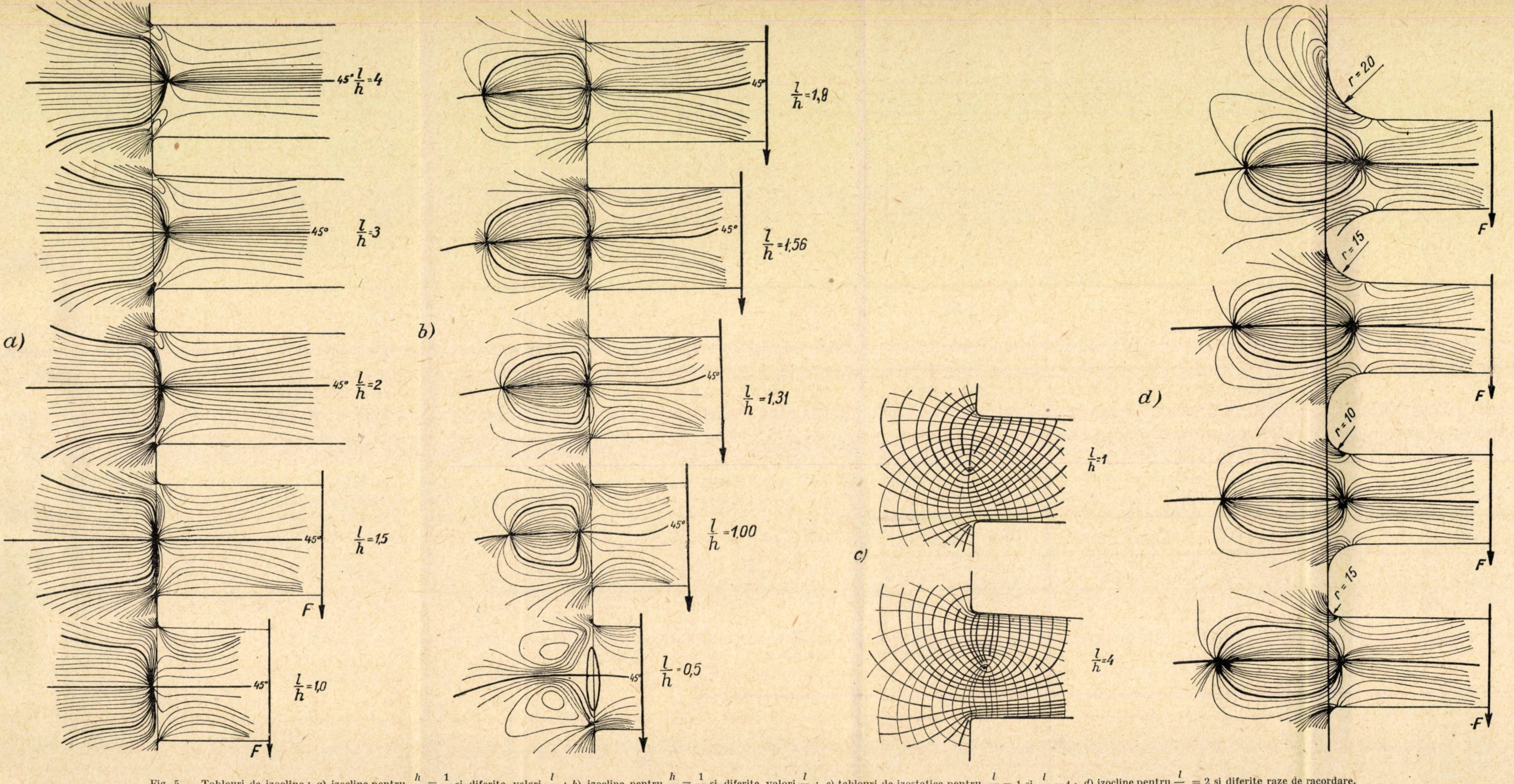

a)
45°
$\frac{l}{h}=4$
$\frac{l}{h}=3$
$\frac{l}{h}=2$
$\frac{l}{h}=1,5$
$\frac{l}{h}=1,0$
F
b)
$\frac{l}{h}=1,8$
$\frac{l}{h}=1,56$
$\frac{l}{h}=1,31$
$\frac{l}{h}=1,00$
$\frac{l}{h}=0,5$
c)
$\frac{l}{h}=1$
$\frac{l}{h}=4$
d)
r = 20
r = 15
r = 10
r = 15

Fig. 5. — Tablouri de izocline : *a*) izocline pentru $\frac{h}{H}=\frac{1}{8}$ şi diferite valori $\frac{l}{h}$; *b*) izocline pentru $\frac{h}{H}=\frac{1}{3}$ şi diferite valori $\frac{l}{h}$; *c*) tablouri de izostatice pentru $\frac{l}{h}=1$ şi $\frac{l}{h}=4$; *d*) izocline pentru $\frac{l}{h}=2$ şi diferite raze de racordare.

rapidă în cea mediană cu cît lungimea relativă a consolei este mai mare. Această observație care este și mai evidentă în tablourile de izostatice (fig. 5 *c*) poate să aibă o anumită însemnătate la alegerea orientării armăturii în elementele de beton armat, în zona încastrării.

În cele de mai sus, s-a vorbit de existența celor două puncte singulare *A* și *B*. Un examen mai atent arată că mai există încă două puncte importante *C* și *C'*, aflate pe curbura zonei de racordare. Spre deosebire de primele două *A* și *B*, acestea din urmă au alt caracter. Ele sînt puncte în care eforturile unitare au valori extreme. Din examenul tablourilor de izocline se vede că în zona racordării există una sau două izocline care vin normal pe contur. Ca o consecință a teoremei lui Mesnager, rezultă că în punctele corespunzătoare pe contur vom avea valori maxime sau minime ale eforturilor unitare. Prezența acestor puncte și faptul că ele corespund concentrării maxime a eforturilor va rezulta mult mai clar din examenul tablourilor de izocromatice.

Studiul izocromaticelor. Examenul izocromaticelor este, în general, mai sugestiv decît acela al izoclinelor pentru că ele dau informații asupra mărimii eforturilor. În figura 6 se poate vedea aspectul general al izocromaticelor la consola încastrată cu sau fără racordare. Modelele prezentate aici au raportul $\frac{l}{h}$ cuprins între 1,8 și 2,0. Poziția punctelor singulare *A* și *B* este bine pusă în evidență prin puncte distincte. Făcîndu-se comparație între poziția punctelor singulare în izocromatice cu aceea din izocline, s-a constatat o deplină concordanță, deși izocromaticele s-au obținut pe modele din juralit, iar izoclinele pe alte modele din plexiglas, ceea ce confirmă identitatea condițiilor de încărcare.

Pe tablourile de izocromatice se pot vedea mai bine concentrările de eforturi care apar la colțuri, în regiunea încastrării. Examinînd succesiv tablourile de izocromatice (fig. 7) pentru consola cu colțuri intrînde sau cu diferite raze de racordare, se poate vedea cum aglomerarea de izocromatice scade, cum ordinul de bandă, și deci mărimea efortului principal, scade la marginea intrîndului racordat, pe măsura creșterii razei de racordare. Din aceste tablouri se poate urmări variația poziției punctelor de maxim pentru efortul normal, puncte care se găsesc chiar pe contur. S-a putut stabili astfel că variația poziției acestor puncte în raport cu limita mediului de încastrare este aproximativ liniară, așa cum se vede din diagrama din figura 8. Rezultă că, în conformitate cu panta diagramei liniare, pentru consola de lungime relativă $\frac{l}{h} = 2$ punctul se găsește la o depărtare $y = \frac{1}{82} rh$ de secțiunea de încastrare. De asemenea, se poate urmări variația concentrării eforturilor. Din figura 9 se vede modul cum variază $\alpha = \frac{\sigma_{ef}}{\sigma_{prop.}}$. Acest coeficient poate fi calculat dacă ținem seama de expresiile cunoscute din fotoelasticitate și din rezistența materialelor

$$\sigma_{ef} = 2n\,\tau_0,$$

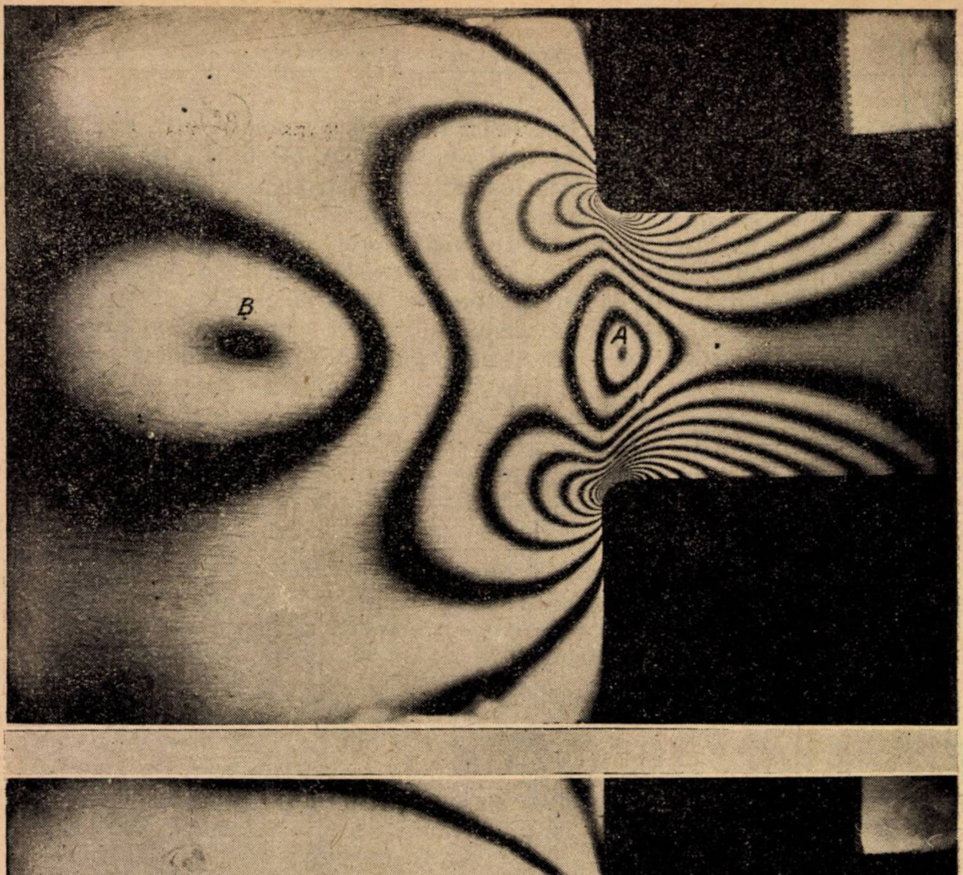


Fig. 6. — Aspectul general al izocromaticelor la consola încastrată.

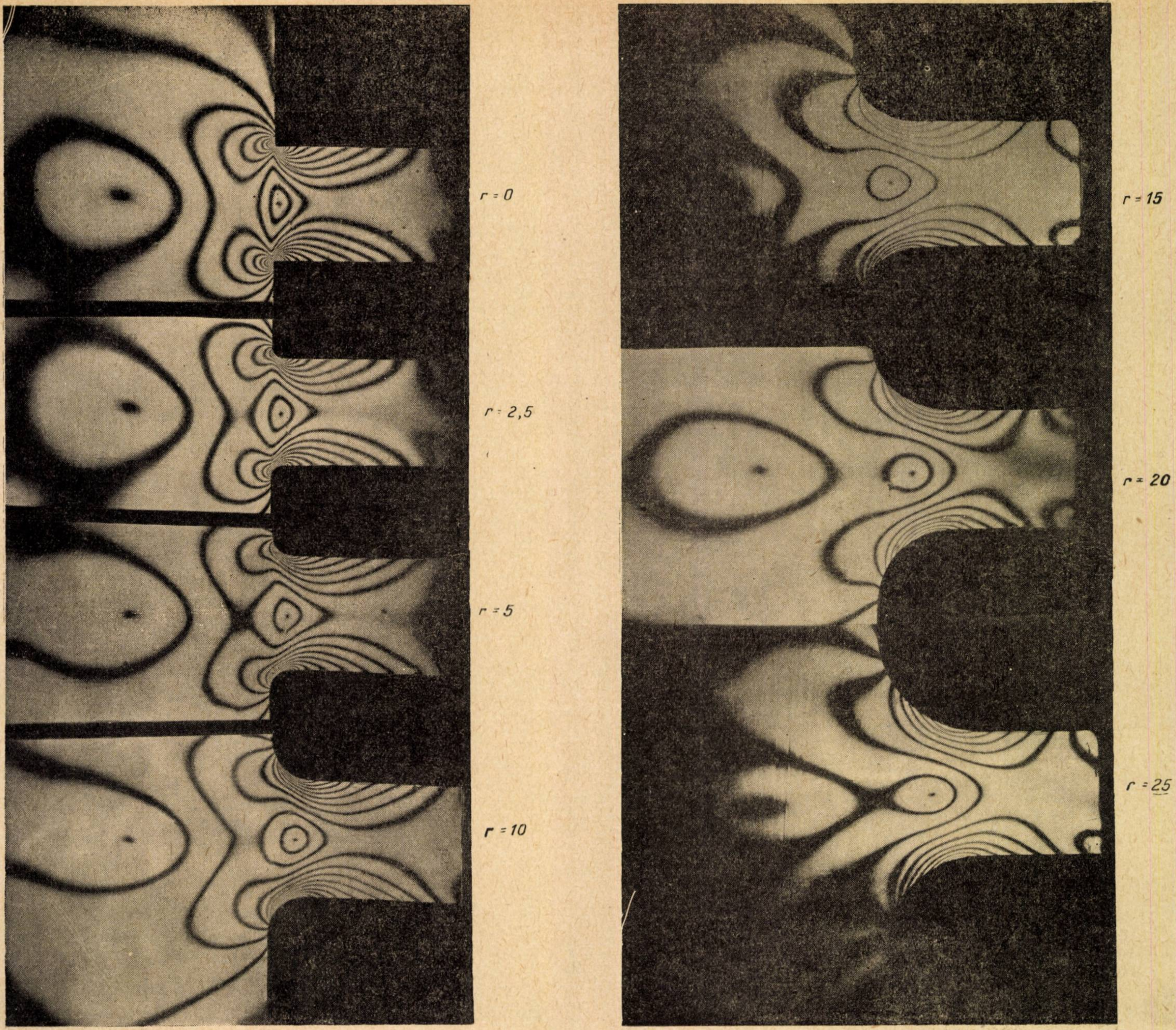

r = 0
r = 2,5
r = 5
r = 10
r = 15
r = 20
r = 25

Fig. 7. — Tablouri de izocromatice la consola cu diferite raze de curbură.

unde τ_0 este valoarea benzii modelului în kg/cm^2 efort de lunecare, iar n este ordinul de bandă izocromatică și

$$\sigma_{prop.} = \frac{M}{W} = k\,\frac{M}{h^2},$$

unde M este momentul încovoietor în secțiune, h este înălțimea secțiunii iar k un coeficient de proporționalitate.

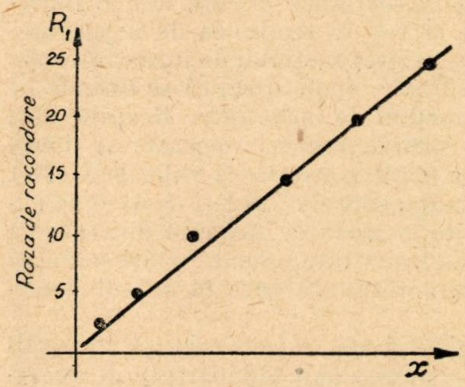


Fig. 8. — Variația poziției punctului de efort maxim pe conturul racordat în funcție de raza de racordare, la consola încastrată.

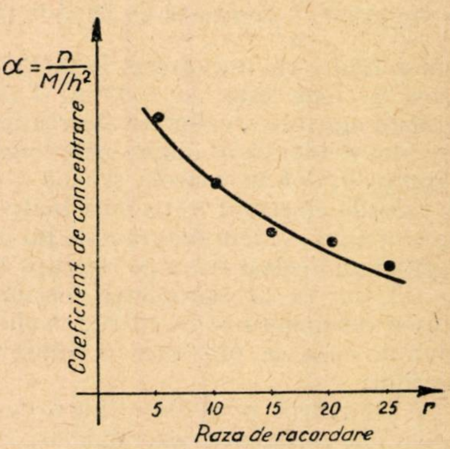


Fig. 9. — Variația gradului de concentrare a eforturilor cu raza de racordare.

Calculul stării de tensiune. Se prezintă aici unul din cazurile studiate și anume consola încastrată, de lungime relativă $\frac{l}{h} = 2{,}0$. În figura 10 se pot vedea tablourile de izocline, de izocromatice, precum și tabloul celor două familii de izostatice trasate pe baza izoclinelor.

Pentru ca să se asigure o mai mare precizie a rezultatelor, s-au trasat diagrame longitudinale și transversale de variații ale valorilor n — ordinul de bandă — și θ — parametrul izoclinei. S-a putut asigura astfel continuitatea valorilor de bază, în calculul eforturilor. În figura 11 sînt arătate diagramele longitudinale și transversale ale valorilor n și θ.

Pe baza acestor valori s-au putut calcula valorile eforturilor τ_{xy}, σ_x și σ_y, care sînt prezentate în diagramele din figura 12, 13, 14.

Din examenul diagramei de variație a eforturilor τ_{xy} se poate constata că, de la distanța 1,3 h măsurată de la secțiunea de încastrare, variația lui τ_{xy} este parabolică de-a lungul secțiunilor transversale. Pe zona pînă la 1,3 h, diagrama de variație este însă cu totul diferită de o parabolă și are maximele (chiar superioare celor de la parabole) către marginile grinzii. Se poate totodată observa că, începînd din punctul singular τ_{xy}, are și valori negative care apar în limitele conturului izoclinei de 0°, ceea ce înseamnă că aici lunecările au loc în sens invers decît în restul consolei. Din diagramele longitudinale ale lui τ_{xy} se poate urmări, pentru diferite nivele paralele cu axa neutră, secțiunile în care valorile corespunzătoare ale lui τ_{xy} schimbă semnul.

Eforturile normale σ_x paralele cu planul secțiunilor transversale și care în rezistența materialelor sînt considerate nule, se vede din diagramele din figura 13 că au valori destul de însemnate și comparabile cu cele ale eforturilor unitare normale σ_y, în regiunea secțiunii de încastrare. Astfel, comparînd valorile maxime ale lui σ_x și σ_y în diferite secțiuni, se constată că raportul $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ descrește de la 85,0, pentru secțiunea aflată la 1,3 *h* de secțiunea limită de încastrare, la 20,0, pentru secțiunea în care începe racordarea și care este la 0,83 *h*, și pînă la 1,6, în secțiunea de încastrare. Această creștere a valorilor eforturilor σ_x în zona secțiunii de încastrare este mai ales evidentă în diagramele longitudinale, unde apare că se întinde pe distanța 0,85 *h* în consolă și 0,33 *h* în mediul de încastrare. Rezultă deci că valorile efortului σ_x trebuie luate în considerație în proiectare ca și cele ale efortului σ_y. Din diagramele lui σ_x se poate constata că valorile acestor eforturi au același semn pe aproape întreaga consolă (același cu al eforturilor σ_y), dar că, în apropierea secțiunii de încastrare, începînd din consolă și apoi întinzîndu-se pe întreg mediul de încastrare, efortul σ_x își schimbă semnul, ceea ce provoacă o schimbare corespunzătoare în sensul deformațiilor.

Eforturile normale σ_y au o variație liniară, în concordanță cu rezultatele din rezistența materialelor, în secțiunile mai îndepărtate de încastrare. În cele care sînt la o distanță mai mică decît 0,35 *h*, diagrama efortului σ_y nu mai este liniară și cam de la 0,25 *h* maximul nu mai este chiar la marginea consolei, ci undeva în interiorul ei. De altfel, valorile maxime ale efortului σ_y sînt în zona încastrării mai mici decît în secțiunile îndepărtate de această regiune, în timp ce, așa cum s-a arătat mai sus, valorile σ_x sînt cele ce cresc aici, sensibil. Așa cum se poate remarca din diagramele longitudinale ale efortului σ_y, valorile maxime ale acestuia apar în secțiunile transversale, în apropierea punctelor singulare de efort principal maxim, de pe conturul racordat al consolei, și despre care a fost vorba mai sus.

Încercări suplimentare. În afara încercărilor prezentate pînă aici, s-a căutat să se modeleze o disimetrie în condițiile de încastrare prin racordări de raze diferite. Păstrîndu-se de o parte o rază de racordare de 20 mm, s-a variat raza de racordare în partea cealaltă. La un examen calitativ se vede (fig. 15) că fiecare jumătate longitudinală a consolei corespunde consolei cu racordarea corespunzătoare dispusă simetric, iar poziția punctelor singulare de efort maxim se supune aceleiași legi dedusă mai sus. Poziția punctului singular izotrop urmează însă o lege proprie, redată în diagrama din figura 16, fără însă ca el să iasă din axa de simetrie a consolei.

Concluzii. În lucrarea de față se studiază influența încastrării în mediul de fundație al diafragmelor de rigidizare, considerîndu-se că acest mediu se bucură de aceleași proprietăți elastice ca și acelea ale diafragmei. Acesta este un caz mijlociu și anume acela în care deformația mediului este destul de importantă pentru a influența asupra gradului de încastrare

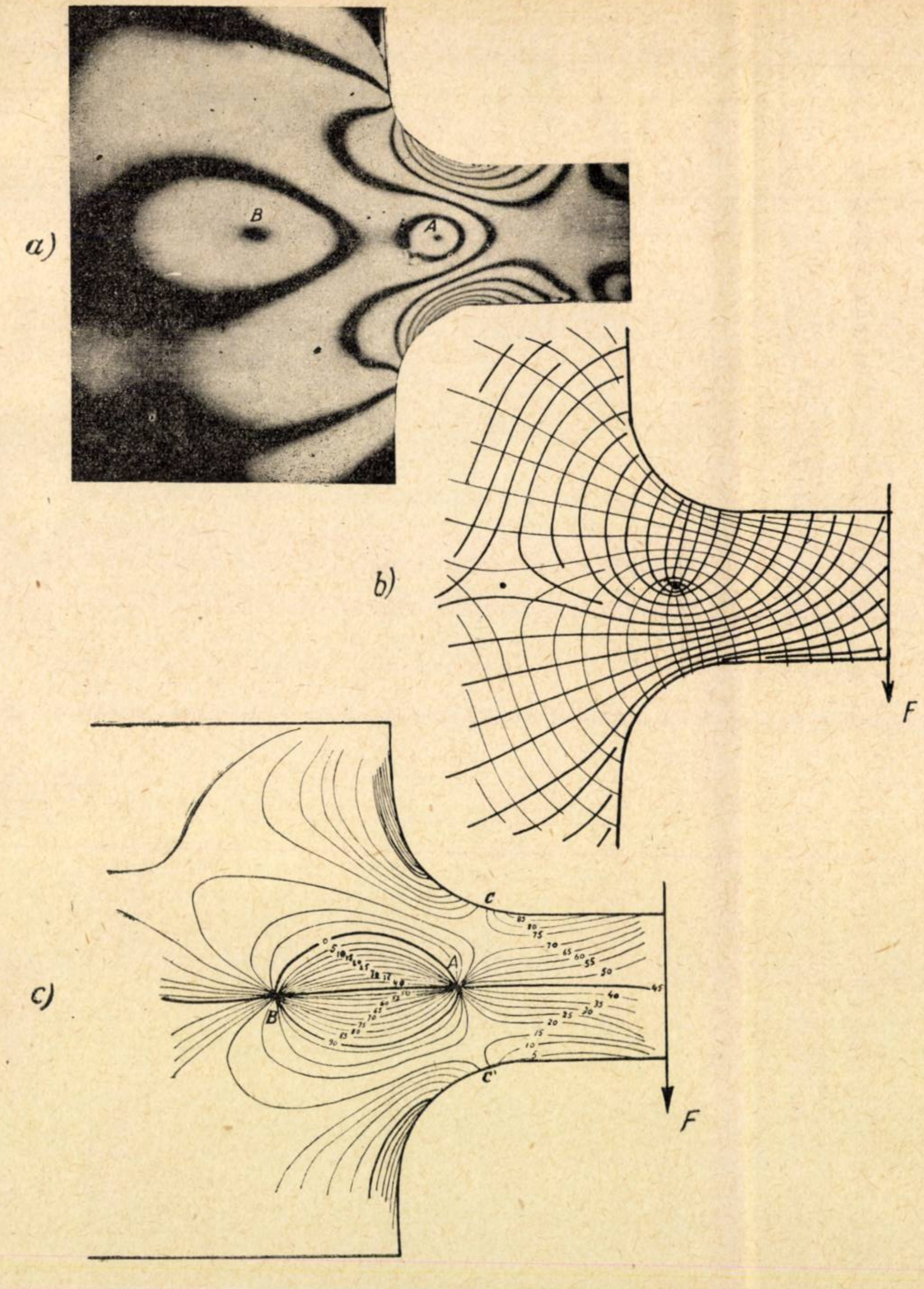


Fig. 10. — Elementele experimentale pentru consola încastrată : *a*) izocromatice ; *b*) izostatice ; *c*) izocline.

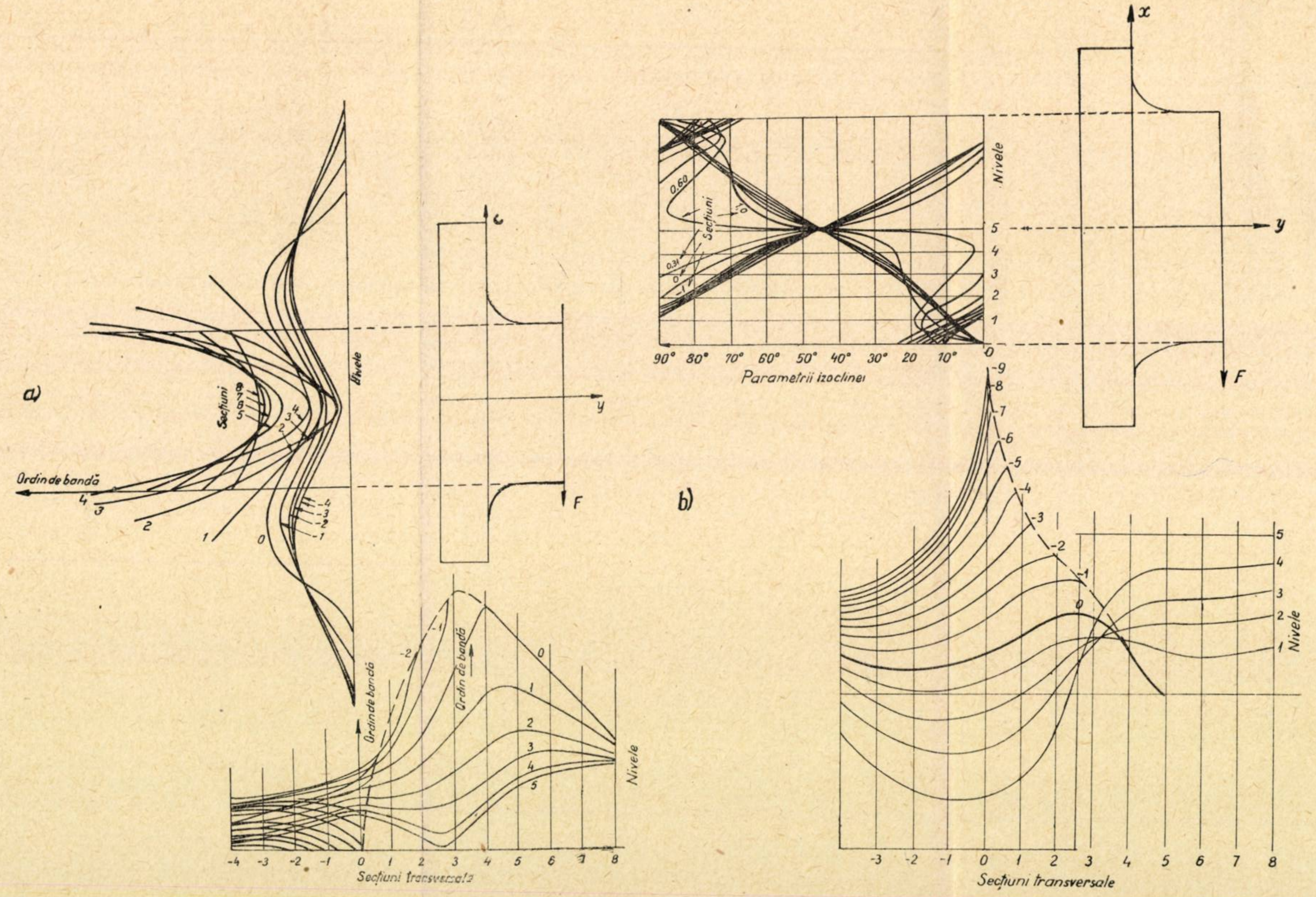


Fig. 11. — Diagrame longitudinale și transversale pentru *n* și θ : *a*) ordinul de bandă ; *b*) parametrul izoclinei θ.

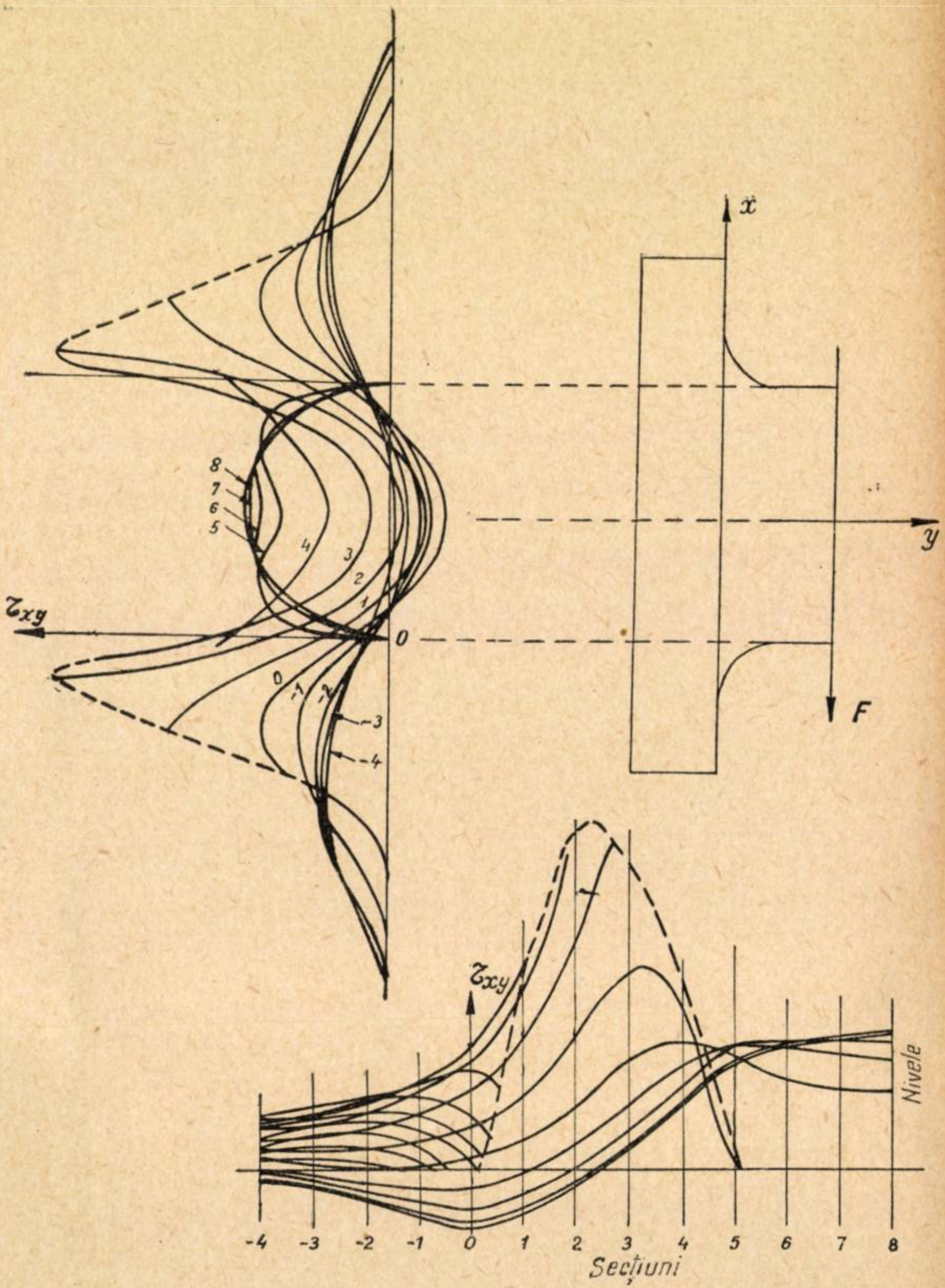


Fig. 12. — Diagrame longitudinale transversale pentru eforturile τ_{xy}.

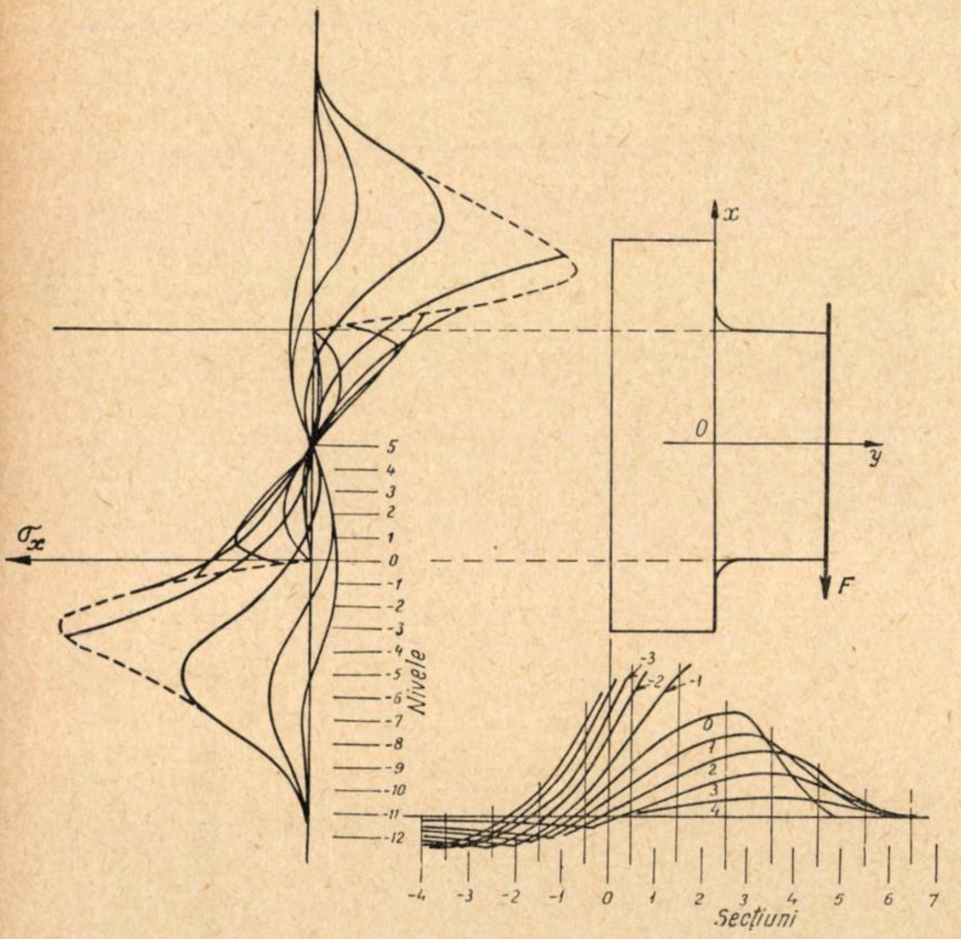


Fig. 13. — Diagrame longitudinale transversale pentru eforturile σ_x.

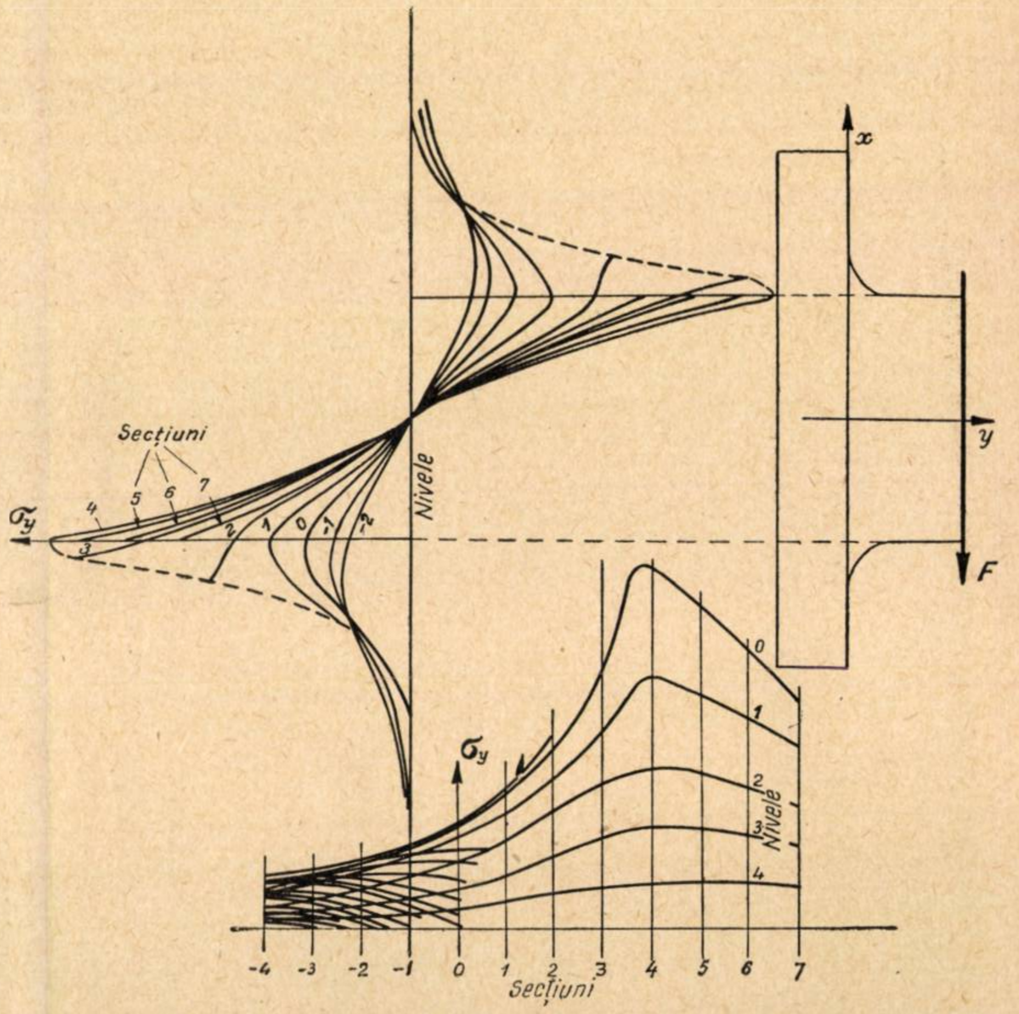


Fig. 14. — Diagrame longitudinale transversale pentru eforturile σ_y.

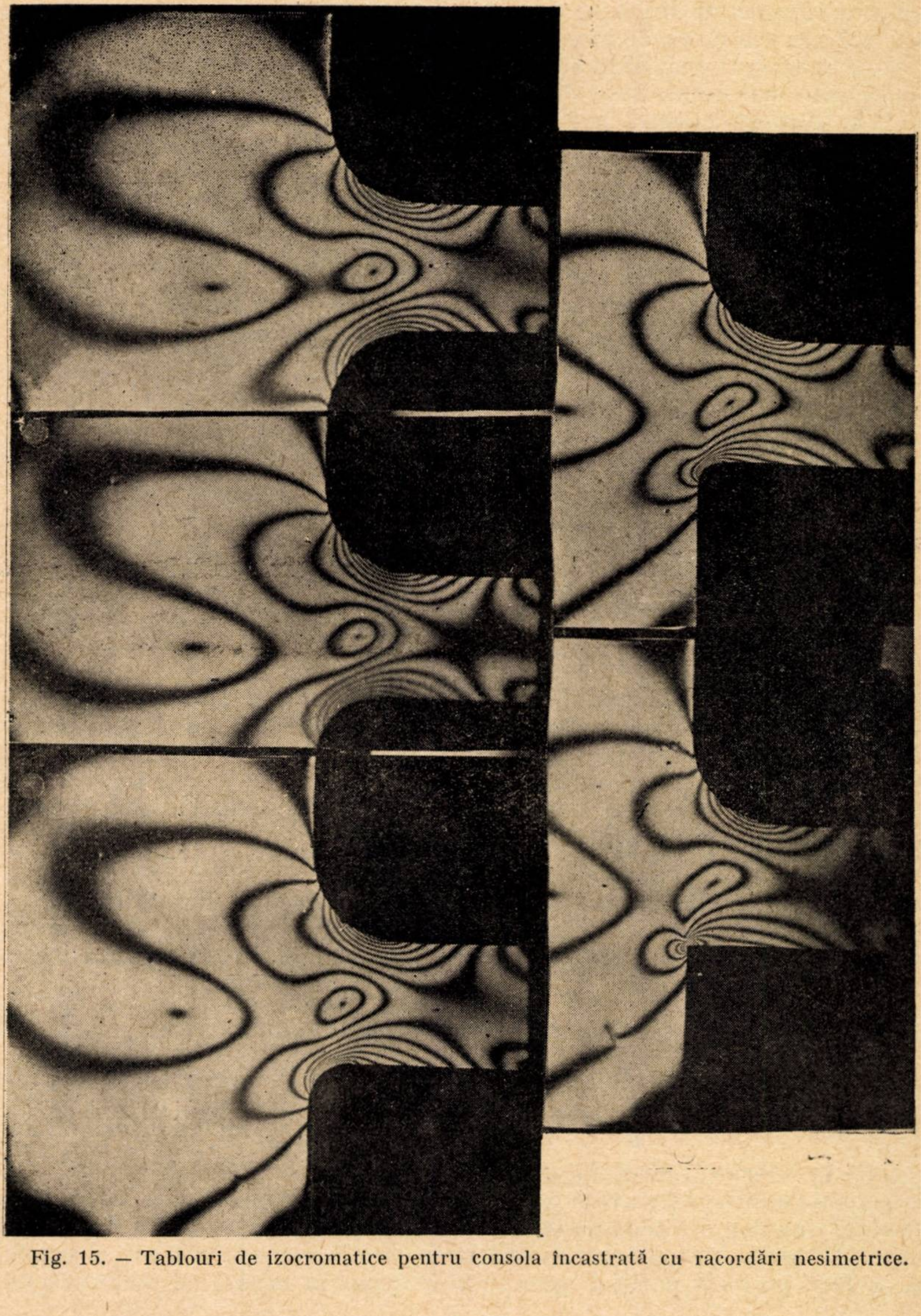


Fig. 15. — Tablouri de izocromatice pentru consola încastrată cu racordări nesimetrice.

elastică și asupra repartiției eforturilor în consolă, însă, pe de altă parte, deformabilitatea mediului nu este atît de mare încît diafragma să se deplaseze rigid în secțiunea de margine ca ștampă rigidă.

Din cele prezentate în această lucrare se desprind o serie de concluzii, dintre care mai importante sînt următoarele :

1. Rotația elastică a încastrării, și deci deformația consolei, este caracterizată de poziția unui punct singular, aflat în zona de încastrare și în care deformațiile unghiulare și lineare sînt nule. Contribuția forței tăietoare la deformația consolei este evidențiată de poziția acestui punct singular. Această concluzie concordă, prin consecințele ei, cu faptul cunoscut că influența lunecărilor este mare la consolele scurte.

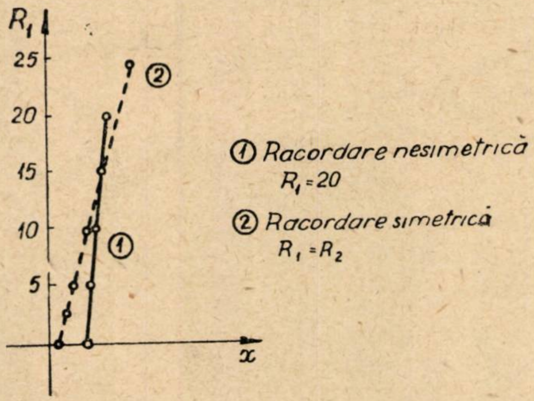


Fig. 16. — Variația poziției punctului izotrop în funcție de raza de racordare, la racordări nesimetrice.

2. Poziția punctului singular A este funcție de mai mulți factori, dintre care mai importanți sînt $\frac{l}{h}$, $\frac{r}{r}$ și $\frac{h}{H}$ (variația de secțiune în încastrare). Racordările sau vutele sînt echivalente cu o mărire a lungimii relative a consolei, din punctul de vedere al aportului forței tăietoare la deformație, și măsura influenței lor poate fi determinată cantitativ din poziția punctului singular A.

3. Raportul $\frac{l}{h} = 1{,}5$ marchează trecerea punctului singular prin secțiunea de încastrare. Influența forței tăietoare la deformație este însemnată mai ales pentru $\frac{l}{h} < 1{,}5$. În cazurile în care punctul singular se găsește în interiorul mediului de încastrare — deci la consolele scurte — în secțiunea de încastrare avem o rotație mai mare sau mai mică, după cum punctul singular A este mai adînc sau mai la suprafața mediului de încastrare. De aceea, propunem ca împărțirea acestor console în medii și scurte să se facă pe baza poziției punctului singular în raport cu secțiunea de

încastrare și deci în cazurile tratate raportul $\frac{l}{h} = 1{,}5$ și nu 2, cum se consideră în prezent, este determinant.

4. La consolele scurte, variația orientării eforturilor principale este mult mai rapidă decît la cele medii, pe o secțiune transversală, unde pe treimile marginale eforturile principale sînt aproape paralele, respectiv perpendiculare pe marginile consolei. Rezultă de aici consecințe pentru orientarea armăturii la consolele scurte.

5. În zona încastrării, eforturile normale perpendiculare pe axa de simetrie a consolei, au valori importante — comparabile cu cele ale eforturilor normale paralele cu axa, cunoscute din rezistența materialelor — și trebuie luate în considerație la calcul. În zona încastrării variației eforturilor tangențiale se deosebește radical de cunoscuta diagramă parabolică.

Primită la redacție la 22 ianuarie 1957.

О ВЛИЯНИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ ЗАДЕЛКИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В КОНСОЛЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье рассматривается участие среды заделки в деформации заделанной консоли вместе с консолью. Определяются единичные точки, характерные для заделки. Рассматривается влияние главных факторов на положение этих особых точек. Рассматривается таким образом количественно влияние следующих факторов: изменения относительной длины консоли $\frac{l}{h}$, различные радиусы присоединения в зоне заделки и протяжение среды заделки.

Устанавливается значение положения особой точки по близости от сечения, разграничивающего консоль и среду заделки — точки нулевых угловых деформаций. Устанавливается, что эта точка находится в консоли при относительно большой длине консолей и в среде заделки при небольшой. Устанавливается, что точка находится на границе между консолью и средой заделки при отношении $\frac{l}{h} \approx 1{,}5$.

На основе таблиц изоклин устанавливается, что у коротких консолей изменение ориентации главных направлений на много быстрее, чем у консолей средней длины, у которых в крайних третях высоты консолей главные направления почти параллельны — соответственно, перпендикулярны — краям консолей.

В конце даются полные продольные и поперечные диаграммы для единичных усилий σ_x, σ_y и τ_{xy} в консоли с соотношением $\frac{l}{h} \approx 2$ при значительных переходах. Для каждого единичного усилия определяется протяжение нарушенной зоны заделки.

Приводятся также дополнительные испытания для консолей с неодинаковыми переходами.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Заделанная консоль. Схема опытного образца.

Рис. 2. — Заделанная консоль. *a* — загрузка модели, *b* — пояс распределения силы.

Рис. 3. — Общий вид таблицы изоклин.

Рис. 4. — Изменение положения особых изотропных точек: *a* — Изоклина 0 и диаграмма перемещения точек *A* и *B* в зависимости от $\frac{l}{h}$ для $\frac{h}{H} = \frac{1}{2,5}$; *b* — то же для $\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$; *c* — то же для $\frac{h}{H} = \frac{1}{8}$; *d* — диаграмма перемещения изотропной точки *A* при изменении радиуса кривизны $\left(\frac{l}{h}=2\right)$.

Рис. 5. — Таблицы изоклин: *a* — Изоклины для $\frac{h}{H} = \frac{1}{8}$ и различные значения $\frac{l}{h}$; *b* — изоклины для $\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$ и различные значения $\frac{l}{h}$; *c* — таблицы изостатик для $\frac{l}{h} = 1$; *d* — изоклины для $\frac{l}{h}=2$ и различные радиусы перехода.

Рис. 6. — Общий вид изохроматик заделанной консоли.

Рис. 7. — Таблицы изохроматик консоли с разными радиусами кривизны.

Рис. 8. — Изменение положения точки максимального усилия на контуре в зависимости от радиуса перехода для заделанной консоли.

Рис. 9. — Изменение степени концентрации усилий при изменении радиуса перехода.

Рис. 10. — Экспериментальные элементы для заделанной консоли. *a* — изохроматики, *b* — изостатики, *c* — изоклины.

Рис. 11. — Продольные и поперечные диаграммы для n и θ, *a* — порядок полосы — n, *b* — параметр изоклины — θ.

Рис. 12. — Продольные и поперечные диаграммы для напряжений τ_{xy}.

Рис. 13. — Продольные и поперечные диаграммы для напряжений σ_x.

Рис. 14. — Продольные и поперечные диаграммы для напряжений σ_y.

Рис. 15. — Таблицы изохроматик для заделанной консоли с несимметричными переходами.

Рис. 16. — Изменение положения изотропной точки в зависимости от радиуса перехода, при несимметричных переходах.

AU SUJET DE L'INFLUENCE D'UN MILIEU ÉLASTIQUE D'ENCASTREMENT SUR LA DISTRIBUTION DES TENSIONS DANS UNE CONSOLE

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, l'auteur étudie la façon dont le milieu d'encastrement participe à la déformation de la console encastrée en même temps que celle-ci. On détermine les points singuliers caractéristiques de l'encastrement. On étudie l'influence des principaux facteurs qui contribuent à la position de ces points singuliers. On étudie ainsi quantitativement l'influence qu'ont les facteurs suivants : la variation de la longueur relative de la console $\frac{l}{h}$, les divers rayons de raccordement dans la zone d'encastrement ainsi que l'extension du milieu d'encastrement.

On établit l'importance de la position du point singulier à proximité de la section à la frontière entre la console et le milieu d'encastrement, point de déformations angulaires nulles. On constate que ce point se trouve dans la console, pour les longueurs relativement plus grandes de la console et dans les milieux, pour les longueurs plus réduites de celle-ci. On établit que ce point se trouve à la frontière-même entre la console et le milieu, pour le rapport $\frac{l}{h} \approx 1{,}5$.

En raison des tableaux d'isoclines, on constate que pour les consoles courtes, la variation de l'orientation des directions principales est beaucoup plus rapide que pour les consoles moyennes. Pour ces dernières, sur les tiers marginaux de la hauteur de la console, les directions principales sont presque parallèles — respectivement perpendiculaires — sur les bords de la console.

On présente à la fin, des diagrammes longitudinaux et transversaux complets pour les efforts unitaires σ_x, σ_y et τ_{xy} pour une console au rapport $\frac{l}{h} \approx 2$ et de grands raccordements. On détermine, séparément pour chaque effort unitaire, l'extension de la zone d'encastrement perturbée.

On présente de même des essais supplémentaires pour des consoles à raccordements inégaux.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Console encastrée. Schéma du modèle expérimenté.

Fit. 2. — Console encastrée : *a*) sollicitation du modèle ; *b*) solive d'enchevêtrement de la répartition de la force.

Fig. 3. — Aspect général du tableau des isoclines.

Fig. 4. — Variation de la position des points singuliers isotropes : *a*) isocline de 0° et diagramme du déplacement des points A et B en fonction de $\frac{l}{h}$ pour $\frac{h}{H} = \frac{1}{2.5}$; *b*) idem pour $\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$; *c*) idem pour $\frac{h}{H} = \frac{1}{8}$; *d*) diagramme du déplacement du point isotrope A lorsque varie le rayon de courbure ($\frac{l}{h} = 2$).

Fig. 5. — Tableaux des isoclines. : *a*) isoclines pour $\frac{h}{H} = \frac{1}{8}$ et différentes valeurs de $\frac{l}{h}$; *b*) isoclines pour $\frac{h}{H} = \frac{1}{3}$ et différentes valeurs de $\frac{l}{h}$; *c*) tableaux d'isostatiques pour $\frac{l}{h} = 1$ et $\frac{l}{h} = 4$; *d*) isoclines pour $\frac{l}{h} = 2$ et différents rayons de raccordement.

Fig. 6. — Aspect général des isochromatiques pour la console encastrée.

Fig. 7. — Tableaux des isochromatiques pour la console à différents rayons de courbure.

Fig. 8. — Variation de la position du point d'effort maximum sur le contour raccordé, en fonction du rayon de raccordement, pour la console encastrée.

Fig. 9. — Variation du degré de concentration des efforts en fonction du rayon de raccordement.

Fig. 10. — Eléments expérimentaux pour la console encastrée : *a*) isochromatiques, *b*) isostatiques, *c*) isoclines.

Fig. 11. — Diagrammes longitudinaux transversaux pour n et θ : a) ordre de la bande — n ; b) paramètre de l'isocline — θ.

Fig. 12. — Diagrammes longitudinaux transversaux pour les efforts τ_{xy}.

Fig. 13. — Diagrammes longitudinaux transversaux pour les efforts σ_x .

Fig. 14. — Diagrammes longitudinaux transversaux pour les efforts σ_y.

Fig. 15. — Tableaux d'isochromatiques pour la console encastrée à raccordements asymétriques.

Fig. 16. — Variation de la position du point isotrope en fonction du rayon de raccordement, pour les raccordements asymétriques.

BIBLIOGRAFIE

1. Frocht M. M., *Plotoelasticity*. John Willey, New York, 1941.
2. Favre H., *La détermination optique des tensions intérieures*. Revue d'Optique, 1952, nr.1.
3. Tesar V., *Comptes-rendus de l'étude des procédés photoélasticimétriques et leurs applications aux barrages voûtés*. Ann, des Ponts et Chaussées, 1937, t. 107.
4. Pascal R., *Etude théorique expérimentale et pratique des encastrements de flexions. Association Internationale des Ponts et Charpentes*. Quatrième Congrès Publications préliminaires, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

HIDRODINAMICĂ

O METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU STUDIUL SCURGERII STAŢIONARE PLAN-RADIALE A UNUI AMESTEC DE LICHID ŞI GAZ PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU

1. Problema scurgerii staţionare a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros a făcut obiectul unor cercetări destul de numeroase datorită faptului că prezintă un interes deosebit pentru studiul condiţiilor de exploatare a zăcămintelor de petrol. Ecuaţiile de bază utilizate în ultima vreme au fost acelea date de M. Muskat [1] sau altele similare, care pornesc de la ideia de a se studia scurgerea fiecărei faze în parte. Această formulare matematică a problemei porneşte desigur de la constatarea experimentală a existenţei unei permeabilităţi diferite a mediului poros pentru fiecare fază în parte, variabilă cu saturaţia. În cazul staţionar, s-au găsit soluţii [1] pentru diferite configuraţii geometrice, prin utilizarea unor relaţii suplimentare între presiune şi saturaţie. Procedeul necesită însă o cantitate considerabilă de calcule şi în afară de aceasta nu este aplicabil la problema scurgerii nestaţionare. Totuşi, în ultimul timp au fost date soluţii aproximative şi pentru această problemă, ţinîndu-se seama şi de proprietăţile reale ale fluidelor care formează amestecul.

Într-o lucrare anterioară [2], am pus bazele unei metode prin care am căutat să reactualizăm o ideie mai veche a lui L. S. Leibenzon, punînd-o însă de acord cu unele rezultate mai recente. Ulterior, am aplicat această metodă la rezolvarea aproximativă a problemei scurgerii plan-radiale [3], utilizînd însă două aproximaţii pe care dorim acum să le evităm. Astfel, am considerat în primul rînd că nu există diferenţă între viteza de filtrare a fazei lichide şi aceea a fazei gazoase şi în al doilea rînd am introdus o relaţie între permeabilitatea pentru lichid şi presiune, bazată pe o constatare făcută de L. A. Zinovieva în lucrarea citată [4]. Această ultimă aproximaţie pare perfect admisibilă însă utilizarea ei efectivă în calcule face necesară determinarea unor constante care este posibilă numai cu extrem de mare greutate în cadrul considerațiilor expuse în lucrarea noastră [3]. În cele ce urmează, renunțăm la aceste aproximații și adoptăm o cale diferită care ne va conduce la o rezolvare a problemei, bineînțeles tot aproximativă.

2. În lucrarea [2], am introdus noțiunea de viteză de filtrare a amestecului și am admis că legea lui Darcy este valabilă și pentru această viteză. Ținînd seama de faptul că debitul de masă de amestec printr-o suprafață oarecare este egal cu suma debitelor masice de gaz și de lichid, rezultă pentru viteza de filtrare a amestecului expresia

$$\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\left(\rho_g \frac{k_g}{\eta_g} + \rho_l \frac{k_l}{\eta_l}\right)\nabla p \tag{1}$$

unde ρ este masa specifică a amestecului, definită în aceeași lucrare, ρ_g, η_g și k_g masa specifică, viscozitatea și permeabilitatea de fază ale gazului, iar ρ_l, η_l și k_l aceleași mărimi pentru lichid.

Dacă scurgerea este staționară, ecuația de continuitate ia forma

$$\nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0, \tag{2}$$

sau

$$\nabla \cdot [g(p)\nabla p] = 0, \tag{3}$$

unde am introdus notația

$$g(p) = \rho_g \frac{k_g}{\eta_g} + \rho_l \frac{k_l}{\eta_l} = \frac{k_g}{\nu_g} + \frac{k_l}{\nu_l}, \tag{4}$$

ν_g si ν_l fiind viscozitățile cinematice ale celor două fluide.

Pentru cazul scurgerii plane radiale, de care ne vom ocupa în cele ce urmează, ecuația (3) devine

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[g(p)\, r \frac{dp}{dr}\right] = 0, \tag{5}$$

și are soluția generală

$$C_1 \log r + C_2 = \int g dp. \tag{6}$$

Punînd mai departe

$$h(p) = \int g dp \tag{7}$$

și notînd cu p_c, respectiv p_s, valorile constante ale presiunii pe cercurile de rază r_c și r_s ($r_c > r_s$) condițiile la limită sînt

$$r = r_c,\ h(p) = h(p_c) \quad ; \quad r = r_s,\ h(p) = h(p_s), \tag{8}$$

și constantele din (6) au valorile

$$C_1 = \frac{h(p_c) - h(p_s)}{\log \frac{r_c}{r_s}}, \quad C_2 = h(p_s) - \frac{h(p_c) - h(p_s)}{\log \frac{r_c}{r_s}} \log r_s. \tag{9}$$

Prin urmare, soluția găsită se scrie

$$h(p) = \frac{h(p_c) - h(p_s)}{\log \frac{r_c}{r_s}} \log \frac{r}{r_s} + h(p_s), \tag{10}$$

și cu ajutorul ei pot fi calculate vitezele de filtrare ale celor două faze. Astfel, pentru gaz avem

$$\begin{aligned} v_g &= -\frac{k_g}{\eta_g}\frac{dp}{dr} = -\frac{k_g}{\eta_g}\frac{dp}{dh}\frac{dh}{dr} = -\frac{k_g}{\eta_g}\frac{1}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}}\frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}}\frac{1}{r} = \\ &= -\frac{1}{\rho_g}\frac{\frac{k_g}{\nu_g}}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}}\frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}}\frac{1}{r}, \end{aligned} \tag{11}$$

iar pentru lichid

$$\begin{aligned} v_l &= -\frac{k_l}{\eta_l}\frac{dp}{dr} = -\frac{k_l}{\eta_l}\frac{dp}{dh}\frac{dh}{dr} = -\frac{k_l}{\eta_l}\frac{1}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}}\frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}}\frac{1}{r} = \\ &= -\frac{1}{\rho_l}\frac{\frac{k_l}{\nu_l}}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}}\frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}}\frac{1}{r}. \end{aligned} \tag{12}$$

Cu ajutorul formulelor stabilite, pot fi găsite cu ușurință expresiile debitelor masice de gaz și de lichid, corespunzătoare unui cerc de rază oarecare r. Un calcul simplu ne dă

$$\rho_g Q_g = 2\pi r \rho_g v_g = 2\pi \frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}} \frac{\frac{k_g}{\nu_g}}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}} \tag{13}$$

și

$$\rho_l Q_l = 2\pi r \rho_l v_l = 2\pi \frac{h(p_c)-h(p_s)}{\log\frac{r_c}{r_s}} \frac{\frac{k_l}{\nu_l}}{\frac{k_g}{\nu_g}+\frac{k_l}{\nu_l}}, \tag{14}$$

grosimea stratului productiv fiind presupusă egală cu unitatea.

În felul acesta, problema este formal rezolvată și se observă că soluția efectivă depinde de cunoașterea funcției $g\,(p)$. Dificultatea care se prezintă la determinarea acestei funcții constă în faptul că permeabilitățile de fază k_g și k_l sînt cunoscute nu ca funcții de presiune ci ca funcții de saturație în faza lichidă a mediului poros. La rîndul ei, această saturație este evident o funcție de presiune, necunoscută *a priori*.

3. Pentru determinarea funcției $g\,(p)$, trebuie introdusă o relație suplimentară care nu diferă esențial de aceea cunoscută în literatura de specialitate. Fiind vorba de o scurgere staționară putem admite că raportul dintre masa totală de gaz și masa de lichid degazeificat este constant în fiecare secțiune. Dacă s este rația de soluție, adică volumul de gaz în soluție pe unitatea de volum de lichid, ambele exprimate în condiții standard, masa de gaz aflată în soluție pe unitate de masă de lichid va fi $\frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}}\,s$, ρ_{og} și ρ_{ol} fiind masele specifice ale gazului și lichidului la presiunea standard. Notînd cu R_m raportul dintre masa totală de gaz și masa de lichid degazeificat, avem relația evidentă

$$R_m = \frac{\rho_g Q_g + \rho_l Q_l \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} s}{\rho_l Q_l \left(1 - \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} s \right)}. \tag{15}$$

Introducem acum rația de gaze-țiței (țițeiul fiind lichidul degazeificat), definită de asemenea în condiții standard, prin relația

$$R = \frac{\rho_{ol}}{\rho_{og}} R_m \tag{16}$$

și găsim

$$R = \frac{\frac{\rho_{ol}}{\rho_{og}} \rho_g Q_g + \rho_l Q_l s}{\rho_l Q_l \left(1 - \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} s \right)} \tag{17}$$

sau, dacă ținem seama de relațiile (13) și (14) care ne dau

$$\frac{\rho_g Q_g}{\rho_l Q_l} = \frac{\nu_l}{\nu_g} \frac{k_g}{k_l}, \tag{18}$$

rezultă

$$R = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} s} \left(\frac{\rho_{ol}}{\rho_{og}} \frac{\nu_l}{\nu_g} \frac{k_g}{k_l} + s \right). \tag{19}$$

De aici scoatem raportul

$$\frac{k_g}{k_l} = \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} \frac{\nu_g}{\nu_l} \left[R \left(1 - \frac{\rho_{og}}{\rho_{ol}} s \right) - s \right] \tag{20}$$

ca funcție de presiune, deoarece rația de soluție este funcție cunoscută de presiune, ca și viscozitățile cinematice ν_g și ν_l, iar constanta R rezultă din datele de exploatare. În curbele experimentale, raportul $\frac{k_g}{k_l}$ apare ca funcție de saturație și în cele din urmă, prin comparație, putem găsi dependența permeabilității pentru lichid de presiune. Punînd funcția căutată sub forma

$$g(p) = \frac{k_l}{\nu_l}\left(1 + \frac{\nu_l}{\nu_g}\frac{k_g}{k_l}\right), \tag{21}$$

se observă că aceasta este acum cunoscută.

4. Metoda propusă se bazează pe ipoteza că presiunile din cele două faze sînt egale, fapt care nu este riguros exact din cauza efectelor capilare. Metodele existente se bazează însă toate pe neglijarea diferențelor de presiune dintre faze, justificarea fiind dată în literatura de specialitate. În ceea ce privește ideia de a scrie o singură ecuație de continuitate pentru ambele faze sub formă de amestec, este tot atît de justificată ca și aceea de a se considera cîte o ecuație pentru fiecare fluid în parte. Într-adevăr, deoarece vitezele de filtrare reprezintă valori medii ale vitezelor reale (mai precis debite prin suprafețe egale cu unitatea) se poate defini și viteza de filtrare a amestecului. Legarea acesteia de vitezele de filtrare ale fazelor prin relația (1) ne permite apoi să ținem seama de caracteristicile scurgerii multifazice. De asemenea, ni s-a părut că este mai logic să considerăm scurgerea fazelor ca atare, considerînd faza lichidă împreună cu conținutul ei în gaze dizolvate, iar faza gazoasă alcătuită din gazele ieșite din soluție.

Pentru scurgerea staționară, aceste deosebiri nu par a aduce simplificări esențiale. Într-o altă lucrare, vom prezenta însă unele concluzii la care am ajuns în studiul scurgerii nestaționare a amestecului, unde punctul de vedere adoptat a adus contribuții utile.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1957

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПЛОСКО-РАДИАЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ СМЕСИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА СКВОЗЬ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе рассматривается случай стационарного плоско-радиального течения сквозь пористую среду смеси жидкости и газа в различных пропорциях. Исходной точкой считается уравнение, выведенное в предыдущей работе [2], и устанавливаются выражения для скоростей и протекающих количеств. Расчеты требуют введения дополнительного соотношения между давлением и насыщением жидкостью пористой среды.

UNE MÉTHODE APPROXIMATIVE POUR L'ÉTUDE DE L'ÉCOULEMENT STATIONNAIRE PLAN-RADIAL D'UN MÉLANGE LIQUIDE - GAZ À TRAVERS UN MILIEU POREUX

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, l'auteur examine le cas de l'écoulement stationnaire plan-radial, à travers un milieu poreux d'un mélange liquide-gaz en proportions variables. On prend pour point de départ l'équation établie dans un travail antérieur [2] et l'on trouve des expressions pour les vitesses et les débits. Les calculs effectifs rendent nécessaire l'introduction d'une relation supplémentaire entre la pression et la saturation en liquide du milieu poreux.

BIBLIOGRAFIE

1. Muskat M., *Physical Principles of Oil Production.* Mac Graw Hill, New York, 1949, p. 302 și 333.
2. Oroveanu T. și Pascal H., *Scurgerea unui amestec compresibil de lichid și gaz printr-un mediu poros.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 9, 1955, p. 1311.
3. — *Scurgerea staționar plan-radială a unui amestec de lichid și gaz printr-un mediu poros.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, 1956, p. 387.
4. Zinovieva L. A., *Priblijennii metod rasceta pritoka gazirovannoi nefti k skvajinam s ucetom realnîh svoistv plastovîh neftei.* Trudî VNNI, 1954, vol. 6, p. 254.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

HIDRODINAMICĂ

CALCULUL MASEI APARENTE PENTRU CARENE ALUNGITE

DE

V. MANEA

Noţiunea de masă aparentă se introduce în mecanica fluidelor în legătură cu studiul mişcării corpurilor în medii fluide.

Energia cinetică căpătată de particolele de fluid, la trecerea corpului, se echivalează cu energia unei mase de fluid avînd aceeaşi mişcare ca şi corpul. Această masă se numeşte aparentă, virtuală sau antrenată şi prezintă o importanţă deosebită în mişcarea accelerată a unui corp în mediu fluid, care poate fi considerată, în anumite limite, ca mişcare a aceluiaşi corp în vid, avînd însă masa proprie majorată cu masa aparentă.

În cele ce urmează vom căuta să calculăm masa aparentă pentru corpuri alungite în cîteva cazuri de mişcare.

Considerăm un fluid ideal şi incompresibil, aflat în repaus şi ocupînd un domeniu nemărginit.

Un corp, total imers în fluid, posedă o mişcare de translaţie cu viteza $\overline{V}_0$ şi una de rotaţie cu viteza unghiulară $\overline{\omega}$ în jurul unui punct O, considerat originea sistemului de referinţă $x\ O\ y$.

Un punct P de pe suprafaţa corpului va avea viteza

$$\overline{V} = \overline{V}_0 + \overline{\omega} \wedge \overline{r}. \qquad (1)$$

Mişcarea fluidului, provocată de trecerea corpului, derivă dintr-un potenţial care poate fi pus sub forma

$$\varphi\,(x,\ y,\ z,\ t) = \sum_{k=1}^{6} \dot{q}_k \varphi_k\,(x,\ y,\ z), \qquad (2)$$

unde $\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$, q_k fiind coordonatele generalizate ale mişcării corpului, iar $\varphi_k\ (x,\ y,\ z)$ potenţialul de viteze unitar, corespunzător unui grad de libertate, care nu depinde decît de forma corpului.

Din condiția la limită

$$\overline{V}\,\overline{n} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \sum_{i=1}^{6} \dot{q}_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} \tag{3}$$

se deduce că

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \alpha, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \beta, \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \gamma,$$

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = \gamma y - z\beta, \quad \frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = z\alpha - x\gamma, \quad \frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = \beta x - \alpha y, \tag{4}$$

$\overline{n}$ fiind versorul normalei interioare la suprafața corpului, iar α, β, γ cosinușii directori ai acesteia.

Deoarece $v = \nabla\varphi$ și $\Delta\varphi = 0$, energia cinetică a fluidului va fi

$$E = \frac{\rho}{2}\int_{\tau} v^2 d\tau = \frac{\rho}{2}\int_{S} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS, \tag{5}$$

unde τ este volumul fluidului ce ocupă tot domeniul exterior corpului a cărui suprafață este S.

Folosind relațiile (2) și (3), expresia energiei cinetice ia forma

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{6} \dot{q}_i \dot{q}_k \lambda_{ik}, \tag{6}$$

unde

$$\lambda_{ik} = \rho\int_{S} \varphi_k \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, dS \tag{7}$$

reprezintă coeficienții masei aparente în cazul general de mișcare. Ei formează un tensor simetric ($\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$) și sînt independenți de timp [1].

Masa aparentă definită prin acești coeficienți, împreună cu masa și momentul de inerție proprii corpului, formează masa inertă totală*).

În practică sînt des întîlnite cazurile unei translații după o direcție sau unei rotații, cînd coeficienții masei aparente sînt $\lambda_{ii} = \rho\int_{s} \varphi_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\, dS$, i corespunzînd gradului de libertate respectiv.

Am luat în considerare mișcarea în jurul unui tip particular de carenă, anume cea obținută prin plasarea unei surse punctiforme într-un curent rectiliniu de viteză $- V_0$.

Aceasta este o mișcare axial simetrică, al cărei potențial de viteze este

$$\varphi_r = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R} - V_0\, x. \tag{8}$$

---

*) Amănunte în [2], p. 150.

Funcția de curent este

$$\psi_r = -\frac{1}{2}V_0 r^2 - \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{x}{R} - 1\right), \tag{9}$$

unde $R = \sqrt{x^2 + r^2}$.

Pe suprafața carenei $\psi_r = 0$, de unde deducem ecuația conturului carenei în planul meridian

$$r^2 = \frac{Q}{2\pi V_0}\left(\frac{x}{R} - 1\right). \tag{9'}$$

Potențialul de viteze corespunzător mișcării carenei (fig. 1) cu viteza V_0 este evident

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{R}. \tag{8'}$$

Se găsește $r_\infty = \sqrt{\frac{Q}{\pi V_0}}$, și $x_A = \frac{r_\infty}{2}$.

Vom face următoarea observație : pentru carene alungite, de formă apropiată celor care se obțin prin plasarea a două surse egale și de semn contrar într-un curent paralel cu dreapta ce trece prin cele două surse, putem admite că mișcarea pe jumătatea din față este foarte apropiată de mișcarea pe partea din față a carenei semiindefinite prezentate mai sus, pe o aceeași lungime, adică $l = L/2$, L fiind lungimea carenei.

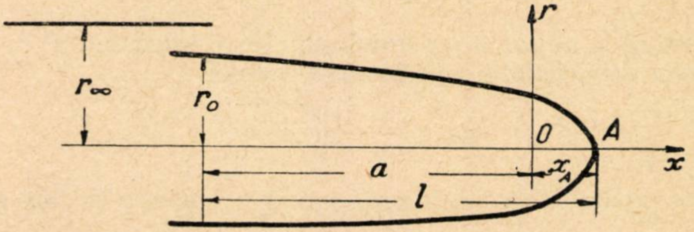


Fig. 1

Masa aparentă pentru întreaga carenă va fi dublul celei calculate pentru carena semiindefinită. Rezultatul ce se obține are un caracter aproximativ și este valabil pentru carene de tipul menționat.

Calculul se face ușor observînd din figura 1 că

$$a = l - x_A,$$

unde $x_A = \frac{r_\infty}{2}$. Cum r_∞ nu este încă determinat, vom pune

$$x_A \cong \frac{r_0}{2}$$

și deci

$$a \cong l - \frac{r_0}{2},$$

r_0 fiind raza la mijlocul carenei.

Expresia potențialului pentru o viteză egală cu unitatea va fi

$$\varphi_1 = -\frac{r_\infty^2}{4}\frac{1}{\sqrt{x^2 + r^2}} \tag{10}$$

iar ecuația conturului

$$r^2 = -\frac{r_\infty^2}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}} - 1\right), \tag{11}$$

din care prin cîteva operații se obține

$$x^2 = r_\infty^2 \frac{\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{r}{r_\infty}\right)^2\right)^2}{1 - \left(\frac{r}{r_\infty}\right)^2}. \tag{12}$$

Dacă în (12) facem $x = -a$ și $r = r_0$, obținem

$$r_\infty = \sqrt{2\,(r_0^2 + a^2) - 2a\sqrt{r_0^2 + a^2}}. \tag{13}$$

Revenind la expresia potențialului (10) și înlocuind x^2 din (12) obținem expresia potențialului pe suprafața carenei

$$\varphi_{1c} = -\frac{1}{2}\sqrt{r_\infty^2 - r^2}.$$

Masa aparentă se obține efectuînd o operație de integrare. Avem

$$\lambda_{11} = \rho\int_S \varphi_{1c}\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dS = \rho\int_S \varphi_{1c}\alpha\,dS = -\rho\int_{S_x}\varphi_{1c}\,dS_x, \tag{14}$$

unde dS_x este proiecția părții din față a carenei pe un plan normal pe axa Ox trecînd prin $x = -a$. Carena fiind un corp de revoluție, S_x este o suprafață circulară de rază r_0, astfel încît

$$\lambda_{11} = -\rho\int_0^{r_0} 2\pi r\varphi_{1c}(r)\,dr = \rho\frac{\pi}{3}\left\{r_\infty^3 - \sqrt{(r_\infty^2 - r_0^2)^3}\right\}. \tag{15}$$

Pentru o carenă finită vom considera că masa aparentă este egală cu aproximativ dublul celei calculate mai sus, adică

$$\lambda_{11} = \rho\frac{2}{3}\pi\left(r_\infty^3 - \sqrt{(r_\infty^2 - r_0^2)^3}\right). \tag{16}$$

Din (15) se observă că pentru o carenă semiindefinită masa aparentă este

$$\lambda_{11} = \rho \frac{\pi}{3} r_{\infty}^{3} ,$$

adică jumătate din masa aparentă a unei sfere de rază $a = r_{\infty}$.

MIȘCAREA PLANĂ

Considerăm cazul unui cilindru oarecare, de lungime infinită, avînd o mișcare de translație pe o direcție perpendiculară pe generatoare și una de rotație în jurul unei axe paralelă cu aceasta.

Formulele, privind coeficienții masei aparente pentru cazul general de mișcare, se reduc în mod corespunzător celor trei grade de libertate posibile în plan.

Vom căuta să rezolvăm problema calculului acestor coeficienți, în cazul unui contur oarecare, în măsura în care se cunoaște funcția de reprezentare a acestuia pe cerc.

Să presupunem că

$$f_k(z) = \varphi_k (x, y) + i\psi_k (x, y) \tag{17}$$

este potențialul complex unitar al mișcării fluidului, mișcare provocată de deplasarea conturului C ($k = 1$, 2 pentru translația paralelă cu axa Ox, respectiv Oy și $k = 3$ pentru rotația față de origina sistemului de referință).

Conform relației (4) vom avea

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \alpha = - \frac{dy}{ds}, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = \beta = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = x \frac{dx}{ds} + y \frac{dy}{ds} . \tag{18}$$

Înlocuind în formulele pentru coeficienții masei aparente obținem expresiile

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= - \rho \int_c \varphi_k dy, && \text{(a)} \\ \lambda_{2k} &= \rho \int_c \varphi_k dx, && \text{(b)} \\ \lambda_{3k} &= \rho \int_c \varphi_k (x\, dx + y dy) . && \text{(c)} \end{aligned} \tag{19}$$

Sensul de integrare este acela care lasă în stînga domeniul interior conturului.

Considerînd integralele

$$\begin{aligned} I_k &= \int_c f_k (z)\, dz, \\ I_k' &= \int_c f_k (z)\, d\bar{z}, \end{aligned} \tag{20}$$

precum și

$$\begin{aligned} J_k &= \int_c f_k(z)\, z d\bar{z}, \\ J_k' &= \int_c f_k(z)\, \bar{z} dz, \end{aligned} \tag{21}$$

găsim că

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} &= \rho I_m \frac{I_k' - I_k}{2}, \\ \lambda_{2k} &= \rho R_e \frac{I_k' + I_k}{2}, \\ \lambda_{3k} &= \rho R_e \frac{I_k' + I_k}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Rămîne de precizat modul de calcul al integralelor (20) și (21). Dacă cunoaștem funcția $z = z(\zeta)$, care reprezintă conturul C pe cercul K, putem efectua aceste integrale în planul ζ, pe cerc.

Potențialul complex al mișcării în jurul cercului, corespunzător translației conturului C paralel cu axa Ox, se deduce în modul următor:

Dacă $f_{1r}(z)$ este potențialul complex de mișcare în cazul conturului fix, avem relația

$$f_1(z) = f_{1r}(z) + z.$$

În planul ζ, $f_{1r}(z(\zeta))$ este potențialul complex de mișcare în jurul cercului așezat într-un curent rectiliniu paralel cu axa $O\xi$. În consecință,

$$f_1(\zeta) = -\left((\zeta + \frac{r_0^2}{\zeta} \right) + z(\zeta). \tag{23}$$

Expresia potențialului $f_2(\zeta)$ corespunzător translației paralelă cu axa ordonatelor se deduce din (23) rotind planul ζ cu $\frac{\pi}{2}$. Se obține

$$f_2(\zeta) = i\left(\zeta - \frac{r_0^2}{\zeta} \right) - iz(\zeta). \tag{24}$$

În cazul rotației conturului, expresia potențialului este ceva mai complicată [3]*).

Ținînd seama de cele arătate, integralele (20) și (21) se calculează cu ajutorul teoriei reziduurilor.

Remarcăm că în baza proprietății de simetrie a coeficienților masei aparente, amintită la începutul lucrării, pentru calculul celor 9 coeficienți, în cazul mișcării plane, este suficient să se calculeze numai coeficienții aflați de o parte și pe diagonala tabloului format de aceștia.

Pentru cazurile practice este mai utilă cunoașterea coeficienților diagonali, respectiv λ_{11}, λ_{22}, λ_{33}.

---

*) p. 290–293.

Cu ajutorul acestora putem calcula, pentru carene alungite, ceilalți coeficienți diagonali ai tensorului masei aparente în cazul mișcării tridimensionale. Pentru aceasta facem observația că rezultatele obținute în mișcarea plană, în sistemul de referință xOy, se transpun în mod corespunzător în mișcarea spațială, planul corespondent fiind yOz.

În prima parte a lucrării, am calculat coeficientul Λ_{11} pentru un tip particular de carenă.

Coeficienții Λ_{22} și Λ_{33}, care corespund translației paralele cu axa Oy, respectiv cu Oz, se obțin efectuîndu-se o integrare în lungul carenei a coeficienților λ_{11} și λ_{22}, care au semnificația de masă aparentă pentru unitatea de lungime,

$$\begin{aligned} \Lambda_{22} &= \int_0^L \lambda_{11}(x)\,dx, \\ \Lambda_{33} &= \int_0^L \lambda_{22}(x)\,dx, \end{aligned} \tag{25}$$

L fiind lungimea carenei.

Mai departe putem obține coeficienții Λ_{44}, Λ_{55} și Λ_{66} care reprezintă momentul de inerție aparent față de cele trei axe ale sistemului de referință,

$$\begin{aligned} \Lambda_{44} &= \int_0^L \lambda_{33}(x)\,dx, \\ \Lambda_{55} &= \int_0^L \lambda_{22}(x)\,x^2 dx, \\ \Lambda_{66} &= \int_0^L \lambda_{11}(x)\,x^2\,dx. \end{aligned} \tag{26}$$

Vom aplica rezultatele obținute în cazul unui elipsoid alungit de semiaxe a, b, c.

Funcția care reprezintă conturul elipsei de semiaxe b, respectiv c, pe cerc, este $z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}$, unde $q^2 = \frac{b^2 - c^2}{4}$.

Pentru $f_1(\zeta)$ și $f_2(\zeta)$ avem expresiile date de (23) și (24). În cazul rotației față de axa Ox avem

$$f_3(\zeta) = -i\,\frac{r_0^2 q^2}{\zeta^2}, \quad r_0^2 = \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Efectuînd calculele necesare obținem valorile

$$\begin{aligned} \lambda_{11} &= \rho\,\pi\,c^2, \\ \lambda_{22} &= \rho\,\pi\,b^2, \\ \lambda_{33} &= \rho\,\frac{\pi}{8}\,(c^2 - b^2)^2, \end{aligned}$$

care introduse în (25) și (26) dau

$$\Lambda_{22} = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi\,a c^2,$$

$$\Lambda_{33} = \rho \frac{4}{3} \pi a b^2,$$

$$\Lambda_{44} = \rho \frac{2}{15} \pi a (c^2 - b^2)^2,$$

$$\Lambda_{55} = \rho \frac{4}{15} \pi a^3 b^2,$$

$$\Lambda_{66} = \rho \frac{4}{15} \pi a^3 c^2.$$

Valorile obținute coincid cu cele calculate în cazul mișcării generale a unui elipsoid alungit, la care $\frac{b}{a} \to 0$*).

Rezultatele obținute pot fi utilizate pentru calculul masei aparente în mișcarea tridimensională, în cazul unor corpuri pentru care un calcul direct este uneori chiar imposibil. De asemenea, în calculul vibrației corpurilor alungite în mediu fluid, intervine masa aparentă pentru unitatea de lungime a acestora. Evaluarea acesteia se poate obține în modul arătat în lucrare.

Primită la redacție la 2 noiembrie 1956.

РАСЧЕТ КАЖУЩЕЙСЯ МАССЫ ДЛЯ УДЛИНЕННЫХ КОРПУСОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части рассматривается случай осевого движения корпуса, имеющего форму, приближающуюся к форме, которая получается при помещении точкообразного источника в прямолинейном течении.

На основе того что поперечное движение удлиненных корпусов может рассматриваться как плоское движение, во второй части рассчитывается коэффициент кажущейся массы для единицы длины корпуса.

Затем указывается способ расчета общей кажущейся массы удлиненных корпусов.

CALCUL DE LA MASSE APPARENTE POUR LES CARÈNES ALLONGÉES

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de ce travail, on traite du cas du mouvement axial d'une carène dont la forme est proche de celle qu'on obtient en plaçant une source punctiforme dans un courant rectiligne.

---

*) Pentru comparație vezi [1], p. 359.

Dans la seconde partie, en vertu du fait que le mouvement transversal des carènes allongées peut être considéré comme un mouvement plan, on calcule le coefficient de la masse apparente pour l'unité de longueur de la carène.

On indique en sus le mode de calcul de la masse apparente totale des carènes allongées.

BIBLIOGRAFIE

1. N. E. Kocin, I. A. Kibel și N. V. Rose, *Hidromecanica teoretică*. Ed. Tehnică, București, 1951.
2. G. Birkhoff, *Ghidrodinamika*. Izdatelstvo inostranoi literaturî, Moscova, 1954.
3. E. Carafoli și T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., București, vol. I și II, 1952, respectiv 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

HIDRODINAMICĂ

DINAMICA CURENŢILOR SUB PRESIUNE ÎN CANALE CU RUGOZITATE MIXTĂ

DE

M. KAHAN şi S. HÎNCU

În acest articol se expun o serie de consideraţii experimentale şi teoretice cu privire la mecanismul de scurgere a curenţilor sub presiune în canale cu rugozitate mixtă.

Acest gen de scurgere interesează în mod deosebit în modelarea cu aer a construcţiilor hidrotehnice, în care caz rugozitatea geamului diferă net de rugozitatea fundului modelului.

1. Scurgerea în canale închise cu rugozitate mixtă a preocupat de mult pe specialiştii hidraulicieni şi ea se întîlneşte la galeriile cu perimetru de rugozitate diferită, la scurgeri sub ghiaţă şi la mai toate albiile de rîuri din natură.

Sînt cazuri cînd există o diferenţă netă între rugozitatea fundului şi a pereţilor albiei, sau între un perete şi celălalt. În apropierea pereţilor cu rugozitate neuniformă, turbulenţa curentului diferă nu numai de la un strat la altul, cum se întîmplă în mod obişnuit, ci şi de la o rugozitate la alta. În interiorul curentului se vor găsi domenii în care cu preponderenţă pulsaţiile mărimilor hidrodinamice sînt născute de una sau alta din rugozităţi. În general, aceste domenii, pe măsură ce ne depărtăm de pereţi, caută să-şi piardă din specific, iar turbulenţa curentului privită în întregime duce la o pierdere de sarcină medie, care se măsoară de obicei prin panta energetică.

Pierderea de sarcină medie în calculele hidraulice se atribuie unei rugozităţi fictive medii pe secţiune, exprimată numeric printr-un coeficient de rugozitate medie.

Formule de calcul hidraulic pentru scurgeri în prezenţa unei rugozităţi mixte a pereţilor au fost date de hidraulicieni ca Acad. N. N. Pavlovski, G. Remanieras şi P. Burgnignon, P. N. Beloconi, Puzîrevski, G. K. Loter, I. I. Levi şi alţii.

Calculul hidraulic al cursurilor de apă în cazul existenţei unui inveliş de ghiaţă are o deosebită însemnătate practică şi este deosebit de interesant pentru studiul de faţă. Prezenţa învelişului de ghiaţă schimbă epura de distribuție a vitezelor întîlnită în cazul scurgerilor cu suprafață liberă (fig. 1 și 2), asemănător epurei ce se realizează pe modelele cu aer.

Metodele de calcul ale scurgerii sub înveliș de ghiață pornesc de la ipoteza că cele două părți ale epurei vitezelor, delimitate de viteza maximă și pereți, (fig. 2), pot fi privite independent una față de cealaltă. De subliniat este faptul că această ipoteză nu a fost verificată pe bază de experiențe sistematice de niciunul dintre cercetătorii care au recomandat formule de calcul.

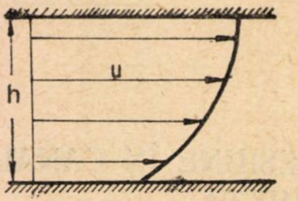


Fig. 1. — Epura vitezelor în curent cu suprafață liberă.

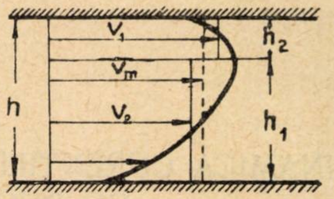


Fig. 2. — Epura vitezelor în curent sub înveliș de gheață.

Vom prezenta doar rezultatele teoretice ale Acad. N. N. Pavlovski și ale Prof. Dr. I. I. Levi, ca fiind cele mai utilizate în practică.

N. N. Pavlovski [1], [2] presupunînd, fără posibilitate de verificare directă, că se respectă principiul capacității maxime de debit, stabilește pentru rugozitate medie n_m și pentru coeficientul lui Chezy formulele

$$n_m = n_2 \frac{(1 + \varepsilon^{1,33})^{0,75}}{\varepsilon} = n_1 (1 + \varepsilon^{1,33})^{0,75} \tag{1}$$

și

$$C_m = \frac{1}{n_m} R^{0,25} = \frac{1}{n_1} (1 + \varepsilon^{1,33})^{0,75} R^{0,25} = C_1 \left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1,33}\right]^{0,75}, \tag{2}$$

in care

$$\varepsilon = \frac{n_2}{n_1}$$

n_2 este coeficientul de rugozitate al gheții,
n_1 ,, coeficientul de rugozitate al fundului albiei,
C_1 și C_2, coeficienții lui Chezy în cele două zone, iar
R, raza hidraulică.

I. I. Levi [3], pornind de la o lege logaritmică de distribuție a vitezelor, obține pentru aceleași mărimi expresiile

$$C_m = \frac{\sqrt{g}}{k} \left[\ln \frac{h}{2\delta_m} - 1 \right] = \frac{1}{n_m} \left(\frac{h}{2}\right)^{0,25} \tag{3}$$

$$n_m = \frac{k\left(\frac{h}{2}\right)^{0,25}}{\sqrt{g}\left[\ln \frac{h}{\delta_1 + \delta_2} - 1\right]}, \tag{4}$$

în care

k este constanta lui Prandtl,
g accelerația gravitației,
$h = h_1 + h_2$ înălțimea totală a curentului,
$\delta_m = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ media înălțimilor proeminentelor pe cele două suprafețe care provoacă rugozitatea.

Este important de remarcat faptul că, după Pavlovski, eforturile tangențiale la cele două suprafețe de limitare au valorile

$$\tau_1 = \gamma \frac{v_1^2}{c_1^2}, \quad \tau_2 = \gamma \frac{v_2^2}{c_2^2}, \tag{5}$$

diferite între ele și posibile din punct de vedere fizic (v_1 și v_2 sînt vitezele medii în cele două zone iar γ este greutatea specifică).

După Levi, valoarea efortului tangențial la perete este

$$\tau = \frac{\gamma h i}{2}, \tag{6}$$

aceeași pentru ambele suprafețe ce limitează curentul.

Rezultatele teoretice finale ale lui Pavlovski și Levi, deși au la bază ipoteze sau postulate neverificate de practică, concordă totuși destul de satisfăcător cu datele din natură, fapt ilustrat de Levi prin exemple concrete [3].

Desigur, rezolvarea acestei probleme nu poate fi obținută decît pe baza unor experiențe sistematice, efectuate într-un canal cu rugozitate mixtă, care să ofere posibilitatea de a se varia elementele geometrice și elementele hidrodinamice, caracteristice scurgerii.

În acest scop, s-au făcut o serie de experiențe în laborator. Experiențe sistematice au mai fost necesare și pentru lămurirea unor considerații teoretice de similitudine și modelare referitoare la metoda cercetării hidrotehnice în curenți de aer.

Vom încerca să privim problema scurgerii între doi pereți cu rugozitate mixtă în lumina rezultatelor experimentale obținute în laboratorul nostru. De asemenea, vom avea în vedere și experiențele făcute într-un canal cu rugozitate mixtă de către H. Schlichting, cunoscute nouă doar prin articolul lui Hunter Rouse [4].

2. Pentru a elimina factorii nespecifici fenomenului, vom privi doar problema plană, adică vom analiza scurgerea într-un canal de lățime foarte mare, cu rugozitate diferită pe cei doi pereți plani paraleli.

Din experiențele ce se expun mai jos, ca și la scurgerea în rîuri sub înveliș de ghiață, se disting cele două zone delimitate de cei doi pereți și punctul de viteză de valoare maximă.

Din experiențele noastre, ca și din experiențele lui H. Schlichting a rezultat că se poate admite ipoteza independenței curenților din cele două zone. Aceasta a reeșit din faptul că, curba de distribuție a vitezelor

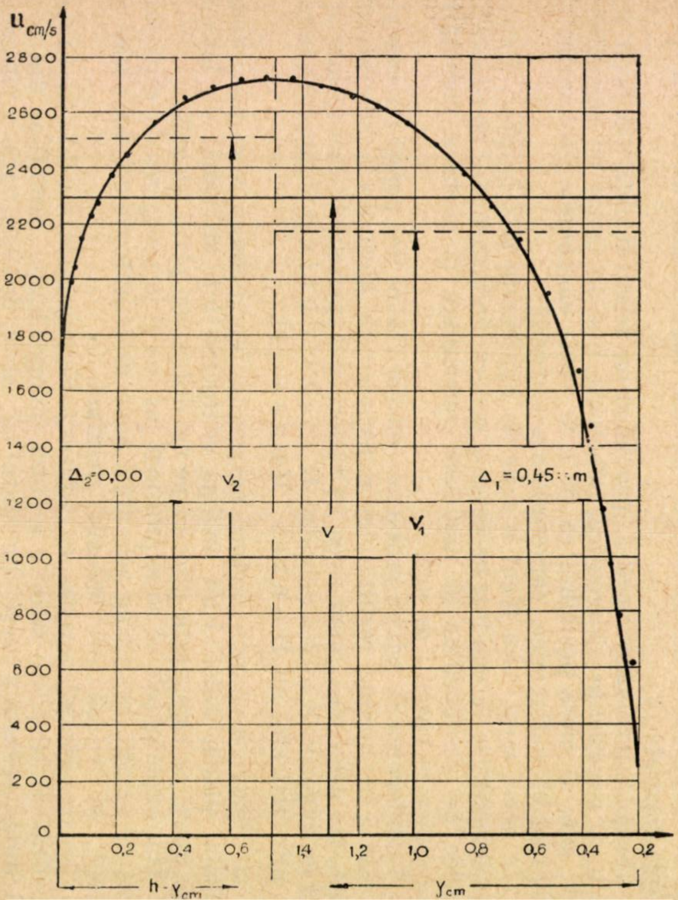


Fig. 3. — Curba experimentală de distribuţie a vitezelor în canal cu rugozitate mixtă, scara naturală.

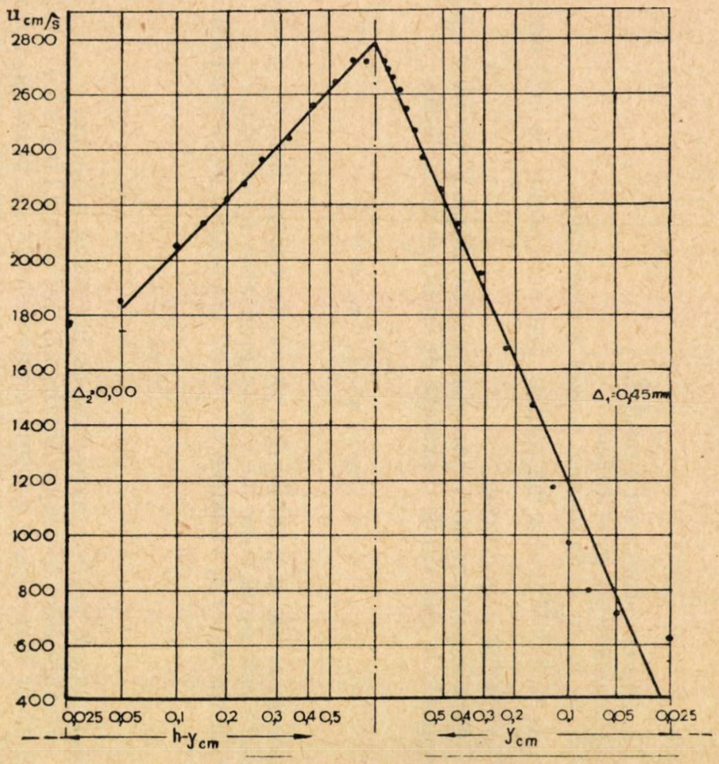


Fig. 4. — Curba experimentală de distribuţie a vitezelor în canal cu rugozitate mixtă, scara logaritmică.

în fiecare zonă depinde numai de distanța relativă de la peretele adiacent și este funcție independentă de distanța de la peretele opus.

În figurile 3 și 4 sînt date graficele de distribuție a vitezelor în scară naturală și în scară logaritmică, trasate prin punctele obținute experimental.

Graficul din figura 4 arată că legea de distribuție a vitezelor, în cazul rugozității mixte, poate fi suficient de exact aproximată cu o funcție logaritmică. Aceste experiențe fundamentează și justifică prima ipoteză de calcul și anume independența curenților.

Admitem deci că fiecare curent acționează independent și la fiecare din pereții cu rugozitate diferită efortul tangențial are valoarea

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\rho}{2}\lambda_1 v_1^2, \\ \tau_2 &= \frac{\rho}{2}\lambda_2 v_2^2, \end{aligned} \tag{7}$$

unde

ρ este masa specifică a aerului.

λ_1 și λ_2 sînt coeficienții de rezistență specifici celor două rugozități, iar

v_1 și v_2 vitezele medii ale curentului pe înălțimile corespunzătoare h_1 și h_2.

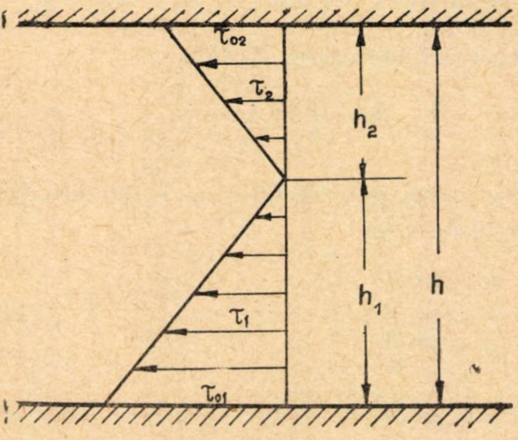


Fig. 5. — Distribuția pe verticală a eforturilor tangențiale τ într-un canal cu rugozitate mixtă.

Așa cum rezultă din experiențele expuse mai jos, distribuția vitezelor în cele două zone definite de h_1 și h_2 poate fi reprezentată de relația deficitului de viteză dată de Von Kármán,

$$u_{max} - u_1 = \sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}}\, f\left(\frac{y_1}{h_1}\right) \tag{8}$$

pentru zona inferioară și

$$u_{max} - u_2 = \sqrt{\frac{\tau_2}{\rho}}\, f\left(\frac{y_2}{h_2}\right) \tag{9}$$

pentru zona superioară.

Din condiția de echilibru a mișcării avem (fig. 5)

$$\frac{\tau_1}{h_1} = \frac{\tau_2}{h_2} = \frac{dp}{dx}. \tag{10}$$

Viteza medie pentru fiecare din zone are expresia

$$v = u_{max} - \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \int_0^1 f\left(\frac{y}{h}\right) d\left(\frac{y}{h}\right) = u_{max} - \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\, vk, \tag{11}$$

unde k este constanta lui Prandtl [5], a cărei valoare numerică este socotită a fi 4,07.

Folosind relaţia pentru coeficientul de rezistenţă λ în regim pătratic

$$\lambda^{-\frac{1}{2}} = 4 \log \cdot \frac{R}{\Delta} + 4{,}25 \tag{12}$$

(unde Δ este rugozitatea absolută iar R raza hidraulică), expresiile (7), (10), (11) şi condiţiile geometrice şi de debit conduc la sistemul de ecuaţii

$$\begin{aligned}
&v_2 - v_1 = \frac{k}{\sqrt{2}} \sqrt{\lambda_1}\, v_1 - \sqrt{\lambda_2}\, v_2), \\
&\lambda_1^{-\frac{1}{2}} = 4 \log \frac{h_1}{\Delta_1} + 4{,}25, \\
&\lambda_2^{-\frac{1}{2}} = 4 \log \frac{h_2}{\Delta_2} + 4{,}25, \\
&h_1 v_1 + h_2 v_2 = h v_m, \\
&\lambda_1 v_1^2 = \frac{h_1}{h_2} \lambda_2 v_2^2, \\
&h_1 + h_2 = h,
\end{aligned} \tag{13}$$

unde în plus s-au utilizat notaţiile

h, înălţimea totală a curentului,

v_m, viteza medie a curentului.

Pentru rezolvarea acestui sistem avem ca date k, Δ_1, Δ_2, h şi v_m şi ca necunoscute v_1, v_2, h_1, h_2, λ_1 şi λ_2.

Rezolvarea se obţine prin încercări succesive. Notăm

$$\alpha = \frac{v_1}{v_n}, \ \beta = \frac{v_2}{v_m}, \ \gamma = \frac{h_1}{h}, \ \delta = \frac{h_2}{h} = 1 - \gamma.$$

Se observă că pentru anumite valori fixe ale lui λ_1 şi λ_2 coeficienţii α, β_1 γ şi δ se rezolvă explicit faţă de λ_1 şi λ_2,

$$\alpha = \frac{M + M^3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{1 + M^3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \tag{14}$$

$$\beta = \frac{1 + M^2 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}{1 + M^3 \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \tag{15}$$

$$\gamma = \frac{1 - \beta}{\alpha - \beta}, \tag{16}$$

$$\delta = \frac{1 - \alpha}{\beta - \alpha}, \tag{17}$$

unde

$$M = \frac{1 + k\sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}}{1 + k\sqrt{\frac{\lambda_1}{2}}}.$$

Pentru ușurința calculelor s-au construit graficele

$$\lambda = \lambda\left(\frac{h}{\Delta}\right), \quad \alpha = \alpha\ (\lambda_1, \lambda_2), \quad \beta = \beta\,(\lambda_1, \lambda_2) \text{ și } \gamma = \gamma\,(\lambda_1, \lambda_2)$$

(fig. 6, 7, 8 și 9).

Din grafice se vede variația acestor coeficienți la diferiți λ_1 și la diferite rapoarte $m = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Coeficientul α ia valori mai mici decît 1 între cele două limite $\lambda_2 = 0$ și $\lambda_2 = \lambda_1$ și egale cu 1 în aceste limite.

Valorile coeficientului β pentru $\lambda_2 = 0$ corespund rapoartelor $\frac{U_{max}}{v}$ pentru diferiți λ_1. În general, raportul $\frac{U_{max}}{v}$ se grupează în jurul valorii 1,25, ceea ce concordă cu datele experimentale.

Mersul calculelor este următorul :

a) La o înălțime totală a curentului h se ia un $h_1 \left(\frac{h}{2} < h_1 < h\right)$.

b) Pe graficul din figura 6 se determină λ_1, corespunzător raportului $\frac{h_1}{\Delta_1}$ $(\Delta_1 > \Delta_2)$ și λ_2 corespunzător raportului $\frac{h_2}{\Delta_2}$ $(h_2 = h - h_1)$.

c) Se calculează raportul $m = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, iar pe graficul din figura 9 se determină γ.

d) Se găsește $h_1 = \gamma h$ și se compară cu cel introdus în calcul. Dacă există o diferență mai mare de $4 \div 5\%$, calculul se reface.

e) Se determină apoi α și β cu ajutorul graficelor din figurile 7 și 8.

Folosind relațiile (8) și condițiile de echilibru ale mișcării, putem deduce expresia coeficientului de rezistență medie λ_m.

Luînd o valoare medie a eforturilor tengențiale egală cu media aritmetică a celor existente, din condițiile de echilibru obținem

$$\tau_1 + \tau_2 = 2\tau_m = h\,\frac{dp}{dx} \tag{18}$$

sau

$$\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 = 2\lambda_m v_m^2, \tag{19}$$

de unde

$$\lambda_m = \frac{\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2}{2 v_m^2}$$

sau

$$\lambda_m = \tfrac{1}{2}(\alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2), \tag{19'}$$

unde

$\frac{dp}{dx}$ este pierderea de sarcină pe unitate de lungime, iar α și β sînt coeficienții dați de relațiile (14) și (15).

Valoarea coeficientului de rezistență medie λ_m — obținută pe cale teoretică, pornind de la ipotezele de bază a independenței celor doi curenți și a distribuției vitezelor după legea deficitului de viteză a lui Von Kármán, de astă dată verificată de experiențe, — rezolvă pe deplin problema practică a scurgerilor în canale închise cu rugozitate mixtă, cea a scurgerilor sub un înveliș de ghiață, sau cea a scurgerilor pe modelul cu aer.

În figura 10 este dat graficul $\lambda_m = \lambda_m(\lambda_1\ \lambda_2)$ construit după formula (19').

Valorile numerice ale lui $\lambda_m = \frac{\alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2}{2}$ sînt date în tabloul nr. 1.

Ultima coloană reprezintă valoarea $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ în cazul în care $\lambda_1 = \lambda_1\left(\frac{h_1}{\Delta_1}\right)$ și $\lambda_2 = \lambda_2\left(\frac{h_2}{\Delta_2}\right)$.

În acest caz λ_m aproape coincide cu cel dat de formula (19') și avem pentru λ_m o dependență liniară în raport cu λ_1 și λ_2, fapt ilustrat de altfel în figura 10.

Cu exactitate suficient de mare poate fi folosită ca valoare numerică pentru λ_m media aritmetică a celor doi coeficienți de rezistență λ_1 și λ'_2, corespunzători scurgerii simetrice,

$$\lambda'_m = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2},$$

$$\lambda'_1 = \lambda'_1\left(\frac{h}{2\Delta_1}\right),\ \lambda'_2 = \lambda'_2\left(\frac{h}{2\Delta_2}\right) \tag{20}$$

Eroarea pe care o introducem poate fi apreciată cu ajutorul relației

$$\frac{\delta\lambda_m}{\lambda_m} = \frac{\delta\lambda_1 + \delta\lambda_2}{\lambda_m} =$$

$$= \frac{2}{\log^2 x\,\frac{h_2}{\Delta_2} + \log^2 x\,\frac{h_1}{\Delta_1}}\left(\frac{\log x^2\,\frac{h_1\cdot h}{2\,\Delta_1^2}\log\frac{2\,h_1}{h}\log^2 x\,\frac{h_2}{\Delta_2}}{\log^2 x\,\frac{h}{2\Delta_1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\log x^2\,\frac{h_2\cdot h}{2\,\Delta_2^2}\log\frac{2\,h_2}{h}\log^2 x\,\frac{h_1}{\Delta_1}}{\log^2 x\,\frac{h}{2\Delta_2}}\right),$$

dedusă din (12).

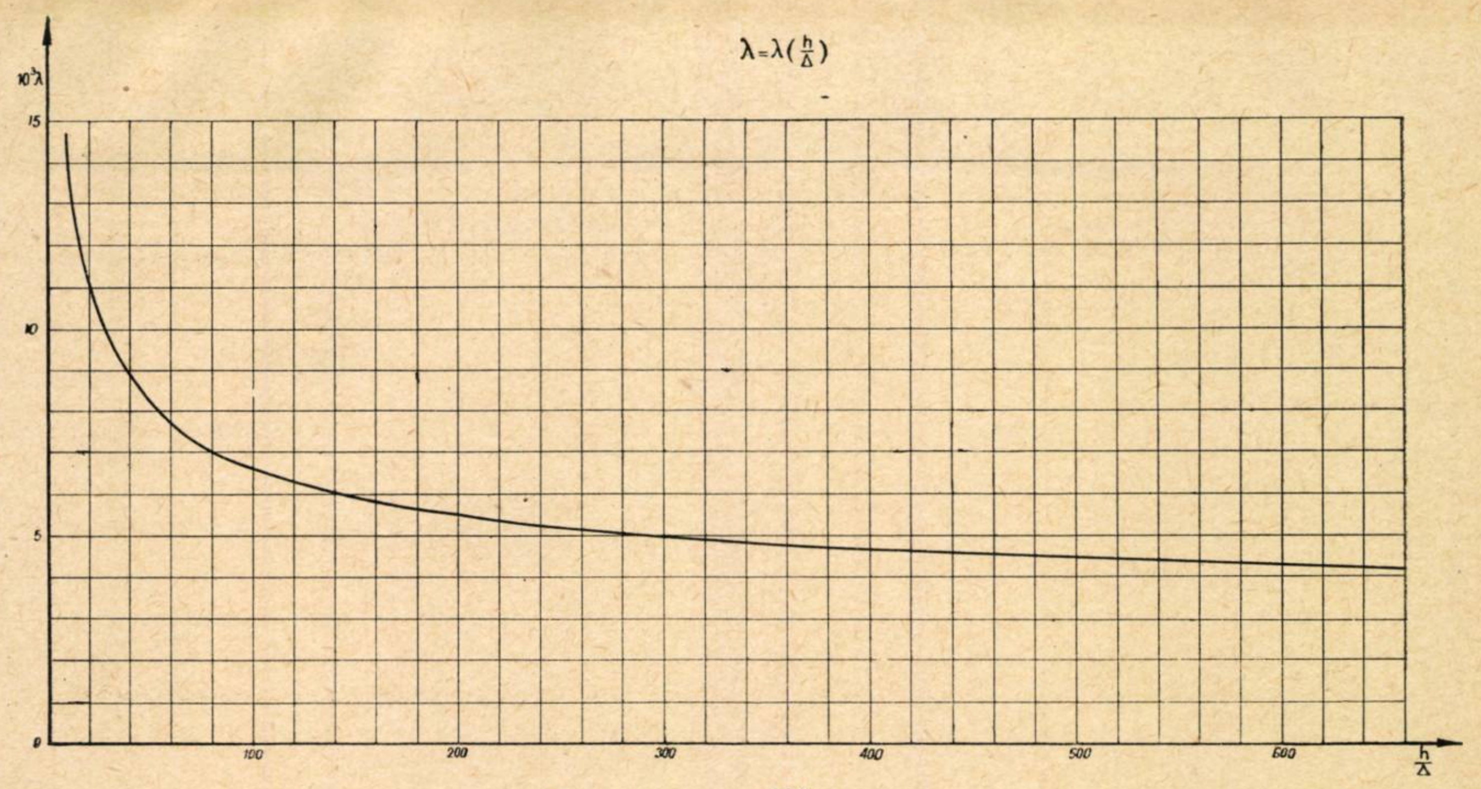


Fig. 6. — Dependența funcțională $\lambda = \lambda\left(\frac{h}{\Delta}\right)$ în regim turbulent pătratic.

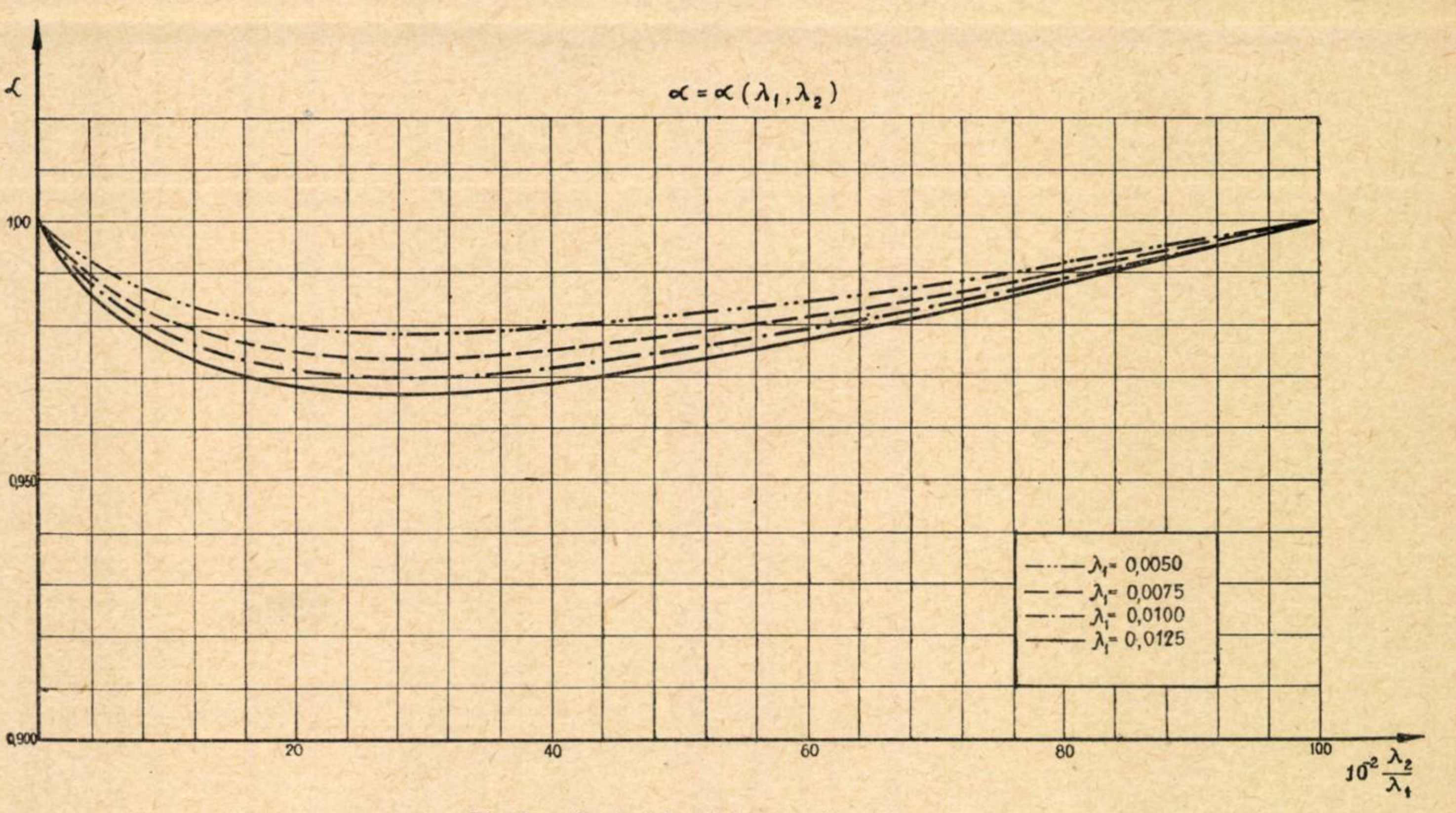


Fig. 7. — Graficul funcției $\alpha = \alpha\ (\lambda_1,\ \lambda_2)$.

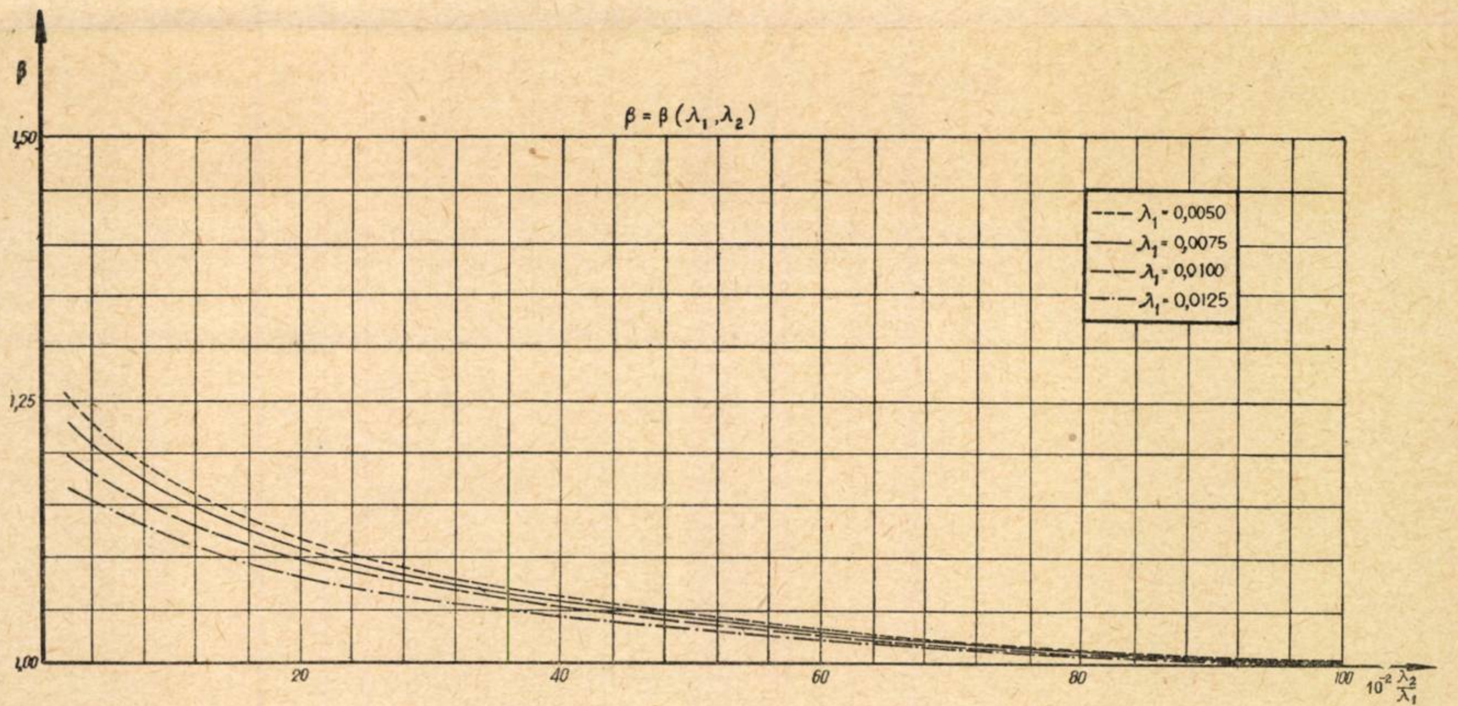


Fig. 8. — Graficul funcției $\beta = \beta\ (\lambda_1,\ \lambda_2)$.

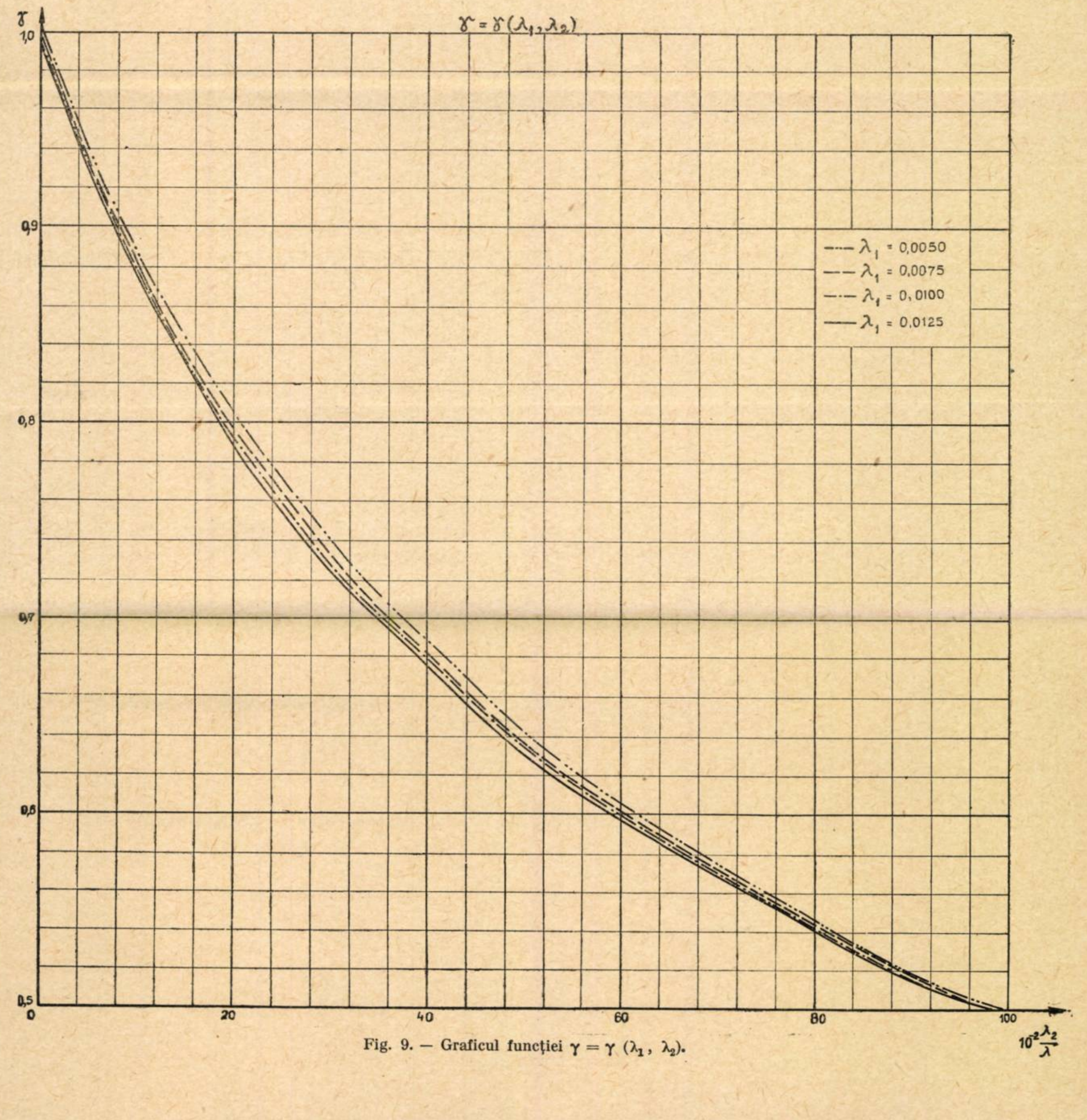


Fig. 9. — Graficul funcției $\gamma = \gamma\ (\lambda_1,\ \lambda_2)$.

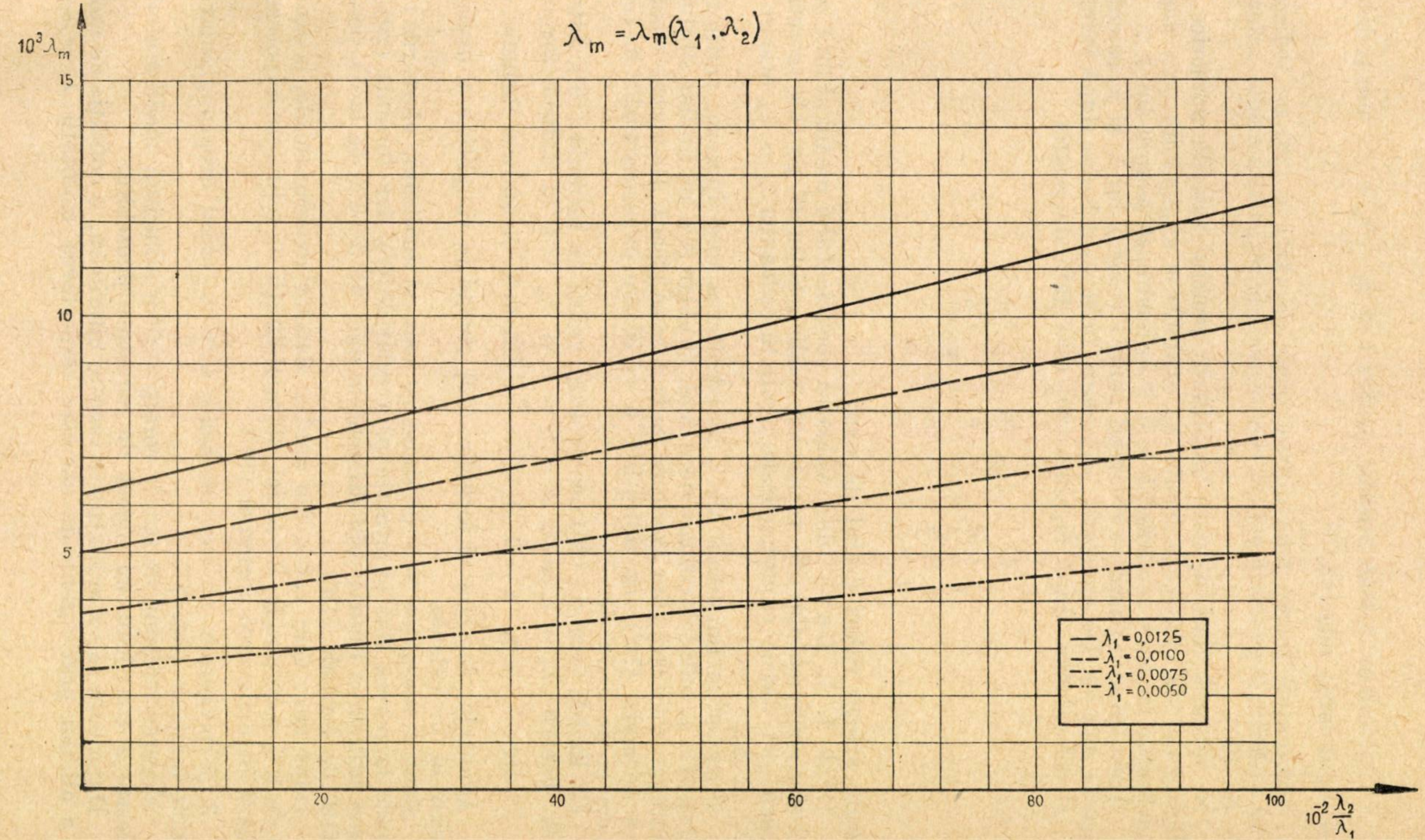


Fig. 10. – Graficul funcției $\lambda_m = \lambda_m(\lambda_1, \lambda_2)$.

În tabloul nr. 2, s-au calculat pentru $h = h_1 + h_2 = 20$ mm și diverși Δ_1 și Δ_2 eroarea relativă $\frac{\delta\lambda_m}{\lambda_m}$.

Diferențele foarte mici dintre formulele (19′) și (20) ne îndreptățesc să utilizăm în practică pentru coeficientul de rezistență medie valoarea dată de (20).

Se observă deci o mare stabilitate pentru valorile numerice ale coeficientului de rezistență medie λ_m, stabilitate explicabilă prin modul compensator cu care coeficienții α și β influențează asupra lui λ_m.

Acest lucru nu mai este valabil pentru valorile lui λ_1 și λ_2 calculate în aceste ipoteze. De exemplu, diferența între λ_1 calculat după formula (19′) și cel calculat după formula (20) este dată de relația

$$\frac{\delta\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\log \frac{2h_1}{h} \log x^2 \frac{h_1 h}{2\Delta_1^2}}{\log^2 x \frac{h}{2\Delta_1}} \tag{21}$$

și poate atinge valori destul de mari.

După I. I. Levi deși valoarea coeficientului mediu al lui Chézy (deci și a coeficientului de rezistență medie), obținută pe cale teoretică, concordă cu datele experimentale, avem întotdeauna $\lambda_1 = \lambda_2$ oricare ar fi Δ_1 și Δ_2.

Considerăm important deci, în admiterea unei ipoteze, verificarea nu numai a rezultatelor finale de calcul, ci chiar și a mărimilor obținute pe parcurs sau a relațiilor ipotetice de la care se pleacă. De aceea, socotim logică formula (19′), ca admițînd o verificare experimentală în toate etapele ei de deducție.

La limită, formula (20) are aceleași valori cu formula (19′). Într-adevăr pentru $\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, $\alpha = \beta = 1$ și $\lambda_m = \lambda$ în ambele formule.

Pentru $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 1$ și $\lambda_m = \frac{1}{2}$, din nou în ambele formule.

Avantajul deosebit al formulei (20) constă în simplitate și ușurința folosirii ei în calcule.

Pentru scurgerea sub presiune pe care o analizăm, eforturile tangențiale la perete sînt exprimate prin relațiile (7), iar formula (20) își găsește utilizarea numai prin diferențele mici de 3—4% ce le dă pentru λ_m față de formula (19′)

După cum vom vedea din analiza datelor experimentale, o exactitate de 3% corespunde, de altfel, și valabilității de admitere a ipotezelor de bază în deducerea formulei (19′).

3. Experiențele au fost efectuate într-un canal dreptunghiular de 20 mm înălțime (fig. 11).

Alegerea înălțimii de studiu corespunzător adîncimii medii a albiilor modelate a constituit un obiect de cercetare deosebită.

După cum se va arăta într-o lucrare ulterioară, o condiție de modelare a albiilor prin curenți de aer este respectarea egalității $\lambda_1 = \lambda_{\text{natură}}$

							2		2
0,02	0,9819	1,254	0,984	1,573	0,0315	1,015	0,00634	1,02	0,00637
0,06	0,9817	1,203	0,964	1,447	0,0868	1,051	0,00657	1,06	0,00662
0,10	0,9755	1,170	0,951	1,370	0,1370	1,088	0,00680	1,10	0,00687
0,20	0,9682	1,119	0,939	1,252	0,2504	1,188	0,00742	1,20	0,00750
0,40	0,9690	1,064	0,939	1,133	0,4531	1,392	0,00870	1,40	0,00875
0,60	0,9772	1,034	0,955	1,069	0,6414	1,596	0,00998	1,60	0,01000
0,80	0,9881	1,014	0,976	1,028	0,8228	1,794	0,01121	1,80	0,01175

Tabloul nr. 2

$\Delta_1 = 0,50$ mm

$h = h_1 - h_2 = 20$ mm

Δ_2	h_1	$h_2 = h - h_1$	$\lambda_1 = \lambda_1\left(\frac{h_1}{\Delta_1}\right)$	$\lambda_2 = \lambda_2\left(\frac{h_2}{\Delta_2}\right)$	$\lambda'_1 = \lambda'_1\left(\frac{h}{2\Delta_2}\right)$	$\lambda' = \lambda'_2\left(\frac{h}{2\Delta_2}\right)$	$\lambda_m = \frac{\lambda_2 + \lambda_2}{2}$	$\lambda_m = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2}$	$\frac{\delta\lambda_m}{\lambda_m}$ %
0,25	10,64	9,36	0,01090	0,00910	0,0111	0,00890	0,01000	0,0100	0
0,10	11,68	8,32	0,01065	0,00695	0,0111	0,00665	0,008800	0,00887	0,796
0,05	12,28	7,72	0,01040	0,00575	0,0111	0,00558	0,008075	0,00830	2,790
0,025	12,72	7,28	0,01000	0,00500	0,0111	0,00465	0,007500	0,00790	5,340

$\Delta_1 = 1,00$ mm

$h = h_1 + h_2 = 20$ mm

Δ_2	h_1	$h_2 = h - h_1$	$\lambda_1 = \lambda_1\left(\frac{h_1}{\Delta_1}\right)$	$\lambda_2 = \lambda_2\left(\frac{h_2}{\Delta_2}\right)$	$\lambda'_1 = \lambda'_1\left(\frac{h}{2\Delta_1}\right)$	$\lambda'_2 = \lambda'_2\left(\frac{h}{2\Delta_2}\right)$	$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$	$\lambda_m = \frac{\lambda'_1 + \lambda'_2}{2}$	$\frac{\delta\lambda_m}{\lambda_m}$ %
0,50	10,72	9,28	0,0141	0,01130	0,0148	0,0111	0,01270	0,01295	1,970
0,20	11,78	8,22	0,0135	0 00885	0,0148	0,00825	0,011175	0,01152	3,090
0,10	12,28	7,72	0,0130	0 0071	0,0148	0,00665	0,001005	0,01072	6,660
0,050	12,84	7,16	0,0128	0,0060	0,0148	0,00550	0,00940	0,01015	7,970

Tabeloul nr. 1

λ_1 = **0,0050**

m	α	β	α^2	β^2	$\beta^2 m$	$\alpha^2 + \beta^2 m$	$\lambda_m = \frac{\alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2}{2}$	$1 + m$	$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$
0,02	0,9955	1,165	0,991	1,356	0,0271	1,018	0,00254	1,02	0,00255
0,06	0,9894	1,134	0,979	1,287	0,0772	1,056	0,00264	1,06	0,00265
0,10	0,9856	1,114	0,971	1,242	0,1242	1,095	0,00274	1,10	0,00275
0,20	0,9802	1,081	0,961	1,169	0,2338	1,195	0,00299	1,20	0,00300
0,40	0,9797	1,045	0,960	1,091	0,4565	1,416	0,00354	1,40	0,00350
0,60	0,9846	1,024	0,969	1,048	0,6288	1,598	0,00399	1,60	0,00400
0,80	0,9918	1.010	0,984	1,020	0,8158	1,799	0,00450	1,80	0,00450

λ_1 = **0,0075**

m	α	β	α^2	β^2	$\beta^2 m$	$\alpha^2 + \beta^2 m$	$\lambda_m = \frac{\alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2}{2}$	$1 + m$	$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$
0,02	0,9942	1,200	0,988	1,439	0,0288	1,017	0,00381	1,02	0,00382
0,06	0,9866	1,161	0,973	1,348	0,0809	1,054	0,00395	1,06	0,00397
0,10	0,9816	1,137	0,964	1,292	0,1292	1,093	0,00410	1,10	0,00412
0,20	0,9756	1,096	0,952	1,202	0,2405	1,192	0,00447	1,20	0,00450
0,40	0,9754	1,053	0,951	1,108	0,4433	1,395	0,00523	1,40	0,00525
0,60	0,9816	1,028	0,963	1,057	0,6340	1,597	0,00599	1,60	0,00600
0,80	0,9903	1,012	0,981	1,023	0,8187	1,799	0,00675	1,80	0,00675

λ_1 = **0,01**

m	α	β	α^2	β^2	$\beta^2 m$	$\alpha^2 + \beta^2 m$	$\lambda_m = \frac{\alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2}{2}$	$1 + m$	$\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$
0,02	0,9933	1,229	0,986	1,510	0,0302	0,016	0,00508	1,02	0,00510
0,06	0,9840	1,184	0,968	1,402	0,0841	1,052	0,00526	1,06	0,00530
0,10	0,9784	1,155	0,957	1,334	0,1334	1,090	0,00545	1,10	0,00550
0,20	0,9717	1,109	0,944	1,229	0,2459	1,190	0,00595	1,20	0,00600
0,40	0,9720	1,059	0,945	1,121	0,4486	1,393	0,00697	1,40	0,00700
0,60	9,9792	1,031	0,959	1,063	0,6380	1,597	0,00798	1,60	0,00800
0,80	0,9891	1,013	0,978	1.026	0,8209	1,799	0,00899	1,80	0,00900

λ_1 = **0,0125**

unde λ_1 este coeficientul de rezistență al fundului albiei pe model, iar $\lambda_{\text{natură}}$ coeficientul de rezistență al albiilor din natură.

Avînd în vedere valorile limitate ale lui $\lambda_{\text{natură}}$ întîlnite, rezultă că și rugozitatea relativă a fundului modelului este limitată.

Unei game de rugozități absolute îi corespunde o gamă de adîncimi medii pe model. Însă, chiar în aceste limite, rugozitatea absoută și adîncimea medie a modeului nu pot fi alese arbitrar.

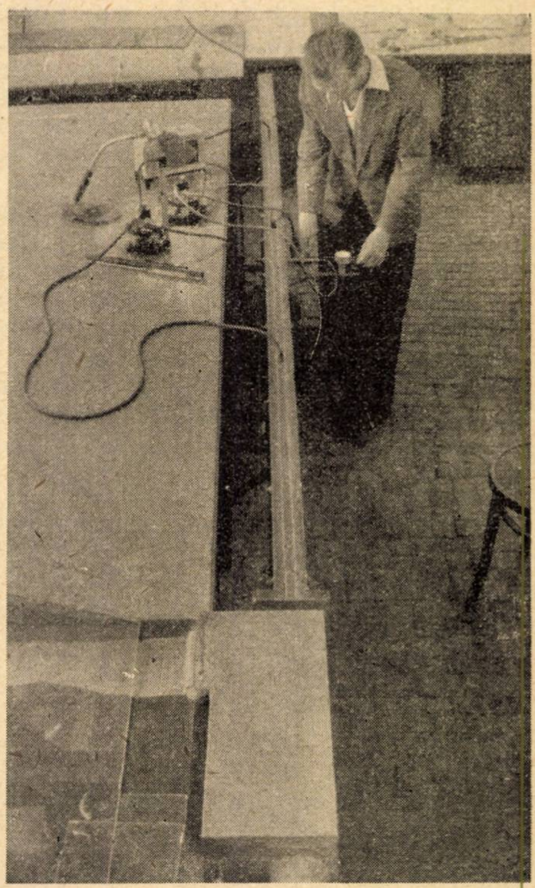


Fig. 11. — Canal cu rugozitate mixtă (vedere de ansamblu).

Pe de altă parte, adîncimi prea mici prin respectarea condiției de turbulență ($Re > Re_{\text{crit.}}$) duc la viteze prea mari, care ar putea să deformeze puternic mișcarea aluviunilor. O rugozitate absolută, neobișnuit de mare, de asemenea, împiedică reproducerea fenomenelor morfologice pe model asemănătoare cu cele din natură. În plus, la o anumită rugozitate a fundului modelului și la o rugozitate dată a geamului din experiențe, din considerații de similitudine, și modelare, rezultă că este necesar să se aleagă o astfel de adîncime încît punctul de viteză maximă să fie cît mai apropiat de geam. Pe baza unor experiențe sistematice cu diferite sorturi de nisip și pe diferite modele s-a dovedit că, la o adîncime de modelare de aproximativ 15—25 mm, distribuția vitezelor pe verticală în curent sub presiune se apropie satisfăcător de distribuția vitezelor pe verticală în albiile naturale, iar fenomenele morfologice se reproduc întocmai. Lățimea canalului experimental a fost aleasă $b=200$ mm ($b=20R$), adică un multiplu de 20 raze hidraulice, condiție în care, conform practicii de laborator, se poate considera că mișcarea fluidului în mijlocul secțiunii se realizează în condițiile unei scurgeri plane. Lungimea totală a canalului a fost aleasă $L = 4000$ mm, din care s-a luat o lungime de lucru $l=2\,000$ mm și o lungime de acces $l=1\,000$ mm$=100\ R$. Conform datelor noastre experimentale și din literatura tehnică, lungimea de acces s-a considerat suficientă pentru a se asigura dezvoltarea stratului limită pe întreaga înălțime a curentului, deci stabilizarea scurgerii și a epurii vitezelor. Instalarea unei site la capătul de acces al canalului nu a adus nici o modificare a caracteristicilor de scurgere a aerului în zona de lucru. Deci, pierderile de sarcină locale la intrare nu influențează mișcarea aerului pe lungimea de lucru, turbulența curentului aici fiind stabilizată.

În timpul experiențelor s-a variat rugozitatea pereților și numerele *Re*. Înălțimea canalului s-a păstrat aceeași.

S-au utilizat cinci tipuri de rugozități, astfel încît s-au obținut cinci scurgeri cu pereți de aceeași rugozitate și zece scurgeri de rugozitate mixtă. Numerele *Re* s-au variat între 1 000 și 20 000, acoperind astfel zona de început a curbei lui Blasius, zona de trecere și începutul zonei pătratice.

Drept rugozitate a fost folosită pînză specială cu un strat de nisip cuarțos lipit uniform pe una din fețe. Curbele granulometrice ale nisipului corespunzător fiecarei rugozități sînt date în figura 12.

Aceste diagrame arată că nisipul folosit a fost suficient de uniform. Rugozitatea absolută Δ corespunde dimensiunii sitei, care lasă să treacă 90% din cantitatea nisipului analizat.

Fixarea pînzei pe pereții canalului practic n-a schimbat înălțimea secțiunii de scurgere datorită sistemului de construcție a canalului.

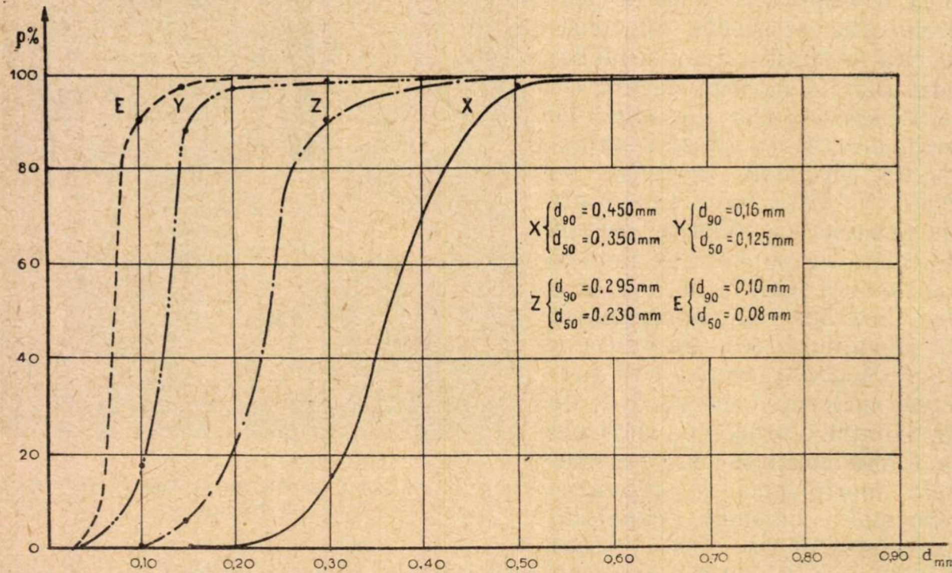


Fig. 12. — Curbele granulometrice ale nisipului folosit pentru crearea rugozității.

S-au făcut măsurători de pierderi de sarcină și de viteză în diverse puncte pe înălțimea de scurgere a canalului.

La fiecare experiență s-a înregistrat temperatura mediului înconjurător, umiditatea relativă și presiunea barometrică.

Pierderile de sarcină pe lungimea de lucru au fost citite direct la micromanometrul înclinat cu alcool. Vitezele au fost măsurate cu ajutorul sondei speciale și citite la micromanometru. Sonda specială era formată dintr-o tijă—două tuburi fiecare de $\varnothing = 1$ mm lipite alături, unul pentru măsurătoarea presiunii dinamice, altul pentru măsurarea presiunii statice — și dintr-un dispozitiv de prindere și de mișcare de translație a tijei. Orificiile de prindere a presiunii statice și dinamice au fost prevăzute la jumătatea lungimii de lucru a tijei sondei. În felul acesta tija sondei, în orice poziție de măsură, traversa în întregime înălțimea canalului de experiențe, iar perturbațiile în epura vitezelor au fost reduse la minimum.

Precizia rezultatelor măsurătorilor, după înlăturarea tuturor erorilor sistematice observate, a putut fi apreciată în urma analizei atît a graficelor reprezentative ale mărimilor măsurate, cît și a construcției aparatelor de măsură. În ceea ce privește aparatele de măsură, se poate aprecia că citirea la micromanometrul înclinat putea fi afectată de o eroare relativă pînă la 1,5%. Cu alte cuvinte, mărimile măsurate direct cu ajutorul micromanometrului — cum este diferența de presiune — au o aproximație relativă datorită aparatului $\delta_p = 1{,}5\%$.

Eroarea relativă maximă a sondei s-a putut aprecia la valoarea $\delta_s = 1\%$. Prin urmare, citirea la micromanometrul instalat la sondă putea fi afectată de o eroare relativă maximă $\delta_h = |\delta_s| + |\delta_p| = 2{,}5\%$. Cum vitezele sînt obținute din relația $v = k\sqrt{h}$, eroarea relativă maximă a vitezei, datorită aparatelor de măsură, este $\delta_v = \frac{1}{2}\,\delta_h = 1{,}25\%$ (s-a considerat $\delta_k' \ll \delta_h$).

Rezultatele măsurătorilor au fost prelucrate și reprezentate prin grafice.

Pierderile de sarcină obținute sînt ilustrate prin curbele $\lambda = \lambda\left(Re\,\frac{\Delta}{R}\right)$ în mărime logaritmică sau mărime naturală.

În figura 13 sînt reprezentate logaritmic curbele coeficientului de rezistență λ pentru cele 5 scurgeri cu pereți de aceeași rugozitate.

Se observă următoarele :

1) Suprapunerea punctelor corespunzătoare suprafețelor netede $\left(\frac{\Delta}{R} = 0{,}00\right)$ cu curba lui Blasius, ceea ce verifică exactitatea rezultatelor noastre.

2) După natura așternerii nisipului pe pînză, pentru rugozitatea XX $\left(\frac{\Delta}{R} = 0{,}0450\right)$ s-a obținut o alură a curbei tip Nicuradze, iar pentru rugozitățile ZZ $\left(\frac{\Delta}{A} = 0{,}0295\right)$, YY $\left(\frac{\Delta}{R} = 0{,}0160\right)$ și EE $\left(\frac{\Delta}{R} = 0{,}010\right)$ curbe tip Sevelev, adică prima cu, iar celelalte fără ondulații în zona de trecere de la curba lui Blazius la zona pătratică.

3) Limita zonei pătratice se găsește în jurul unor numere $Re = 5\,000 - 6\,000$ pentru rugozități mari și $Re = 10\,000 - 12\,000$ pentru rugozități mici. Acest fapt este foarte important pentru modelele în curenți sub presiune, în primul rînd pentru că aceste limite ne sînt cunos-

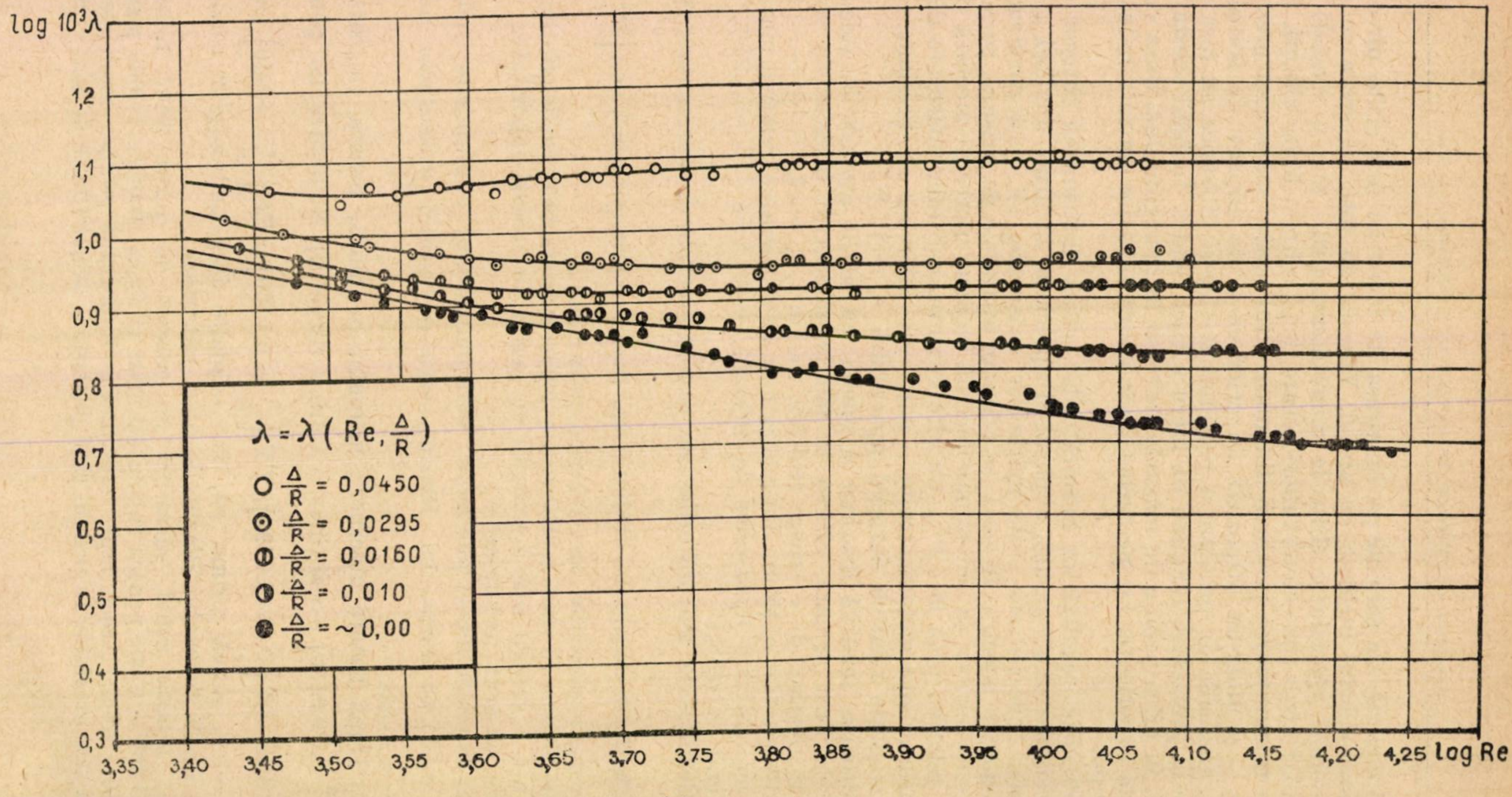


Fig. 13. — Curbele $\lambda = \lambda \left(Re, \dfrac{\Delta}{R} \right)$ pentru scurgerile între pereţii de aceeaşi rugozitate.

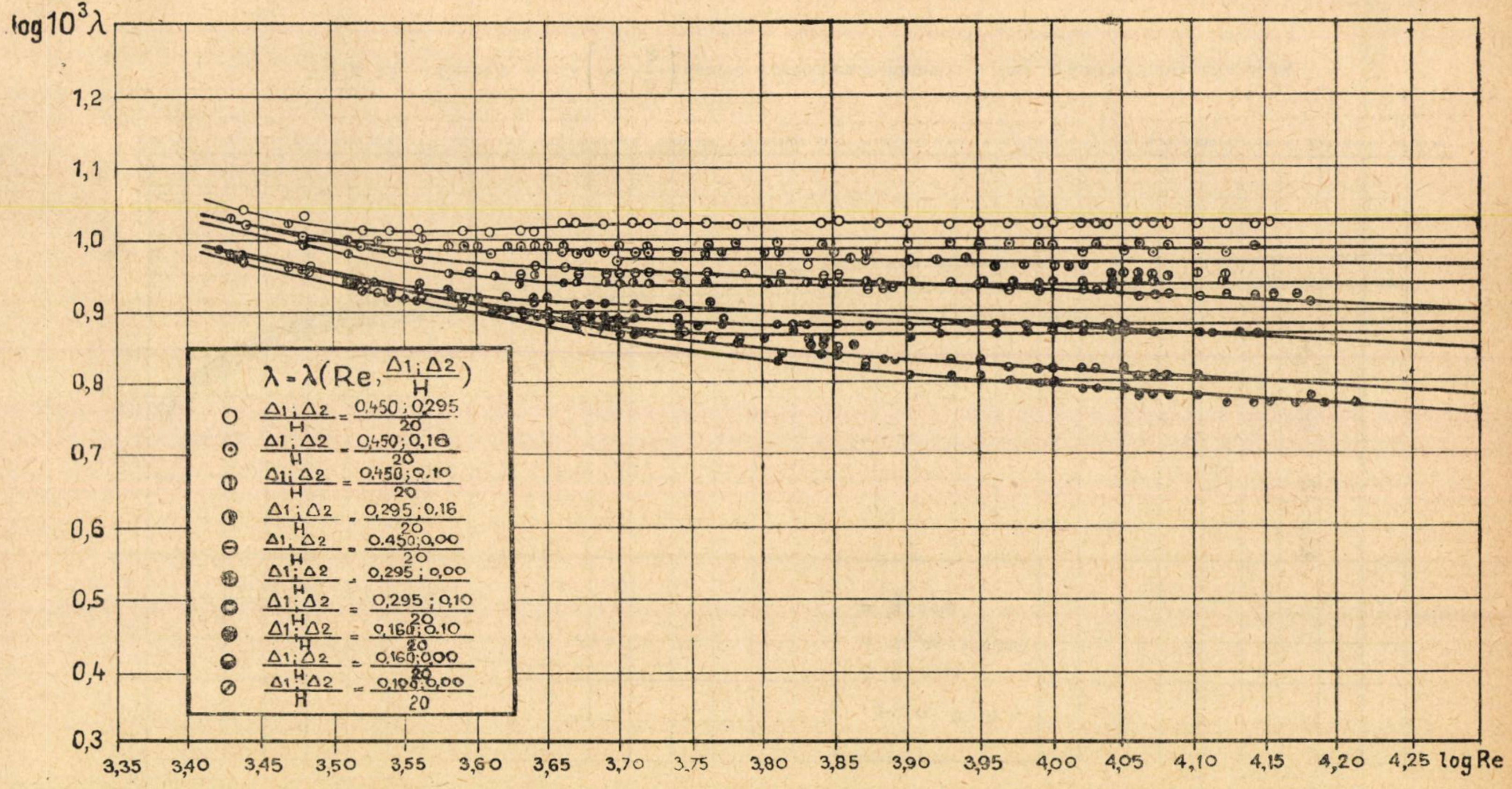


Fig. 14. – Curbele $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pentru scurgerile între pereţii cu rugozitate mixtă.

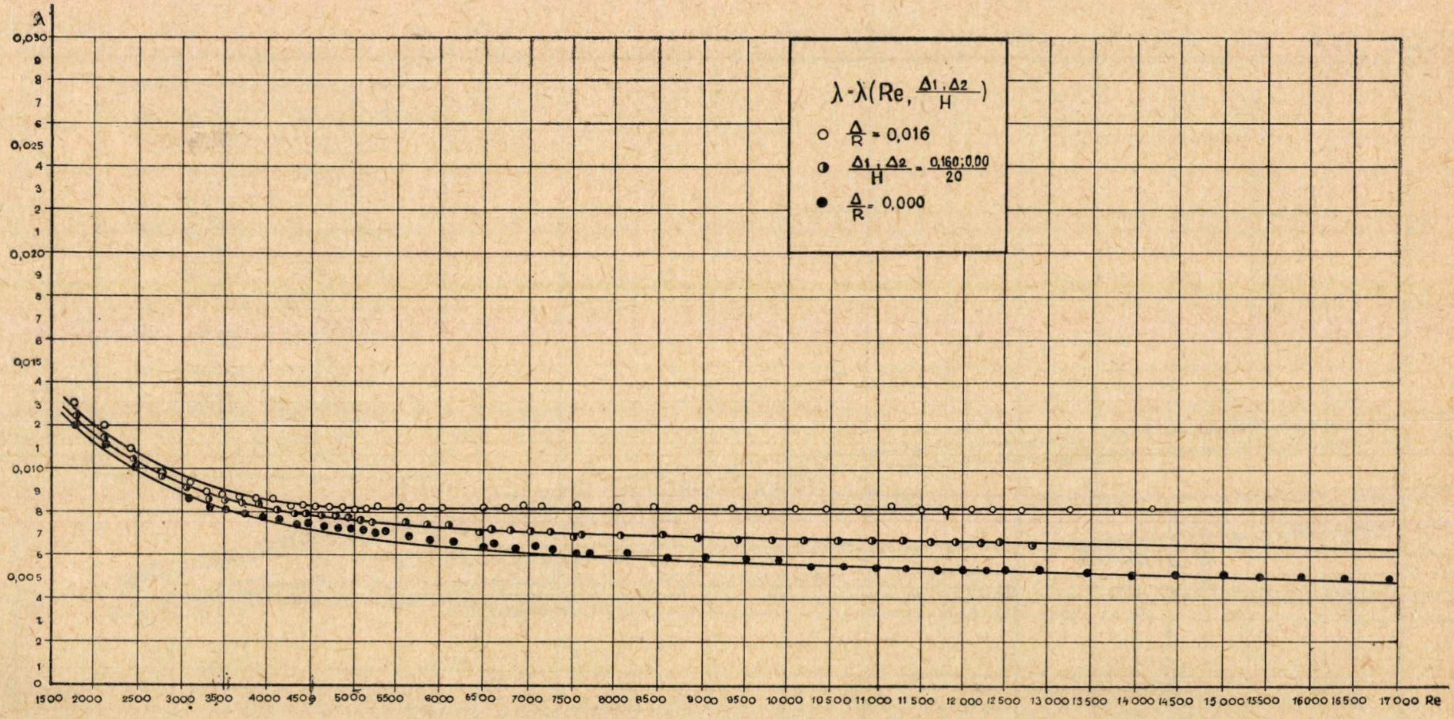


Fig. 15. — Curbele $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pentru scurgeri cu combinaţia a trei rugozităţi luate cîte două.

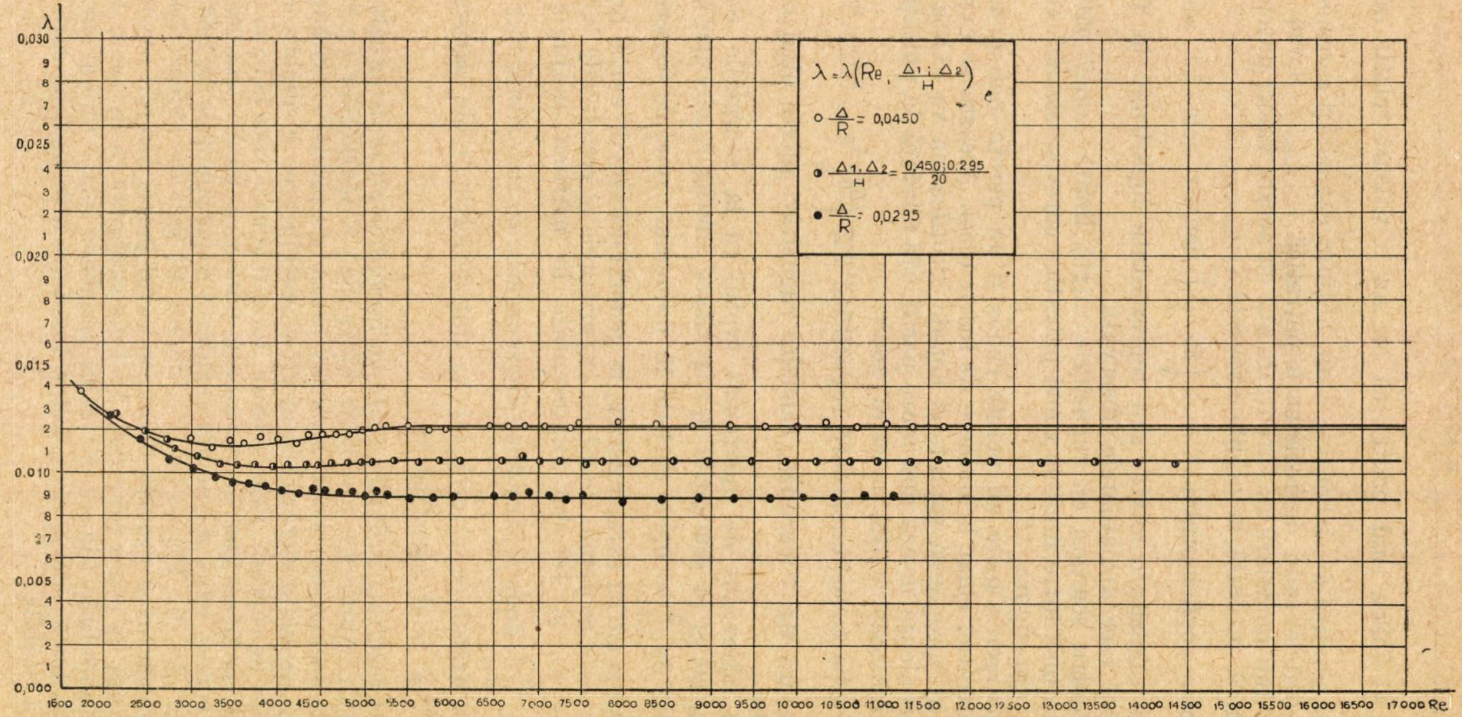


Fig. 16. — Curbele $\lambda = \lambda \left(Re, \frac{\Delta}{R} \right)$ pentru scurgeri cu combinațiile a trei rugozități luate cîte două.

cute și în al doilea rînd pentru că ele au o valoare relativ mică, ușor de atins.

4) În condiții de laborator s-au obținut rugozități corespunzătoare valorilor coeficientului de rezistență pătratică $\lambda_{pătratică} = 0{,}006 \div 0{,}0125$. Pentru studiul modelării în curenți de aer cu aceste valori putem acoperi valorile lui λ întîlnite la albiile naturale.

Curbele coeficientului $\lambda = \lambda \left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pentru cele 10 scurgeri în condiții de rugozitate mixtă, sînt reprezentate logaritmic în figura 14.

Se pot face următoarele observații:

1. Pentru scurgeri cu rugozitate mixtă limita zonei pătratice se găsește cuprinsă între limitele zonei pătratice corespunzătoare celor două rugozități din figura 13.

2. Scurgerea între un perete rugos și un perete neted, nu atinge regimul pătratic, chiar la numere *Re* foarte mari. Aceasta se explică prin faptul că în apropierea suprafeței netede întotdeauna va exista o zonă, a cărei turbulență în cea mai mare parte este născută de pulsațiile mărimilor hidrodinamice din această zonă.

3. Curba corespunzătoare rugozității XZ $\left(\frac{\Delta_1 ; \Delta_2}{H} = \frac{0{,}450 ; 0{,}295}{20}\right)$ păstrează o alură tip Nicuradze, celelalte rugozități mixte dînd o curbă λ tip Sevelev.

Este interesant de menționat faptul că la scurgerile cu aceeași rugozitate, cît și la scurgerile cu rugozitate diferită a pereților canalului, însă diferită de $\frac{\Delta}{R} = 0{,}00$, curbele în domeniul zonei de trecere converg fiecare către o curbă caracteristică, în general diferită de curba lui Blasius. Acest fapt este în deplin acord cu experiențele și concluziile lui Sevelev. În figurile 15 și 16 sînt reprezentate în mărime naturală curbele $\lambda = \lambda \left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$, doar pentru două din scurgerile cu rugozitate mixtă. Experiențele au arătat că valorile lui λ_m sînt astfel încît ele satisfac relația $\lambda_m = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ în mod satisfăcător.

Acest rezultat, în deplin acord cu formulele obținute pe cale teoretică (19′) și (21′), lămurește problema hidraulică a scurgerilor cu rugozitate mixtă. De asemenea, acest rezultat arată simplitatea fenomenului de scurgere în prezența rugozității mixte și posibilitatea însumării aritmetice a pierderilor de sarcină. Prin urmare, ipotezele care stau la baza calculului teoretic al coeficientului de rezistență pătratică medie sînt corecte din punct de vedere fizic. Asemenea rezultate experimentale au fost obținute și de către A. M. Yassin [6], cu un alt gen de experiențe, într-un canal hidraulic cu suprafață liberă, ai cărui pereți laterali aveau o rugozitate diferită de cea a fundului. Trebuie subliniat că în zona de trecere de la rezistența liniară la cea pătratică asemenea relații numai sînt valabile, dependența lui λ_m de λ_1 și λ_2 avînd loc după alte legi, pe care nu le-am putut încă stabili.

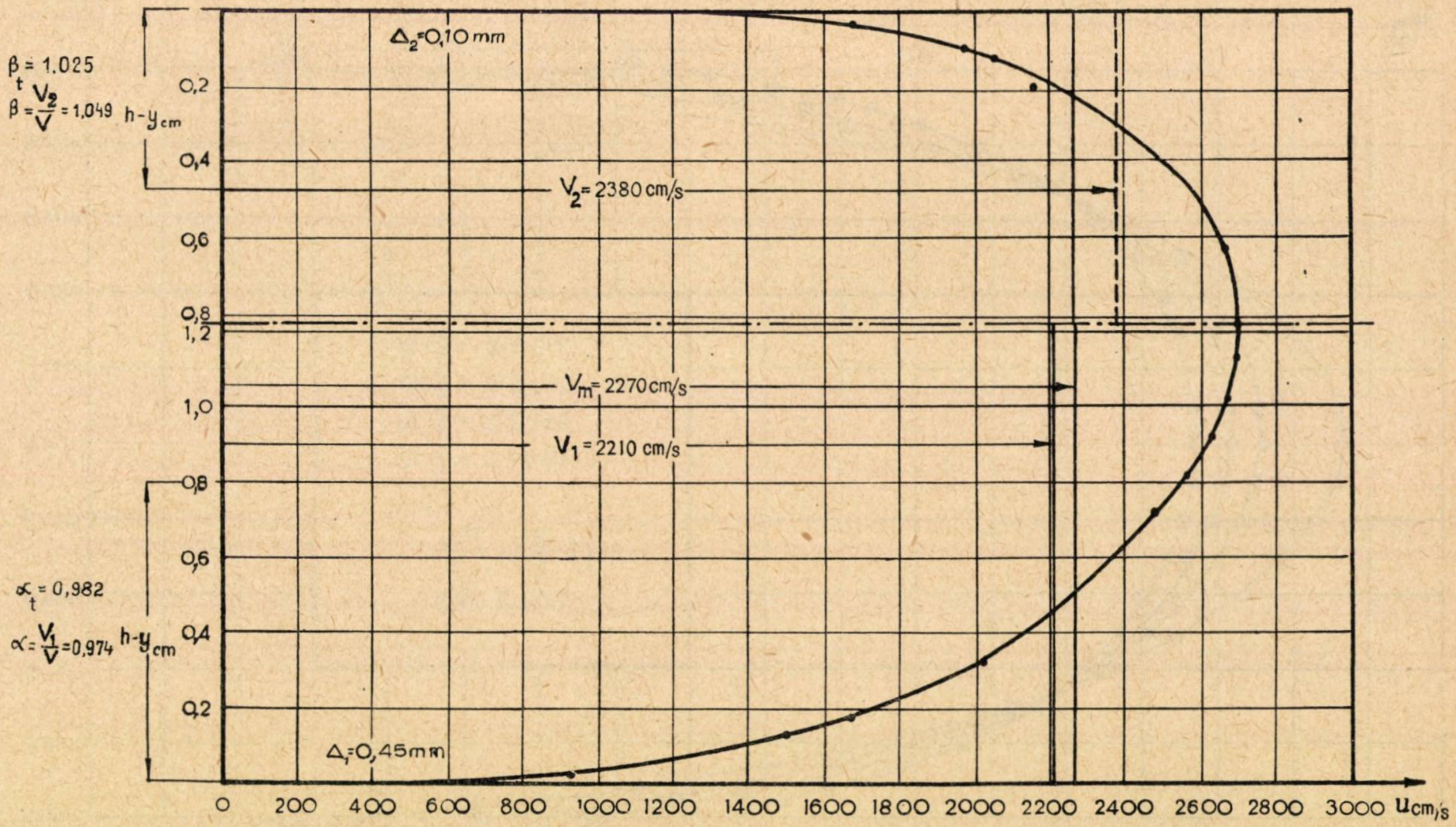


Fig. 17. — Curba experimentală de distribuţie a vitezelor pentru $\Delta_1 = 0{,}45$ mm, $\Delta_2 = 0{,}10$ mm.

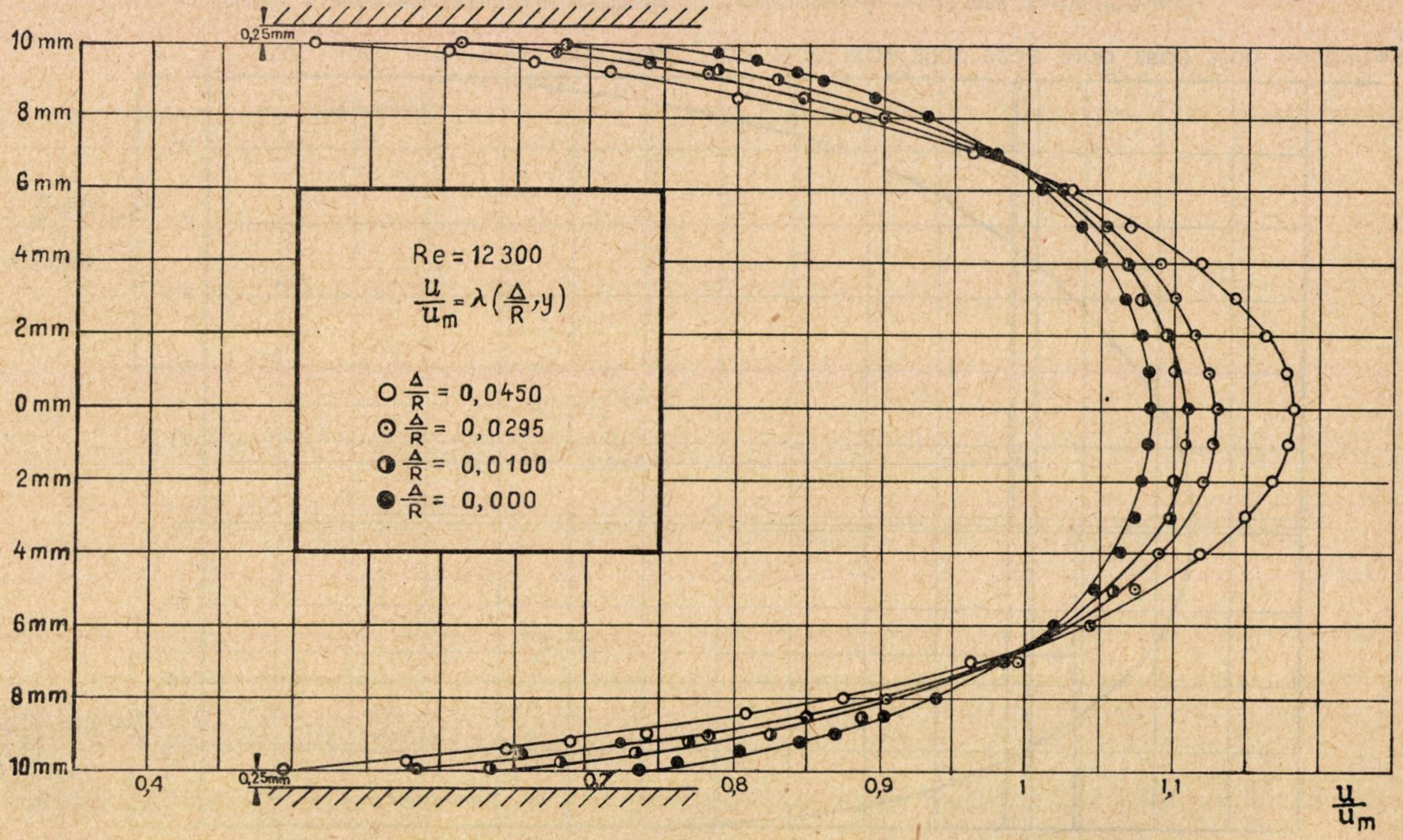


Fig. 18. – Curba de distribuţie a vitezelor, funcţie de rugozitate, pentru Re = 12 300.

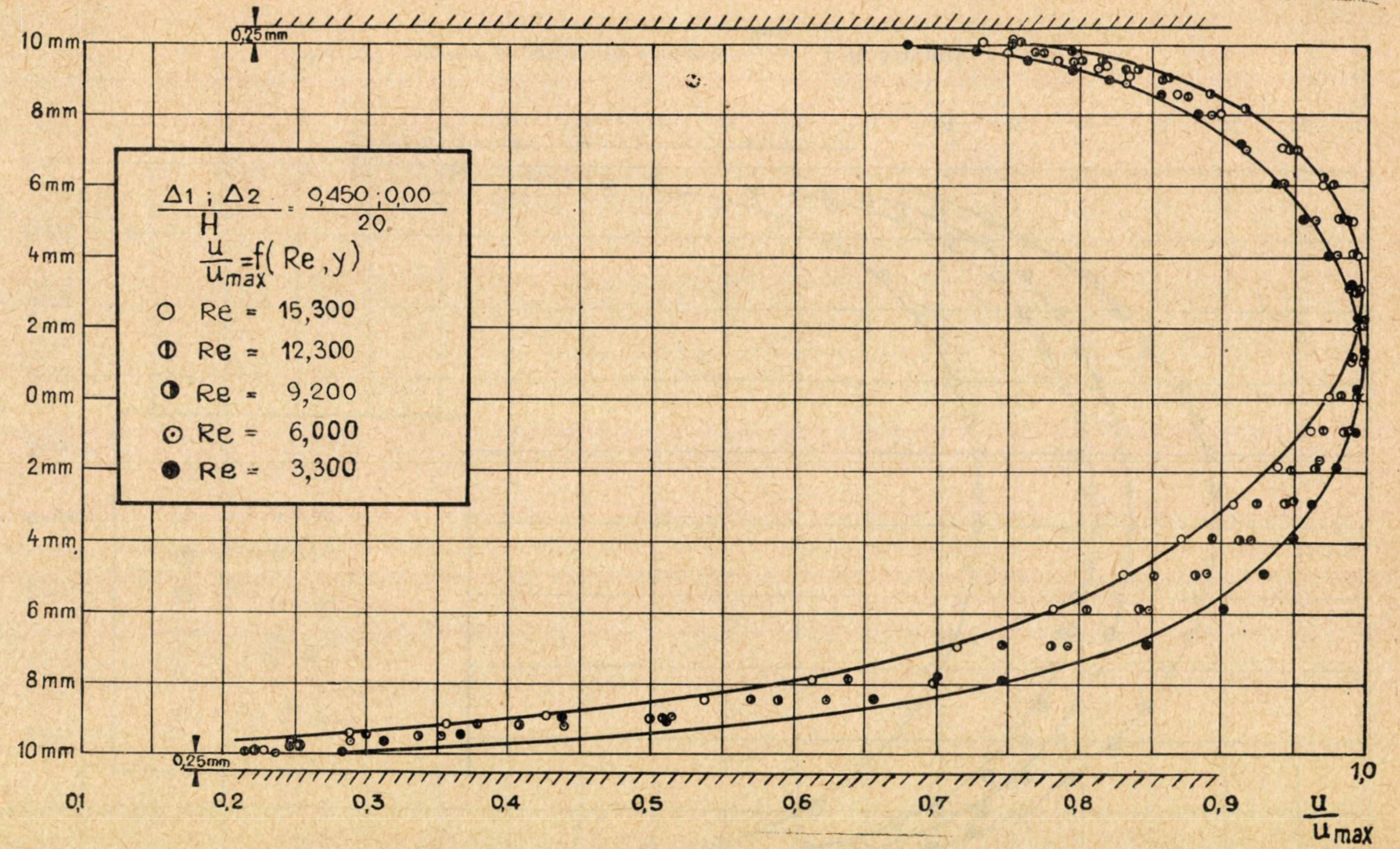


Fig. 19. – Curba $\frac{u}{u_{max}} = f(Re)$ pentru $\frac{\Delta_1, \; \Delta_2}{H} = \frac{0{,}450, \; 0{,}000}{20}$.

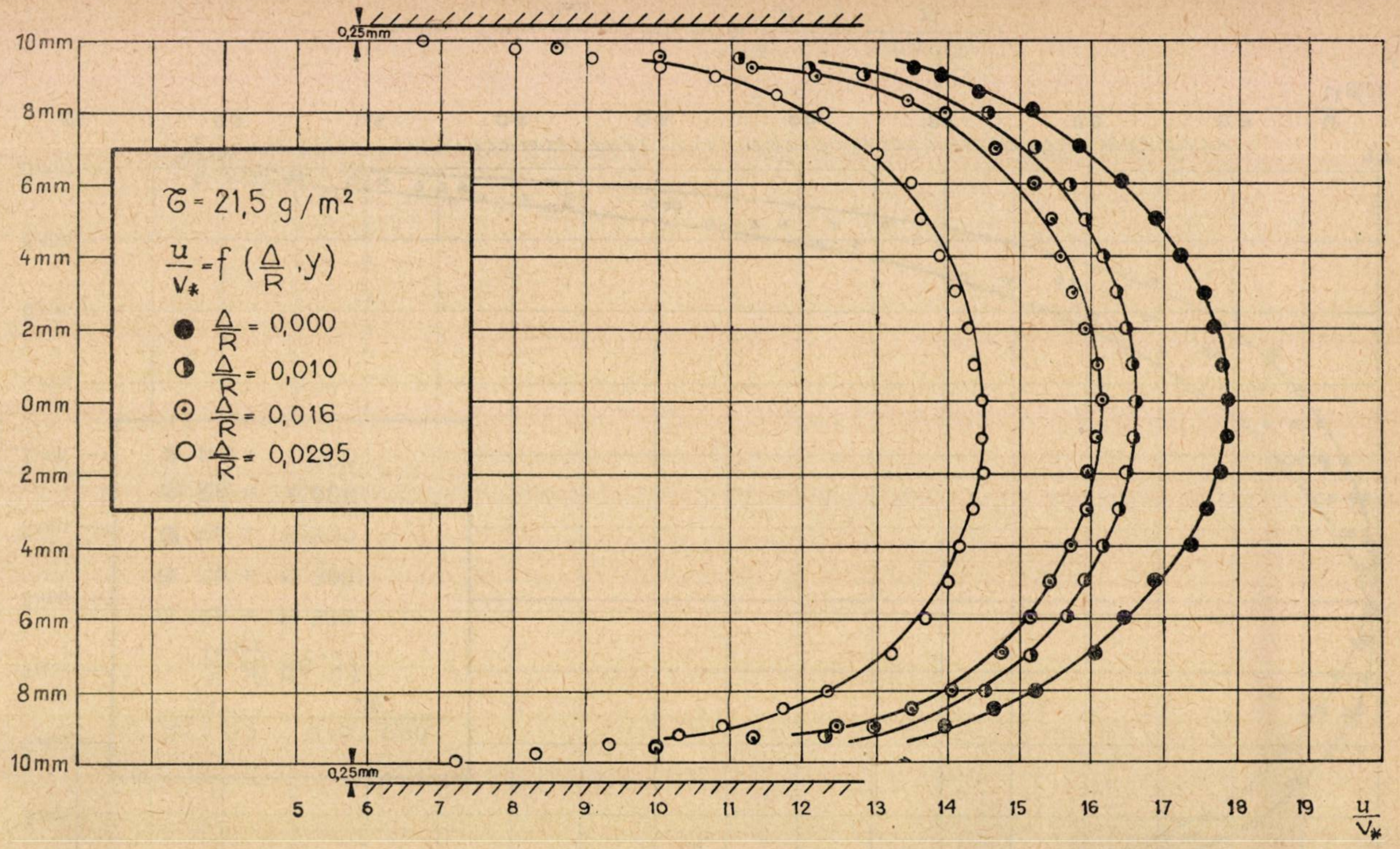


Fig. 20. — Curbele de distribuţie a vitezelor $\frac{u}{u_{max}} = \lambda\,(Re.\Delta)$ pentru $\tau = $ const.

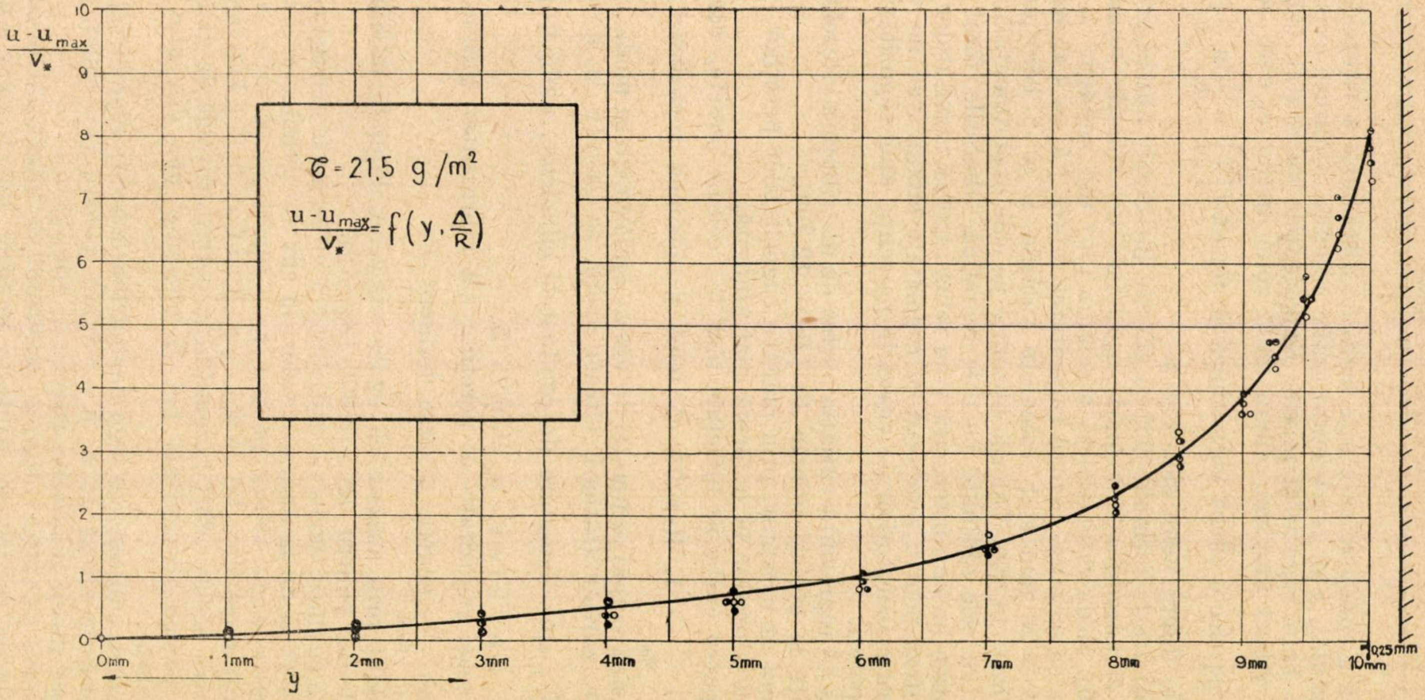


Fig. 21. — Graficul $\frac{u - u_{max}}{V} = f\ (Re,\ \Delta)$ pentru τ = const.

Pentru a cunoaște care este legea de distribuție a vitezelor pe înălțimea curentului, s-au reprezentat grafic punctele obținute experimental în prezența unor rugozități mixte. Experiențele au arătat (fig. 17) că punctul de viteză maximă separă două zone distincte, care se înscriu foarte bine pe cîte o curbă logaritmică de forma $f\left(\frac{y}{h}\right) = \frac{1}{k}\ln\frac{y}{h}$ și a căror viteză medie diferă între ele, $\alpha \neq \beta$.

În felul acesta formula (20) își găsește justificare numai prin faptul că valorile ei numerice sînt foarte apropiate de valorile numerice ale formulei (19). Deducerea directă a relației (20) din condiția $\alpha = \beta$ este infirmată de experiență. Pentru rugozitatea mixtă ($\Delta_1 = 0{,}45$ mm, $\Delta_2 = 0{,}10$ mm, $h = 20$ mm sînt calculate valorile α și β corespunzătoare numărului $Re = 14{,}800$. Valorile obținute pe cale experimentală concordă satisfăcător cu cele obținute pe cale teoretică, abaterile fiind sub 3% (fig. 17). Într-o lucrare ulterioară vom relua analiza rezultatelor măsurătorilor de viteză pentru scurgerea cu rugozitate mixtă. Aici ne vom opri numai asupra măsurătorilor de viteză în prezența unei rugozități identice pe cei doi pereți.

Figura 18 reprezintă variația curbei de distribuție a vitezelor funcție de rugozitate la același număr Re ($Re = 12\,300$).

Cum era de așteptat, prin mărirea rugozităților pereților, curba de distribuție a vitezelor ia o formă mai alungită.

Cele patru curbe se întretaie însă în aceleași puncte, corespunzătoare valorii $\frac{u}{v_m} = 1$. Rezultă că felul și mărimea rugozității pereților nu influențează asupra ordonatei de viteză egală cu viteza medie. Distanța de la perete, corespunzătoare vitezei medii, se găsește la aproximativ $y_m = 0{,}34\,\frac{h}{2}$, spre deosebire de conductele cilindrice, unde după experiențele lui Sevelev, $y_m = 0{,}25\,R$.

La aceeași rugozitate a pereților s-a reprezentat grafic raportul adimensional $\frac{u}{u_{max}}$ pentru diverse numere Re.

S-a văzut prin aceasta că epura vitezelor depinde în limite mici de numărul Re, pentru $Re > 4\,000$ (fig. 19).

Cu alte cuvinte, curba de distribuție a vitezelor la aceeași rugozitate ia o formă stabilă de la anumite valori în sus ale numărului Re.

Măsurătorile de viteză pentru $\tau_0 = \text{const.}$ la diferite rugozități s-au prelucrat după idea lui Walter Fritsch [7]. Din figura 20 se vede că pentru același efort tangențial la perete, curbele de distribuție a vitezelor în partea lor centrală pot fi obținute una din alta printr-o simplă translație.

Tot pentru cunoașterea legii de distribuție a vitezelor s-a reprezentat grafic deficitul de viteză după Karman pentru $\tau_0 = \text{const.}$ și pentru diferite viteze medii și diferite rugozități (fig. 21).

Se observă că există o lege a deficitului de viteză universală pentru toate tipurile de rugozitate, conform ipotezei lui Karman (B. A.

Bachmeteff [8]). Legea, deși se poate înscrie foarte bine pe o curbă logaritmică, este diferită de cea a conductelor cilindrice.

Acest rezultat, ca și cele precedente de altfel, dovedesc, pe de o parte, valabilitatea ipotezelor clasice în limitele îngăduite de practică, pe de altă parte, valabilitatea însăși a experiențelor noastre. Faptul că există unele diferențe cantitative, semnalate, între relațiile corespunzătoare experiențelor în conducte cilindrice și cele corespunzătoare experiențelor noastre, socotim că își găsește explicația probabilă în felul diferit în care influențează cele trei componente ale vitezei de pulsații, mărimile medii caracteristice celor două probleme. Aceste influențe, născute la rîndul lor de forma geometrică diferită a secțiunii vii, nu dau schimbări calitative și nu sînt prinse în expresiile analitice ale ipotezelor de calcul.

Primită la redacție la 1 februarie 1957.

ДИНАМИКА НАПОРНОГО ПОТОКА В КАНАЛАХ С НЕРАВНОМЕРНОЙ ШЕРОХОВАТОСТЬЮ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Статья содержит экспериментальное и теоретическое исследование механизма напорного потока в каналах с неравномерной шероховатостью.

На основе результатов опытов рассматриваются две зоны течения, независимые одна от другой, с распределением скоростей по логарифмическому закону. Выводится формула для среднего коэффициента сопротивления λ_m и делается сравнение с результатами опытов.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Эпюра скоростей в безнапорном потоке.

Рис. 2. — Эпюра скоростей в напорном потоке.

Рис. 3. — Опытная кривая распределения скоростей в канале с неравномерной шероховатостью.

Рис. 4. — Опытная кривая распределения скоростей в канале с неравномерной шероховатостью.

Рис. 5. — Распределение по вертикали касательных напряжений τ в канале с неравномерной шероховатостью.

Рис. 6. — Функциональная зависимость $\lambda = \lambda\left(\frac{h}{\Delta}\right)$ при автомодельном режиме течения.

Рис. 7. — График функции $\alpha = \alpha(\lambda_1, \lambda_2)$.

Рис. 8. — График функции $\beta = \beta(\lambda_1, \lambda_2)$.

Рис. 9. — График функции $\gamma = \gamma(\lambda_1, \lambda_2)$.

Рис. 10. — График функции $\lambda_m = \lambda_m(\lambda_1, \lambda_2)$.

Рис. 11. Экспериментальная установка.

Рис. 12. — Гранулометрические кривые для песка, применяемого для создания шероховатости.

Рис. 13. — Кривые $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ для потоков между стенками одинаковой шероховатости.

Рис. 14. — Кривые $\lambda = \lambda \left(Re,\ \frac{\Delta}{R}\right)$ для потоков с стенками различной шероховатости.

Рис. 15. — Кривые $\lambda = \lambda \left(Re,\ \frac{\Delta}{R}\right)$ для протекания при трех шероховатостях, взятых попарно.

Рис. 16. — Кривые $\lambda = \lambda \left(Re,\ \frac{\Delta}{R}\right)$ для протекания при трех шероховатостях, взятых попарно.

Рис. 17. — Опытная кривая распределения скоростей для $\Delta_1 = 0{,}45$ мм, $\Delta_2 = 0{,}10$ мм.

Рис. 18. — Кривая распределения скоростей в зависимости от шероховатости для $Re = 12\,300$.

Рис. 19. — Кривая $\frac{u}{u_{\max}} = f\,(Re)$ для $\frac{\Delta_1,\ \Delta_2}{H} = \frac{0{,}450,\ 0{,}000}{20}$.

Рис. 20. — Кривые распределения скоростей $\frac{u}{u_{\max}} = \lambda\,(Re,\ \Delta)$ для $\tau = \text{const}$.

Рис. 21. — График $\frac{u - u_{\max}}{V} = f\,(Re.\ \Delta)$ для $\tau = \text{const}$.

LA DYNAMIQUE DES COURANTS SOUS PRESSION DANS LES CANAUX À RUGOSITÉ MIXTE

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, on présente une étude expérimentale et théorique du mécanisme de l'écoulement des courants bidimensionnels, sous pression, dans les canaux à rugosité mixte.

En vertu des résultats expérimentaux, on considère deux zones d'écoulement, indépendantes entre elles et ayant une répartition des vitesses suivant une loi logarithmique. On en déduit la formule pour le coefficient moyen de résistance λ_m et l'on compare avec les résultats expérimentaux.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Epure des vitesses en courant à surface libre.

Fig. 2. — Epure des vitesses en courant sous enveloppe de glace.

Fig. 3. — Courbe expérimentale de distribution des vitesses dans un canal à rugosité mixte — échelle naturelle.

Fig. 4. — Courbe expérimentale de distribution des vitesses dans un canal à rugosité mixte — échelle logarithmique.

Fig. 5. — Distribution verticale des efforts tangentiels τ dans un canal à rugosité mixte.

Fig. 6. — Dépendance fonctionnelle $\lambda = \lambda \left(\frac{h}{\Delta}\right)$ en régime turbulent quadratique.

Fig. 7. — Graphique de la fonction $\alpha = \alpha\,(\lambda_1,\ \lambda_2)$.

Fig. 8. — Graphique de la fonction $\beta = \beta\,(\lambda_1,\ \lambda_2)$.

Fig. 9. — Graphique de la fonction $\gamma = \gamma\,(\lambda_1,\ \lambda_2)$.

Fig. 10. — Graphique de la fonction $\lambda_m = \lambda_m\,(\lambda_1, \lambda_2)$.

Fig. 11. — Canal à rugosité mixte. Vue d'ensemble.

Fig. 12. — Courbes granulométrique du sable utilisé pour créer la rugosité.

Fig. 13. — Courbes $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pour les écoulements entre des parois ayant la même rugosité.

Fig. 14. — Courbes $\lambda = \lambda\left(R_e, \frac{\Delta}{R}\right)$ pour les écoulements entre des parois à rugosité mixte.

Fig. 15. — Courbes $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pour les écoulements avec une combinaison de trois rugosités prises deux à deux.

Fig. 16. — Les courbes $\lambda = \lambda\left(Re, \frac{\Delta}{R}\right)$ pour les écoulements avec les combinaisons de trois rugosités prises deux à deux.

Fig. 17. — Courbe expérimentale de distribution des vitesses pour $\Delta_1 = 0{,}45$ mm, $\Delta_2 = 0{,}10$ mm.

Fig. 18. — Courbe de distribution des vitesses, en fonction de la rugosité pour $Re = 12\,300$.

Fig. 19. — Courbe $\frac{u}{u_{max}} = f(Re)$ pour $\frac{\Delta_1,\ \Delta_2}{H} = \frac{0{,}450,\ 0{,}000}{20}$.

Fig. 20. — Courbes de distribution des vitesses $\frac{u}{u_{max}} = f\ (Re,\ \Delta)$ pour τ = constante.

Fig. 21. — Graphique $\frac{uu_{max}}{V} = f\,(Re, \Delta)$, pour τ = constante.

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Pavlovski, *Sobranie socinenii.* Izdatelstovo Akademii Nauk S.S.S.R., Leningrad— Moscova, 1955.
2. — *K voprosu o rescetnoi formule dlia ravnomernovo dvijenia v vodotokah s neodnorodnimi stenkami.* Izvestia VNIIG, t.3, 1931.
3. I. I. Levi, *Dinamika ruslovîh potokov.* Gosenergoizdat, Moscova, 1948.
4. Hounter Rouse, *Modern Conceptions of the Mechanics of Fluid Turbulence.* American Society of Civil Engineers, 1937.
5. L. Prandtl, *Ghidroaeromehanika.* Izdatelstvo inostrannoi literaturî, Moscova, 1951.
6. A. M. Yassin, *Mean roughness coefficient in open channels with different roughness of bed and side walls.* E. I. H. Zurich, Mitt Versuch sonast Hassverb în Erdb, 1953, nr. 27 (Repertoriu jurnal nr. 4, Mehanivca 1956).
7. Walter Fritsch, *Der Einfluss der Wandrauligheit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen.* Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule tachen, caetul 8, Berlin, 1928.
8. B. A. Bachmetell, *Mécanique de l'écoulement turbulent des fluides.* Paris, 1943.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 2, 1957

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

CONTRIBUŢII LA PROBLEMA DETERMINĂRII TEMPERATURILOR DE CALCUL PENTRU BARAJELE ARCUITE

DE

RADU PRIŞCU

A. GENERALITĂŢI

Este cunoscut faptul că cele mai importante solicitări care acţionează asupra unui baraj arcuit, după închiderea rosturilor dintre ploturile componente, sînt :

— presiunea hidrostatică, exercitată de apa reţinută de baraj, şi

— variaţiile de temperatură din corpul barajului, faţă de temperatura de închidere a rosturilor, provocate de variaţiile temperaturii mediului exterior (aerul atmosferic sau apa acumulată în lac).

Dacă în barajele arcuite, de înălţimi cuprinse între 50 şi 150 m, eforturile produse de presiunea hidrostatică sînt în general de ordinul a 20 pînă la 50 kg/cm^2 compresiune şi a 2 pînă la 5 kg/cm^2 tensiune, eforturile provocate de variaţiile de temperatură, în ipotezele extreme, sînt de ordinul a 10 pînă la 15 kg/cm^2 compresiune şi a 10 kg/cm^2 tensiune. Aceste tensiuni devin supărătoare atît prin mărimea lor, cît şi prin faptul că în anumite situaţii pot apare pe paramentul amonte, suprapunîndu-se cu cele create de presiunea hidrostatică şi mărind prin aceasta pericolul de fisurare a betonului.

După cum rezultă din formulele deduse de către diverşi autori, eforturile care provin din variaţiile de temperatură în arcele componente ale unui baraj arcuit (construcţia monolită se consideră constituită dintr-o reţea de arce orizontale, încastrate în versanţi şi de console verticale, încastrate la bază) sînt proporţionale cu aceste variaţii.

Pentru stabilirea temperaturilor de calcul marea majoritate a autorilor admit ipoteza că într-o secţiune oarecare de grosime d (fig. 1) temperaturile se repartizează după o lege liniară. Pentru uşurinţa calculelor statice, diagrama totală se consideră constituită din :

— o temperatură medie ϑ_m, uniform repartizată pe grosimea d,

— o diferenţă de temperatură $\Delta\vartheta$ între extremităţile amonte şi aval, polar simetrică faţă de centrul secţiunii.

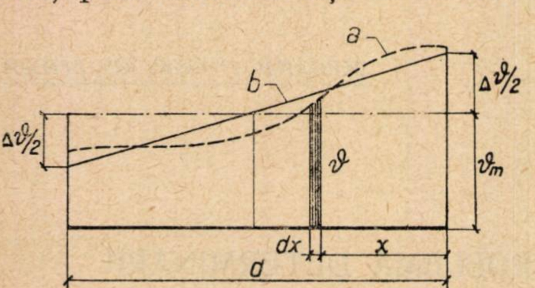


Fig. 1. — Repartiţia temperaturilor într-o secţiune de grosime d :*a*) reală, *b*) aproximativă.

În realitate, repartiţia liniară a temperaturilor are loc numai în secţiuni de grosimi reduse, pînă la cîţiva metri, şi se îndepărtează de la această lege cu cît grosimile sînt mai mari. Deoarece determinarea eforturilor care acţionează într-o secţiune, pe baza repartiţiei reale a temperaturilor, întîmpină încă mari dificultăţi [1], în calculele practice se admite totuşi în mod curent ipoteza aproximativă a repartiţiei liniare.

În ceea ce priveşte evaluarea temperaturilor de calcul conform acestei ipoteze, în literatura de specialitate se găsesc unele recomandări, fie cu caracter empiric [2], [3], [4], fie bazate pe o exprimare matematică incompletă a fenomenului fizic [5]. Dată fiind importanţa pe care o prezintă eforturile provocate de variaţiile de temperatură în corpul unui baraj arcuit, considerăm că o examinare mai riguroasă a modului de determinare a temperaturilor de calcul nu ar fi lipsită de interes.

Ideia de bază a lucrării de faţă constă în înlocuirea diagramei reale de repartiţie a temperaturilor, la momentul cel mai defavorabil, printr-o diagramă liniară echivalentă, de aceeaşi suprafaţă şi acelaşi moment static faţă de centrul secţiunii, ţinînd seama de toţi factorii fizici care influenţează fenomenul.

B. DATE DE BAZĂ

Din fizică se cunoaşte că dacă ne referim la un paralelipiped elementar cu laturile dx, dy, dz, variaţia temperaturii ϑ a acestui corp, sub efectul variaţiilor de temperatură ale mediului exterior şi al unei eventuale degajări de căldură proprii q, este dată de ecuaţia conducţiei, care sub forma sa generală este

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{q}{c\gamma_b} + \frac{k}{c\gamma_b}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right).$$

În această ecuaţie, care exprimă echilibrul termic între cantitatea de căldură care pătrunde din exterior, între căldura proprie degajată şi între căldura care se înmagazinează, se notează cu

ϑ = temperatura în grade centigrade,

t = timpul în ore,

x,y,z = coordonatele curente,
q = cantitatea de căldură degajată la timpul t de unitatea de volum, în unitatea de timp, în Cal/m^{3}h,
c = căldura specifică a betonului (valoare medie 0,25 Cal/kg °C).
k = coeficientul de conductibilitate al betonului (valoare medie 1,5 Cal/mh°C).
γ_b = greutatea specifică a betonului (valoare medie 2 400 kg/m^3).

Dacă corpul la care ne referim este un perete de grosime constantă, de lungime și de lărgime foarte mari în raport cu aceasta, și dacă degajarea de căldură internă q este nulă, ecuația conducției ia forma particulară

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{k}{c\gamma_b}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

În această ecuație, dedusă de Fourier încă din 1807, coeficientul $a = \frac{k}{c\gamma_b}$ poartă denumirea de coeficient de difuzibilitate (cu cifrele indicate mai înainte $a = 0{,}0025$ m^2/h).

După cum s-a demonstrat pe cale teoretică și s-a verificat prin măsurători directe pe baraje executate [6], [7], variațiile de temperatură zilnice ale mediului exterior au un efect neînsemnat, din punct de vedere static, asupra corpului unui baraj arcuit. Adîncimea de beton în care aceste variații se resimt este limitată la circa 25 cm. Variațiile de temperatură lunare se propagă însă pe adîncimi mai mari, de ordinul metrilor, și acționează asupra barajului, punîndu-l sub stare de efort. Dacă aceste variații lunare, al căror efect va fi studiat în cele ce urmează, sînt de gen sinusoidal, ecuația (1) poate fi integrată [6], ajungîndu-se la o soluție de forma

$$\vartheta = f\cos\frac{2\pi t}{T} + \varphi\sin\frac{2\pi t}{T}, \qquad (2)$$

în care f și φ sînt funcții numai de abscisa x, și anume

$$f = \vartheta_1(\cos\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x + B_0\cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x + C_0\sin\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x), \qquad (2')$$

$$\varphi = \vartheta_1(-\sin\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x - B_0\sin\mu x\,\mathrm{ch}\mu x + C_0\cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x), \qquad (2'')$$

și unde

$$B_0 = \mathrm{sh}\,\mu d\,\frac{n\cos\mu d - \mathrm{ch}\,\mu d}{\mathrm{ch}^2\mu d - \cos^2\mu d}, \quad C_0 = \sin\mu d\,\frac{n\,\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d}{\mathrm{ch}^2\mu d - \cos^2\mu d} \qquad (2''')$$

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi c\gamma_b}{kT}} = \sqrt{\frac{\pi}{aT}}$$

d = grosimea peretelui, în metri,
T = perioada unei oscilații complete a temperaturii exterioare, în ore,
$n = \vartheta_2/\vartheta_1$
ϑ_1 = amplitudinea variațiilor de temperatură pe paramentul cu originea lui x,
ϑ_2 = amplitudinea variațiilor de temperatură pe paramentul opus originei.

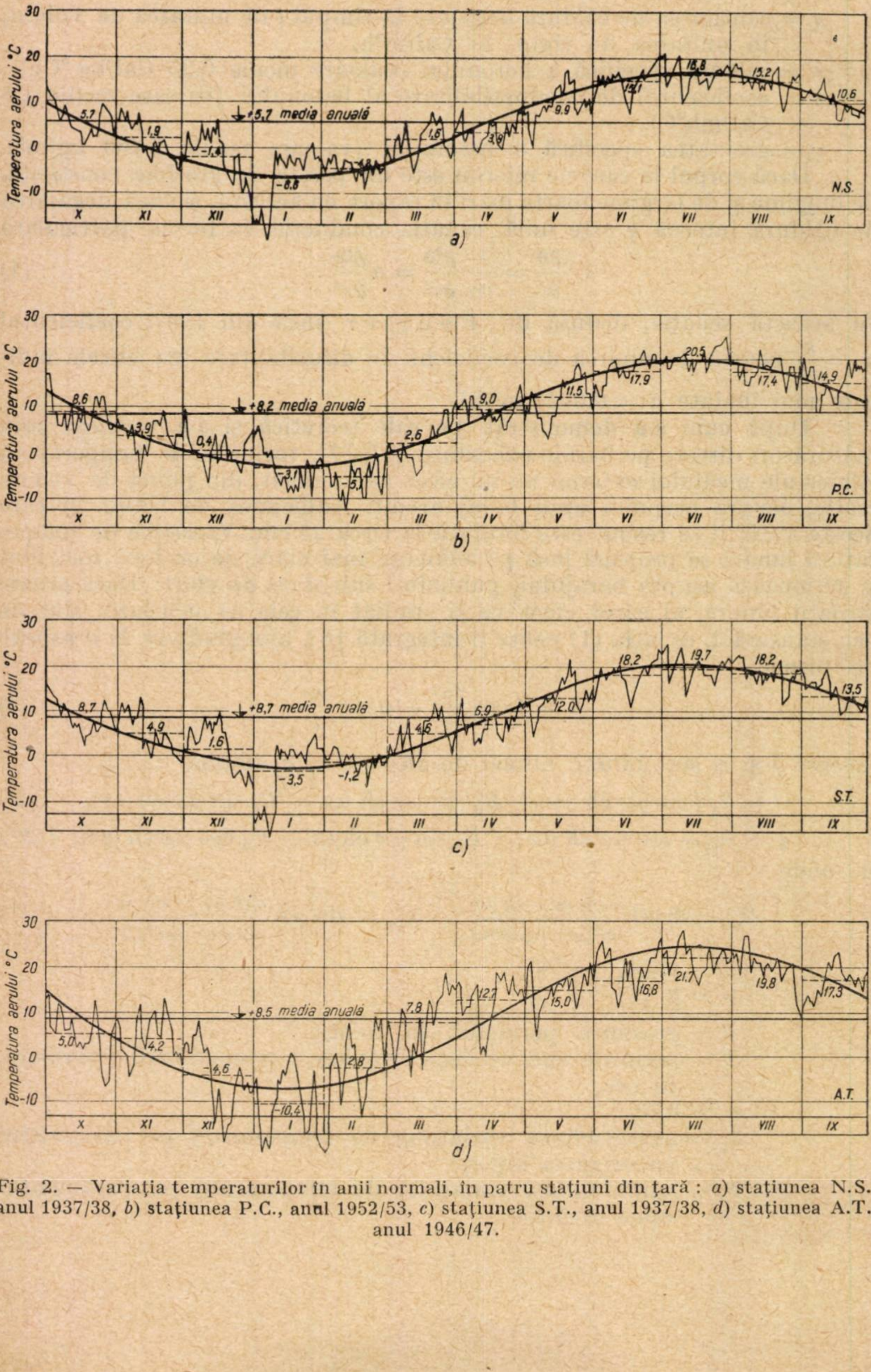


Fig. 2. — Variația temperaturilor în anii normali, în patru stațiuni din țară : *a*) stațiunea N.S., anul 1937/38, *b*) stațiunea P.C., anul 1952/53, *c*) stațiunea S.T., anul 1937/38, *d*) stațiunea A.T., anul 1946/47.

Este de remarcat faptul că aproximaţia care se face exprimînd variaţia temperaturilor mediului exterior, din cursul unui an, sub forma unei legi sinusoidale, este foarte redusă. Aceasta cu atît mai mult cu cît, după cum s-a menţionat mai sus, oscilaţiile zilnice nu influenţează comportarea unui baraj din punct de vedere static. Cele patru diagrame din figura 2 reprezintă variaţiile temperaturilor, în anii normali respectivi, în patru puncte ale ţării, unde condiţiile naturale sînt favorabile înscrierii unor baraje arcuite. Aceste diagrame, întocmite de către Serviciul hidrografic I.S.P.E., se bazează în parte pe o serie de observaţii directe, efectuate în ultimii ani şi în parte pe citiri pe perioade mai lungi, din alte staţiuni, transformate prin similitudine.

În tabloul nr. 1 sînt date în continuare cîteva cifre referitoare la anii caracteristici, friguros, călduros şi normal, din aceleaşi staţiuni. Se observă că atît temperaturile medii cît şi amplitudinile mediilor lunare nu diferă prea mult în cei trei ani, astfel încît anul normal poate fi considerat ca reprezentativ.

În timpul serviciului său, un baraj arcuit poate fi solicitat de variaţii de temperatură identice la paramentele amonte şi aval, cînd lacul este gol, sau de variaţii de temperatură diferite la cele două paramente, cînd lacul este plin. După diverşi autori [5], [6], [7], variaţia temperaturii apei din lac faţă de media anuală poate fi considerată tot sinusoidală, cu aceeaşi perioadă ca în aer, însă cu amplitudini mai reduse. De asemenea trebuie avut în vedere

Tabloul nr. 1)*

Staţiunea	Anul friguros				Anul călduros				Anul normal			
	temper. medie	amplitudine			temper. medie	amplitudine			temper. medie	amplitudine		
		negativă	pozitivă	medie		negativă	pozitivă	medie		negativă	pozitivă	medie
N. S. 1095 mdM	+4,10	−14,00	+11,90	±12,95	+ 7,40	−12,90	+ 9,40	±11,15	+ 5,70	−12,30	+11,10	±11,70
P.C. 730mdM	+7,80	− 8,50	+11,00	± 9,75	+10,00	− 9,30	+ 8,70	± 9,00	+ 8,20	−13,30	+12,30	±12,80
S.T. 750mdM	+7,10	−14,00	+12,30	±13,15	+10,60	−13,10	+ 9,00	±11,05	+ 8,70	−12,20	+11,00	±11,60
A.T. 675mdM	+6,70	−18,20	+13,80	±16,00	+10,20	−12,30	+13,20	±12,75	+ 8,50	−18,90	+13,20	±16,05

*) Cifrele sînt date în grade Celsius.

faptul că în timpul iernii temperatura apei din lac nu poate scădea sub 0° la suprafață și sub +4° în adîncime.

În ce privește aprecierea amplitudinilor care se introduc în calcul, în lipsa unor observații directe în amplasamentele barajelor care se studiază, se pot admite următoarele cifre:

— pentru variațiile de temperatură din aer, o amplitudine $\vartheta_1 = \pm (12°-15°)$;

— pentru variațiile de temperatură ale apei din lac, considerat plin, $\vartheta_2 = \pm (7°-8°)$ la suprafață și $\vartheta_2 = \pm (3°-4°)$ la fund; amplitudinile intermediare pot fi determinate prin interpolare liniară.

Aceste recomandări se fac ținînd seama de condițiile climatice de la noi din țară și de indicațiile cu același obiect din literatura de specialitate.

C. DETERMINAREA TEMPERATURII UNIFORME ϑ_m

Temperatura medie, corespunzătoare unui timp oarecare t, uniform repartizată într-o secțiune de grosime d, se poate defini sub forma

$$\vartheta_m = \frac{1}{d}\int_0^d \vartheta dx. \tag{3}$$

Referindu-ne la expresia (2) a lui ϑ, observăm că pentru rezolvarea integralei de mai sus, trebuie integrate în raport cu x funcțiile f și φ, date de relațiile (2′) și (2″). În acest scop se integrează produsele trigonometrico-hiperbolice care figurează în expresiile lor

$$\int_0^d \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x\, dx = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{sh} \mu d \cos \mu d + \operatorname{ch} \mu d \sin \mu d),$$

$$\int_0^d \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x\, dx = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{ch} \mu d \cos \mu d + \operatorname{sh} \mu d \sin \mu d - 1),$$

$$\int_0^d \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x\, dx = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{sh} \mu d \sin \mu d - \operatorname{ch} \mu d \cos \mu d + 1),$$

$$\int_0^d \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x\, dx = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{ch} \mu d \sin \mu d - \operatorname{sh} \mu d \cos \mu d).$$

Efectuînd transformările necesare și înlocuind constantele B_0 și C_0 cu expresiile lor (2‴), se obține

$$\int_0^d f dx = \frac{(n+1)\,\vartheta_1}{2\mu}\,\frac{\operatorname{sh} \mu d + \sin \mu d}{\operatorname{ch} \mu d + \cos \mu d},$$

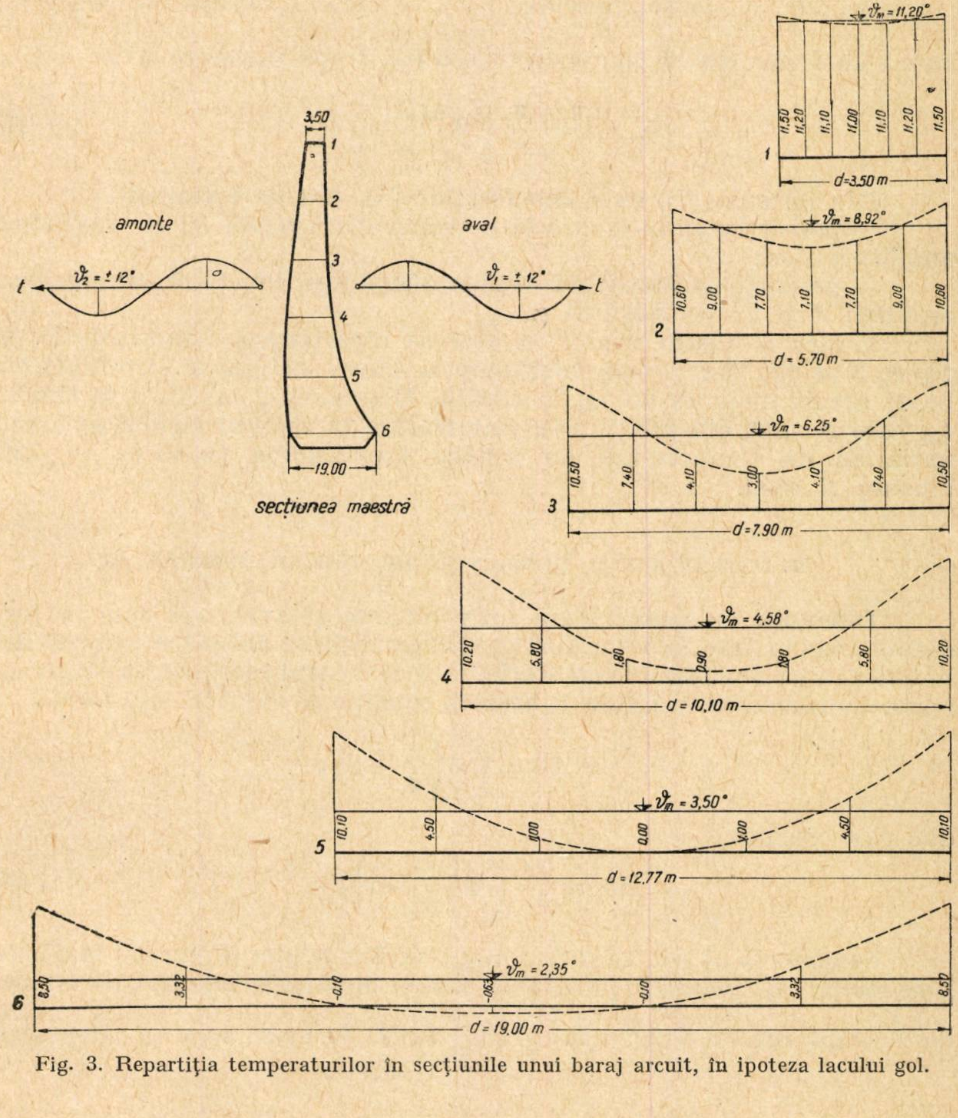
$$\int_0^d \varphi dx = \frac{(n+1)\,\vartheta_1}{2\mu}\,\frac{\operatorname{sh} \mu d - \sin \mu d}{\operatorname{ch} \mu d + \cos \mu d},$$

şi deci

$$\int_0^d \vartheta dx = \frac{(n+1)\vartheta_1}{2\mu(\mathrm{ch}\,\mu d + \cos\mu d)}\left[(\mathrm{sh}\,\mu d + \sin\,\mu d)\cos\frac{2\pi t}{T} + (\mathrm{sh}\mu d - \sin\mu d)\sin\frac{2\pi t}{T}\right]. \quad (4)$$

Astfel încît, înlocuind pe n cu echivalentul său ϑ_2/ϑ_1, expresia lui ϑ_m, definită mai sus (3), ajunge la forma

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\mu d\,(\mathrm{ch}\,\mu d + \cos\,\mu d)}\left[(\mathrm{sh}\,\mu d + \sin\,\mu d)\cos\frac{2\pi t}{T} + (\mathrm{sh}\mu d - \sin\,\mu d)\sin\frac{2\pi t}{T}\right]. \quad (5)$$



amonte
aval
$\vartheta_2 = \pm 12°$
$\vartheta_1 = \pm 12°$
t
t
3,50
1
2
3
4
5
6
19.00
secţiunea maestră
1
$\vartheta_m = 11,20°$
11,50
11,20
11,10
11,00
11,10
11,20
11,50
d=3.50 m
2
$\vartheta_m = 8,92°$
10.60
9.00
7.70
7.10
7.70
9.00
10.60
d = 5.70 m
3
$\vartheta_m = 6.25°$
10.50
7.40
4.10
3.00
4.10
7.40
10.50
d=7.90 m
4
$\vartheta_m = 4.58°$
10.20
5.80
1.80
0.90
1.80
5.80
10.20
d = 10.10 m
5
$\vartheta_m = 3,50°$
10.10
4.50
1.00
0.00
1.00
4.50
10.10
d = 12.77 m
6
$\vartheta_m = 2,35°$
8.50
3.32
-0.10
-0.63
-0.10
3.32
8.50
d = 19.00 m

Fig. 3. Repartiţia temperaturilor în secţiunile unui baraj arcuit, în ipoteza lacului gol.

Timpul t_{m1}, pentru care valoarea lui ϑ_m este maximă, se determină anulînd derivata expresiei (5) în raport cu timpul. Această operație conduce la relația

$$\operatorname{tg} \frac{2\pi\, t_{m1}}{T} = \frac{\operatorname{sh} \mu d - \sin \mu d}{\operatorname{sh} \mu d + \sin \mu d}. \tag{6}$$

Pentru a deduce expresia finală a lui ϑ_m, se înlocuiesc în (5) liniile trigonometrice

$$\cos \frac{2\pi\, t_{m1}}{T} = \frac{\operatorname{sh} \mu d + \sin \mu d}{\sqrt{2(\operatorname{sh}^2 \mu d + \sin^2 \mu d)}} \quad \text{și} \quad \sin \frac{2\pi\, t_{m1}}{T} = \frac{\operatorname{sh} \mu d - \sin \mu d}{\sqrt{2(\operatorname{sh}^2 \mu d + \sin^2 \mu d)}},$$

care s-au dedus ținînd seama de relația (6). După transformări se obține

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2\mu d} \sqrt{2 \frac{\operatorname{ch} \mu d - \cos \mu d}{\operatorname{ch} \mu d + \cos \mu d}}. \tag{7}$$

Din formula (7), ca și din formula (5), sînt de remarcat

— proporționalitatea directă a temperaturii medii ϑ_m cu semisuma amplitudinilor;

— proporționalitatea indirectă a temperaturii medii ϑ_m cu grosimea secțiunii d și cu coeficientul μ.

Pentru a ilustra modul în care se repartizează temperaturile, în figura 3 se dau diagramele referitoare la cîteva secțiuni din profilul unui baraj arcuit înalt de 60 m, în studiu. Diagramele, calculate la timpul t_{m1} care rezultă din relația (6), sînt trasate în ipoteza lacului gol, cînd variațiile de temperatură au aceeași amplitudine ($\vartheta_1 = \vartheta_2 = \pm 12°$) amonte și aval.

D. DETERMINAREA DIFERENȚEI DE TEMPERATURĂ $\Delta\vartheta$

Diferența de temperatură între amonte și aval, așa cum a fost definită mai înainte, se determină punînd condiția ca diagrama de repartiție liniară să aibă același moment static, față de centrul secțiunii, ca diagrama reală. Referindu-ne la figura 1, această condiție se exprimă sub forma

$$\frac{1}{12}\, d^2 \Delta\vartheta = \int_0^d \vartheta \left(\frac{d}{2} - x \right) dx,$$

din care rezultă

$$\Delta\vartheta = \frac{12}{d^2} \int_0^d \vartheta \left(\frac{d}{2} - x \right) dx. \tag{8}$$

Se observă că pentru prima integrală din relația (8) ne stă la dispoziție relația (4), dedusă la punctul C, care se înmulțește cu $d/2$. Mai rămîne de efectuat cea de a doua integrală $\int_0^d \vartheta x dx$. În acest scop se integrează funcțiile f și φ, date de relațiile (2′) și (2″), înmulțite cu variabila x. În prealabil, se integrează prin părți produsele

$$\int_0^d x\cos\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x dx = \frac{1}{2\mu}\left[d(\cos\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d+\sin\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d)-\frac{1}{\mu}\sin\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d\right],$$

$$\int_0^d x\cos\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x dx = \frac{1}{2\mu}\left[d(\cos\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d+\sin\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d)-\frac{1}{\mu}\sin\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d\right],$$

$$\int_0^d x\sin\mu x\,\mathrm{ch}\,\mu x dx = \frac{1}{2\mu}\left[d(\sin\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d-\cos\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d)+\frac{1}{\mu}\cos\mu d\,\mathrm{sh}\mu d\right],$$

$$\int_0^d x\sin\mu x\,\mathrm{sh}\,\mu x dx= \frac{1}{2\mu}\left[d(\sin\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d-\cos\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d)+\frac{1}{\mu}\cos\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d-\frac{1}{\mu}\right],$$

care, prelucrate, conduc după lungi transformări la

$$\int_0^d fxdx = \frac{\vartheta_1 d}{2\mu(\mathrm{ch}^2\,\mu d - \cos^2\mu d)}\Big[\sin\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d + $$
$$+ n(\mathrm{sh}\,\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d - \sin\mu d\cos\mu d)\Big],$$

$$\int_0^d \varphi xdx= \frac{\vartheta_1 d}{2\mu(\mathrm{ch}^2\,\mu d - \cos^2\mu d)}\Big[- \sin\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d\,\mathrm{sh}\,\mu d +$$
$$+ n(\sin\mu d\cos\mu d + \mathrm{sh}\,\mu d\,\mathrm{ch}\,\mu d) + \frac{1-n}{\mu d}(\mathrm{ch}^2\,\mu d - \cos^2\mu d)\Big].$$

Astfel încît, însumînd integralele indicate de relația (8), și înmulțind cu $12/d^2$, se ajunge la expresia finală

$$\Delta\vartheta = \frac{3(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\mu d}\left[\frac{\mathrm{sh}\,\mu d - \sin\mu d}{\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d}\cos\frac{2\pi t}{T} + \left(\frac{\mathrm{sh}\,\mu d + \sin\mu d}{\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d} - \frac{2}{\mu d}\right)\sin\frac{2\pi t}{T}\right]. \tag{9}$$

Pentru a se deduce expresia lui $\Delta\vartheta$ care corespunde timpului t_{m1}, pentru care ϑ_m este maxim, se înlocuiesc în (9) liniile trigonometrice care rezultă din relația (6). După transformări se obține

$$\Delta\vartheta = \frac{6(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\mu d}\,\frac{\mathrm{sh}\,\mu d - \sin\mu d}{\sqrt{2\,(\mathrm{ch}^2\,\mu d - \cos^2\mu d)}}\left(\frac{\mathrm{sh}\,\mu d + \sin\mu d}{\mathrm{ch}\,\mu d - \cos\mu d} - \frac{1}{\mu d}\right). \tag{10}$$

Din formulele (9) și (10) sînt de remarcat:

— proporționalitatea directă a diferenței de temperatură $\Delta\vartheta$ cu diferența dintre amplitudinile amonte și aval (cînd $\vartheta_1 = \vartheta_2$, $\Delta\vartheta = 0$);

— proporționalitatea indirectă a diferenței de temperatură $\Delta\vartheta$ cu grosimea secțiunii d și cu coeficientul μ.

În figura 4 se dau diagramele de repartiție ale temperaturilor în secțiunile aceluiași baraj din figura 3, în ipoteza lacului plin. În acest caz s-a admis pentru variațiile de temperatură din aval o amplitudine de ± 12°, iar pentru cele din amonte amplitudini care variază liniar de

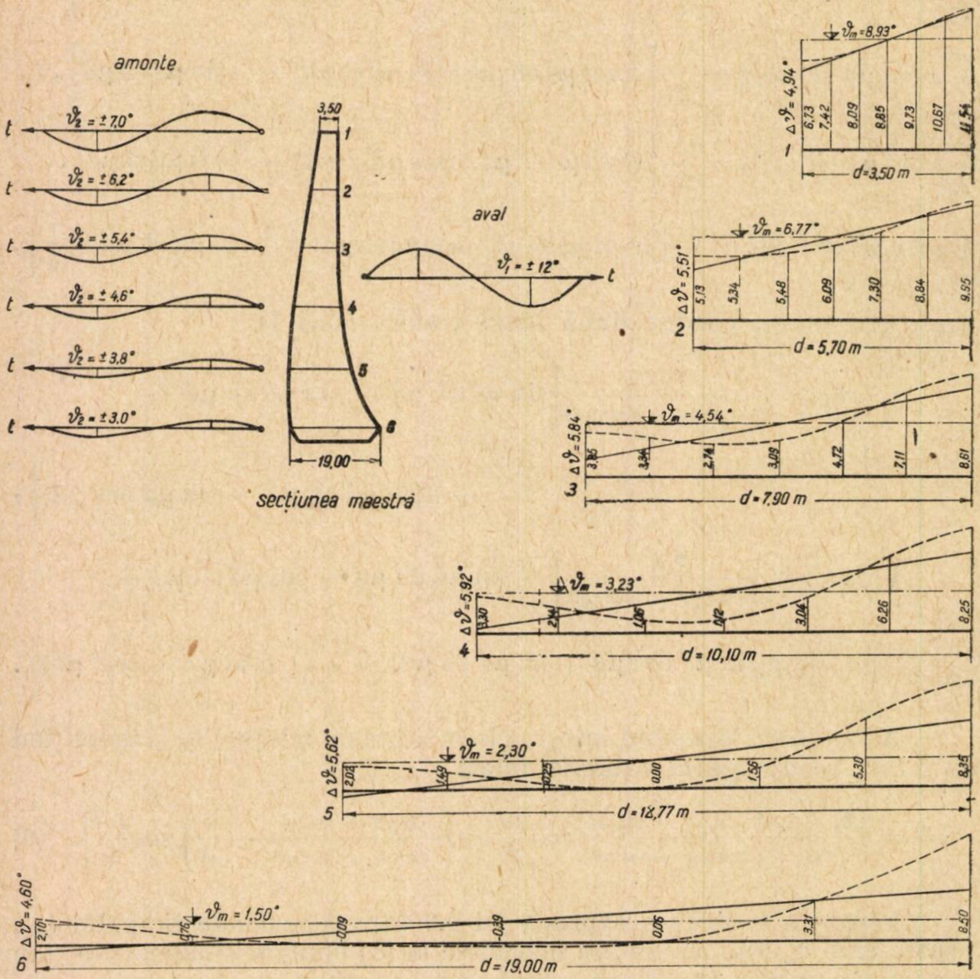

amonte
t
$\vartheta_2 = \pm 7,0°$
$\vartheta_2 = \pm 6,2°$
$\vartheta_2 = \pm 5,4°$
$\vartheta_2 = \pm 4,6°$
$\vartheta_2 = \pm 3,8°$
$\vartheta_2 = \pm 3,0°$
3,50
1
2
3
4
5
6
19,00
secțiunea maestră
aval
$\vartheta_1 = \pm 12°$
$\vartheta_m = 8,93°$
$\Delta\vartheta = 4,94°$
6,73
7,42
8,09
8,85
9,73
10,67
11,54
d=3,50 m
$\vartheta_m = 6,77°$
$\Delta\vartheta = 5,51°$
5,13
5,34
5,48
6,09
7,30
8,84
9,55
d = 5,70 m
$\vartheta_m = 4,54°$
$\Delta\vartheta = 5,84°$
3,85
3,34
2,74
3,09
4,72
7,11
8,61
d = 7,90 m
$\vartheta_m = 3,23°$
$\Delta\vartheta = 5,92°$
3,30
2,44
1,06
0,12
3,04
6,26
8,25
d = 10,10 m
$\vartheta_m = 2,30°$
$\Delta\vartheta = 5,62°$
2,04
1,49
0,25
0,00
1,56
5,30
8,35
d = 18,77 m
$\vartheta_m = 1,50°$
$\Delta\vartheta = 4,60°$
2,10
0,76
-0,09
-0,39
0,06
3,31
8,50
d = 19,00 m

Fig. 4. — Repartiția temperaturilor în secțiunile unui baraj arcuit, în ipoteza lacului plin.

la ±7°, la suprafața lacului, la ±3° la fundul lacului. Sînt trasate atît diagramele reale cît și cele aproximative-liniare, calculate cu ajutorul formulelor (7) și (10). Cifrele care se indică, la fel ca în ipoteza lacului gol, se referă la o creștere de temperatură față de media anuală. La o scădere de temperatură, ele vor avea aceeași valoare, însă de semn contrar.

Referindu-ne la expresia (9) a lui $\Delta\vartheta$ se observă că se poate pune problema determinării timpului t_{m2} pentru care $\Delta\vartheta$ este maxim. Acest timp, diferit de cel care rezultă din relația (6), se poate obține anulînd derivata expresiei (9) în raport cu timpul. Această operație conduce la

$$\operatorname{tg}\frac{2\pi\, t_{m2}}{T} = \frac{\dfrac{\operatorname{sh}\mu d + \sin\mu d}{\operatorname{ch}\mu d - \cos\mu d} - \dfrac{2}{\mu d}}{\dfrac{\operatorname{sh}\mu d - \sin\mu d}{\operatorname{ch}\mu d - \cos\mu d}}. \tag{11}$$

Din punct de vedere teoretic apare deci ideia de a verifica secțiunile unui baraj nu numai pentru situația în care temperaturile medii ϑ_m sînt maxime (7), cu diferențele $\Delta\vartheta$ corespunzătoare (10), ci și pentru aceea (11) pentru care diferențele $\Delta\vartheta$ sînt maxime, cu temperaturile medii ϑ_m corespunzătoare. După cum se va vedea la punctul *E*, diferența practică între cele două moduri de verificare nu este prea sensibilă, astfel încît rămîne să se aprecieze de la caz la caz, care este ipoteza cea mai defavorabilă.

Deși s-au dedus expresiile lui ϑ_m și $\Delta\vartheta$ corespunzătoare timpului t_{m2}, dat de relația (11), acestea nu se mai reproduc, fiind prea complicate. În schimb s-au efectuat calculele numerice, ale căror rezultate se dau în tabloul nr. 3.

E. COEFICIENȚI ȘI DIAGRAME DE CALCUL

În vederea calculelor practice s-au efectuat o serie de calcule numerice ale căror rezultate se dau sub forma unor coeficienți de reducere (toate cifrele sînt subunitare). Aceștia, înmulțiți cu semisuma amplitudinilor sau cu diferența lor, determină temperatura medie ϑ_m, respectiv diferența de temperatură $\Delta\vartheta$, care solicită o secțiune de grosime d. Coeficienții sînt calculați atît pentru timpul t_{m1} pentru care ϑ_m este maxim (tabloul nr. 2), cît și pentru timpul t_{m2}, pentru care $\Delta\vartheta$ este maxim (tabloul nr. 3). Coeficientul de difuzibilitate al betonului a fost admis $a = 0{,}0025\ \mathrm{m^2/h}$, ceea ce corespunde unui coeficient $\mu = \sqrt{\dfrac{\pi}{aT}} = 0{,}37865$. Pentru o interpolare ușoară, rezultatele s-au reprezentat grafic, sub forma diagramelor din figura 5.

Tabloul nr. 2

$d(m)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,999	0,994	0,969	0,912	0,820	0,711	0,604	0,514
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,999	0,998	0,992	0,982	0,964	0,943	0,916	0,883
$d(m)$	9	10	11	12	13	14	15	16
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,442	0,387	0,345	0,312	0,286	0,265	0,248	0,232
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,845	0,804	0,764	0,725	0,687	0,653	0,619	0,588
$d(m)$	17	18	19	20	21	22	23	24
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,219	0,207	0,196	0,187	0,177	0,170	0,162	0,156
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,559	0,532	0,508	0,486	0,466	0,448	0,431	0,415

După cum era de aşteptat, pentru valori reduse ale grosimii *d*, coeficienţii de reducere sînt tot mai apropiaţi de unitate. Acest lucru, verificat de altfel prin determinarea limitelor expresiilor lui ϑ_m şi $\Delta\vartheta$, nu indică altceva decît că, pentru grosimi mici, temperatura medie devine practic egală cu semisuma amplitudinilor (sau cu însăşi amplitudinea, cînd aceasta este identică la cele două paramente) şi că diferenţa de temperatură devine egală cu însăşi diferenţa dintre amplitudini.

Tabloul nr. 3

$d(m)$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,999	0,991	0,956	0,877	0,761	0,637	0,531	0,452
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,999	0,998	0,997	0,994	0,987	0,974	0,954	0,926
$d(m)$	9	10	11	12	13	14	15	16
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,395	0,354	0,322	0,296	0,275	0,257	0,242	0,228
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,890	0,849	0,804	0,759	0,714	0,672	0,634	0,599
$d(m)$	17	18	19	20	21	22	23	24
$\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$	0,215	0,204	0,194	0,185	0,175	0,168	0,161	0,155
$\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$	0,568	0,540	0,515	0,492	0,471	0,452	0,435	0,418

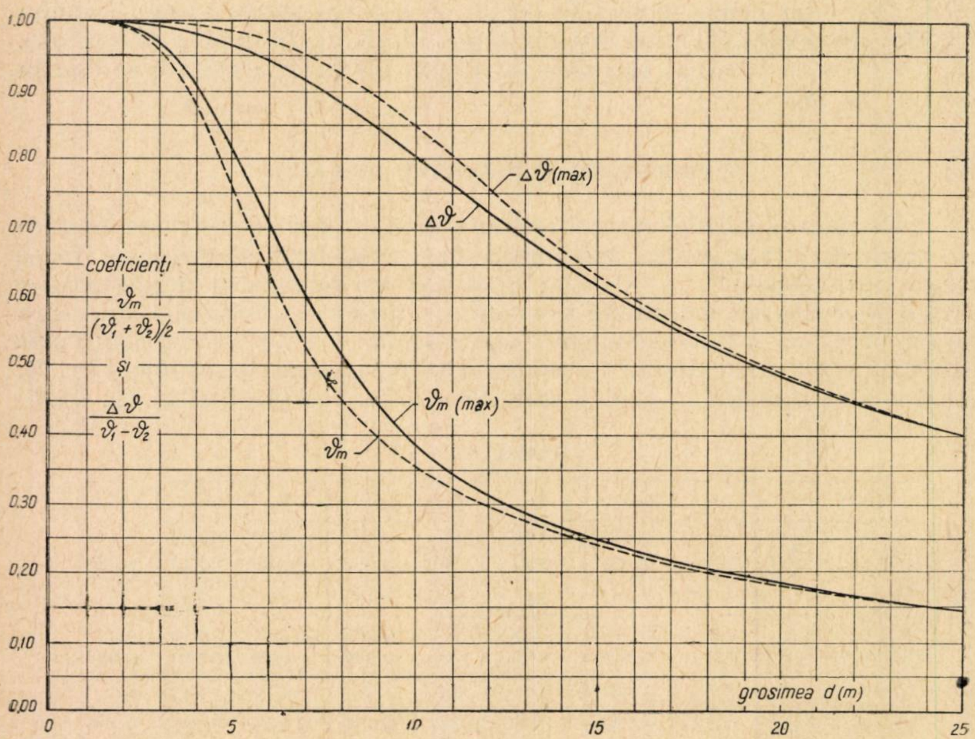


Fig. 5. — Diagrame pentru coeficienţii de reducere, calculaţi cu un coeficient de difuzibilitate pentru beton $a = 0,0025$ m²/h. Liniile pline se referă la ϑ_m maxim şi $\Delta\vartheta$ corespunzător (tabloul nr. 2); liniile întrerupte se referă la $\Delta\vartheta$ maxim şi ϑ_m corespunzător (tabloul nr. 3).

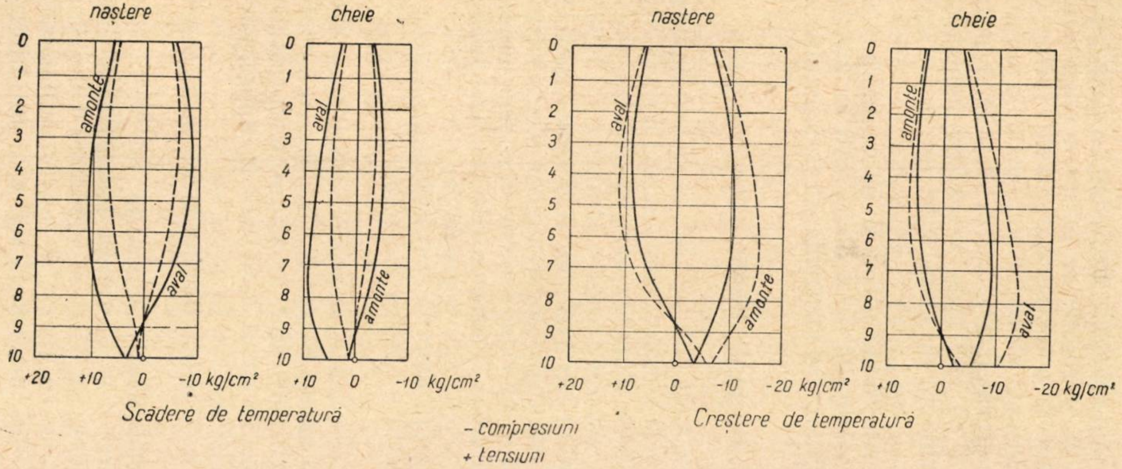


Fig. 6. — Eforturile în arce, provenite din variaţiile de temperatură, în ipoteza lacului gol (linie plină — închiderea rosturilor la temperatura medie anuală; linie întreruptă — închiderea rosturilor la o temperatură cu 2° mai joasă).

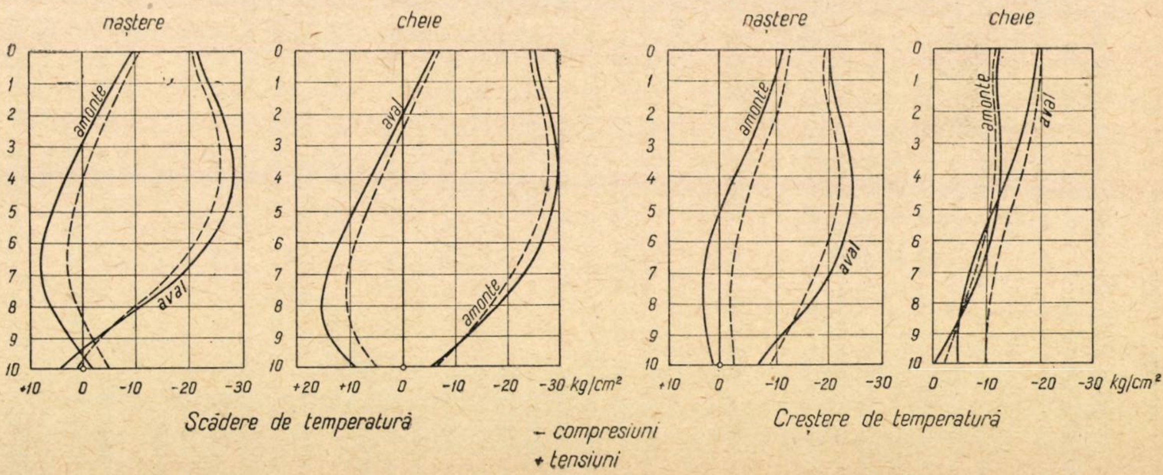


Fig. 7. — Eforturile în arce, provenite din variaţiile de temperatură şi presiunea hidrostatică, în ipoteza lacului plin (linie plină — închiderea rosturilor la temperatura medie anuală; linie întreruptă — închiderea rosturilor la o temperatură cu 2° mai joasă).

Mai este de remarcat faptul că, deși calculele numerice s-au efectuat pentru grosimi *d* mergînd pînă la 25 m, noțiunile de temperatură medie și de diferență de temperatură, legate de o distribuție liniară, primesc un caracter destul de convențional, de la o anumită valoare a grosimii în sus. Lucrul acesta apare și din diagramele trasate în figurile 3 și 4, pentru cele două ipoteze. Se observă că în ultimele secțiuni oscilațiile de temperatură se amortizează pe adîncimi de circa 6 m de la suprafață, astfel încît nu mai poate fi vorba de o „repartiție" a temperaturilor propriu-zisă. Această constatare se reflectă de altfel și în unele lucrări de specialitate unde, pur și simplu, secțiunile unui baraj mai groase de circa 15 m nu se mai consideră solicitate de variațiile de temperatură.

F. CONSIDERAȚII ASUPRA TEMPERATURII DE ÎNCHIDERE A ROSTURILOR

Coeficienții de reducere calculați mai sus servesc la determinarea temperaturii medii și a diferenței de temperatură care solicită o secțiune, în ipoteza că închiderea rosturilor dintre ploturile componente ale unui baraj arcuit se face în momentul cînd betonul a atins o temperatură egală cu media anuală din regiune. De multe ori însă, în vederea micșorării eforturilor de tensiune, apare mai favorabilă alegerea unei temperaturi de închidere mai joase cu 1°—2°—3°. De acest lucru trebuie să se țină seama la determinarea cifrelor de calcul și anume : temperaturile medii negative se micșorează în valoarea absolută, cu aceste cîteva grade, iar cele pozitive se măresc. Pentru a se scoate în evidență efectul unei asemenea alegeri, se redau mai jos rezultatele unor calcule statice referitoare la barajul arcuit citat.

În figura 6 sînt reprezentate comparativ eforturile provenite din variațiile de temperatură care solicită arcele barajului, în ipoteza lacului gol. Se observă că, în cazul închiderii rosturilor la temperatura medie anuală, eforturile sînt mai echilibrate. În cazul închiderii la o temperatură cu 2° mai joasă, eforturile sînt mai reduse, la scăderea temperaturii și mai mari, la creșterea temperaturii, fără ca tensiunile să depășească totuși limita admisibilă.

În figura 7 sînt reprezentate comparativ eforturile provenite din variațiile de temperatură și cota parte din presiunea hidrostatică care solicită arcele barajului, în ipoteza lacului plin. În cazul închiderii rosturilor la o temperatură cu 2° mai joasă decît media anuală se constată o îmbunătățire sensibilă a situației : tensiunile sînt menținute sub cele admisibile, la o scădere de temperatură, iar la o creștere, toate eforturile sînt numai de compresiune.

Este evident că în realitate fenomenele de transmitere a căldurii sînt mai complicate și că temperaturile de calcul nu se realizează întocmai, conform ipotezelor teoretice. Calitativ, cele arătate mai sus, indică totuși o tendință de îmbunătățire a comportării statice a unui baraj arcuit, atunci cînd închiderea rosturilor se face în momentul cînd betonul a atins o temperatură situată cu cîteva grade sub media anuală.

Primită la redacție la 13 decembrie 1956.

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР ДЛЯ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА АРОЧНЫХ ПЛОТИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе изложен метод определения температур, которые, в зависимости от колебания температуры наружной среды, вызывают напряжения в теле плотины. Основная идея состоит в замене расчетной диаграммы распределения температур в сечении толщиной d в самый неблагоприятный момент эквивалентной линейной диаграммой той же площади и того же статического момента по отношению к центру сечения (рис. 1).

Исходя из уравнения проводимости, написанного в одноразмерном виде (II), решением которого при годовых колебаниях температуры наружной среды синусоидального характера является функция (2).

В упрощенном предположении линейного распределения температур определены:

— равномерно распределенная средняя температура ϑ_m, представленная формой (3) со значением, соответствующим некоторому времени t, полученому из формулы (5). Максимальное значение ϑ_m получается из формулы (7);

— разность температуры $\Delta\vartheta$ между крайними точками со стороны верхнего и нижнего бьефов, представленная формой (8) со значением, соответствующим некоторому времени t, полученным из формулы (9). Значение $\Delta\vartheta$ для времени, при котором ϑ_m является максимальным, получается из формулы (10).

В таблицах 2 и 3 приведены коэффициенты понижения $\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$ и $\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$, графически представленные в диаграммах (рис. 5). Цифры таблицы 3 относятся к положению, в котором $\Delta\vartheta$ является максимальным с соответствующим ϑ_m.

В конце работы при использовании практического примера (рис. 6 и 7) показано влияние закрытия швов при температуре более низкой, чем средняя годовая, на напряжения, вызванные колебанием температуры, в арочной плотине.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Распределение температур в сечении толщиной d: a — фактическое: b — приближенное.

Рис. 2. — Колебания температур в нормальные годы по четырем станциям страны: a — станция Н. С., 1937/38 г.; b — станция П. К., 1952/53 г.; c — станция С. Т., 1937/38 г.; d — станция А. Т., 1946/47 г.

Рис. 3. — Распределение температур в сечениях арочной плотины в предположении пустого водохранилища.

Рис. 4. — Распределение температур в сечениях арочной плотины в предположении полного водохранилища.

Рис. 5. — Диаграмма для коэффициентов понижения, вычисленных при помощи коэффициента диффузивности бетона a=0,0025 м²/ч. Сплошные линии относятся к максимальному ϑ_m и соответствующему $\Delta\vartheta$ (таблица 2); (прерывистые линии относятся к максимальному $\Delta\vartheta$ и соответствующему ϑ_m) (таблица 3).

Рис. 6. — Напряжения в арках, вызванные колебанием температур, в предположении пустого водохранилища (сплошная линия — закрытие швов при среднегодовой температуре; прерывистая линия — закрытие швов при температуре на 2° ниже).

Рис. 7. — Напряжения в арках, вызванные колебаниями температур и гидростатическим давлением, в предположении полного водохранилища (сплошная линия — закрытие швов при среднегодовой температуре; прерывистая линия — закрытие швов при температуре на 2° ниже).

CONTRIBUTIONS AU PROBLÈME DE LA DÉTERMINATION DES TEMPÉRATURES DE CALCUL POUR LES BARRAGES-VOÛTES

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, l'auteur expose une méthode de détermination des températures qui, en fonction des variations de la température du milieu extérieur, sollicitent le corps d'un barrage-voûte. L'idée fondamentale réside dans la substitution du diagramme théorique de répartition des températures, dans une section d'épaisseur *d*, au moment le plus défavorable, par un diagramme linéaire équivalent, de la même surface et du même moment statique, par rapport au centre de la section (fig. 1).

Le point de départ est l'équation de la conduction écrite sous la forme monodimensionnelle (1) qui, au cas où les variations annuelles de la température du milieu extérieur sont sinusoïdales, a pour solution la fonction (2).

Dans l'hypothèse simplificatrice de la répartition linéaire des températures, ont été déterminées :

— la température moyenne ϑ_m, uniformément répartie, définie sous la forme (3), avec la valeur, correspondant au temps *t*, donnée par la formule (5). La valeur maximum de ϑ_m résulte de la formule (7);

— la différence de température $\Delta\vartheta$ entre les extrémités amont et aval, définie sous la forme (8), avec la valeur correspondant au temps *t*, donnée par la formule (9). La valeur de $\Delta\vartheta$, au temps pour lequel ϑ_m est maximum, résulte de la formule (10).

Les tableaux 2 et 3 donnent les coefficients de réduction $\vartheta_m/(\vartheta_1+\vartheta_2)/_2$ et $\Delta\vartheta/(\vartheta_1-\vartheta_2)$, représentés graphiquement sur les diagrammes de la figure 5. Les chiffres du tableaux 3 se réfèrent à la situation dans laquelle $\Delta\vartheta$ est maximum, avec ϑ_m correspondant.

A la fin de l'ouvrage on montre, à l'aide d'un exemple pratique (fig. 6 et 7), l'effet du clavage des joints, à une température plus basse que la moyenne annuelle, sur les efforts dus aux variations de la température dans un barrage-voûte.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Répartition des températures dans une section d'épaisseur *d* : *a*) réelle, *b*) approximative.

Fig. 2. — Variation des températures dans les années normales, en quatre stations du pays : *a*) station N. S., année 1937/38, *b*) station P.C., année 1952/53, *c*) station S. T., année 1937/38,*d*) station A.T., année 1946/47.

Fig. 3. — Répartition des températures dans les sections d'un barrage-voûte, dans l'hypothèse du lac vide.

Fig. 4. — Répartition des températures dans les sections d'un barrage-voûte, dans l'hypothèse du lac plein.

Fig. 5. — Diagrammes pour les coefficients de réduction calculés avec un coefficient de diffusibilité pour le béton $a = 0{,}0025\ \mathrm{m}^2/\mathrm{h}$. Les lignes continues se réfèrent à ϑ_m maximum et $\Delta\vartheta$ correspondant (tableau 2) ; les lignes interrompues se réfèrent à $\Delta\vartheta$ maximum et ϑ_m correspondant (tableau 3).

Fig. 6. — Efforts dans les arcs, provoqués par les variations de température, dans l'hypothèse du lac vide (ligne continue — clavage des joints à la température moyenne annuelle ; ligne interrompue — clavage des joints à une température de 2° plus basse).

Fig. 7. — Efforts dans les arcs, provoqués par les variations de température et la pression hydrostatique, dans l'hypothèse du lac plein (ligne continue — clavage des joints à la température moyenne annuelle ; ligne interrompue — clavage des joints à une température de 2° plus basse).

BIBLIOGRAFIE

1. F. Arredi. *Dighe ad arco — Nuovo contributo al problema delle sollecitazioni indotte dalle variazioni di temperatura.* Energia Elettrica, 1955, nr. 10.
2. G. Oberti, *Diga del Lumiei — Criteri di progetto e studi sperimentali.* Energia Elettrica, 1948, nr. 9.
3. W. Creager a. J. Justin, *Hydroelectric Handbook.* New York, 1950.
4. C. V. Davis, *Handbook of applied hydraulics.* New York, 1942.
5. G. I. Ippolito, *Sul calcolo delle dighe ad arco.* Milano, 1923.
6. A. Stucky, *Mesures et observations sur le barrage de la Dixence — Messungen, Beobachtungen und Versuche an Schweizerischen Talsperren.* Bern, 1946.
7. A. Bourgin, *Cours de calcul de barrages.* Paris, 1955.

RECENZII

E. CARAFOLI, *Aerodinamica vitezelor mari*. Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1957, 706 pag.

Noul volum *Aerodinamica vitezelor mari*, de acad. E. Carafoli, este una din lucrările de mare amploare ale autorului. Prin actualitatea capitolelor, prin originalitatea prezentării şi prin contribuţiile numeroase, *Aerodinamica vitezelor mari* este o lucrare deosebit de interesantă şi nouă, chiar pentru cititorii familiarizaţi cu problemele dinamicii gazelor şi ale teoriei suprafeţelor portante, la viteze mari.

Cuprinsul diferitelor capitole marchează o trecere gradată şi logică de la noţiunile de bază generale, către problemele speciale sau aplicaţiile practice. Astfel, primul capitol conţine o introducere fizico-matematică cu o subdiviziune asupra analizei vectoriale şi o alta privitoare la termodinamica gazelor. În capitolul al II-lea se prezintă relaţiile fundamentale privind mişcarea fluidelor compresibile perfecte, propagarea mişcărilor în fluidele compresibile şi diferitele forme ale ecuaţiilor presiunilor, energiei sau a potenţialului de viteze. Capitolul următor se ocupă de mişcarea permenentă unidimensională prin conducte şi ajutaje, undele de şoc plane şi diferite aplicaţii în tehnica experimentală la viteze mari. Teoria mişcărilor subsonice, întîi sub forma liniarizată, apoi pentru variaţii mari de viteză, cu aplicaţii la aripile de diferite forme, face obiectul capitolului IV, iar în capitolul V se tratează mişcarea supersonică,în cazul perturbaţiilor mici, întîi pentru scurgeri plane, apoi pentru mişcări axial simetrice şi conice. Mai departe, capitolul VI expune soluţiile riguroase în cazul mişcărilor supersonice bidimensionale, cum ar fi expansiunea fluidului în jurul unei creste, teoria profilelor supersonice în a doua aproximaţie şi aplicarea metodei caracteristicilor pentru studiul curenţilor bidimensionali sau pentru trasarea difuzoarelor plane. În continuare, capitolul VII se ocupă de soluţiile exacte ale mişcării în jurul corpurilor de revoluţie şi în interiorul efuzoarelor de secţiune circulară.

Ultimele două capitole (VIII şi IX) au căpătat o extindere deosebită şi conţin teoria aripilor de anvergură finită la viteze supersonice, bazate pe metoda perturbaţiilor mici, apoi studiul mişcărilor mai complexe în jurul aripilor triunghiulare. Ca subdiviziuni ale acestor capitole se poate cita studiul metodelor de calcul, utilizate în teoria aripilor de anvergură finită, studiul aripilor unghiulare indefinite, subţiri şi groase, calculul rezistenţei de undă pentru aripile delta dublu-conice cu grosimea distribuită simetric faţă de planul median, teoria aripii subţiri triunghiulare şi determinarea caracteristicilor aerodinamice ale aripilor subţiri de diferite forme şi, în sfîrşit, consideraţii asupra mişcărilor nestaţionare armonice ale aripilor delta.

De o factură încă mai complexă decît ar reieşi la o primă lectură a enumerării precedente, comprimate la maximum pentru a nu depăşi cadrul unei recenzii, volumul *Aerodinamica vitezelor mari* conţine încă numeroase subdiviziuni şi paragrafe de un mare interes ştiinţific şi practic. Astfel lucrarea se prezintă ca una din cele mai complete apărute în acest domeniu. Cunoscînd în mod amănunţit cerinţele aplicaţiilor practice şi mînuind cu dibăcie un instrument matematic de cercetare la un nivel superior, autorul, ca şi în volumele precedente, a reţinut esenţialul din marea cantitate de studii apărute în ultimii ani, aducînd completări şi rezultate noi, care răspund la probleme puse în prezent, în mod acut, de tehnica zborului la viteze mari. Volumul se caracterizează astfel prin expunerea unitară şi personală a subiectelor, chiar cînd se face uz de lucrările citate în bibliografie, apoi prin soluţii noi în probleme încă nerezolvate sau rezolvate formal, fără posibilităţi de aplicare numerică. Este de altfel una din trăsăturile esenţiale ale lucrărilor acad. E. Carafoli această îndemînare în găsirea metodelor directe de tratare şi în stabilirea de soluţii finale simple în formă, dar cuprinzătoare în fond.

Printre numeroasele contribuţii pe care autorul le aduce de-a lungul capitolelor se poate cita : studiul mişcărilor subsonice în jurul corpurilor de revoluţie şi al aripilor de avion, capitolele privind aripile în săgeată şi trasarea profilelor în domeniul subsonic compresibil etc., dar mai ales metoda analogiilor hidrodinamice în studiul mişcărilor supersonice. Folosind transformările lui Busemann se arată că mişcările conice au un caracter hidrodinamic, iar potenţialul corespunzător poate fi determinat într-un număr foarte mare de cazuri. Pe această cale se face studiul aripilor unghiulare, al aripilor poligonale subţiri şi groase, determinîndu-se repartiţia de viteze, rezistenţa de undă, momentele şi, în general, toate caracteristicile aerodinamice. De asemenea este studiată pînă la determinarea caracteristicilor finale, aripa cu aripioare, aripa triunghiulară cu incidenţă variabilă, aripile delta dublu conice, aripile unghiulare prevăzute cu suprafeţe plane normale aripile cu plăci marginale, aripile cruciforme etc. Pe o cale asemănătoare autorul dezvoltă teoria mişcărilor conice de ordin superior, obţinînd rezultate deosebit de interesante pentru un cîmp vast de aplicaţii.

Astfel, prin metoda analogiilor hidrodinamice, acad. E. Carafoli aduce un nou şi puternic mijloc de cercetare în aerodinamica vizelor mari.

Întreaga lucrare, concisă şi clară, reprezintă o contribuţie esenţială într-unul din cele mai interesante şi actuale domenii ale fizicii şi tehnicii moderne. De aceea ea se adresează unui număr mare de cititori, de la cercetătorii şi oamenii de ştiinţă pînă la inginerii proiectanţi din uzine. În plus, prin intuiţia clară şi formularea justă a unor probleme deosebit de complexe, *Aerodinamica vitezelor mari* are calitatea deosebit de preţioasă de a deschide orizonturi către probleme şi căi noi de cercetare.

N. Tipei

A. KAMMERER, *Les propriétés mécaniques des solides réels et la théorie de l'élasticité* (Proprietăţile mecanice ale solidelor reale şi teoria elasticităţii). Ed. Hermann & C-ie, Paris, 1951, 132 pag.

În general, teoria matematică a elasticităţii se ocupă de problema determinării stării de tensiune şi a stării de deformaţie în interiorul unui corp deformabil, în baza unor anumite ipoteze simplificatoare :

— Materialul este continuu, ceea ce ne permite să deducem distribuţia eforturilor unitare şi a deformaţiilor specifice în vecinătatea unui punct, precum şi ecuaţiile de echilibru ale tensiunilor.

— Deoarece deformaţiile specifice au, în general, valori foarte mici în raport cu unitatea, se menţin în expresia dezvoltării în serie a eforturilor unitare în raport cu acestea numai termeni de gradul I, ceea ce ne conduce la o relaţie liniară (legea lui Hooke).

— Toate aceste mărimi şi relaţii depind numai de elementele care caracterizează deformaţia în jurul punctului respectiv şi sînt independente de vreo variabilă temporală.

— Se pot alcătui ecuaţiile cu derivate parţiale care caracterizează problema, ecuaţii care se simplifică în mod considerabil, pentru corpurile izotrope ; în acest caz proprietăţile mecanice ale corpului sînt precizate în întregime de modulul de elasticitate longitudinală E şi de coeficientul de contracţie transversală μ al lui Poisson.

După cum arată autorul, dacă se fac experienţe suficient de exacte asupra diferitelor materiale, se constată că acestea nu respectă ipotezele de mai sus. Încercările statice asupra materialelor plastice — de pildă — fac să intervină o frecare internă (viscozitate), care introduce o variaţie în timp a proprietăţilor materialului. Pe de altă parte deformaţiile nu mai sînt reversibile, dacă se trece de o anumită limită.O problemă specială intervine în cazul sarcinilor periodice.

A. Kammerer a studiat rezultatele încercărilor mecanice efectuate pe diverse materiale, căutînd să de o interpretare matematică simplă, ale cărei concluzii să fie verificate de experienţă. Generalizînd aceste interpretări, autorul a arătat că se pot extinde cu uşurinţă bazele teoriei matematice clasice a elasticităţii.

Pentru aceasta, în capitolul I, autorul s-a ocupat de materialele plastice, căutînd să dea o interpretare matematică viscozităţii şi deformaţiei instantanee. Se arată de asemenea limitele de valabilitate ale rezultatelor obţinute prin metodele fotoelasticităţii pe modele din material plastic (cum este plexiglasul de pildă). După ce se arată care sînt diferenţele faţă de legea clasică a lui Hooke, se trece în revistă modul în care se pot studia diferitele solicitări simple : întinderea, încovoierea, răsucirea.

Capitolul II tratează despre limitele domeniului de reversibilitate pentru sarcinile statice. În special se remarcă influența deformației instantanee și a fluajului, a neproporționalității între eforturi și deformații, și a variației modulului de elasticitate inițial cu temperatura. De asemenea autorul arată cum se pot exprima, în general, tensiunile în asemenea cazuri.

În capitolul III se tratează problema fenomenelor periodice în cazul corpurilor care au o viscozitate destul de pronunțată.De asemenea autorul se preocupă de apariția limitei de oboseală.

În capitolul IV se aplică rezultatele obținute la materiale reale foarte diferite : plexiglas, oțel etc. Autorul arată pe larg care este influența ipotezelor fundamentale făcute în elasticitatea clasică : continuitatea, izotropia, omogenitatea, elasticitatea etc.

Se pare că prin studiul făcut, care are un vădit caracter de originalitate, autorul a căutat să prezinte diverse aspecte ale unor probleme interesante, fără a fi obligat să intre în amănunt în metodele de calcul ale uneia din cele mai moderne ramuri ale științei : reologia, care se ocupă de problemele diverselor modele de corpuri : vîsco-elastice, vîsco-plastice, elasto-plastice, elasto-vîsco-plastice etc.

Credem că rezultatele prezentate de A. Kammerer ne conduc la o mai bună cunoaștere a proprietăților mecanice ale materialelor și deci permit o folosire mai judicioasă a acestora în domeniul construcțiilor inginerești. De asemenea ele sînt deosebit de interesante pentru cei care se preocupă de studii teoretice, de cercetări științifice, deoarece permit stabilirea unor limite de valabilitate ale rezultatelor obținute.

P. P. Teodorescu

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

6

F 2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

3

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil:
ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri:
ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R.P.R.;
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti;
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti;
M. ARCAN, conferenţiar la Institutul de construcţii, Bucureşti.

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VIII, nr. 3 1957

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDELOR Pag.

N. TIPEI, Asupra mişcării de cădere a rachetelor 619
T. HACKER şi A. BURACU, Un procedeu de cercetare a mişcării perturbate a avionului în faza fugoidă, cînd mişcarea de bază este nepermanentă . . . 629
V. N. FLORIAN, Cinematica sapelor cu role conice 637

TEORIA MECANISMELOR

R. BOGDAN, CR. PELECUDI, E. BUGAIEVSKI şi L. CALMACIUC, Studiu asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane 663

AEROMECANICĂ

E. CARAFOLI şi M. IONESCU, Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subţiri sau de grosime simetrică (O teorie generală unitară) 677
N. N. PATRAULEA şi L. DUMITRESCU, Influenţa pereţilor asupra încercărilor de aripi toroidale în suflerii circulare 703
N. N. PATRAULEA, Indicaţii asupra măririi coeficientului de calitate al elicelor propulsive 711
GH. N. DARIE, Aplicarea metodei Carafoli la calculul rezistenţei de undă a aripii delta dublu conice cu panta dublă 725
D. PANTAZOPOL, Determinarea aproximativă a repartiţiei de presiuni în lungul unui obstacol situat în curent supersonic de gaz 737

HIDRODINAMICĂ

CR. MATEESCU, M. KAHAN, A. FILOTTI şi D. DELICAN, Studiul mişcării aluviunilor în regim uniform 757
T. OROVEANU, Asupra scurgerii nestaţionare a unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros 779

UNGERE-FRECARE-UZURĂ Pag.

V. N. CONSTANTINESCU, Calculul lagărelor fără joc radial supuse la forţe şi viteze variabile 789

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

N. S. PÎRVULESCU, Efectul forţei centrifuge asupra rezistenţei prăjinilor de foraj 805
PETRE P. TEODORESCU, Asupra calculului semispaţiului elastic sub acţiunea unor sarcini periodice 831
E. PROCOPOVICI, Asupra deformării transversale a barelor elastice solicitate de o forţă axială impulsivă 839
V. CALCAN, I. IONESCU şi N. GOLDENBERG, Mase plastice pe bază de furfurol şi derivaţi. V. Influenţa tratamentului termic asupra comportării faţă de apă şi ulei a textolitului cu răşină furfurol-fenolică 847

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

M. WEISSENBERG şi S. CIUNGU, Deformatiile elementelor de beton armat şi precomprimat supuse la încovoiere cu armătura neaderentă. 865
R. PRIŞCU şi M. CONSTANTINESCU, O metodă de determinare a distribuţiei presiunii hidrostatice în secţiunea maestră a barajelor arcuite . 887

VIBRAŢII

V. MANEA şi E. PROCOPOVICI, Asupra unei metode grafice pentru determinarea frecvenţelor proprii ale vibraţiilor flexionale la grinzi libere cu distribuţie neuniformă a rigidităţii şi a masei 897

PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, E. DECIU şi I. MITRICĂ, Consideraţii asupra unei analogii hidrodinamice a laminării 905
M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU şi N. PASCU, Despre regimul optim de aşchiere cu cuţite de strung armate cu plăcuţe din carburi metalice 915
C. FLORESCU şi N. ZELINGHER, Cercetări asupra rezistenţei la penetrare a solului 925

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

C. FLORESCU şi N. ZELINGHER, Penetrograf dinamic pentru sol, cu acţionare manuală tip IMA—II 935

RECENZII 939

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanică (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratori din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 de pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille Nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VIII, nº 3 1957

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DES SOLIDES

Page

N. TIPEI, Sur le mouvement de descente des raquettes 619
T. HACKER et A. BURAGU, Un procédé pour l'étude du mouvement perturbé de l'avion à la phase fugoïde, lorsque le mouvement de base est non permanent 629
V. N. FLORIAN, La cinématique des trépans à rouleaux coniques 637

THÉORIE DES MÉCANISMES

R. BOGDAN, CR. PELECUDI, E. BUGAIEVSKI und L. CALMACIUC, Über die experimentelle Bestimmung der Bewegungen in ebenen Getrieben . 663

AÉROMÉCANIQUE

E. CARAFOLI and M. IONESCU, High Order Conical Flows around Triangular Wings, Thin or of a Variable Thickness (A General Unitary Theory) . . 677
N. N. PATRAULEA et L. DUMITRESCU, Influence des parois sur les résultats des essais d'ailes toroïdales dans les souffleries à veine circulaire 703
N. N. PATRAULEA, Quelques indications sur l'augmentation du coefficient de qualité des hélices 711
GH. N. DARIE, Application de la méthode de Carafoli au calcul de la résistance d'onde de l'aile delta doublement conique, à double pente 725
D. PANTAZOPOL, Détermination approximative de la répartition des pressions le long d'un obstacle placé en courant supersonique de gaz. 737

HYDRODYNAMIQUE

GR. MATEESCU, M. KAHAN, A. FILOTTI et D. DELIGAN, Étude du mouvement des alluvions en régime uniforme 757
T. OROVEANU, Sur l'écoulement non stationnaire d'un mélange compressible de liquide et de gaz à travers un milieu poreux 779

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

Page

V. N. CONSTANTINESCU, Le calcul des paliers sans jeu radial, soumis à des charges et vitesses variables 789

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — ÉLASTICITÉ

N. S. PÎRVULESCU, L'effet de la force centrifuge sur la résistance des tiges de forage 805

PETRE P. TEODORESCU, Sur le calcul du demi-espace élastique sous l'action de certaines charges périodiques 831

E. PROCOPOVICI, Sur la déformation transversale des barres élastiques, sollicitées par une force axiale impulsive 839

V. CALCAN, I. IONESCU et N. GOLDENBERG, Masses plastiques à base de furfurol et dérivés. V. Influence du traitement thermique sur le comportement dans l'eau et dans l'huile du textolite à résine furfurol-phénolique . 847

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

M. WEISSENBERG et S. CIUNGU, Déformations des éléments de béton armé et précontraint, à armature non adhérente, soumis à la flexion. 865

R. PRIȘCU et M. CONSTANTINESCU, Méthode de répartition de la pression hydrostatique dans la section centrale des barrages-voûtes. 887

VIBRATIONS

V. MANEA et E. PROCOPOVICI. Sur une méthode graphique pour déterminer les fréquences propres des vibrations flexionnelles des poutres libres, à distribution non uniforme de la rigidité et de la masse 897

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET USINAGE DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, E. DECIU et I. MITRICĂ, Considérations sur une analogie hydrodynamique du laminage 905

M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU et N. PASCU, Über die günstigsten Bedingungen des Zerspannung mit Drehbankwerkzeugen mit Hartmetallplättchen 915

C. FLORESCU et N. ZELINGHER, Recherches sur la résistance du sol à la pénétration 925

NOTES SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

C. FLORESCU et N. ZELINGHER, Pénétrographe dynamique pour le sol, actionné à la main, type I.M.A.-II 935

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 939

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

LA REVUE ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Construction mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultra-sons et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes pour le calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques.

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés en trois exemplaires, les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible. Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers pourront être rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante : Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15 rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ «ТРАЯН ВУЯ»

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ
ПО
ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VIII, № 3 1957

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ И ИССЛЕДОВАНИЯ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ Стр.

Н. ТИПЕЙ, О движении ракет во время падения 619
Т. ХАКЕР и А. БУРАКУ, Способ исследования возмущенного движения самолета в длиннопериодическом этапе при неустановившемся основном движении 629
В. Н. ФЛОРИАН, Кинематика долот с коническими шарошками 637

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

Р. БОГДАН, К. ПЕЛЕКУДИ, Е. БУГАЕВСКИЙ и Л. КАЛМАЧУК, К экспериментальному определению перемещений в плоских механизмах . . 663

АЭРОМЕХАНИКА

Е. КАРАФОЛИ и М. ИОНЕСКУ, Конические обтекания высшего порядка тонких треугольных крыльев или крыльев переменной толщины . . 677
Н. Н. ПАТРАУЛЯ и Л. ДУМИТРЕСКУ, Влияние стенок на испытание тороидальных крыльев в круглой аэродинамической трубе 703
Н. Н. ПАТРАУЛЯ. Указания относительно увеличения качественного коэффициента пропульсивных винтов 711
Г. Н. ДАРИЕ, Применение метода Карафоли для расчета волнового сопротивления треугольного двуконусного крыла с двойным углом наклона 725
Д. ПАНТАЗОПОЛ, Приближенное определение распределения давлений вдоль препятствия, расположенного в сверхзвуковом потоке газа . 737

ГИДРОДИНАМИКА

Г. МАТЕЕСКУ, М. КАГАН, А. ФИЛОТТИ и Д. ДЕЛИКАН, Исследование движения наносов в равномерном потоке 757
Т. ОРОВЯНУ, О нестационарном движении сжимаемой смеси жидкости и газа через пористую среду 779

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Стр.

В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Расчет подшипников без радиального зазора при переменных нагрузках и скоростях 789

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

Н. С. ПЫРВУЛЕСКУ, Эффект центробежной силы на сопротивление буровых штанг 805

П. П. ТЕОДОРЕСКУ, О расчете упругого полупространства под действием периодических нагрузок 831

Е. ПРОКОПОВИЧ, О поперечной деформации упругих стержней при осевой импульсной нагрузке 839

В. КАЛКАН, И. ИОНЕСКУ и Н. ГОЛЬДЕНБЕРГ, Пластические массы на основе фурфурола и его производных. V. Влияние термической обработки на поведение в воде и масле текстолита с фурфуроло-фенольной смолой 847

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. ВЕЙСЕНБЕРГ и С. ЧУНГУ, Деформация элементов из обычного или предварительно напряженного железобетона при изгибе при отсутствии сцепления бетона с арматурой 865

Р. ПРИШКУ и М. КОНСТАНТИНЕСКУ, Метод распределения гидростатического давления в центральном сечении арочных плотин 885

ВИБРАЦИИ

В. МАНЯ и Е. ПРОКОПОВИЧ, О графическом методе определения собственных частот колебаний при изгибе свободно лежащих балок с неравномерным распределением жесткости и массы 895

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА И ОБРАБОТКА СПЛОШНЫХ ТЕЛ

М. ПОПОВ, Е. ДЕЧУ и И. МИТРИКЭ, О гидродинамической аналогии прокатки 903

М. ПОПОВ, Д. ПАВЕЛЕСКУ, И. МИТРИКЭ, Е. ДЕЧУ, М. КАЛЧУ и Н. ПАСКУ, Об оптимальном режиме резания резцами с пластинками из твердого углеродного сплава 913

К. ФЛОРЕСКУ и Н. ЗЕЛИНГЕР, Исследование проницаемости почвы . . 923

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

К. ФЛОРЕСКУ и Н. ЗЕЛИНГЕР, Динамический пенетрограф ручного действия тип IMA — II 933

РЕЦЕНЗИИ 937

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал. «ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость, электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутренего сгорания, реактивные двигатели сомолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей механические обработки и обработка силошных тел.

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геомеханика, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных специалистов.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки следует испольнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, номер тома, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста для каждого экземпляра нужно представлять резюме на румынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем, составлять 1 страницу, написанную на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к сотрудническим работам зарубежных авторов, редактированным на русском, французском, английском и немецком языках.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики Академии РНР, Бухарест, ул. Константин Милле, № 15, район Г. Георгиу-Деж.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDELOR

ASUPRA MIŞCĂRII DE CĂDERE A RACHETELOR

DE

N. TIPEI

Se va studia mişcarea rachetei în cursul căderii, începînd de la punctul de înălţime maximă sau de la un punct oarecare situat pe traiectoria descendentă. Fie G greutatea rachetei, $V(v_1, v_3)$ viteza sa, $\mathcal{T}$ tracţiunea, φ unghiul de coborîre, ρ densitatea aerului la înălţimea x_3, S o suprafaţă de referinţă, t timpul, R distanţa de la centrul pămîntului pînă la centrul de greutate al rachetei, θ unghiul dintre o direcţie fixă, trecînd prin centrul pămîntului, şi raza R. Dacă se admite că traiectoria este o curbă plană (fig. 1), se pot scrie ecuaţiile de proiecţii ale forţelor, notînd cu g_0 acceleraţia gravităţii la sol, cu R_0 raza pămîntului şi prin k raportul dintre consumul de propelant în unitatea de timp şi greutatea iniţială G_0:

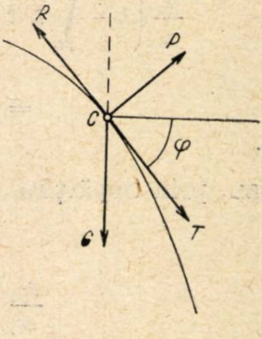


Fig. 1

$$\left.\begin{aligned}\frac{G_0}{g_0}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right)(R\ddot{\theta}+2\dot{R}\dot{\theta}) &= \left(\mathcal{T}-\frac{\rho}{2}SV^2Cx\right)\cos\varphi + \\ &\quad + \frac{\rho}{2}SV^2Cz\sin\varphi, \\ \frac{G_0}{g_0}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right)(\ddot{R}-R\dot{\theta}^2) &= \left(\frac{\rho}{2}SV^2Cx-\mathcal{T}\right)\sin\varphi + \\ &\quad + \frac{\rho}{2}SV^2Cz\cos\varphi - G_0\frac{R_0^2}{R^2}\left(1-\int_{t_0}^{t} k\,dt\right),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Cx şi Cz sînt coeficienţi de rezistenţă la înaintare şi de portanţă ai rachetei.

Sub această formă, ecuațiile sînt foarte greu de rezolvat. Se observă însă că se pot face următoarele înlocuiri și simplificări, notînd cu x_3 înălțimea, cu v_θ și v_R componentele vitezei V în sistemul de coordonate polare, apoi, în general, cu v_1 și v_3 componentele vitezei după orizontală și verticală, presupunînd că aceste direcții nu variază cu punctul

$$\left.\begin{aligned} R = R_0 + x_3, \quad Cz \cong 0, \quad R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\,\dot{\theta} &= \dot{v}_\theta + \dot{\theta} v_R \cong \dot{v}_\theta = \dot{v}_1, \\ \ddot{R} - R\dot{\theta}^2 &= \dot{v}_R - \dot{\theta} v_\theta \cong \dot{v}_R = \dot{v}_3. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Se observă că ecuațiile (1) se pot simplifica substanțial, dacă se separă căderea în două faze: 1) căderea în vid sau într-o atmosferă rarefiată, unde se pot neglija forțele aerodinamice, și 2) căderea în atmosferă.

Pentru prima fază, ecuațiile (1) sînt

$$\left.\begin{aligned} &\frac{G_0}{g_0}\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right)(R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta}) \cong \frac{G_0}{g_0}\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right)\dot{v}_1 = \mathfrak{T}\cos\varphi, \\ &\frac{G_0}{g_0}\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right)(\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) = \frac{G_0}{g_0}\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right)\dot{v}_3 = \\ &\qquad = -\mathfrak{T}\sin\varphi - G_0\cdot\frac{R_0^2}{R^2}\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

sau, prin împărțire,

$$\frac{dv_3}{dv_1} = \frac{v_3}{v_1} - \frac{G_0 R_0^2\left(1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt\right)}{\mathfrak{T}(R_0 + x_3)^2}\sqrt{1 + \frac{v_3^2}{v_1^2}}. \quad (4)$$

Tracțiunea se poate pune sub forma

$$\mathfrak{T} = \frac{G_0}{g_0} kv, \quad (5)$$

în care v este viteza de ejecție a gazelor, sau, mai general,

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{T} = G_0 \cdot f_t(t), \\ &\frac{\mathfrak{T}}{R_0^2 G_0}\cdot\frac{(R_0 + x_3)^2}{1 - \int_{t_0}^{t} k\,dt} = \Phi(t) = f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{v_3}{v_1}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Rezultă astfel din (4)

$$\ln \frac{v_{10}}{v_1} = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi = a_0 \operatorname{arc\,tg} \xi + a_1 \sqrt{1+\xi^2} + \dots$$

$$- a_0 \operatorname{arc\,tg} \xi_0 - a_1 \sqrt{1+\xi_0^2} - \dots = I(\xi). \qquad (7)$$

Toate integralele de forma (7) se pot efectua succesiv cu ajutorul formulei de recurenţă

$$\int \frac{\xi^n\, d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{1}{n}\left[\xi^{n-1}\sqrt{1+\xi^2} - (n-1)\int \frac{\xi^{n-2}\, d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right]. \qquad (8)$$

Din prima ecuaţie (3) se poate obţine apoi ξ ca funcţie de timp

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f_t\, dt}{1 - \int_{t_0}^{t} k\, dt} = \frac{1}{g_0}\int_{v_{10}}^{v_1} \sqrt{1+\xi^2}\, dv_1 = -\frac{v_{10}}{g_0}\int_{\xi_0}^{\xi} e^{-I(\xi)}\sqrt{1+\xi^2}\,\frac{dI}{d\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{v_{10}}{g_0}\left[\sqrt{1+\xi^2}\, e^{-I(\xi)} - \sqrt{1+\xi_0^2}\, e^{-I(\xi_0)} - \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{e^{-I(\xi)}\, \xi\, d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}\right], \qquad (9)$$

iar, în cazul cînd v şi k sînt constante, integrala din primul membru rezultă imediat

$$\int_{t_0}^{t} \frac{f_t\, dt}{1-kt} = \frac{kv}{g_0} \ln \frac{1-kt_0}{1-kt}. \qquad (10)$$

Se poate trasa astfel grafic sau calcula analitic curba $\xi = \xi(t)$ din (9), iar înălţimea x_3 rezultă, notînd cu x_{30} valoarea altitudinii în momentul iniţial,

$$x_3 - x_{30} = \int_{t_0}^{t} v_3\, dt = \int_{t_0}^{t} \xi v_1\, dt = v_{10}\int_{t_0}^{t} \xi e^{-I(\xi)}\, dt. \qquad (11)$$

În felul acesta primul membru al celei de-a doua ecuaţii (6) este o funcţie cunoscută de timp; introducînd pe $\xi(t)$ în membrul al doilea al aceleiaşi ecuaţii, se pot determina uşor prin identificare coeficienţii a_n, iar problema este rezolvată. Evident, aceasta implică o dezvoltare în serie de puteri a funcţiei cunoscute $\xi(t)$, cît şi a primului membru, operaţii care nu ridică dificultăţi deosebite.

De asemenea, se poate porni şi de la expresia $t(\xi)$, dedusă din (9), în care caz urmează să se dezvolte numai primul membru al celei de-a doua ecuaţii (6) după puterile lui ξ.

Fie $\mathcal{T} = 0$ în timpul căderii, situaţie care se realizează de obicei în practica rachetelor actuale. Deoarece mişcarea kepleriană obţinută în aceste condiţii este cunoscută în mod exact, este interesant să se rezolve, de asemenea, ecuaţiile de mişcare cu aproximaţiile arătate, pentru a determina de la caz la caz, ordinul de mărime al erorilor sau mărimea arcelor de traiectorie pentru care aceste abateri rămîn în limitele admisibile.

Din (3) se găsește imediat [1]

$$\left.\begin{aligned}
&v_1 = v_{10} = \text{const.}, \quad \ddot{x}_3 = -\frac{R_0^2 g_0}{(R_0 + x_3)^2},\\
&t = t_0 + \frac{\sqrt{R(C_1 R + 2R_0^2 g_0)}}{C_1} + \frac{R_0^2 g_0}{C_1^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{C_1 R + 2R_0^2 g_0} - \sqrt{C_1 R}}{\sqrt{C_1 R + 2R_0^2 g_0} + \sqrt{C_1 R}} -\\
&\quad - \frac{\sqrt{(R_0 + x_{30})\,[C_1 (R_0 + x_{30}) + 2R_0^2 g_0]}}{C_1} -\\
&\quad - \frac{R_0^2 g_0}{C_1^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{C_1 (R_0 + x_{30}) + 2R_0^2 g_0} - \sqrt{C_1 (R_0 + x_{30})}}{\sqrt{C_1 (R_0 + x_{30}) + 2R_0^2 g_0} + \sqrt{C_1 (R_0 + x_{30})}}, \qquad C_1 > 0,\\
&t = t_0 + \frac{\sqrt{R(C_1 R + 2R_0^2 g_0)}}{C_1} + \frac{2R_0^2 g_0}{C_1 \sqrt{-C_1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{C_1 R + 2R_0^2 g_0}}{\sqrt{-C_1 R}} -\\
&\quad - \frac{\sqrt{(R_0 + x_{30})\,[C_1 (R_0 + x_{30}) + 2R_0^2 g_0]}}{C_1} -\\
&\quad - \frac{2R_0^2 g_0}{C_1 \sqrt{-C_1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{C_1 (R_0 + x_{30}) + 2R_0^2 g_0}}{\sqrt{-C_1 (R_0 + x_{30})}}, \qquad C_1 < 0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

A doua ecuație (12) dă valoarea accelerației în fiecare moment, iar vitezele pe verticală vor fi

$$v_3 = \frac{dx_3}{dt} = \sqrt{\frac{C_1 (x_3 + R_0) + 2R_0^2 g_0}{x_3 + R_0}}. \qquad (13)$$

Din aceasta se deduce și valoarea constantei C_1, dacă $v_3 = v_{30}$ pentru $x_3 = x_{30}$ (la momentul $t = t_0$).

$$C_1 = v_{30}^2 - \frac{2R_0^2 g_0}{x_{30} + R_0}, \qquad (14)$$

iar ecuația traiectoriei este dată de ultimele două formule (12), în care se înlocuiește $t = \frac{x_1 - x_{10}}{v_{10}} + t_0$.

Pentru studiul mișcării în atmosferă, se remarcă de la început că, deoarece aceasta are loc între înălțimi de 200—300 km și pînă la sol, nu mai este nevoie să se considere variația accelerației gravitației cu înălțimea și se poate lua o valoare medie constantă $g = \bar{g}$. Se va admite apoi că $\mathscr{T} = 0$, fapt absolut probabil pe această ultimă parte a traiectoriei, în timp ce rezistența la înaintare are o valoare variabilă cu altitudinea și cu numărul Mach.

Pentru exprimarea densității aerului în funcție de înălțimi, $\rho(x_3)$, s-au utilizat tabelele ICAO [2] ale atmosferei standard de la sol pînă la $x_3 = 300$ km. Într-o lucrare precedentă [3] s-a arătat că pentru troposferă legea exponențială a lui Everling se poate aplica cu o precizie foarte mare. Pentru altitudini mai mari s-a căutat de asemenea o expresie de forma

$$\rho = \rho_0 \, e^{-Kx_3}, \tag{15}$$

iar în diagramele din figura 2 se vede că această lege rămîne valabilă

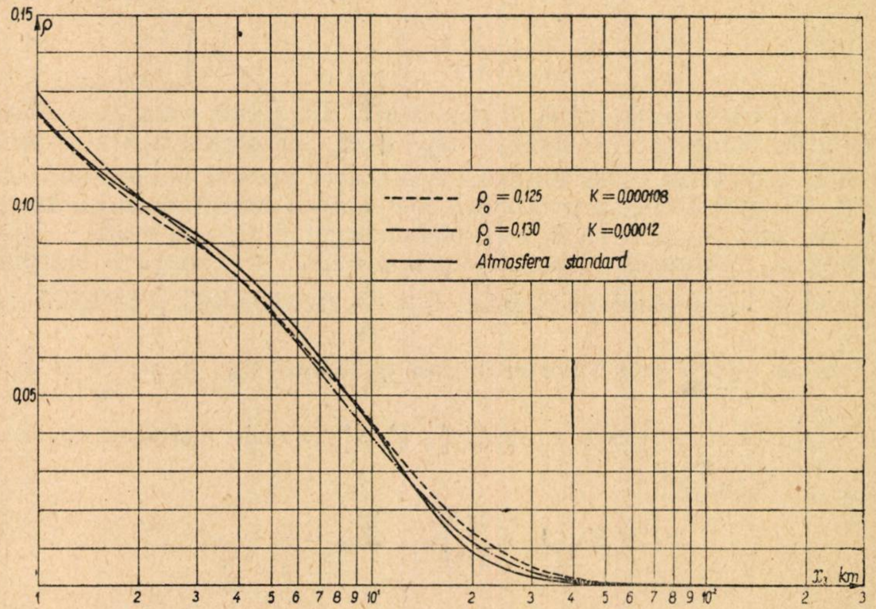


Fig. 2

chiar pînă la limitele superioare ale atmosferei. Pe lîngă curba corespunzătoare tabelei ICAO s-au trasat şi curbele calculate pentru două serii de valori ale parametrilor ρ_0 şi K; comparînd aceste diagrame, se vede că în toate cazurile corespondenţa este satisfăcătoare şi că se pot determina ρ_0 şi K astfel încît aproximaţia să se reducă la minimum pe orice porţiune cuprinsă între două altitudini date, care limitează zona cea mai interesantă a evoluţiei rachetei. Se observă totuşi că pentru $\rho_0 = 0,130$ şi $K = 0,12$ se obţine o încadrare bună a valorilor reale pentru toate înălţimile; mai mult, erorile schimbă de semn pe parcurs, astfel încît abaterile de la valorile exacte ale elementelor mişcării se compensează în mare măsură. De aceea, s-a admis că legea dată de formula (15) este valabilă pentru toată grosimea păturii atmosferice.

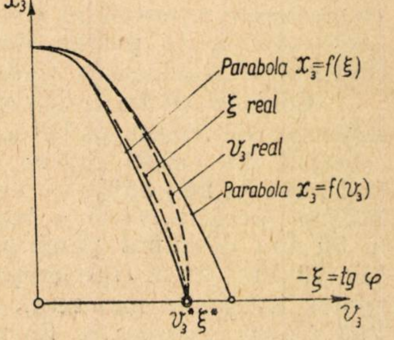


Fig. 3

Cu aproximațiile indicate în formulele (2) se obține din (1) sistemul

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_3}{dv_1} &= \frac{v_3}{v_1} + \frac{2G_0}{\rho_0 S\,Cx} \cdot \frac{e^{kx_3}}{v_1^2\sqrt{1+\dfrac{v_3^2}{v_1^2}}}, \\ \frac{\dot{v}_3}{v_3} + \frac{\bar{g}}{v_3} &= \frac{\dot{v}_1}{v_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Pentru înlocuirea lui x_3 la exponentul din prima ecuație, se observă că față de parabola $v_3^2 = 2g(x_3 - x_{30}) + v_{30}^2$, corespunzătoare căderii în vid (fig. 3), curba reală datorită rezistenței aerului se prezintă ca în figură, diferind de legea parabolică mai ales la înălțimile mici. Dacă se remarcă, mai departe, că $\dot{v}_1$ este mereu negativ, deci v_1 scade o dată cu altitudinea, rezultă că se poate obține o bună aproximație a înălțimilor revenind la legea parabolică, luînd $\xi = \frac{v_3}{v_1}$ ca variabilă și obligînd curba $x_3(-\xi)$ să treacă prin valorile inițiale și finale $\left(x_{30},\ \xi_0 = \frac{v_{30}}{v_{10}}\right.$ și $x_3 = 0$, $\left.\xi^* = \frac{v_3^*}{v_1^*}\right)$. În consecință notînd v_3^*, ξ^*, v_1^* valorile corespunzătoare la sol, se va admite

$$x_3 \cong X_{30}\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right), \qquad X_{30} = \frac{x_{30}}{1 - \dfrac{\xi_0^2}{\xi^{*2}}}. \qquad (17)$$

În acest mod se poate reduce prima ecuație (16) la o ecuație diferențială obișnuită. Aproximația introdusă nu afectează decît valorile densității și nu depășește de obicei erorile admise înlocuind curba atmosferei standard prin relația (15), iar în unele cazuri poate chiar compensa parțial aceste erori. Desigur că abaterile sînt mai greu de controlat o dată cu creșterea intervalului dintre înălțimile extreme între care se aplică aceste relații, iar pentru domenii mai mici, în care se poate eventual fracționa diferența totală de altitudine, erorile devin neglijabile.

Coeficientul de rezistență la înaintare depinde de numărul Mach, respectiv de viteza rachetei. În multe cazuri el poate fi considerat constant în cursul căderii, deoarece viteza totală nu suferă variații mai mari de 20—30%. În ceea ce privește viteza sunetului la diferite înălțimi, aceasta scade la început, pentru a reveni la valorile de la sol la 50 km deasupra pămîntului, descrește din nou la 282 m/s între 75—90 km, după care crește revenind și depășind valorile de la sol pentru înălțimile mai mari. Ca urmare, numărul Mach poate urma o lege foarte complicată. Se poate însă, ținînd seama că el nu suferă variații considerabile, să se admită $Cx = \text{const.}$, sau, eventual, o lege de asemenea parabolică,

$$Cx = Cx_1 - \alpha M^2 \cong Cx_1 - \frac{\alpha}{a^2}V^2 = Cx_1 - \frac{\alpha}{a^2}v_1^2(1+\xi^2). \qquad (18)$$

Prima ecuaţie (16) devine

$$\frac{d\xi}{dv_1} = \frac{2G_0}{\rho_0 S} \cdot \frac{e^{KX_{30}\left(1-\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)}}{\left[Cx_1 - \frac{\alpha}{a^2} v_1^2 (1+\xi^2)\right] v_1^3 \sqrt{1+\xi^2}} \cdot \tag{19}$$

Fie

$$v_1^2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n. \tag{20}$$

Înlocuind în (19) se obţine

$$\frac{1}{v_1^2} = \frac{\rho_0 S}{G_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \left[Cx_1 - \frac{\alpha}{a^2}(1+\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n\right] \sqrt{1+\xi^2}\, e^{-KX_{30}\left(1-\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)} d\xi + \frac{1}{v_{10}^2}, \tag{21}$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{A_0^{n+1}} \begin{vmatrix} A_1 & A_0 & 0 & \dots 0 \\ A_2 & A_1 & A_0 & \dots 0 \\ A_3 & A_2 & A_1 & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots A_1 \end{vmatrix} \xi^n = \frac{\rho_0 S}{G_0} \int_{\xi_0}^{\xi} \left[Cx_1 - \frac{\alpha}{a^2}(1+\xi^2) \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n\right] \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1+\xi^2}\, e^{-KX_{30}\left(1-\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)} d\xi + \frac{1}{v_{10}^2} \cdot \tag{22}$$

Dezvoltînd membrul al doilea în serie, efectuînd integrala şi identificînd coeficienţii lui ξ^n se găsesc $A_0, A_1, \dots, A_n \dots$, deci soluţia (20). Din a doua ecuaţie (16) rezultă apoi

$$\dot{\xi} + \frac{\bar{g}}{v_1} = 0, \qquad t = t_0 + \frac{1}{\bar{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n+1} \left(\xi_0^{n+1} - \xi^{n+1}\right) \tag{23}$$

cu relaţiile între coeficienţi

$$A_0 = B_0^2, \qquad A_n = \frac{1}{nB_0} \sum_{k=1}^{n} (3k - n) A_{n-k} B_k. \tag{24}$$

Din (20) şi din relaţia de bază $v_3 = \xi v_1$ se deduc apoi vitezele ca funcţii de timp, întreaga mişcare fiind astfel determinată; acceleraţiile sînt date direct de ecuaţiile diferenţiale, iar traiectoria de integralele

$$x_1 = x_{10} + \int_{t_0}^{t} v_1\, dt, \qquad x_3 = x_{30} + \int_{t_0}^{t} v_3\, dt. \tag{25}$$

Determinarea lui ξ^* se poate face apoi scriind

$$\left.\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t^*} v_3\, dt = -\, x_{30}, \\ &t^* = t_0 + \frac{1}{g}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n+1}\left(\xi_0^{n+1} - \xi^{*n+1}\right) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

şi eliminînd timpul între aceste ecuaţii. Se observă totodată că şi coeficienţii B_n conţin pe ξ^* (relaţiile (22) şi (24)); se pot astfel determina toate elementele de calcul.

O altă cale ar fi să se considere relaţiile deduse din ecuaţiile (1) şi (19):

$$\left.\begin{aligned} &\int_{x_{30}}^{0} \rho\, dx_3 = \frac{\rho_0}{K}\left(1 - e^{-Kx_{30}}\right) = -\frac{2G_0}{S}\int_{v_{10}}^{v_1^*} \frac{dv_1}{v_1\, Cx\sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}} = \\ &\frac{1 - e^{-Kx_{30}}}{K} = -\int_{\xi_0}^{\xi^*} v_1^2 \xi^2\, e^{-KX_{30}\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)} d\xi = \\ &\qquad = \frac{1}{2} e^{-KX_{30}} \int_{\xi^*}^{\xi_0} \xi\, e^{KX^{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \xi^n\, d\xi^2, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

integralele putîndu-se rezolva cu ajutorul formulei de recurenţă

$$\int \xi^{n+1} e^{KX_{30},\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}} d\xi^2 = \frac{\xi^{*2}}{KX_{30}}\left(\xi^{n+1} e^{KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}} - \frac{n+1}{2}\int \xi^{n-1} e^{KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}} d\xi^2\right)\cdot \tag{28}$$

Se vede imediat că din (27) se poate calcula apoi ξ^{*2}, toate celelalte elemente fiind cunoscute.

Admiterea unei variaţii a coeficientului Cx de forma (18) poate fi utilă în deosebi în zonele unde temperatura absolută a atmosferei şi deci viteza sunetului rămîn constante, sau acolo unde variaţia temperaturii şi a constantei gazelor permite să se admită practic $a = \text{const}$. Coeficientul α rezultă din datele experimentale pentru diferite tipuri de rachete şi pentru un interval dat al numerelor Mach. Dacă însă se urmăreşte o aplicare mai largă a formulelor pe diferenţe de altitudine de sute de km şi la viteze foarte mari, este mai exact uneori să se admită direct $Cx = \text{const.}$, conform observaţiilor precedente asupra variaţiei vitezei totale în timpul căderii. În acest caz, ecuaţia (19) se poate integra direct

$$\frac{1}{v_{10}^2} - \frac{1}{v_1^2} = \frac{\rho_0 SCx}{G_0}\int_{\xi_0}^{\xi} \sqrt{1 + \xi^2}\, e^{-KX_{30}\left(1 - \frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)} d\xi, \tag{29}$$

pe cale grafică, sau analitic

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{v_{10}^2}-\frac{1}{v_1^2}\cong\frac{\rho_0 S\,Cx\,e^{-KX_{30}}}{G_0}\left[\frac{\xi^{*2}}{2\,KX_{30}}\left(\xi e^{KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}}-\xi_0\,e^{KX_{30}\frac{\xi_0^2}{\xi^{*2}}}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+\left(1-\frac{\xi^{*2}}{2\,KX_{30}}\right)\int_{\xi_0}^{\xi}e^{KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}}\,d\xi\right],\quad \text{pentru}\quad \xi<1,\\
&\frac{1}{v_{10}^2}-\frac{1}{v_1^2}\cong\frac{\rho_0 S\,Cx\,e^{-KX_{30}\xi^{*2}}}{2G_0\,KX_{30}}\left\{e^{KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}}-e^{KX_{30}\frac{\xi_0^2}{\xi^{*2}}}+\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left[Ei\left(KX_{30}\frac{\xi^2}{\xi^{*2}}\right)-Ei\left(KX_{30}\frac{\xi_0^2}{\xi^{*2}}\right)\right]\right\},\quad \text{pentru}\quad \xi>1.
\end{aligned}\right\}\qquad(30)$$

Se observă, de asemenea, că integrala din prima ecuaţie (30) se poate calcula cu ajutorul tabelelor.

A doua ecuaţie (16) arată că viteza orizontală descreşte mereu şi nu poate avea maxime sau minime, deoarece $|\dot{v}_3|<\bar{g}$ din cauza rezistenţei aerului. Acest rezultat se deduce de altfel şi direct din a doua ecuaţie (1), cu simplificările admise. Dimpotrivă v_3 trece printr-un maxim, în punctul unde este satisfăcută relaţia

$$\frac{\dot{v}_1}{v_1}=-\frac{\bar{g}}{v_3}\,. \qquad (31)$$

Înlocuind v_1 din (29) sau (30) în prima ecuaţie (23) se deduce timpul, apoi v_3 şi traiectoria, după cum s-a arătat; deoarece integrala dată de (23) poate fi laborioasă se poate recurge la procedeele grafice, în acest scop, sau la formulele de integrare aproximative.

Dacă unele aproximaţii introduse în calcule, cum ar fi evaluarea lui Cx sau înlocuirea lui x_3 în expresia densităţii duc la aproximaţii prea mari, este suficient să se despartă traiectoria în cîteva porţiuni, pentru care aceleaşi procedee nu conduc la erori mai mari decît cele admise. Deşi calculele sînt astfel mai lungi, totuşi ele rămîn mai rapide şi deseori mai exacte decît în alte metode cunoscute.

Primită la redacţie la 28 martie 1957.

О ДВИЖЕНИЙ РАКЕТ ВО ВРЕМЯ ПАДЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривают движение ракеты во время падения, сначала в пустоте с силой тяги, зависящей от времени, учитывая изменение ускорения силы тяжести в зависимости от высоты. Получается полное ре-

шение при помощи степенных рядов отношения составляющих скорости или в замкнутой форме в случае нулевой тяги.

Затем, для падения в воздухе, показывается, что экспоненциальный закон плотности может быть распространен до верхних пределов атмосферы, согласно новым данным о физических характеристиках последней на больших высотах. Применяя преобразование уравнений движения в плоскости годографа, дают решения задачи в предположении, что коэффициент сопротивления при поступательном движении изменяется согласно числу Маха, а затем в предположении, что этот коэффициент остается постоянным.

В общем расчеты проще, чем применяемые обычно, и позволяют достигнуть высокой степени точности.

SUR LE MOUVEMENT DE DESCENTE DES RAQUETTES

(RÉSUMÉ)

On étudie le mouvement d'une raquette pendant sa chute, d'abord dans le vide, avec une traction dépendant du temps et en tenant compte de la variation du champ gravitationnel avec l'altitude. La solution complète est présentée à l'aide des séries de puissances du rapport des composantes de la vitesse, ou bien sous une forme close, si la traction est nulle.

En ce qui concerne la chute dans l'air, on montre que la loi exponentielle de la densité peut, conformément aux nouvelles observations des caractéristiques physiques de l'atmosphère, être étendue aux très grandes altitudes. En utilisant une transformation des équations du mouvement dans le plan hodographique, on déduit les solutions du problème dans l'hypothèse que le coefficient de traînée varie avec le nombre de Mach, puis en supposant ce coefficient constant.

En général, les calculs sont plus simples que ceux utilisés couramment et permettent d'atteindre un haut degré de précision.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Kamke, *Spravocinik po obîknovennîm differențialnîm uravneniam.* I.I.L., Moscova, 1951.
2. U.S. Weather Bureau and Geophysics Research Directorate, *ICAO Standard Atmosphere Extension.* Jet Propulsion, 1956, t. 26, no. 12.
3. N. Tipei și E. Moisei, *Studiul mișcării variate a unui avion pe o traiectorie verticală.* Revista Universității C. I. Parhon și a Politehnicii București, t. 1, 1952, p. 121.
4. I. Rîjik și I. Gradstein, *Tablițî integralov, summ, riadov i proizvedenii.* GITTL, Moscova, 1951.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDELOR

UN PROCEDEU DE CERCETARE A MIŞCĂRII PERTURBATE A AVIONULUI ÎN FAZA FUGOIDĂ, CÎND MIŞCAREA DE BAZĂ ESTE NEPERMANENTĂ

DE

T. HACKER şi A. BURACU

NOTAŢII

ρ = densitatea aerului la altitudinea de zbor,
m = masa avionului, presupusă constantă,
$\overline{m} = \dfrac{m}{\dfrac{\rho}{2} S r_z}$ = coeficientul densităţii relative a avionului,
r_z = raza de inerţie a avionului faţă de axa transversală,
$\overline{y}_p = \dfrac{y_p}{r_z}$,
y_p = distanţa de la centrul de greutate al avionului la axa tracţiunii,
V = viteza centrului de greutate al avionului,
$V_{\max}$ = viteza maximă de zbor,
$\overline{V} = \dfrac{V}{V_{\max}}$,
α = unghiul de incidenţă,
ϑ = unghiul de tangaj,
$\omega_z = \dfrac{d\vartheta}{dt}$ = viteza unghiulară de tangaj,

$$\left.\begin{matrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta\vartheta\\ \Delta\omega_z\end{matrix}\right\} = \text{perturbaţiile parametrilor mişcării } V,\ \alpha,\ \vartheta\ \omega_z$$

$$\left.\begin{matrix}\Delta\overline{V} = \dfrac{\Delta V}{V_{\max}}\\ \Delta\overline{\omega}_z = \dfrac{m}{\dfrac{\rho}{2} S V_{\max}}\Delta\omega_z\end{matrix}\right\} = \text{perturbaţiile } \Delta V \text{ şi } \Delta\omega_z \text{ sub formă dimensională}$$

t = variabila independentă în ecuaţiile de mişcare, reprezentînd o mărime variabilă adimensională, proporţională cu timpul de forma

$$\frac{\rho}{2}\frac{S}{m}V_{\max}t_{\mathrm{dim}}$$

t_{dim} = timpul, de exemplu, în secunde)

$\left.\begin{matrix} c_x \\ c_y \\ m_z \end{matrix}\right\}$ = coeficienţii aerodinamici de rezistenţă la înaintare, portanţă şi moment longitudinal,

c_p = coeficientul adimensional al tracţiunii P,

$c_x^M, c_x^{\alpha}, m_z^{\omega}$ etc. = derivatele parţiale ale coeficienţilor aerodinamici în raport cu parametrii mişcării,

$$c_{pV} = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial V}}{\dfrac{\rho}{2}VS}$$ = derivata parţială a coeficientului adimensional al tracţiunii P în raport cu viteza, scrisă în formă adimensională.

În lucrarea [1] se studiază mişcarea perturbată a avionului în faza rapidă, cînd mişcarea de bază, avînd loc pe o traiectorie orizontală şi rectilinie, este nepermanentă. În lucrarea de faţă ne propunem să studiem faza fugoidă a mişcării perturbate pentru cazul mişcării de bază nepermanente.

Ca şi în lucrarea citată, vom utiliza un procedeu bazat pe metoda a doua a lui Liapunov [2], considerînd comportarea perturbaţiilor faţă de un domeniu definit cu ajutorul unei funcţii pozitiv definite.

Sistemul de ecuaţii liniarizate ale mişcării perturbate longitudinale a avionului, scrise în formă adimensională, pentru cazul mişcării de bază orizontale şi rectilinii oarecare, va fi [1]

$$\begin{aligned}
\frac{d\Delta\overline{V}}{dt} &= -\overline{V}(2c_x + Mc_x^M + c_{pV}\cos\alpha)\,\Delta\overline{V} - \overline{V}^2(c_x^{\alpha} - c_y)\,\Delta\alpha - \\
&\quad - \overline{V}^2(c_y + c_p\sin\alpha)\,\Delta\vartheta, \\
\frac{d\Delta\alpha}{dt} &= -(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,\Delta\overline{V} - \\
&\quad - \overline{V}(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,\Delta\alpha + \Delta\overline{\omega}_z, \\
\frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= \Delta\overline{\omega}_z, \qquad\qquad (1) \\
\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{dt} &= \overline{V}\,[\overline{m}(2m_z + Mm_z^M + \overline{y}_p c_{pV}) - \\
&\quad - \overline{V}(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}]\,\Delta\overline{V} + \\
&\quad + \overline{V}^2[\overline{m}\,m_z^{\alpha} - \overline{V}(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}]\,\Delta\alpha + \overline{V}^2(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}})\,\Delta\overline{\omega}_z.
\end{aligned}$$

Pentru stabilirea unui sistem de ecuaţii aproximative ale mişcării perturbate în faza cu variaţie lentă a perturbaţiilor (faza fugoidă) vom neglija [3] variația vitezei unghiulare de tangaj $\frac{d\Delta\overline{\omega}_z}{dt}$ precum și $\frac{d\Delta\alpha}{dt}$ în comparație cu $\Delta\overline{\omega}_z$.

Atunci din (1) se obține un sistem simplificat de forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\overline{V}}{dt} &= A\,(t)\,\Delta\overline{V} + B\,(t)\,\Delta\vartheta, \\ \frac{d\Delta\vartheta}{dt} &= C\,(t)\,\Delta\overline{V}, \end{aligned} \tag{2}$$

în care pentru simplificarea scrierii s-a notat

$$\begin{aligned} A\,(t) &= -\overline{V}\,(2c_x + Mc_x^M + c_{pV}\cos\alpha) + \\ &\quad \frac{\overline{V}^2\,(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) +}{+\,\overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) + \overline{m}m_z^{\alpha} - \overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)m_z^{\dot{\alpha}} +} \\ &\quad + (c_x^{\alpha} - c_y)\,\frac{+\,\overline{V}\overline{m}\,(2m_z + Mm_z^M + \overline{y}_p\,c_{pV}) - \overline{V}^2\,(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}}{\overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) + \overline{m}m_z^{\alpha} - \overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}}, \\ B\,(t) &= -\overline{V}^2\,(c_y + c_p\sin\alpha), \\ C\,(t) &= \frac{1}{\overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,(m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\alpha}}) + \overline{m}m_z^{\alpha} - \overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}}\Big\{-(2c_y + \\ &\quad + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,[\overline{m}m_z^{\alpha} - \overline{V}\,(c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}] + \\ &\quad + [\overline{m}\,(2m_z + Mm_z^M + \overline{y}_p\,c_{pV}) - \overline{V}\,(2c_y + Mc_y^M - c_{pV}\sin\alpha)\,m_z^{\dot{\alpha}}](c_y^{\alpha} + c_p\cos\alpha)\Big\}. \end{aligned} \tag{3}$$

În cele ce urmează vom nota perturbațiile $\Delta\overline{V}$ și $\Delta\vartheta$ respectiv prin x și y. Deci sistemul (2) se va scrie

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + By, \\ \frac{dy}{dt} &= Cx. \end{aligned} \tag{4}$$

Studierea perturbațiilor într-un anumit interval de timp o vom face față de un domeniu din planul variabilelor x, y, delimitat de o elipsă variabilă de forma

$$W\,(t, x, y) = a\,(t)\,x^2 + 2b\,(t)\,xy + c\,(t)\,y^2 = K^2. \tag{5}$$

Se știe că pentru ca ecuația (5) să reprezinte o elipsă, coeficienții ei trebuie să satisfacă relațiile

$$a > 0, \quad c > 0, \quad ac - b^2 > 0 \tag{6}$$

pentru orice $t \geqslant t_0$.

În acest caz, evident, funcţia $W(t, x, y)$ va fi pozitiv definită în tot planul variabilelor x, y şi pentru orice $t \geqslant t_0$.

Punînd condiţia ca pentru funcţia $W(t, x, y)$, pozitiv definită, să avem derivata funcţiei W în raport cu timpul, scrisă în virtutea ecuaţiilor (4), negativ definită, ne vom asigura că perturbaţiile vor rămîne tot timpul în interiorul elipsei variabile (5).

În cazul cînd elipsa se strînge, condiţia de mai sus este echivalentă cu condiţia amortizării perturbaţiilor.

Derivata funcţiei W în raport cu timpul, în virtutea ecuaţiilor (4) este

$$\frac{dW}{dt} = (2aA+2bC+\dot{a})\,x^2+2(aB+bA+cC+\dot{b})\,xy+(2bB+\dot{c})\,y^2. \tag{7}$$

Pentru ca forma pătratică (7) să fie negativ definită, este necesar şi suficient ca ambele rădăcini ale ecuaţiei ei caracteristice

$$\begin{vmatrix} 2aA + 2bC + \dot{a} - \lambda & aB + bA + cC + \dot{b} \\ aB + bA + cC + \dot{b} & 2bB + \dot{c} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

să fie negative

$$\lambda_{1,2} = aA + b(B + C) + \frac{\dot{a} + \dot{c}}{2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left[aA+b(B+C)+\frac{\dot{a}+\dot{c}}{2}\right]\left[(2bB+\dot{c})(2aA+2bC+\dot{a})-(aB+bA+cC+\dot{b})\right]} < 0. \tag{9}$$

Condiţia (9) este echivalentă cu următoarele două:

$$aA + b(B + C) + \frac{\dot{a} + \dot{c}}{2} < 0, \tag{10}$$

$$(2bB+\dot{c})(2aA+2bC+\dot{a}) - (aB+bA+cC+\dot{b})^2 > 0. \tag{11}$$

Cu rezerva îndeplinirii condiţiilor (6), a, b şi c sînt deocamdată funcţii arbitrare de timp. Pentru a uşura satisfacerea inegalităţii (11) şi pentru a obţine, pe de altă parte, relaţiile mai simple, la alegerea funcţiilor a, b şi c punem condiţia ca

$$aB + bA + cC + \dot{b} = 0. \tag{12}$$

Inegalitatea (11) devine atunci

$$(2bB + \dot{c})(2aA + 2bC + \dot{a}) > 0. \tag{13}$$

Ţinînd seama de relaţia (10), se vede imediat că inegalitatea (13) nu poate fi satisfăcută decît dacă

$$bB + \frac{\dot{c}}{2} < 0. \tag{14}$$

Satisfacerea simultană a inegalităţilor (10) şi (14) atrăgînd după sine în mod necesar şi satisfacerea relaţiei (13), relaţiile (10) şi (14) ne dau condiţia necesară şi suficientă pentru ca perturbaţiile x şi y să rămînă tot timpul în interiorul elipsei variabile (5).

Pentru determinarea legii de variaţie a dimensiunilor elipsei (5) punem coeficienţii a, b, c, sub forma

$$\begin{aligned} a &= \alpha(t)\exp\int_0^t r(\tau)\,d\tau, \\ b &= \beta(t)\exp\int_0^t r(\tau)\,d\tau, \\ c &= \gamma(t)\exp\int_0^t r(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{15}$$

Condiţia (12) devine

$$\alpha B + \gamma C + \beta(A + r) + \dot{\beta} = 0, \tag{16}$$

iar (10) şi (14)

$$\begin{aligned} &\alpha A + \beta(B + C) + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)r + \frac{1}{2}(\dot{\alpha} + \dot{\gamma}) < 0, \\ &\beta B + \frac{1}{2}\gamma r + \frac{1}{2}\dot{\gamma} < 0, \end{aligned} \tag{17}$$

Vom considera două cazuri particulare simple.

În primul caz luăm $r = -A$*). Atunci din (16) rezultă

$$\dot{\beta} = -(\alpha B + \gamma C)$$

şi

$$\beta = -\int_0^t (\alpha B + \gamma C)\,dt,$$

iar inegalităţile (17) devin

$$(\alpha - \gamma)A + 2\beta(B + C) + \frac{\dot{\alpha} + \dot{\gamma}}{2} < 0,$$

$$\frac{1}{2}\gamma A + \beta B + \frac{\dot{\gamma}}{2} < 0.$$

Întrucît pentru determinarea legii de variaţie a dimensiunilor elipsei exponenţiala din funcţiile a şi c dă o libertate suficientă, α şi γ

---

*) Coeficientul A fiind în marea majoritate a cazurilor negativ pentru orice t, lungimile axelor elipsei vor fi în acest caz descrescătoare.

se pot lua constante fără a restrînge generalitatea. În acest caz cele două inegalităţi de mai sus devin

$$\begin{aligned}(\alpha_0 - \gamma_0) A + 2\beta(B + C) &< 0,\\ \frac{1}{2}\gamma_0 A + \beta B &< 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Funcţia de timp β se determină grafic, prin planimetrare, pe baza relaţiei

$$\beta(t) = -\int_0^t [\alpha_0 B(\tau) + \gamma_0 C(\tau)]\, d\tau. \tag{19}$$

Inegalităţile (18) reprezintă condiţii de amortizare pentru $A < 0$.

Pentru cazul foarte frecvent cînd coeficientul $C(t)$ este pozitiv vom alege într-un anumit fel particular coeficienţii α şi γ, lăsînd arbitrară funcţia r. Aceasta ne va da libertate în alegerea legii de variaţie a dimensiunilor elipsei (5), permiţîndu-ne o evaluare a mărimii perturbaţiilor în fiecare moment.

Fie

$$\alpha = -\frac{1}{B}, \quad \gamma = \frac{1}{C}\cdot$$

Atunci din (16) rezultă

$$\beta = \beta_0 \exp\left[-\int_0^t (A + r)\, d\tau\right]$$

şi deci

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{B}\exp\int_0^t r(\tau)\, d\tau,\\ b &= \beta_0 \exp\int_0^t [-A(\tau)]\, d\tau,\\ c &= \frac{1}{C}\exp\int_0^t r(\tau)\, d\tau.\end{aligned}$$

În acest caz condiţiile (17) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} AC &< L\beta + Mr + N\beta r,\\ \frac{d\ln C}{dt} &> r + 2BC\beta,\end{aligned} \tag{20}$$

unde prin L, M, N, am notat expresiile

$$\begin{aligned} L &= BC(-A + B + C),\\ M &= \frac{1}{2}(B - C),\\ N &= -BC.\end{aligned}$$

Pentru evaluarea mărimii perturbaţiilor în fiecare moment t (respectiv pentru evaluarea vitezei de amortizare) vom determina în fiecare moment pe cel mai mare r pentru care inegalităţile (20) sînt satisfăcute simultan. Fie $r_m(t)$ aceste valori. Valorii r_m în fiecare moment t îi va corespunde cea mai mică elipsă (5) care mai conţine în interiorul ei perturbaţiile x şi y. Fie $a_m(t)$, $b_m(t)$ şi $c_m(t)$ coeficienţii ecuaţiei acestei elipse în fiecare moment t. Vom avea evident

$$a_m(t) = -\frac{1}{B} \exp \int_0^t r_m(\tau)\, d\tau,$$

$$b_m(t) = \beta_0 \exp \int_0^t [-A(\tau)]\, d\tau,$$

$$c_m(t) = \frac{1}{C} \exp \int_0^t r_m(\tau)\, d\tau.$$

Ducînd tangente paralele cu Ox şi Oy la elipsa

$$a_m(t)\, x^2 + 2b_m(t)\, xy + c_m(t) y^2 = K^2$$

şi notînd distanţele între aceste paralele şi axele de coordonate respective prin $\overline{x}$ şi $\overline{y}$, rezultă pentru perturbaţii următoarele evaluări, valabile pentru orice moment t:

$$x(t) \leqslant \overline{x}(t),$$

$$y(t) \leqslant \overline{y}(t),$$

unde

$$\overline{x}(t) = K \sqrt{\frac{c_m}{a_m c_m - b_m^2}},$$

$$\overline{y}(t) = K \sqrt{\frac{a_m}{a_m c_m - b_m^2}}.$$

Constanta K se determină din condiţiile iniţiale,

$$K = \sqrt{a_{m0}\, x_0^2 + 2b_{m0}\, x_0 y_0 + c_{m0}\, y_0^2},$$

unde

$$x_0 = x(0), \qquad y_0 = y(0), \qquad a_{m0} = a_m(0) \text{ etc.}$$

Înlocuind în $\overline{x}$ şi $\overline{y}$ pe a_m, b_m şi c_m cu expresiile respective, vom avea

$$x(t) \leqslant \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t r_m(\tau)\, d\tau\right] \cdot \sqrt{\frac{-B}{1 + BC\beta_0 \exp\left[-2\int_0^t (A + r)\, d\tau\right]}}$$

$$y(t) \leqslant \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t r_m(\tau)\, d\tau\right] \sqrt{\frac{C}{1 + BC\beta_0 \exp\left[-2\int_0^t (A + r)\, d\tau\right]}}.$$

Primită la redacţie la 29 aprilie 1957.

СПОСОБ ИССЛЕДОВАНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА В ДЛИННОПЕРИОДИЧЕСКОМ ЭТАПЕ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ОСНОВНОМ ДВИЖЕНИИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе авторы рассматривают устойчивость самолета в длиннопериодическом этапе возмущенного движения, когда основное движение неравномерно, горизонтально и прямолинейно. Для этого они рассматривают поведение возмущений по отношению к переменным областям, выбранным определенным способом в соответствии с конкретными требованиями поставленной практической задачи. В таком порядке, выбрав область, размеры которой убывают по показательному закону, выводят критерии устойчивости. Другой выбор изменяемой области позволяет оценить скорость затухания возмущений, а также их величину в любой момент времени.

UN PROCÉDÉ POUR L'ÉTUDE DU MOUVEMENT PERTURBÉ DE L'AVION À LA PHASE FUGOÏDE, LORSQUE LE MOUVEMENT DE BASE EST NON PERMANENT

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, les auteurs étudient la stabilité de l'avion, à la phase lente (fugoïde) du mouvement perturbé, dans le cas de mouvement de base non uniforme, horizontal et rectiligne. A cette fin, ils envisagent le comportement des perturbations par rapport à des domaines variables, choisis de manière à correspondre aux exigences concrètes du problème posé en pratique. Ainsi, pour un domaine dont les dimensions décroissent suivant une loi exponentielle, on déduit les critères de stabilité, qui laissent une marge de sécurité. Un autre choix du domaine variable permet d'évaluer la vitesse d'amortissement des perturbations, ainsi que leur grandeur à chaque moment.

BIBLIOGRAFIE

1. T. Hacker, *Contribuţii la studiul stabilităţii longitudinale a avionului în evoluţiile cele mai defavorabile.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3–4, iulie-decembrie 1955, p. 269.
2. A. M. Liapunov, *Obsceaia zadacea ob ustoicivosti dvijenia.* GITTL, Moscova, 1950.
3. M. L. Mil, *Vozmuşcennoe dvijenie samoleta i vîbor stepeni prodolnoi staticeskoi ustoicivosti.* Tehnika Vozduşnogo Flota, 1945, nr. 7–8.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

CINEMATICA ŞI DINAMICA SOLIDELOR

CINEMATICA SAPELOR CU ROLE CONICE

DE

V. N. FLORIAN

Practica forajului sondelor petrolifere, mai ales în formaţiunile cu roci dure, a impus în ultima vreme folosirea din ce în ce mai largă a sapelor cu role.

Consumul mare al acestor sape reclamă un studiu amănunţit care să permită continua lor ameliorare.

Pentru a şti cum influenţează din punct de vedere fizic diferiţii parametri de ordin geometric ai sapelor asupra randamentului acestora, în ceea ce priveşte viteza mecanică de săpare şi durabilitatea lor, este necesară, în prealabil, cunoaşterea cinematicei sapelor.

Cearnîi stabileşte expresia sarcinii dinamice cu care sapa atacă roca, în funcţie de viteza cu care sapa coboară în momentul cînd un şir de dinţi loveşte roca [1] *).

R. M. Eigeles [2] găseşte timpul optim de contact dintre dinţi şi rocă, pentru ca dezagregarea acesteia să fie maximă, tot în funcţie de viteza de coborîre a sapei din momentul şocului intervenit între dinţi şi rocă.

Cunoaşterea cinematicei mişcării sapelor cu role este de asemenea necesară pentru studiul percuţiei dintre dinţii rolelor şi rocă precum şi a percuţiei pe axul rolelor.

Studiul oscilaţiilor longitudinale şi de torsiune a tijelor de foraj impune şi el cunoaşterea cinematicei sapelor cu role.

Cu studiul cinematicei sapelor cu role s-a ocupat şi V. S. Feodorov, care, în studiul său [1], admite unele simplificări de natură geometrică, sau fizică, care nu au fost luate în considerare în prezenta lucrare, nefiind găsite necesare.

În acest studiu se admite ipoteza simplificatoare a rigidităţii fundului puţului de sondă, pe care se rostogolesc rolele sapei, precum şi sincronizarea în timp a mişcării tuturor rolelor ce alcătuiesc sapa.

---

*) p. 124.

Aceste ipoteze, admise de altfel și de Feodorov [1], sînt însă îndeajuns de aproape de realitate.

Astfel, în ceea ce privește rigiditatea fundului, se poate constata dintr-un calcul sumar, dar suficient de exact, că un dinte al unei role calcă, în medie, doar cu aproximativ 3 μ sub nivelul la care s-a găsit dintele antemergător.

Într-adevăr, un dinte calcă la un nivel mai coborît decît cel dinaintea sa, cu aceeași cantitate cu care înaintează sapa, pe verticală în același interval de timp.

Această distanță, pentru o rostogolire fără alunecare a rolei, este dată de relația

$$\delta = \frac{60\, v t}{\pi N D},$$

unde v este viteza mecanică de înaintare a sapei, N turația medie a sapei, t interspațiul dintre vîrfurile dinților pe coroana marginală a rolei și D diametrul util al sapei.

Pentru o sapă, folosită într-o rocă relativ dură (gresie de Kliva) și acționată prin masa Rothary, putem avea următoarele date practice rotunjite:

$v = 1$ m/oră, $N = 120$ rot/min, $t = 1{,}6$ cm și $D = 26$ cm.

Aceste date, înlocuite în formulele de mai sus, ne dau

$$\delta \simeq 0{,}0003 \text{ cm} = 3\ \mu.$$

Dată fiind micimea acestei cantități, se poate considera că doi dinți vecini calcă la același nivel (în sensul axului sapei), ceea ce echivalează cu a admite rigiditatea fundului puțului de sondă.

Trebuie observat că rigiditatea fundului nu implică neapărat o netezime a fundului. Din punct de vedere al calculului va trebui să considerăm însă fundul cu o suprafață netedă, de formă conică, cu axa în lungul axului sapei, ceea ce nu contravine cu realitatea, deoarece rolele ating fundul în mod discontinuu (din dinte în dinte) (fig. 1).

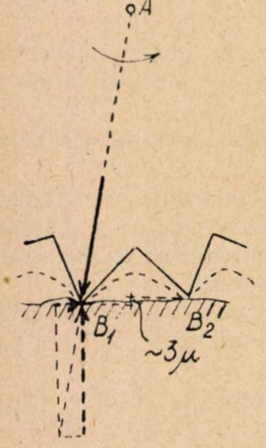


Fig. 1

Rezultatul obținut mai sus se micșorează și mai mult în cazul turațiilor sporite, ca în cazul cînd se folosesc turbinele de fund, deoarece viteza mecanică de foraj nu crește proporțional cu turația sapei.

În privința sincronismului cinematic al rolelor sapei, se poate observa că, din cauza rigidității tijei de foraj, de asemenea poate fi admis că se realizează cu suficientă probabilitate deoarece, în caz contrar, prin înclinări laterale oscilante, sapa ar forța încovoierea tijei de foraj.

Rolele folosite în foraj au diferite forme, care variază de la forma așa zisă conică, cu vîrful pe axul sapei, la forma cilindrică. Ele poartă denumirea de role conice, biconice, tronconice sau cilindrice, după forma geometrică în care se pot înscrie.

Trebuie remarcat că rolele conice, cu vîrful pe axul sapei, se pot rostogoli pe fund fără să lunece. Într-adevăr, vitezele de antrenare din

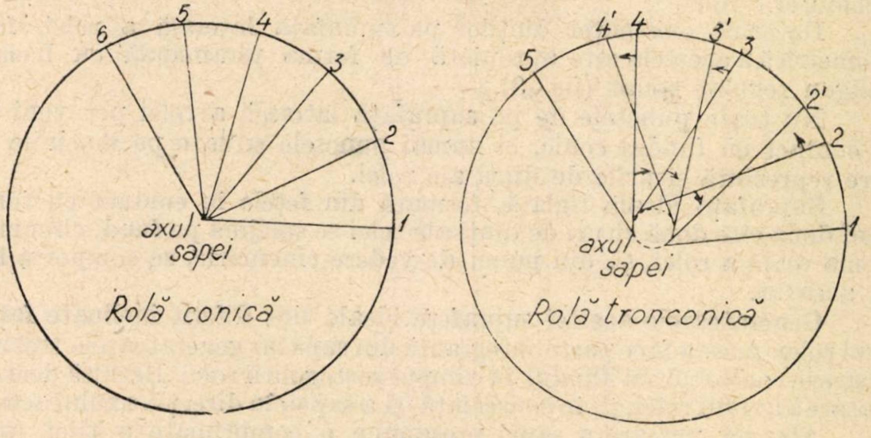

6
5
4
3
2
1
axul sapei
Rolă conică
5
4'
4
3'
3
2'
2
1
axul sapei
Rolă tronconică

Fig. 2

mişcarea de rotaţie a sapei cresc liniar, de la ax spre periferie. În acelaşi mod cresc şi vitezele relative ale punctelor de pe rolă, aşezate pe o generatoare a acesteia, din mişcarea de rotaţie a rolei în jurul axului propriu. Dacă frecarea pe axul rolei este mică, diagramele acestor viteze

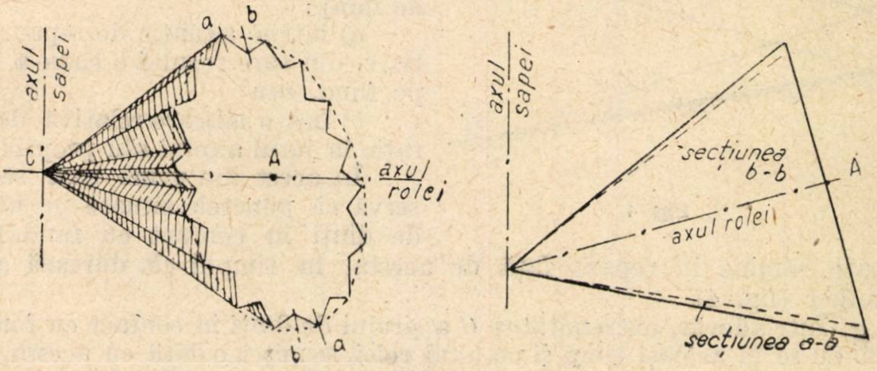

axul sapei
a
b
C
A
axul rolei
b
a
axul sapei
secţiunea b-b
A
axul rolei
secţiunea a-a

Fig. 3

se poate suprapune perfect, astfel că punctele de contact dintre rolă şi rocă pot avea viteze nule faţă de fund, în sensul mişcării de rotaţie a sapei.

Cu totul altfel se întîmplă în cazul rolelor de altă formă, unde, din motive geometrice, realizate prin construcţie, rostogolirea rolelor nu se poate face decît cu o prealabilă lunecare faţă de fund. După cum se poate constata din figura 2, într-un asemenea caz (rola tronconică), unele puncte ale generatoarei de contact lunecă în sensul mişcării sapei, iar altele în sens contrar.

În lucrarea de faţă se studiază cinematica sapelor cu role conice, cu vîrful pe axul sapei şi cu dinţii aşezaţi în lungul generatoarei conului circumscris rolei.

Datorită existenţei dinţilor pe suprafaţa laterală a rolei, forma geometrică a acesteia este apropiată de forma piramidală cu baza un poligon regulat stelat (fig. 3).

Nu toate punctele de pe suprafaţa laterală a rolei pot veni însă, în contact cu fundul conic, ci numai punctele situate pe muchiile sale, care reprezintă şirurile de dinţi ale rolei.

Suprafaţa ideală riglată, formată din feţele în contact cu fundul, cînd două cîte două şiruri de dinţi ale rolei se sprijină pe fund, circumscrie forma reală a rolei, şi, din punct de vedere cinematic, se comportă la fel cu aceasta.

Generatoarele acestei suprafeţe ideale sînt diferit înclinate faţă de axul rolei. Acesta face parte integrantă din sapă iar generatoarele trebuie să păstreze contactul cu fundul în timpul rostogolirii rolei. Rezultă deci o deplasare a axului rolei, şi, în consecinţă, şi a sapei, în direcţia axului acesteia.

Această mişcare a sapei presupune o comprimare a tijei (sau o ridicare completă a acesteia), în ipoteza admisă a rigidităţii fundului. Acest fapt necesită un consum de energie, astfel că o rolă se va putea găsi într-una din situaţiile relative arătate mai jos, faţă de sapă, în timpul învîrtirii acesteia în jurul axului tijei de foraj :

a) într-o situaţie de repaus relativ, din care rezultă o tîrîre a rolei pe fund, sau

b) într-o mişcare relativă de rotaţie în jurul axului său propriu.

În acest din urmă caz, se observă că punctele situate pe un şir de dinţi în contact cu fundul nu poate rămîne în repaus faţă de acesta, în timpul cît durează acest contact (fig. 4).

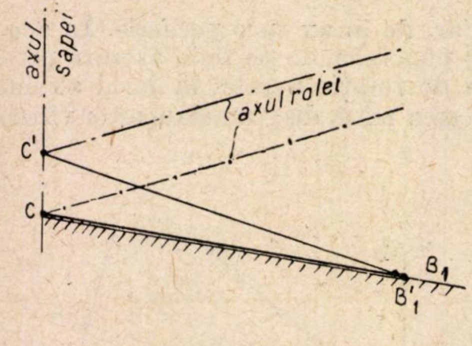


Fig. 4

Într-adevăr, extremitatea *C* a şirului de dinţi în contact cu fundul, aflîndu-se în acelaşi timp şi pe axul rolei, se mişcă o dată cu acesta, descriind axul sapei, în timp ce cealaltă extremitate a şirului de dinţi (B_1), păstrînd contactul cu fundul, trebuie să se deplaseze pe suprafaţa acestuia.

Într-un caz particular, punctul B_1 se va mişca pe o generatoare a conului de fund. În acest caz, toate punctele situate pe muchia respectivă a şirului de dinţi rămîn într-un plan. Din acest fapt rezultă o rostogolire fără lunecare a rolei pe fundul puţului de sondă.

În orice alt caz, mişcarea de rostogolire a rolei este însoţită şi de o lunecare a acesteia în raport cu fundul.

În cazul rolei conice cu vîrful pe axul sapei, mişcarea de rostogolire fără lunecare a rolei este cea mai probabilă a se produce, din cauza asperităţilor fundului. Cînd acestea vor crea o frecare suficientă între rocă şi rolă care să amorseze rostogolirea, lunecarea nu mai este posibilă. Într-adevăr, din acest moment rola încearcă ridicarea sa pe şirul de dinţi în contact cu fundul, sprijinindu-se pe dintele marginal. Din această cauză cuplul forţelor de frecare va creşte prin mărirea braţului său de pîrghie.

Cînd şirul următor de dinţi va atinge fundul, aceasta se va produce prin şoc, astfel că asperitatea necesară continuării mişcării fără lunecare se creează în mod automat.

Bineînţeles că aceasta prsupune o exploatare normală a sapei adică o frecare mică pe axul rolei, unde se pot ivi totuşi defecţiuni, datorită percusiunilor forţelor de legătură care pot face să crească frecarea pe ax, prin uzura căilor de rulare ale rulmenţilor.

În cele ce urmează se va prezenta cinematica mişcării sapei cu role conice cu vîrful pe axul sapei, într-o mişcare de rostogolire fără lunecare a rolei faţă de fund.

STUDIUL CINEMATIC PROPRIU-ZIS

Mişcarea sapei se compune dintr-o serie de mişcări identice care se succed în timp.

Una din aceste mişcări începe cînd rola se sprijină cu două şiruri de dinţi pe fund, pentru ca, după ce se ridică pe un singur şir de dinţi, să sfîrşească prin a se sprijini din nou pe două şiruri de dinţi.

Va fi suficient să se studieze mişcarea rolei în intervalul de timp respectiv.

Pentru aceasta vom considera detaşat dintr-o rolă ideală tetraedrul CAB_1B_2, format din axul rolei CA şi două şiruri de dinţi vecine, CB_1 şi CB_2, cu observaţia că faţa CB_1B_2 nu este plană decît în cazul cînd fundul puţului de sondă este plan, întrucît ea se poate aşterne complet pe suprafaţa fundului, în general de formă conică (fig. 5).

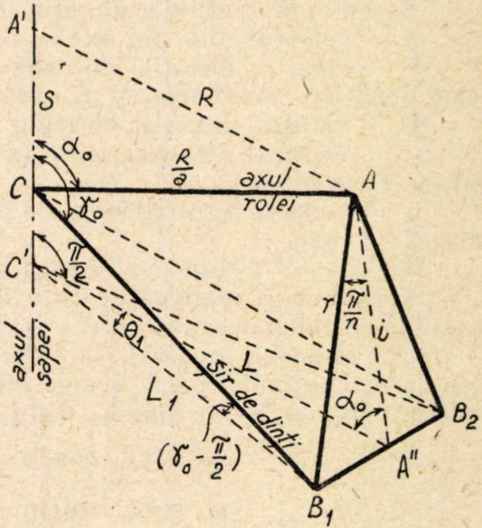


Fig. 5

Se notează cu α_0 unghiul rigid dintre axul sapei şi al rolei şi cu γ_0 unghiul, de asemenea rigid, dintre axul sapei şi generatoarea conului de fund. Cu n vom nota numărul de dinţi de pe coroana marginală a rolei şi cu t interspaţiul dintre vîrfurile dinţilor pe aceeaşi coroană.

R este raza cilindrului pe care se poate deplasa centrul bazei rolei, iar r este raza bazei conului care circumscrie rola. Cu a și b se notează sinusul, respectiv cosinusul, unghiului α_0.

Cinematica mișcării rolei va fi prezentată prin două metode distincte. Ambele metode sînt interesante din punct de vedere practic, și anume: metoda întîia poate cuprinde, fără dificultăți matematice în plus, problema sub aspectul ei cel mai general, în timp ce metoda a doua dă o vedere de ansamblu mai bună, creînd o intuire mai clară a fenomenului de mișcare în general.

Metoda I

Pentru a cunoaște mișcarea unui solid cum este tetraedrul CAB_1B_2 este suficient a ști cum se mișcă trei din punctele sale.

Vom considera deci punctele C, A și B_1. Poziția și mișcarea planului CAB_1 format din aceste puncte vor fi perfect determinate dacă se cunosc unghiul θ și variația acestuia $\dot{\theta}$, întrucît, în ipoteza rostogolirii fără lunecare, poziția sistemului depinde de un singur parametru, deoarece punctele C, A și B_1 trebuie să respecte anumite condiții în mișcarea lor și anume:

— punctul C descrie axul sapei,

— punctul A se poate mișca pe suprafața unui cilindru de rază R, iar

— punctul B_1 se mișcă pe generatoarea conului de fund.

Se notează diferitele direcții ca în figura 6, și anume:

k — versorul direcției axului rolei,

i — versorul direcției normale pe axul rolei, cuprinsă în planul celor două axe (axul rolei și al sapei),

j — versorul direcției normale pe planul celor două axe,

$\boldsymbol{\mu}$ — versorul direcției AB_1 (a razei rolei) din planul celor trei puncte C, A și B_1,

$\boldsymbol{\upsilon}$ — versorul direcției normale pe axul sapei (z_1), cuprinsă în planul celor două axe,

$\mathbf{k}_1$ — versorul direcției fixe a axului sapei (z_1).

Notînd cu φ unghiul pe care îl face direcția **i** cu direcția $\boldsymbol{\mu}$, în planul bazei rolei, măsurat în sens crescător (sensul pozitiv ales este sensul de rotație al acelor de ceas), se observă că, direcțiile $\boldsymbol{\upsilon}$ și **j** formează un plan normal pe axul sapei, $\mathbf{k}_1$ și deci între mărimile componentelor vitezei punctului B_1, după direcțiile $\mathbf{k}_1$, $\boldsymbol{\upsilon}$ și **j**, există următoarele relații:

$$\left.\begin{aligned} v_{B\mathbf{k}_1} &= v_{B_1}\cdot\cos(\pi-\gamma_0),\\ v_{B\boldsymbol{\nu}} &= v_{B_1}\cdot\sin(\pi-\gamma_0)\cdot\cos(\theta_0-\theta),\\ v_{B\mathbf{j}} &= v_{B_1}\cdot\sin(\pi-\gamma_0)\cdot\sin(\theta_0-\theta),\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

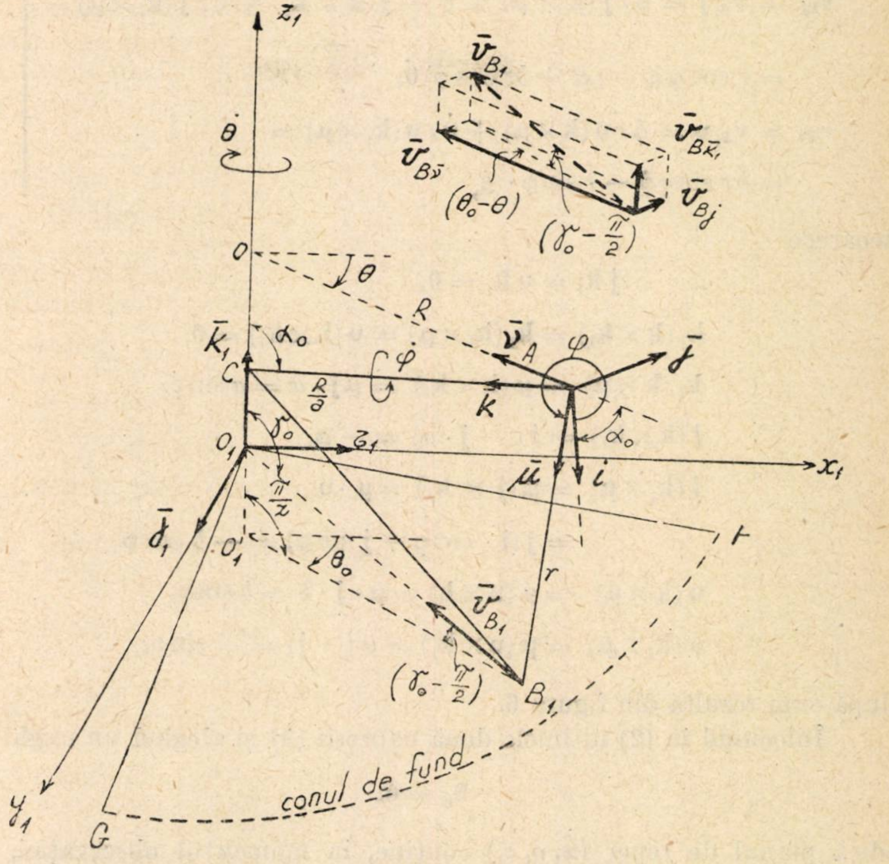
de unde

$$v_{B\mathbf{j}} = v_{B\boldsymbol{\nu}}\cdot\operatorname{tg}(\theta_0-\theta), \qquad (2)$$

$$v_{B\boldsymbol{\nu}} = -v_{B\mathbf{k}_1}\cdot\operatorname{tg}\gamma_0\cdot\cos(\theta_0-\theta), \qquad (2')$$

întrucît punctul B_1 trebuie să se mişte pe generatoarea conului de fund B_1O_1.

Pentru a se calcula mărimile componentelor vitezei punctului B_1 după direcţiile indicate, vom exprima viteza acestui punct arătînd că



z_1
$\bar{v}_{B_1}$
$\dot{\theta}$
$\bar{v}_{Bk_1}$
$\bar{v}_{B\gamma}$
$\bar{v}_{Bj}$
$(\theta_0-\theta)$
$(\gamma_0-\frac{\pi}{2})$
O
θ
R
$\bar{k}_1$
α_0
$\bar{\nu}_A$
φ
$\bar{j}$
C
$\dot{\varphi}$
$\frac{R}{a}$
k
γ_0
O_1
z_1
α_0
x_1
$\bar{\mu}$
i
$\frac{\pi}{2}$
$\bar{j}_1$
O_1'
θ_0
r
$\bar{v}_{B_1}$
$(\gamma_0-\frac{\pi}{2})$
B_1
conul de fund
y_1
G

Fig. 6

mişcarea sa rezultă din compunerea mişcării relative în jurul axului rolei, cu mişcarea de antrenare a sapei. Aceasta din urmă este o mişcare de rotaţie combinată cu o mişcare de translaţie, în jurul, respectiv în lungul, axului propriu.

Vom avea astfel

$$\mathbf{v}_{B_1} = \mathbf{k}\dot{\varphi} \times \overline{AB}_1 + \mathbf{k}_1 \dot{z} + \mathbf{k}_1 \dot{\theta} \times \overline{CB}_1, \tag{3}$$

sau, observînd că

$$\overline{AB}_1 = \boldsymbol{\mu} r \quad \text{şi} \quad \overline{CB}_1 = -\mathbf{k} \cdot \frac{R}{a} + \boldsymbol{\mu} r,$$

$$\mathbf{v}_{B_1} = \dot{\varphi} r (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{k}_1 \dot{z} + \dot{\theta} \frac{R}{a} (\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1) + \dot{\theta} r (\mathbf{k}_1 \times \boldsymbol{\mu}) \tag{4}$$

Proiectînd această viteză pe cele trei direcții ($\mathbf{k}_1$, $\mathbf{j}$ și $\boldsymbol{\upsilon}$), obținem

$$\left.\begin{aligned}
v_{Bk_1} &= \mathbf{v}_{B_1}\mathbf{k}_1 = \dot{\varphi}\, r\, \mathbf{k}_1(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mu}) + \dot{z} = a r \sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{z},\\
v_{B\mathbf{j}} &= \mathbf{v}_{B_1}\mathbf{j} = \dot{\varphi}\, r\, \mathbf{j}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mu}) + \dot{\theta}\,\frac{R}{a}\mathbf{j}(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_1) + \dot{\theta}\, r\, \mathbf{j}(\mathbf{k}_1\times\boldsymbol{\mu}) =\\
&= r\cos\varphi\dot{\varphi} - (R + br\cos\varphi)\dot{\theta},\\
v_{B\boldsymbol{\upsilon}} &= \mathbf{v}_{B_1}\boldsymbol{\upsilon} = \dot{\varphi}\, r\, \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mu}) + \dot{\theta}\, r\, \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{k}_1\times\boldsymbol{\mu}) =\\
&= b r \sin\varphi\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cdot\dot{\theta},
\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

deoarece

$$\begin{aligned}
&\mathbf{j}\,\mathbf{k}_1 = \boldsymbol{\upsilon}\,\mathbf{k}_1 = 0,\\
&\mathbf{k}_1(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_1) = \mathbf{k}_1(\mathbf{k}_1\times\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_1) = 0,\\
&\mathbf{k}_1(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_1) = \boldsymbol{\mu}\mathbf{j}\cdot a = a\sin\varphi,\\
&\mathbf{j}(\mathbf{k}\times\mathbf{k}_1) = \mathbf{j}(-\mathbf{j}\cdot a) = -a,\\
&\mathbf{j}(\mathbf{k}_1\times\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{j}\times\mathbf{k}_1) = \boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\\
&\qquad = \mathbf{j}(\mathbf{i}\cdot\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi) = -b\cos\varphi,\\
&\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{k}) = \boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{j}\cdot b = b\sin\varphi,\\
&\boldsymbol{\upsilon}(\mathbf{k}_1\times\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\upsilon}\times\mathbf{k}_1) = \boldsymbol{\mu}(-\mathbf{j}) = -\sin\varphi,
\end{aligned}$$

după cum rezultă din figura 6.

Înlocuind în (2) ultimele două expresii (5) și alegînd un unghi

$$\theta_0 = 0,$$

adică planul de reper $(x_1\, o_1\, z_1)$ conține, în momentul observației, axul rolei, obținem

$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - (R + b r\cos\varphi)\cdot\dot{\theta}}{b r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cdot\dot{\theta}} \qquad (6)$$

sau

$$-\sin\varphi\cdot\sin\theta\cdot\dot{\theta} + b\sin\theta\cdot\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = \frac{R}{r}\cos\theta\cdot\dot{\theta} +$$

$$+ b\cos\varphi\cdot\cos\theta\cdot\dot{\theta} - \cos\theta\cdot\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}. \qquad (6')$$

Din această relație, prin grupări convenabile, putem găsi legătura ce trebuie să existe între φ și θ, precum și între $\dot{\varphi}$ și $\dot{\theta}$, fapt ce confirmă că poziția și mișcarea sistemului depind de un singur parametru.

Astfel, vom avea

$$\sin\varphi\cdot\frac{d}{dt}(\cos\theta)-b\sin\theta\cdot\frac{d}{dt}(\cos\varphi)=\frac{R}{r}\cdot\frac{d}{dt}(\sin\theta)+$$

$$+b\cos\varphi\cdot\frac{d}{dt}(\sin\theta)-\cos\theta\cdot\frac{d}{dt}(\sin\varphi),$$

sau

$$\frac{d}{dt}(\sin\varphi\cdot\cos\theta)-b\frac{d}{dt}(\cos\varphi\cdot\sin\theta)=\frac{R}{r}\cdot\frac{d}{dt}(\sin\theta).$$

Integrînd această relație se obține

$$\sin\varphi\cdot\cos\theta-b\cos\varphi\cdot\sin\theta=\frac{R}{r}\sin\theta+C. \tag{7}$$

Constanta de integrare C rezultă, observînd că pentru $\theta=0$ avem $\varphi=2\pi$ și deci $C=0$.
Din (7) putem obține

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{r\sin\varphi}{R+br\cos\varphi} \tag{8}$$

iar din (6′), folosind și relația (8) rezultă

$$\dot\varphi=\frac{(R+br\cos\varphi)^2+r^2\sin^2\varphi}{r\,(R\cos\varphi+br)}\,\dot\theta. \tag{9}$$

În această expresie, φ nu poate varia decît între limitele

$$\frac{\pi}{n}\geqslant\varphi\geqslant\left(2\pi-\frac{\pi}{n}\right),$$

unde n este numărul de dinți pe coroana marginală a rolei.

În pozițiile extreme, adică atunci cînd rola este sprijinită pe două șiruri de dinți (începînd să se ridice pe un singur șir de dinți, sau terminînd coborîrea de pe un singur șir de dinți), avem

$$\dot\varphi_{1,2}=\frac{L_1^2}{Ri+br^2}\,\dot\theta_{1,2}, \tag{10}$$

unde L_1 și i sînt segmentele notate pe figura 5, adică proiecția, într-o poziție extremă, a lungimii unui șir de dinți pe planul normal pe axul sapei și respectiv lungimea apotemei poligonului regulat care circumscrie baza dințată a rolei.

Indicii 1 și 2 se referă la cele două poziții extreme.

Trebuie observat că viteza unghiulară de rotație a sapei $\dot\theta$ nu poate avea aceeași valoare în cele două poziții extreme, din cauza șocului care intervine în momentul cînd rola atinge fundul cu un nou șir de dinți.

Din expresia (8) se poate obține unghiul cu care se rotește sapa în timpul cît rola efectuează mișcarea studiată,

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{2\,r \sin\frac{\pi}{n}\cdot\left(R + br\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\left(R + br\cos\frac{\pi}{n}\right)^2 - \sin^2\frac{\pi}{n}}, \tag{11}$$

Dacă unghiurile sînt îndeajuns de mici (n suficient de mare), se poate obține

$$\theta_2 - \theta_1 \cong \frac{2\pi r}{(R + br)\,n}. \tag{11'}$$

Pentru a găsi expresia vitezei de translație $\dot{z}$ a sapei în lungul axului său, vom utiliza relația (2′), pentru $\theta_0 = 0$, în care înlocuim expresiile date de relațiile (5).

Vom obține

$$b\,r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cdot\dot{\theta} = -(a\,r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} + \dot{z})\operatorname{tg}\gamma_0\cos\theta,$$

de unde

$$\dot{z} = r\sin\varphi\left(\frac{\dot{\theta} - b\,\dot{\varphi}}{\operatorname{tg}\gamma_0\cdot\cos\theta} - a\,\dot{\varphi}\right). \tag{12}$$

Din (8) se deduce relația

$$\cos\theta = \frac{R + br\cos\varphi}{\sqrt{(R + br\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}}, \tag{8'}$$

care înlocuită, împreună cu relația (9), în (12), ne conduce la expresia

$$\dot{z} = r\sin\varphi\left\{\frac{\sqrt{(R + br\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}}{(R + br\cos\varphi)\operatorname{tg}\gamma_0} - \left[\frac{b\sqrt{(R + br\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}}{(R + br\cos\varphi)\operatorname{tg}\gamma_0} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a\right]\cdot\frac{(R + br\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi}{r(R\cos\varphi + br)}\right\}\dot{\theta}, \tag{13}$$

care, în pozițiile extreme, devine

$$\dot{z}_{1.2} = \mp\frac{t}{2}\left[\frac{L_1}{L\operatorname{tg}\gamma_0} - \left(b\frac{L_1}{L\operatorname{tg}\gamma_0} + a\right)\frac{L_1^2}{Ri + br^2}\right]\dot{\theta}_{1.2}. \tag{14}$$

Pentru cazul curent întîlnit în practică, cînd fundul puțului de sondă este plan, adică pentru $\gamma_0 = \frac{\pi}{2}$, vom avea

$$\operatorname{tg}\gamma_0 = \infty, L_1 = \sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^2 + r^2}, \qquad i = \frac{b}{a^2}R$$

şi deci expresia (10) devine

$$\dot{\varphi}_{1.2} = \frac{1}{b} \cdot \dot{\theta}_{1.2} \cdot \qquad (10')$$

Relaţia (12) se transformă în

$$\dot{z} = - ar \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}, \qquad (12')$$

iar (14) va avea forma simplă

$$\dot{z}_{1.2} = \pm \frac{a}{b} \cdot \frac{l}{2} \cdot \dot{\theta}_{1.2} \cdot \qquad (14')$$

Pentru acest caz $\left(\gamma_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, coordonata, măsurată în sensul axului sapei, a unui punct oarecare al acesteia va varia după legea

$$z = ar \cos\varphi + C, \qquad (15)$$

care se obţine din integrarea ecuaţiei (12′), şi unde constanta de integrare C are semnificaţia depărtării dintre punctul considerat şi centrul bazei rolei, măsurată pe direcţia axului sapei.

Înălţimea maximă la care se poate ridica acest punct faţă de fundul plan al puţului de sondă va fi

$$z_{\max} = ar + C,$$

iar înălţimea minimă

$$z_{\min} = ar \cos\frac{\pi}{n} + C = \frac{b}{a} R + C,$$

astfel că amplitudinea oscilaţiilor pe care le efectuează un punct al sapei în lungul axului acesteia va fi dată de expresia

$$A = ar\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = ar - \frac{b}{a} R \qquad (16)$$

Metoda a 2-a

Această metodă se bazează pe teorema de echivalenţă a sistemelor de vectori.

Se ştie că o mişcare oarecare a unui rigid poate fi privită, la un moment dat, ca rezultînd din suprapunerea a două rotaţii instantanee în jurul a două axe în general neconcurente. Astfel, o mişcare de translaţie oarecare, la un moment dat, este echivalentă cu un cuplu de rotaţii instantanee, ale căror axe se găsesc într-un plan normal pe direcţia de translaţie. De asemenea, o mişcare de rotaţie oarecare rezultă din suprapunerea a două rotaţii efectuate în jurul a două axe concurente, şi concurente cu prima, şi în acelaşi plan cu aceasta.

În consecință, mișcarea de rotație instantanee este mișcarea cea mai simplă. Cîmpul de viteze al unui rigid, într-o mișcare de rotație, este perfect determinat printr-un vector alunecător așezat pe axa de rotație, egal cu viteza unghiulară de rotație.

Cîmpul de viteze al unui rigid într-o mișcare de translație este reprezentat printr-un vector liber (vectorul viteză al unui punct oarecare al rigidului), egal cu momentul cuplului vectorilor viteze unghiulare de rotație, cu care este echivalentă translația.

Echivalența a două sisteme de mișcări se va exprima prin echivalența sistemelor de vectori viteze unghiulare instantanee de rotație ce le reprezintă, și anume prin egalarea rezultantelor lor, precum și a momentelor lor într-un punct oarecare, adică prin egalarea torsorilor lor într-un punct oarecare al rigidului. Bineînțeles că cele două sisteme de mișcări se aplică aceluiași solid, însă în mod separat.

Metoda prezentată în cele ce urmează, pe lîngă avantajul de-a da o vedere de ansamblu mai clară asupra fenomenului de mișcare, mai prezintă posibilitatea de a studia mișcarea, adică de a găsi cîmpul de viteze al unui rigid, în anumite situații particulare, cum ar fi în pozițiile extreme pe care le poate ocupa, fără a recurge la particularizarea relațiilor obținute pentru cazul general.

Ea are însă dezavantajul că, pentru stabilirea unor relații, folosește anumite observații geometrice, care nu pot fi cu ușurință găsite, în cazul de față, decît pentru cazul particular al fundului plan $\left(\gamma_0 = \frac{\pi}{2}\right)$.

În cele ce urmează, pentru a ilustra avantajele acestei metode, vom prezenta rezolvarea problemei pe care ne-am propus-o, atît pentru cazurile limită (pozițiile extreme și de mijloc), cît și pentru o poziție oarecare intermediară, deși primele două soluții pot fi deduse din ultima.

a. Rola într-o poziție extremă (fig. 7)

Renunțînd la notația vectorială, pentru simplificarea scrisului, vom considera rola reprezentată prin tetraedrul CAB_1B_2, sprijinit cu muchiile CB_1 și CB_2, adică cu cele două șiruri de dinți vecine, pe fundul plan al puțului de sondă. Situația pe care o studiem este cînd rola începe să se ridice pe un singur șir de dinți, fie acesta CB_1.

În această situație, rola participă simultan la două rotații concurente, $\dot{\theta}_1$ și $\dot{\varphi}_1$, respectiv în jurul axului sapei și în jurul axului propriu, precum și la translația $\dot{z}_1$, în lungul axului sapei, îndreptată de jos în sus.

Acest sistem de mișcări trebuie să fie echivalent cu două rotații instantanee. Vom găsi axele acestor rotații, observînd că punctele C și B_1 trebuie să rămînă într-un plan normal pe suprafața fundului. Astfel, una din rotații trebuie să fie perpendiculară pe acest plan, trecînd prin centrul instantaneu de rotație al acestei mișcări, adică prin B_1. Cealaltă axă va fi după direcția CB_1. Aceste două axe sînt concurente în B_1 și conţinute în planul fundului. Mişcarea rezultantă va fi deci o rotaţie în jurul unei axe cuprinsă în planul fundului. Ea trebuind să fie egală cu rezultanta rotaţiilor iniţiale $\dot{\theta}_1$ şi $\dot{\varphi}_1$, direcţia axului său de rotaţie (trecînd prin B_1 şi cuprinsă în planul fundului), va fi paralelă cu planul celor două axe.

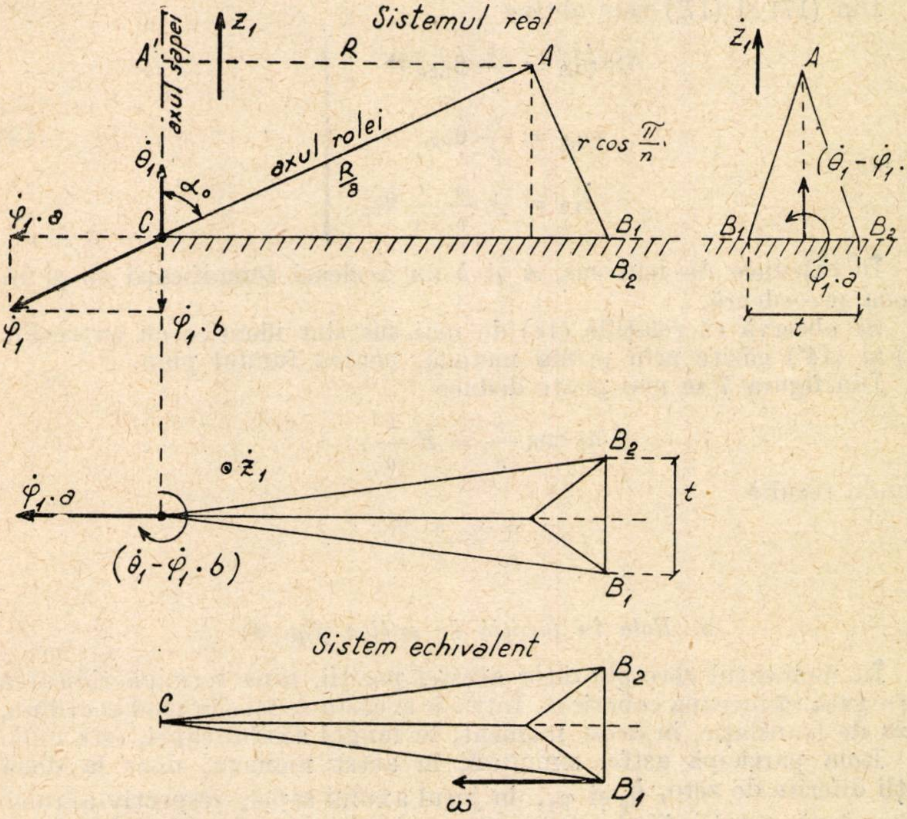

Sistemul real
axul sapei
A'
z_1
R
A
axul rolei
$r \cos \frac{\pi}{n}$
$\frac{R}{a}$
$\dot{\theta}_1$
α_0
$\dot{\varphi}_1 \cdot a$
C
B_1
B_2
$\dot{\varphi}_1$
$\dot{\varphi}_1 \cdot b$
$\dot{z}_1$
A
$(\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot b)$
B_1
B_2
$\dot{\varphi}_1 \cdot a$
t
$\dot{z}_1$
$\dot{\varphi}_1 \cdot a$
$(\dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot b)$
B_2
t
B_1
Sistem echivalent
C
B_2
B_1
ω

Fig. 7

Vom exprima echivalenţa sistemului de mişcări iniţial ($\dot{\theta}_1$, $\dot{\varphi}_1$ şi $\dot{z}_1$) cu rotaţia ω_1, sub forma

$$\left.\begin{aligned} \dot{\theta}_1 - \dot{\varphi}_1 \cdot b &= 0, \\ \dot{\varphi}_1 \cdot a &= \omega_1, \\ \dot{z}_1 &= \omega_1 \cdot \frac{t}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Pentru cealaltă situaţie extremă, cînd rola se sprijină tot pe două şiruri de dinţi, însă după ce a terminat coborîrea de pe un singur şir de dinţi, fie acesta CB_2, vectorul ω_2 al rotaţiei echivalente va trece prin B_2 şi va fi la fel orientat cu ω_1, astfel că condiţiile de echivalenţă vor fi identice cu cele de mai sus, afară de ultima relaţie care se va scrie

$$-\dot{z}_2 = \omega_2 \frac{t}{2}. \tag{17'}$$

Din (17) şi (17′) vom obţine

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_{1,2} &= \frac{1}{b}\,\dot{\theta}_{1,2}, \\ \omega_{1,2} &= \frac{a}{b}\,\dot{\theta}_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= \pm\frac{a}{b}\,\frac{t}{2}\,\dot{\theta}_{1,2}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

În calculele de mai sus, a şi b au aceleaşi semnificaţii ca şi în metoda precedentă.

Se observă că relaţiile (18) de mai sus sînt identice cu expresiile (10′) şi (14′) găsite prin prima metodă, pentru fundul plan.

Din figura 7 se mai poate deduce

$$ar\cos\frac{\pi}{n} = R\,\frac{b}{a},$$

de unde rezultă

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{b}{a^2}\,\frac{R}{r}.$$

b. *Rola în poziţia de mijloc* (fig. 8)

În momentul corespunzător acestei poziţii, sapa termină ridicarea şi este gata să înceapă coborîrea. Întrucît aceasta se face în mod continuu, viteza de translaţie, în acest moment, în lungul axului sapei, este nulă.

Rola participă astfel simultan, în acest moment, doar la două rotaţii diferite de zero, $\dot{\theta}_0$ şi $\dot{\varphi}_0$, în jurul axului sapei, respectiv al rolei. Aceste două rotaţii fiind concurente, mişcarea rezultantă echivalentă este tot o rotaţie, trecînd prin punctul lor de concurenţă C. Direcţia axei instantanee a acestei rotaţii va fi după direcţia şirului de dinţi CB_1, întrucît punctul B_1 nu părăseşte planul fundului.

Exprimînd condiţiile de echivalenţă şi folosind observaţiile geometrice, concretizate în figura 8, vom avea

$$\dot{\theta}_0 - (\dot{\varphi}_0\, b + \dot{\varphi}_0\, a\,\mathrm{tg}\,\varepsilon_0) = 0, \tag{19}$$

unde ε_0 este unghiul maxim pe care îl face linia şirului de dinţi CB_1 cu fundul şi pentru care avem

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_0 = \frac{ar - \dfrac{b}{a}R}{R + br} \tag{20}$$

şi

$$\cos \varepsilon_0 = \frac{R + b\,r}{\sqrt{\left(\frac{R}{a}\right)^2 + r^2}}\,. \tag{20'}$$

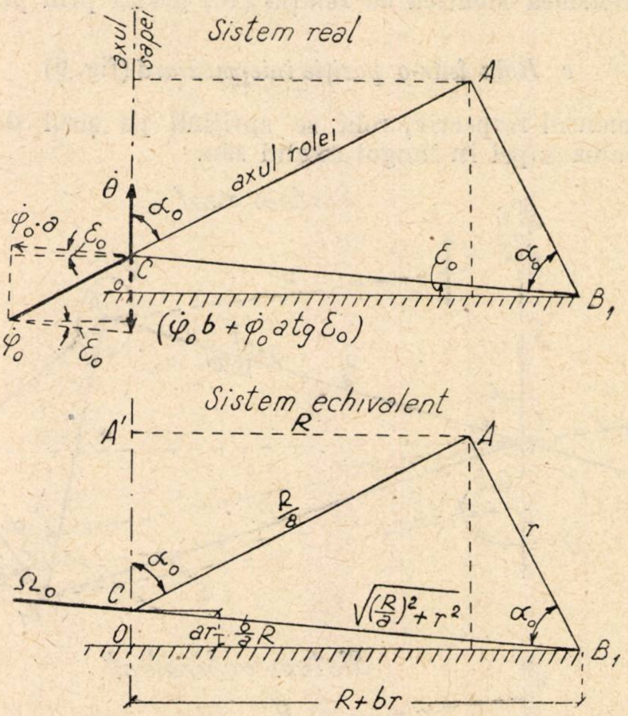

axul săpei
Sistem real
A
axul rolei
$\dot{\theta}$
α_o
$\dot{\varphi}_o \cdot a$
ε_o
C
o
ε_o
α_o
B_1
$\dot{\varphi}_o$
ε_o
$(\dot{\varphi}_o b + \dot{\varphi}_o a \operatorname{tg} \varepsilon_o)$
Sistem echivalent
A'
R
A
$\frac{R}{a}$
r
α_o
Ω_o
C
O
$\sqrt{(\frac{R}{a})^2 + r^2}$
α_o
$ar = \frac{b}{a} R$
B_1
R+br

Fig. 8

Înlocuind în expresia (19) vom avea

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{R + b\,r}{r}\,\dot{\theta}_0. \tag{21}$$

Viteza unghiulară cu care se face rotaţia rezultantă în acest moment este

$$\Omega_0 = \frac{\dot{\varphi}_0\, a}{\cos \varepsilon_0}\,. \tag{22}$$

După înlocuirile respective

$$\Omega_0 = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2 + a^2}\;\dot{\theta}_0. \tag{22'}$$

Înălţimea la care ajunge punctul C în acest moment, adică OC, este tocmai amplitudinea oscilaţiilor sapei în lungul axului său, adică

$$A = ar\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right) = ar - \frac{b}{a}R, \qquad (23)$$

relaţie de asemenea identică cu relaţia (16) găsită prin prima metodă.

c. *Rola într-o poziţie intermediară* (fig. 9)

În momentul respectiv, rola se sprijină pe şirul de dinţi CB_1, forţînd ridicarea sapei în lungul axului său.

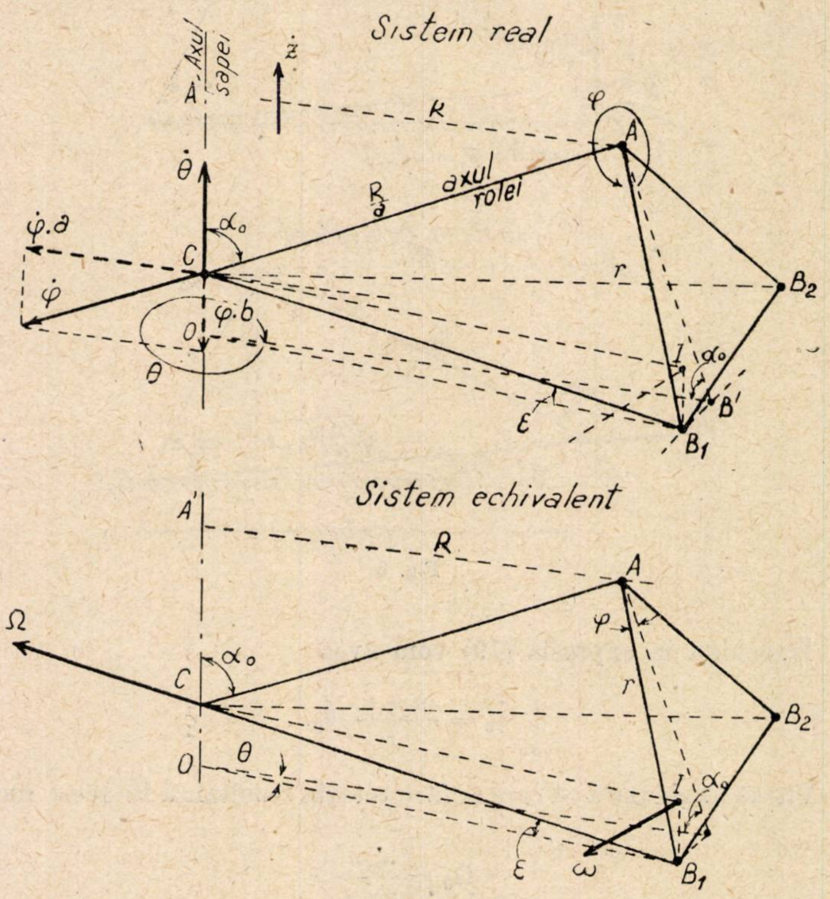

Sistem real
Axul sapei
ż
A'
k
φ
A
θ̇
R/a
axul rolei
φ̇.a
α₀
C
r
B₂
φ̇
φ̇.b
O
θ
I
α₀
B'
ε
B₁
Sistem echivalent
A'
R
A
Ω
φ
α₀
C
r
B₂
O
θ
I
α₀
ε
ω
B₁

Fig. 9

Rola participă astfel simultan la o translaţie de jos în sus, în lungul axului sapei $\dot{z}$, şi la două rotaţii concurente în C, $\dot{\theta}$ şi $\dot{\varphi}$, în jurul axului sapei şi respectiv al rolei.

Mişcarea rezultantă a sapei va fi echivalentă cu două rotaţii instantanee, în jurul unor axe neconcurente. Direcţiile acestor axe pot fi găsite prin următorul raţionament.

Traiectoriile punctelor C şi B_1 se cunosc. Punctul C descrie direcţia axului sapei, iar punctul B_1 urmăreşte dreapta OB_1 pe fundul puţului de sondă (mişcarea rolei făcîndu-se fără alunecare). Astfel, toate punctele şirului de dinţi CB_1 rămîn, în tot timpul mişcării studiate, într-un plan normal pe planul fundului.

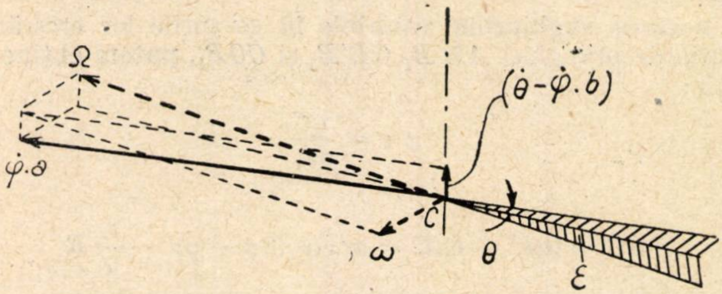


Fig. 10

În consecinţă, una din axele celor două rotaţii ale mişcării rezultante, va trece prin punctul I, adică prin centrul instantaneu al mişcării punctelor de pe dreapta CB_1, avînd direcţia normală pe planul mişcării acestora.

A doua axă va trebui să nu schimbe distribuţia vitezelor punctelor de pe dreapta CB_1 din prima rotaţie, deci va trebui să aibă direcţia acestei drepte.

Pentru a determina valorile vitezelor unghiulare cu care se efectuează cele două rotaţii ω şi Ω, vom exprima echivalenţa celor două sisteme de mişcări (fig. 10) sub forma

$$\left.\begin{aligned} \dot z &= \omega \cdot CI, \\ \dot\varphi a \cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \omega, \\ \dot\varphi a \cos(2\pi - \theta) &= \Omega.\cos\varepsilon, \\ \dot\theta - \dot\varphi b &= \Omega.\sin\varepsilon. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Din aceste relaţii obţinem

$$\left.\begin{aligned} \omega &= a\sin\theta \cdot \dot\varphi, \\ \Omega &= \sqrt{(\dot\theta - \dot\varphi\, b)^2 + a^2\cos^2\theta \cdot \dot\varphi^2}, \\ \operatorname{tg}\varepsilon &= \frac{\dot\theta - \dot\varphi b}{a\cos\theta\,\dot\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Relaţiile dintre unghiurile θ, φ şi ε le vom obţine pe cale geometrică, observînd următoarele:

Planul bazei rolei (AB_1B_2), cît şi planul fundului sînt normale pe planul celor două axe (fig. 9). În consecinţă, dreapta B_1B', intersecţia planului bazei rolei cu planul fundului, este perpendiculară atît pe dreapta AB' cît şi pe dreapta OB', ambele cuprinse în planul celor două axe.

Cu notarea unghiurilor variabile în sensurile lor crescătoare, din triunghiurile dreptunghice $AB'B_1$, $OB'B_1$ şi COB_1, putem obţine următoarele relaţii:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{OC}{OB_1},$$

unde

$$OC = OA' - CA' = ar \cos(2\pi - \varphi) - \frac{b}{a} R$$

şi

$$OB_1 = \frac{B_1B'}{\sin(2\pi - \theta)} = \frac{r \sin(2\pi - \varphi)}{\sin(2\pi - \theta)}.$$

Deci,

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{ar \cos \varphi - \frac{b}{a} R}{r \sin \varphi} \cdot \sin \theta. \tag{26}$$

De asemenea,

$$\operatorname{tg}(2\pi - \theta) = \frac{B_1B'}{OB'},$$

unde

$$B_1B' = r \sin(2\pi - \varphi)$$

şi

$$OB' = R + br \cos(2\pi - \varphi).$$

Deci,

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r \sin \varphi}{R + br \cos \varphi}, \tag{27}$$

relaţie identică cu expresia (8) găsită prin prima metodă.

Din relaţiile (25) găsite pe cale cinematică şi relaţiile (26) şi (27), găsite geometric, obţinem

$$\dot{\varphi} = \frac{r \sin \varphi}{br \sin \varphi + r \cos \theta \sin \theta \left(ar \cos \varphi - \frac{b}{a} R\right)} \dot{\theta}. \tag{28}$$

Din (27) se poate scoate

$$\cos\theta \sin\theta = \frac{r \sin\varphi (R + br \cos\varphi)}{(R + br \cos\varphi)^2 + r^2 \sin^2\varphi}, \tag{27'}$$

care înlocuită în (28) ne dă

$$\dot{\varphi} = \frac{(R + br \cos\varphi)^2 + r^2 \sin^2\varphi}{r (R \cos\varphi + br)} \dot{\theta}, \tag{28'}$$

relaţie pe care am obţinut-o şi prin prima metodă (relaţia (9)).

Tot din figura 9, rezultă

$$CI = OB_1 = \frac{r \sin\varphi}{\sin\theta};$$

înlocuind în prima relaţie (24) şi folosind şi prima relaţie (25), obţinem expresia

$$\dot{z} = -ar \sin\varphi . \dot{\varphi}, \tag{29}$$

de asemenea identică cu relaţia (12′) găsită prin metoda precedentă.

Punctul A fiind un punct care în acelaşi timp este şi un punct al sapei, va avea distanţa pînă la fundul puţului de sondă

$$z_A = OA' = ar \cos(2\pi - \varphi).$$

Orice alt punct al sapei, la o depărtare egală cu C de punctul A, măsurată pe direcţia axului sapei, va avea distanţa pînă la fund

$$z = ar \cos\varphi + C. \tag{30}$$

Amplitudinea mişcărilor diferitelor puncte ale sapei va fi

$$A = ar\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right),$$

relaţie stabilită şi anterior. Relaţia (30) de mai sus a fost determinată şi prin metoda anterioară (relaţia (15)).

Pe lîngă verificarea rezultatelor obţinute şi formarea unei imagini mai clare a fenomenului studiat, prezentarea celor două metode pentru rezolvarea problemei propuse ne pune la dispoziţie mijloacele necesare unui studiu cinematic similar al sapelor cu altfel de role, adică a mişcării cu alunecare, determinată prin construcţie, atît de forma rolelor, cît şi de aşezarea acestora în raport cu sapa (de exemplu cu axele neîntîlnind axul sapei).

APLICAŢII

a. Determinarea frecvenţei excitaţiei sapei

Din relaţia (11′) se poate obţine de cîte ori mişcarea rolei, studiată în prezenta lucrare (ridicarea pe un şir de dinţi şi coborîrea pe două şiruri de dinţi), se repetă în timpul cît sapa face o tură completă, şi anume

$$m = \frac{2\pi}{\theta_2 - \theta_1} = \left(\frac{R}{r} + b \right) n. \tag{31}$$

Frecvenţa excitaţiei sapei în lungul sau în jurul axului său, sau frecvenţa cu care se produc şocurile dintre dinţii rolelor şi rocă, sau frecvenţa percusiunilor pe axul rolelor este

$$M = \left(\frac{R}{r} + b \right) n\, N, \tag{32}$$

unde N este turaţia sapei.

Pentru o sapă curent utilizată în practică, avînd unghiul de la vîrful conului circumscris rolei de 90° şi o înclinare între axul rolei şi axul sapei cu un unghi $\alpha_0 = 55°$, vom avéa

$$R = a = \sin 55° = 0{,}819,$$

$$b = \cos 55° = 0{,}574,$$

de unde

$$M = 1{,}393\ nN. \tag{32′}$$

Pentru o rolă cu 36 de dinţi pe coroana marginală şi pentru o turaţie de 120 rot/min (cu masa Rothary), frecvenţa şocurilor pe fund (sau pe axul rolei) este

$$M_{(36,120)} \simeq 6\,000 \text{ lov/min} = 100 \text{ lov/s}.$$

b. Studiu comparativ între formulele (10) şi (10′) şi între (14) şi (14′)

Făcînd unele transformări asupra relaţiilor (10) şi (14), acestea se pot scrie sub forma

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \frac{\sin^2 \gamma_0}{1 - \dfrac{1}{b\sqrt{1 + \left(\dfrac{ar}{R}\right)^2}} \cos \gamma_0} \, \frac{1}{b} \dot{\theta}_{1,2} = C_1 \cdot \dot{\varphi}_{1,2\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \tag{33}$$

$$\dot{z}_{1,2} = \left[\left(1 + \frac{1}{\dfrac{1}{\cos\gamma_0}\dfrac{1}{b\sqrt{1+\left(\dfrac{ar}{R}\right)^2}} - 1 -}\right)\cdot\frac{\sin^2\gamma_0}{1 - \dfrac{1}{b\sqrt{1+\left(\dfrac{ar}{R}\right)^2}}\cos\gamma_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\dfrac{1}{\cos\gamma_0}\dfrac{1}{b\sqrt{1+\left(\dfrac{ar}{R}\right)^2}} - 1}\right]\left(\pm\frac{a}{b}\,\frac{t}{2}\,\dot{\theta}_{1,2}\right) = \tag{34}$$

$$= C_2 \cdot \dot{z}_{1,2\,\left(\frac{\pi}{2}\right)},$$

unde

$$\cos\gamma_0 = \frac{b - \dfrac{a^2 r}{R}\cos\dfrac{\pi}{n}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{ar}{R}\right)^2}}. \tag{35}$$

Pentru o sapă cu role conice, avînd unghiul la vîrful conului circumscris rolei de 90°, cu unghiul dintre axul sapei şi axul rolei de 55°, şi cu un număr de 36 de dinţi pe coroana marginală a rolei, făcînd calculele indicate mai sus, se găseşte

$$\frac{a\cdot r}{R} = 1,$$

$$\gamma_0 = 99°48'19'',5,$$

$$C_1 = 0{,}802,$$

$$C_2 = 0{,}836.$$

Din calculele de mai sus se poate constata că, pentru o pantă relativ mică a generatoarei conului de fund (9°48'19'', 5, fig. 5), formulele (10) şi (14) dau rezultate mai mici cu circa 20 % faţă de formulele (10') şi (14').

În consecinţă, nu se pot folosi relaţiile obţinute pentru fundul plan al puţului de sondă în alte cazuri, decît admiţînd erori destul de mari, chiar pentru pante îndeajuns de mici.

Se observă că, dacă se notează panta generatoarei conului de fund cu β_0,

$$\left.\begin{aligned} \beta_0 &= \gamma_0 - \frac{\pi}{2}, \\ a' &= \sin(\alpha_0 - \beta_0), \\ b' &= \cos(\alpha_0 - \beta_0), \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

formulele aproximative

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varphi}_{1,2} &= \frac{1}{b'}\dot{\theta}_{1,2}, \\ \dot{z}_{1,2} &= \pm\frac{a'}{b'}\frac{t}{2}\dot{\theta}_{1,2} \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

pot fi utilizate în locul formulelor exacte (10) şi (14). Ele dau erori de circa 2% în plus, pentru cazul analizat.

CONCLUZII

În prezenta lucrare se stabilesc formulele (9), (10), (13) şi (14) pentru determinarea vitezei unghiulare de rotaţie a rolei şi a vitezei de translaţie a sapei, într-un moment oarecare al mişcării acesteia, precum şi în momentele dinaintea şi după atingerea fundului puţului de sondă cu cîte un nou şir de dinţi ai rolei, în cazul cel mai general, al fundului de formă conică.

Formulele (9), (10′), (12′) şi (14′) dau aceleaşi elemente în cazul fundului puţului de sondă de formă plană.

Acestea din urmă sînt comparabile cu formulele stabilite de V. S. Feodorov

$$\omega_r = \omega_s \cdot \frac{D}{d} \qquad [1]^{*}),$$

$$v = \frac{\omega_r \cdot t_z}{2} \qquad [1]^{**}),$$

unde ω_r şi ω_s sînt vitezele de rotaţie a rolei şi respectiv a sapei, d şi D diametrele acestora, v viteza de translaţie a sapei şi t_z interspaţiul dintre vîrfurile dinţilor de pe coroana marginală a rolei.

Formula a doua din grupul de relaţii (25) este comparabilă cu expresia

$$\omega = \sqrt{\omega_s^2 + \omega_r^2 + 2\omega_s\,\omega_r \cos\alpha_0} \qquad [1]^{***}),$$

unde α_0 este unghiul cu aceeaşi notaţie din prezenta lucrare.

Formulele (15) şi (16) sînt comparabile cu expresiile stabilite de V. S. Feodorov

$$h_x = r_z \cdot \left(\cos z . \omega_r . t - \cos\frac{\pi}{z}\right), \qquad [1]^{****})$$

şi

$$h_{\max} = r_z \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi}{z}\right), \qquad [1]^{*****})$$

---

*) p. 33, relaţia (43. 1).

**) p. 124, relaţia (c).

***) p. 28, relaţia (34. 1).

****) p. 30, relaţia (36.1).

*****) p. 30, relaţia (37.1).

unde h_x este ordonata centrului bazei rolei față de poziția sa cea mai de jos, h_{max} amplitudinea oscilațiilor acestui punct, r_z raza cercului circumscris bazei rolei, z numărul de dinți de pe coroana marginală a rolei, iar t timpul.

Formula noastră (32) poate fi comparată cu formula :

$$i = z\,\omega_r \qquad [1]^{******})$$

Între relațiile comparate se observă deosebiri structurale care conduc în mod evident la diferențe esențiale în cazul aplicațiilor practice.

Trebuie menționat că V. S. Feodorov stabilește formulele (43.1) și (34.1) în ipoteza netezimii perfecte a suprafeței laterale a rolei. De asemenea, admite mereu constanța vitezei de rotație a sapei.

În lucrarea de față s-a ținut seama de existența dinților pe suprafața rolei la stabilirea tuturor formulelor și s-a avut în vedere că viteza de rotație a sapei nu poate fi constantă, din cauza percusiunilor forțelor de frecare de pe fundul puțului de sondă. Felul în care variază aceasta nu poate fi dată decît de un studiu dinamic al fenomenului.

De asemenea, V. S. Feodorov consideră fundul puțului de sondă plan.

Reamintim că formulele stabilite pentru acest caz nu pot fi aplicate, fără erori apreciabile, pentru cazul fundului de formă conică, chiar dacă panta acestuia este mică.

Primită la redacție la 13 aprilie 1957.

КИНЕМАТИКА ДОЛОТ С КОНИЧЕСКИМИ ШАРОШКАМИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа представляет собой кинематическое исследование движения без скольжения долот с коническими шарошками, с зубьями, расположенными по образующей описанного вокруг шарошки конуса и с вершиной конуса на оси долота.

Принимается предположение о жесткости дна буровой скважины при кинематическом синхронизме движения всех шарошек долота.

Исследование сделано двумя методами, которые позволяют проверить полученные результаты.

В первом методе применяется теорема сложения скоростей при относительном движении точки.

Этот метод применен в рассматриваемой задаче к самому общему случаю, то есть для дна буровой скважины конической формы.

Во втором методе применяется теорема эквивалентности систем векторов, представляющих мгновенные движения, в которых одновре-

---

******) p. 30, relația (38.1).

менно участвует жесткое тело. Этот метод применен здесь только для частного случая плоского дна, по причине геометрических трудностей.

Выводятся формулы (9) и (13) для определения угловой скорости вращения шарошки и соответственно для поступательной скорости долота вдоль своей оси при некотором положении шарошки.

В частности эти формулы применяются для шарошки, соприкасающейся с дном скважины двумя рядами зубьев, причем получаются формулы (10) и (14).

Для частного случая буровой скважины с плоским дном выводятся уравнения (10') и (14'), а также уравнение колебательного движения точки долота вдоль его оси и амплитуда колебания (16).

В конце работы полученные результаты применяются для определения частоты продольных и крутильных колебаний долота *(a.* 2) и сравниваются формулы (10) и (14) с формулами (10') и (14').

Для замены точных формул (10) и (14) предлагаются также приближенные формулы *(b.* 5) с обозначениями *(b.* 4), которые дают ошибку лишь в 2% для долота со следующими характеристиками:

— угол при вершине конуса шарошки$=90°$;

— угол между осью долота и осью шарошки $\alpha_0=55°$;

— число зубьев на крайнем венце шарошки $n=36$.

Кроме того выведенные формулы сравниваются с соответствующими формулами В. С. Федорова, который также работал над этой проблемой.

LA CINÉMATIQUE DES TRÉPANS À ROULEAUX CONIQUES

(RÉSUMÉ)

On présente l'étude cinématique du mouvement sans glissement des trépans à rouleaux coniques, aux dents situées sur la génératrice du cône circonscrit au rouleau, et avec le sommet du cône dans l'axe du trépan.

On admet l'hypothèse de la rigidité du fond du puits et le synchronisme cinématique des mouvements de tous les rouleaux du trépan.

L'auteur traite le problème à l'aide de deux méthodes distinctes qui servent à vérifier les résultats obtenus.

La première méthode applique le théorème de la composition des vitesses au mouvement relatif d'un point.

Elle est appliquée, dans ce problème, pour le cas le plus général c'est-à-dire pour la forme conique du fond du puits.

La seconde méthode applique le théorème de l'équivalence des systèmes de vecteurs qui représentent les mouvements instantanés auxquels participe simultanément un corps rigide. Elle n'est appliquée ici qu'au cas particulier de fond plat, à cause des difficultées géométriques.

On établit les formules (9) et (13) pour la détermination de la vitesse angulaire de rotation du rouleau et, respectivement, la vitesse

de translation du trépan le long de son axe, pour une position quelconque du rouleau.

On singularise ces formules pour le cas où le rouleau atteint le fond du puits de la sonde avec deux séries de dents, et l'on obtient les formules (10) et (14).

Pour le cas particulier du puits à fond plat, on établit les relations (10′) et (14′), ainsi que l'équation du mouvement vibratoire d'un point du trépan au long de l'axe de celui-ci, de même que l'amplitude de cette vibration (16).

A la fin de l'ouvrage, on applique les résultats obtenus a la détermination de la fréquence des vibrations longitudinales et de torsion du trépan (*a*. 2) et l'on fait une étude comparative des formules (10) et (14) avec les formules (10′) et (14′).

On propose aussi les formules approximatives (*b*. 5), avec les notations (*b*. 4), qui peuvent se substituer aux formules exactes (10) et (14) et donnent des erreurs de 2% seulement, dans le cas d'un trépan aux caractéristiques suivantes :

— angle de 90°, au sommet du cône du rouleau ;

— angle entre l'axe du trépan et l'axe du rouleau : $\alpha_0 = 55°$;

— nombre des dents sur la couronne extrême du rouleau : $n = 36$.

On compare aussi les formule établies avec les relations correspondantes de V. S. Féodorov, qui a également traité ce problème.

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. Feodorov, *Bazele ştiinţifice ale regimului de foraj*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
2. R. M. Eigeles, *Despre unele legi de pătrundere dinamică a dinţilor sapei în rocă*. I.D.T. Economia petrolului, 1956, nr. 8.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

TEORIA MECANISMELOR

STUDIU ASUPRA DETERMINĂRII PE CALE EXPERIMENTALĂ A DEPLASĂRILOR ÎN MECANISMELE PLANE

DE

R. BOGDAN, CR. PELECUDI, E. BUGAIEVSKI şi L. CALMACIUC

I. INTRODUCERE

În construcţia modernă de maşini, metodele experimentale sînt tot atît de importante ca şi cele teoretice. Uneori aceste metode sînt foarte indicate pentru cercetarea unor probleme noi, atunci cînd mecanismele de studiat şi soluţiile teoretice sînt deosebit de complexe.

Laboratorul de Teoria mecanismelor şi maşinilor din Institutul de mecanică aplicată a realizat o masă de modelare a mecanismelor plane, în scopul studiului unor metode experimentale de cercetare a acestora. Utilitatea unei astfel de instalaţii reiese din următoarele considerente :

— instalaţia este un instrument de cercetare atît pentru analiza cît şi pentru sinteza mecanismelor, servind totodată şi ca mijloc de verificare a rezultatelor teoretice ;

— variaţia parametrilor cinematici poate fi determinată expeditiv şi continuu ;

— permite studiul experimental în problemele de dinamica şi precizia mecanismelor.

Variaţia parametrilor mecanici poate fi captată de un sistem mecano-electric care transformă mărimea mecanică în mărime electrică, o amplifică şi o redă pe ecranul oscilografului.

În lucrarea de faţă ne limităm la studiul deplasărilor în mecanismele plane.

Pînă în prezent, în literatura ce ne este cunoscută, am găsit numai indicaţii calitative pentru captarea mişcărilor simple. În vederea extinderii posibilităţii măsurătorilor am imaginat un captor mecanic care urmăreşte mişcarea oarecare a unui punct prin descompunerea mişcării după un sistem de axe de coordonate rectangulare.

Acest tip de captor mecanic propus de noi (fig. 1) se compune din două biele cuplate în punctul M a cărui mişcare urmează a fi studiată. Pe pietrele de culisă M_x şi M_y sînt montate cîte o piesă de contact, care alunecă pe firul rezistiv al captorului electric. Tensiunea culeasă este proporţională cu variaţia rezistenţei ohmice, deci cu deplasarea liniară. În vederea micşorării erorilor introduse la sistemul de captare, se adaugă un compensator electric (fig. 2) al cărui montaj este inversat, datorită faptului că eroarea deplasării pe abscisă este influenţată de ordonată şi viceversa.

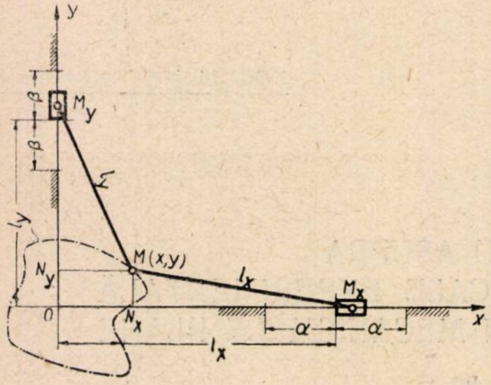


Fig. 1. — Captorul mecanic.

Captorii şi compensatorii sînt racordaţi la puntea electrică, (fig. 3), amplificator *) şi oscilograf, care formează instalaţia electrică a masei de modleare (fig. 4).

Pentru o vedere de ansamblu redăm mai jos fotografia instalaţiei în stare de funcţionare (fig. 5).

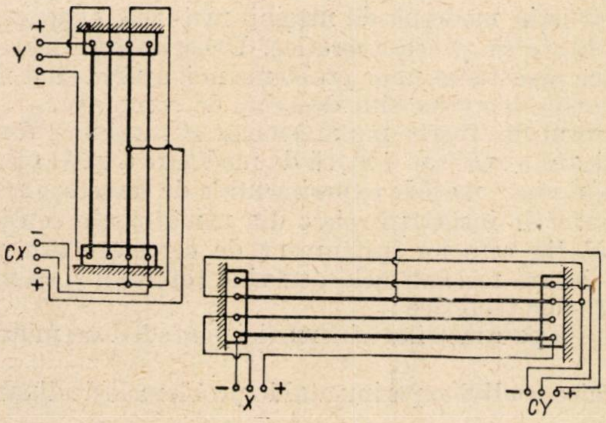


Fig. 2. — Schema captorilor şi compensatorilor electrici.

II. CARACTERISTICILE DIFERITELOR ELEMENTE ALE INSTALAŢIEI

S-a înregistrat variaţia tensiunii culeasă prin captorul electric, funcţie de deplasarea cursorului, la ieşirea din puntea electrică (V_1), la ieşirea din amplificatorul (V_2) şi pe oscilograful (V_3) (fig. 6).

---

*) Amplificatorul a fost realizat la I.M.A. de Th. Pantelimon, iar oscilograful special cu mare persistenţă de A. Nica.

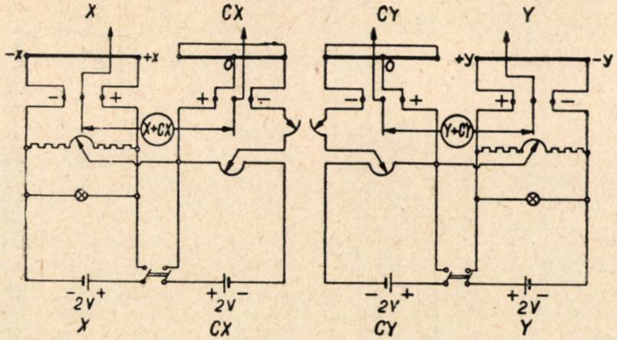

X
CX
CY
Y
-x
+x
+y
-y
X+CX
Y+CY
+
-
2V
X
CX
CY
Y

Fig. 3. — Schema punţii electrice.

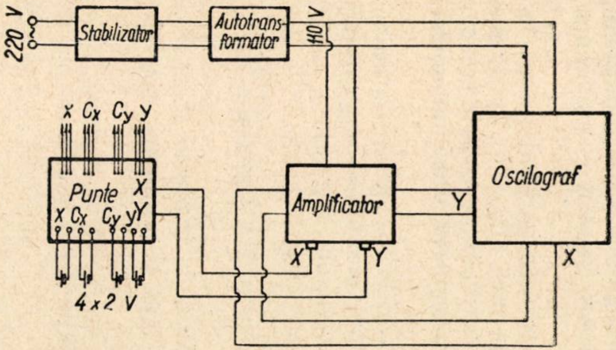

220 V
Stabilizator
Autotrans-formator
110 V
Oscilograf
Amplificator
Y
X
Punte
x Cx Cy y
X
Y
4 x 2 V

Fig. 4. — Schema instalaţiei electrice.

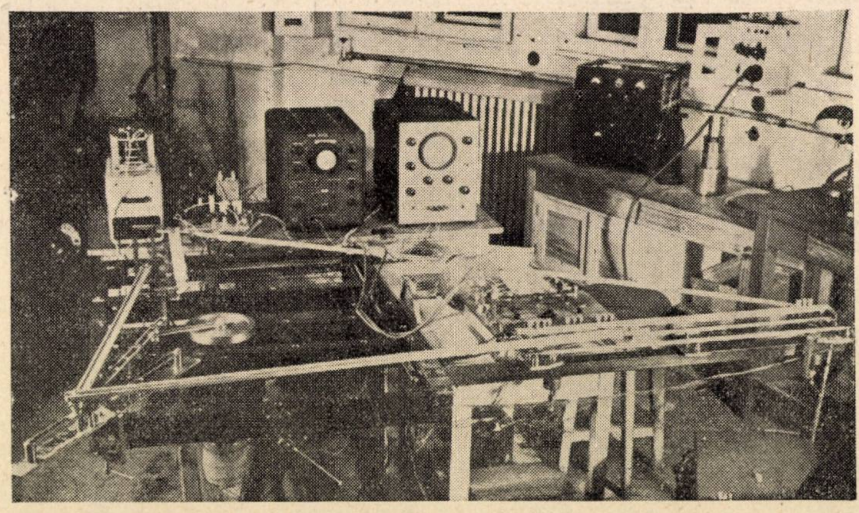


Fig. 5. — Instalaţia.

Se constată că diagramele sînt rectilinii, întreaga instalaţie prezentînd o sensibilitate de 0,135 mm oscilograf/mm deplasare (pentru o amplificare de cca. 80).

S-a înregistrat pe ecranul oscilografului traiectoria unui punct în mişcare circulară necompensat (fig. 7 *a*) şi compensat, (fig. 7 *b*). În figura 8, este desenată traiectoria punctului fără compensare, obţinută prin calcul. Se observă uşor influenţa compensatorului în micşorarea erorii introdusă de captorul mecanic.

Scopul instalaţiei este de a înregistra traiectoriile unui punct oarecare dintr-un mecanism; în acest sens s-au înregistrat pe ecranul oscilografului curbele de bielă ale unui mecanism patrulater articulat (fig. 9).

III. CALCULUL ERORILOR ŞI COMPENSAREA ELECTRICĂ A ACESTORA

Analizăm eroarea datorită abaterii introdusă de captorul mecanic, faţă de un captor mecanic ideal precis (n-am tratat şi problema erorilor datorite nepreciziei elementelor instalaţiei).

1) *Eroarea datorită captării deplasărilor cu ajutorul a două biele cuplate.* În schema cinematică a captorului mecanic (fig. 1), abscisa x_1 a capătului M_x al bielei are expresia

$$x_1 = x + \sqrt{l_x^2 - y^2}. \tag{1}$$

Deplasînd axa Ox cu distanţa l_x, abscisa punctului M_x faţă de noul sistem de axe de coordonate va fi

$$x_2 = x + \sqrt{l_x^2 - y^2} - l_x$$

sau pentru ambele coordonate

$$x_2 \cong x - \frac{y^2}{2l_x} \tag{2}$$

$$y_2 \cong y - \frac{x^2}{2l_y} \tag{3}$$

aproximaţie admisibilă în cazul cînd

$$\frac{y}{l_x} < \frac{1}{4} \text{ şi } \frac{x}{l_y} < \frac{1}{4}.$$

Proiecţiile vectorului eroare au expresiile:

$$e_x \cong - \frac{y^2}{2l_x} \tag{4}$$

$$e_y \cong - \frac{x^2}{2l_y} \tag{5}$$

şi sînt permanent negative şi funcţie de coordonata opusă (fig. 10).

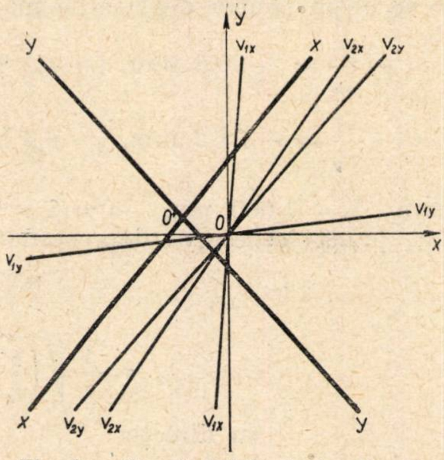

y
y
V_{1x}
x
V_{2x}
V_{2y}
O'
O
V_{1y}
x
V_{1y}
x
V_{2y}
V_{2x}
V_{1x}
y

Fig. 6. — Caracteristicile de funcţionare.

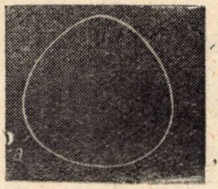


Fig. 7 *a*. — Traiectoria unui punct în mişcare circulară fără compensare.

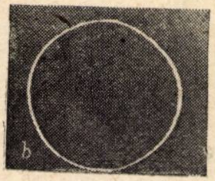


Fig. 7 *b*. — Traiectoria unui punct în mişcare circulară cu compensare.

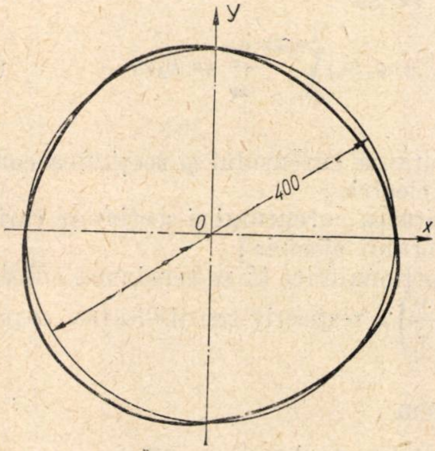


Fig. 8. — Traiectoria unui punct în mişcare circulară fără compensare (calculată).

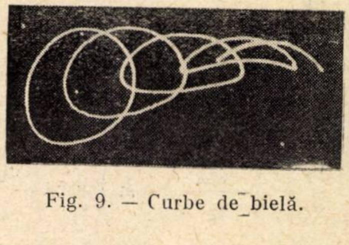


Fig. 9. — Curbe de bielă.

Erorile maxime se obţin pentru deplasările maxime:

$$e_{x\,\max} = -\frac{\beta^2}{2l_x} = -20{,}8 \text{ mm}, \ (-4{,}2\ \%),$$

$$e_{y\,\max} = -\frac{\alpha^2}{2l_y} = -31{,}2 \text{ mm}, \ (-6{,}3\ \%),$$

pentru $l_x = 1\,500$ mm, $l_y = 1\,000$ mm, $\alpha = \beta = 250$ mm.

Eroarea într-un punct oarecare de coordonate x şi y este

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{y^2}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{l_y}\right)^2} \tag{6}$$

cu direcţia

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e_y}{e_x} = \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{l_x}{l_y}.$$

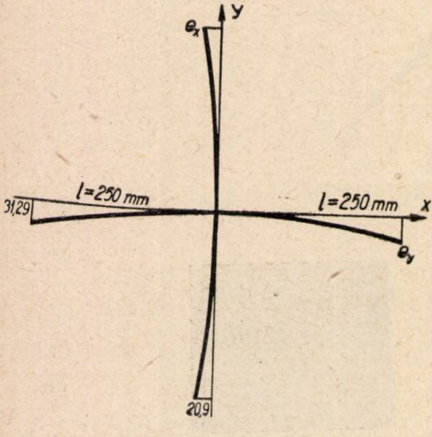


Fig. 10. — Diagrama erorilor fără compensare.

Punctele din mecanism cu o anumită eroare de poziţie dată se găsesc pe o curbă de ecuaţie

$$\frac{x^4}{4\,e^2 l_y^2} + \frac{y^4}{4\,e^2 l_x^2} = 1. \tag{7}$$

2) *Compensarea electrică a erorilor prin fir rezistiv cu secţiune variabilă.* În schema captorilor şi compensatorilor electrici (fig. 2), am urmărit adăugarea la tensiunea V_x culeasă pe axa OX (captor), a unei tensiuni V_{xy} culese pe axa OY (compensator), adică

$$V = V_x + V_{xy} = \frac{\rho_x i_x}{s_x} x_2 + \rho_{xy} i_{xy} \int_0^{y_2 \cong y} \frac{dy}{s_{xy}} = k_x x, \tag{8}$$

unde s-a notat cu:

ρ_x, i_x, s_x — rezistivitatea, intensitatea curentului şi secţiunea constantă a firului rezistiv, ale captorului electric;

$\rho_{xy}, i_{xy}, s_{xy}$ — rezistivitatea, intensitatea curentului şi secţiunea variabilă a firului rezistiv, ale compensatorului electric;

k_x — coeficientul de proporţionalitate între tensiunea culeasă şi deplasare $\left(k_x = \frac{V}{x}\right)$, respectiv sensibilitatea captorului.

Separînd variabilele în (8), obţinem

$$\left(\frac{\rho_x i_x}{s_x} - k_x\right) x = \frac{\rho_x i_x}{s_x}\left(l_x - \sqrt{l_x^2 - y^2}\right) - \rho_{xy} i_{xy} \int_0^y \frac{dy}{s_{xy}}. \tag{9}$$

Aproximația $y_2 \cong y$ este admisibilă datorită erorilor mici, așa cum se va vedea mai departe.

Din (9) obținem

$$k_x = \frac{\rho_x i_x}{s_x} \tag{10}$$

și ecuația integrală

$$\frac{\rho_x i_x}{s_x}\left(l_x - \sqrt{l_x^2 - y^2}\right) - \rho_{xy} i_{xy} \int_0^y \frac{dy}{s_{xy}} = 0. \tag{11}$$

Din (11) rezultă

$$s_{xy} = s_{0y} \frac{\sqrt{l_x^2 - y^2}}{y} \qquad (12$$

și

$$i_{xy} = \frac{\rho_x}{\rho_{xy}} \cdot \frac{s_{0y}}{s_x} i_x. \tag{13}$$

Observații. Considerînd firul de lungime 2 β_1 pe axa Oy, rezultă :

Rezistența R_{xy} între centrul și capătul firului rezistiv al compensatorului este

$$R_{xy} = \rho_{xy} \int_0^{y=\beta_1} \frac{dy}{s_{xy}} \cong \frac{\rho_{xy}}{s_{0y}} \cdot \frac{\beta_1^2}{2l_x}. \tag{14}$$

Tensiunea de alimentare a compensatorului

$$E_{xy} = i_{xy} R_{xy} \cong k_x \frac{\beta_1^2}{2l_x}.$$

Tensiunea de alimentare a captorului

$$E_x = k_x \cdot 2\alpha_1,$$

unde $2\alpha_1$ este lungimea firului

Raportul tensiunilor de alimentare este

$$\frac{E_{xy}}{E_x} \cong \frac{\beta_1^2}{4\alpha_1 l_x} \tag{15}$$

Constatăm că pentru $\alpha_1 = \beta_1 = 250$ mm, tensiunea de compensare este de aproximativ 24 ori mai mică decît tensiunea din captor (cca. 4 %), rezultat care ne arată că am putut admite inițial aproximația $y_2 \cong y$.

Pentru compensarea erorii pe axa OY se obțin relații asemănătoare.

Eroarea, datorită aproximației de mai sus, se exprimă prin relația

$$e_x = \frac{V_{xy_2} - V_{xy}}{k_x} = \frac{\rho_{xy} i_{xy}}{\frac{\rho_x i_x}{s_x}} \left[\int_0^{y_2} \frac{dy}{s_{xy}} - \int_0^{y} \frac{dy}{s_{xy}}\right] = s_{0y} \int_y^{y_2 = y - \frac{x^2}{2l_y}} \frac{dy}{s_{xy}} \tag{16}$$

sau pentru ambele axe proiecţiile vectorului eroare au expresiile

$$e_x \cong -\frac{yx^2}{2\, l_x l_y}, \tag{17}$$

$$e_y \cong -\frac{xy^2}{2\, l_x l_y}. \tag{18}$$

Constatăm că prin introducerea compensării în cazul aproximaţiei $y_2 \cong y$, eroarea este o funcţie de ambele coordonate (x,y) (fig. 11).

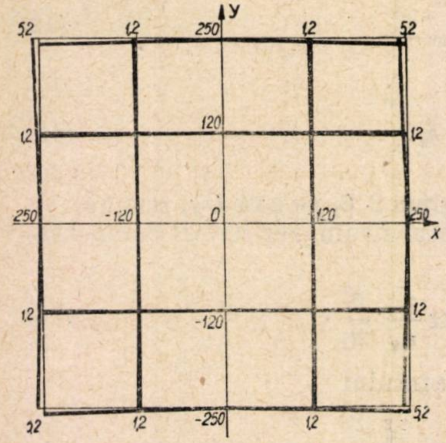


Fig. 11. — Diagrama erorilor cu compensare prin fir de secţiune variabilă.

În cazul deplasărilor maxime

$$e_{x,y_{\max}} = -5{,}2 \text{ mm}, \ (-1{,}04\ \%).$$

Eroarea într-un punct oarecare de coordonate x şi y este

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2} = \\ = \frac{xy}{2\, l_x l_y} \sqrt{x^2 + y^2} \tag{19}$$

cu direcţia

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{e_y}{e_x} = \frac{y}{x}.$$

3) *Compensarea electrică a erorilor prin fir rezistiv cu secţiune constantă.* Reluînd relaţia (8) în acest caz, tensiunea are expresia

$$V = \frac{\rho_x i_x}{s_x} x_2 + \frac{\rho_{xy} i_{xy}}{s_{xy}} y_2 = k_x (x - x_0). \tag{20}$$

Notînd

$$\frac{\rho_x i_x}{s_x} = A \text{ şi } \frac{\rho_{xy} i_{xy}}{s_{xy}} = B$$

obţinem

$$V = A\left(x - \frac{y^2}{2 l_x}\right) + B\left(y - \frac{x^2}{2 l_y}\right) \cong k_x (x - x_0). \tag{21}$$

Tensiunea este proporţională cu deplasarea, înregistrîndu-se totodată o deplasare a originii cu x_0.

Separînd variabilele, (21) devine

$$\left[-\frac{B}{2l_y}x^2+(A-k_x)x+C_1\right]+\left[-\frac{A}{2l_x}y^2+By-C_2\right]+$$

$$+\left[k_x x_0-C_1+C_2\right]\cong 0$$

sau

$$C_1-C_2=k_x\,x_0 \tag{22}$$

$$\varphi(x)=-\frac{B}{2l_y}x^2+(A-k_x)x+C_1\cong 0 \tag{23}$$

$$\psi(y)=-\frac{A}{2l_x}y^2+By-C_2\cong 0 \tag{24}$$

adică polinoamele $\varphi(x)$ şi $\psi(y)$ trebuie să se abată cel mai puţin de zero în intervalele de variaţie a variabilelor

$$x\in(-\alpha,+\alpha) \text{ şi } y\in(0,+\beta).$$

Polinomul lui P. L. Cebîşev de gradul 2, care se abate cel mai puţin de la zero în intervalul $(-1,+1)$ are expresia

$$T_2(z)=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^2+(z-\sqrt{z^2-1})^2}{2^2}=z^2-\frac{1}{2}. \tag{25}$$

Prin transformarea

$$z=\frac{2u-(b+a)}{b-a}$$

se obţine polinomul care se abate cel mai puţin de la zero în intervalul $u\in(a,b)$, corespunzător intervalului $z\in(-1,+1)$:

$$T_2(u)=u^2-(a+b)u+\frac{a^2+b^2+6ab}{8}. \tag{26}$$

Considerînd datele de mai sus, polinoamele lui Cebîşev devin

$$T_2(x)=x^2-\frac{\alpha^2}{2},$$

$$T_2(y)=y^2-\beta y+\frac{\beta^2}{8}.$$

Prin apropiere cu polinoamele $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ se obțin următoarele

$$k_x = \frac{\rho_x i_x}{s_x}, \tag{27}$$

$$x_0 = -\left(\frac{\beta^2}{16\, l_x} - \frac{\alpha^2\beta}{8\, l_x l_y}\right),$$

$$i_{xy} = \frac{\rho_x}{\rho_{xy}} \cdot \frac{s_{xy}}{s_x} \cdot \frac{\beta}{2 l_x}\, i_x. \tag{28}$$

Considerînd $\rho_x = \rho_{xy}$, $s_x = s_{xy}$, $\beta = 250$ mm ecuația (28) devine

$$i_{xy} = \frac{i_x}{8}$$

adică intensitatea curentului compensatorului este 12,5 % din intensitatea captorului. Rezistența și tensiunea compensatorului sînt :

$$R_{xy} = \frac{\rho_{xy}\beta_1}{s_{xy}}, \tag{29}$$

$$E_{xy} = i_{xy}\, R_{xy} = k_x \frac{\beta\beta_1}{2\, l_x}.$$

Raportul tensiunilor de alimentare :

$$\frac{E_{xy}}{E_x} = \frac{\beta\beta_1}{4\alpha_1\, l_x}. \tag{30}$$

Pentru compensarea erorii pe axa *OY* se obțin relații asemănătoare.

Eroarea introdusă prin utilizarea unei secțiuni constante a firului compensatorului se obține prin abaterile polinoamelor $\varphi(x)$ și $\psi(y)$ de la zero (fig. 12)

$$e_x = \frac{\varphi(x) + \psi(y)}{k_x}$$

sau

$$e_x = +\frac{1}{2\, l_x}(\beta y - y^2) - \frac{\beta}{8\, l_x}\left[\frac{2x^2 - \alpha^2}{l_y} + \frac{\beta}{2}\right] \tag{31}$$

și de asemenea

$$e_y = +\frac{1}{2\, l_y}(\alpha x - x^2) - \frac{\alpha}{8\, l_y}\left[\frac{2y^2 - \beta^2}{l_x} + \frac{\alpha}{2}\right]. \tag{32}$$

Eroarea maximă pe direcția *Ox* este :

$$e_{x\,\max} = \max\left[\frac{1}{2\, l_x}(\beta y - y^2)\right] - \min\left[\frac{\beta}{8\, l_x}\left(\frac{2x^2 - \alpha^2}{l_y} + \frac{\beta}{2}\right)\right].$$

Procedînd similar pentru axa Ox şi introducînd dimensiunile cunoscute, obţinem

$$e_{x\,\max} = \pm\left(\frac{\beta^2}{16\,l_x} + \frac{\beta\alpha^2}{8\,l_x l_y}\right) = \pm\,3{,}9\ \text{mm},\ (\pm\,0{,}78\ \%),$$

$$e_{y\,\max} = \pm\left(\frac{\alpha^2}{16\,l_y} + \frac{\alpha\beta^2}{8 l_x l_y}\right) = \pm\,5{,}2\ \text{mm},\ (\pm\,1{,}04\ \%).$$

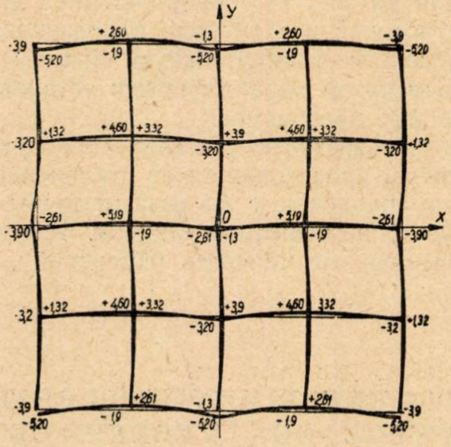

y
x
0
-3,9
+2,60
-1,3
+2,60
-3,9
-5,20
-1,9
-5,20
-1,9
-5,20
-3,20
+1,32
+4,60
+3,32
+3,9
+4,60
+3,32
+1,32
-3,20
-3,20
-3,90
-2,61
+5,19
-1,9
-2,61
-1,3
+5,19
-2,61
-1,9
-3,90
-3,2
+1,32
+4,60
+3,32
+3,9
+4,60
3,32
+1,32
-3,20
-3,2
-3,9
-5,20
+2,61
-1,9
-1,3
-5,20
+2,61
-1,9
-3,9
-5,20

Fig. 12. — Diagrama erorilor cu compensare prin fir de secţiune constantă.

★

Comparînd valorile erorilor maxime în cele trei cazuri studiate (tablou) se observă uşor rolul compensării în micşorarea erorii datorită abaterii

Tablou

	1	2	3
e_x	0, −4,2 %	0, −1,04 %	± 0,78 %
e_y	0, −6,3 %	0, −1,04 %	± 1,04 %

introdusă de captorul mecanic propus a fi utilizat pentru studiul deplasărilor în mecanismele plane.

Primită la redacţie la 18. VI.1957.

К ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОМУ ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части работы указывается на необходимость экспериментального исследования кинематических параметров механизмов и приводится описание установки, осуществленной для этой цели. Был построен механический датчик, состоящий из двух шатунов, соединенных в точке, движение которой исследуется, и ползунов, скользящих по направлениям, образующим прямоугольную систему координатных осей. Были сняты опытным путем характеристики установки и шатунные кривые некоторых плоских механизмов.

Во второй части теоретически исследуется точность измерений и, следовательно, ошибка, происходящая от отклонений, вводимых механическим датчиком, по сравнению с идеальным точным датчиком, а также система электрической компенсации ошибок. Результаты исследования приводят к заключению, что точность измерений находится в допустимых пределах.

ÜBER DIE EXPERIMENTELLE BESTIMMUNG DER BEWEGUNGEN IN EBENEN GETRIEBEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Im ersten Teil der Arbeit wird die Notwendigkeit des experimentellen Studiums der kinematischen Getriebeparameter gezeigt und die zu diesem Zweck geschaffene Einrichtung beschrieben. Es handelt sich um einen mechanischen Abnehmer, der aus zwei Pleuelstangen besteht, die in dem Punkte, dessen Bewegung untersucht werden soll, gekoppelt sind, wobei die Schienen in den Richtungen eines rechtwinkligen Koordinatensystems gleiten.

Im zweiten Teil wird die Genauigkeit der Messungen theoretisch geprüft (d. h. der sich zufolge der Einführung des mechanischen Abnehmers ergebende Fehler im Vergleich zu einem Abnehmer idealer Präzision) und das elektrische Fehlerausgleichsystem untersucht.

Die Ergebnisse der Untersuchungen führen zu der Schlussfolgerung, dass die Messgenauigkeit sich in den zulässigen Grenzen hält.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN

Abb. 1. — Mechanischer Abnehmer.
Abb. 2. — Schema der elektrischen Abnehmer und Ausgleicher.
Abb. 3. — Schema der elektrischen Brücke.

Abb. 4. — Schema der elektrischen Einrichtung.
Abb. 5. — Einrichtung.
Abb. 6. — Betriebscharakteristiken.
Abb. *7a* — Bahn eines Punktes in kreisförmiger Bewegung ohne Ausgleich.
Abb. *7b* — Bahn eines Punktes in kreisförmiger Bewegung mit Ausgleich.
Abb. 8. — Bahn eines Punktes in kreisförmiger Bewegung ohne Ausgleich (berechnet).
Abb. 9. — Kolbenstangenkurven.
Abb. 10. — Diagramm der Fehler ohne Ausgleich.
Abb. 11. — Diagramm der Fehler mit Ausgleich durch einen Draht mit veränderlichen Querschnitt.
Abb. 12. — Diagramm der Fehler mit Ausgleich durch einen Draht mit konstantem Querschnitt.

BIBLIOGRAFIE

1. N. P. Raevski, *Metodi experimentalinih issledovanii mehaniceskih parametrov maşin.* Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscova, 1952.
2. A. M. Turicin, *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
3. G. Korn şi Th. Korn, *Electronic Analog Computers.* Ed. Mc Graw-Hill Co., New York, 1952.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

AEROMECANICĂ

SCURGERI CONICE DE ORDIN SUPERIOR ÎN JURUL ARIPILOR TRIUNGHIULARE SUBŢIRI SAU DE GROSIME SIMETRICĂ *)

(O teorie generală unitară)

DE

E. CARAFOLI şi M. IONESCU

I. CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Într-o serie de lucrări anterioare [1], [2], [3], în scopul determinării scurgerii supersonice în jurul aripilor conice am dezvoltat o metodă bazată pe analogia ce există, într-un anumit sens, între mişcările conice şi problemele de hidrodinamică plană.

În cele ce urmează, vom extinde această metodă la scurgerile omogene de ordin superior, stabilind astfel o teorie generală unitară a aripii triunghiulare într-un astfel de regim. Vom începe prin a enunţa datele problemei.

Să considerăm scurgerea supersonică irotaţională în jurul unui obstacol plasat într-un curent uniform U_∞. Vom raporta scurgerea la un sistem ortogonal $Ox_1x_2x_3$, cu axa Ox_1, dirijată după direcţia curentului neperturbat, U_∞.

Dacă potenţialul vitezelor de perturbaţie, $\Phi(x_1, x_2, x_3)$, este o funcţie omogenă de ordin n, scurgerea se numeşte *omogenă sau conică* de ordin n. Vitezele de perturbaţie

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \tag{1}$$

sînt în acest caz funcţii omogene de ordinul $n - 1$.

---

*) Principalele rezultate ale acestui studiu au fost comunicate la JAHRESTAGUNG DER GESELLSCHAFT FUR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK (Sesiunea anuală a Societătii pentru matematică aplicată şi mecanică), aprilie 1957, HAMBURG, şi un rezumat a fost publicat în ZAMM, band 37, heft 7/8, Juli/August 1957.

Se poate demonstra, [4], în ipoteza micilor perturbații (în acest caz obstacolul este presupus aplatisat în planul Ox_1,x_2), că, în condițiile la limită ale problemei fizice, potențialul $\Phi\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$ este în mod necesar o funcție omogenă de ordin n, dacă viteza verticală pe obstacol, în planul $x_3 = 0$ fie $w = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)_{x_3=0}$, este o funcție omogenă de ordinul $n-1$ în x_1 și x_2.

Sîntem deci conduși la studiul unui astfel de potențial și al derivatelor sale. Vom da în mod succint cîteva elemente necesare expunerii ulterioare.

Dacă $\Phi\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$ este o funcție omogenă de ordinul n, conform teoremei lui Euler putem scrie

$$n\,!\,\Phi\,(x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n)}\Phi\ ; \tag{2}$$

introducînd notațiile

$$\frac{x_2}{x_1} = y, \quad \frac{x_3}{x_1} = z, \tag{3}$$

relația precedentă devine

$$\frac{n\,!\Phi}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n)}\Phi \tag{4}$$

și cum orice derivată de ordinul n a funcției Φ este o funcție omogenă de ordinul zero, funcția $\frac{n\,!\Phi}{x_1^{n-1}}$ se bucură de aceeași proprietate.

În mod analog, deducem că funcțiile

$$\frac{(n-1)\,!\,u}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} u, \tag{5 a}$$

$$\frac{(n-1)\,!\,v}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} v, \tag{5 b}$$

$$\frac{(n-1)\,!\,w}{x_1^{n-1}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y\frac{\partial}{\partial x_2} + z\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} w \tag{5 c}$$

sînt omogene de ordinul zero.

Punînd acum

$$\Phi_{p.q.r} = \frac{\partial^{p+q+r}\Phi}{\partial x_1^p\,\partial x_2^q\,\partial x_3^r}, \tag{6}$$

derivatele funcțiilor $u = \Phi_{1,0,0}$, $v = \Phi_{0,1,0}$, $w = \Phi_{0,0,1}$ în planul $x_3 = 0$, se pot scrie

$$\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x_1^{n-q-1}\partial x_2^q} = \Phi_{n-q,q,0}, \quad \frac{\partial^{n-1}v}{\partial x_1^{n-q-1}\partial x_2^q} = \Phi_{n-q,q+1,0}, \quad \frac{\partial^{n-1}w}{\partial x_1^{n-q-1}\partial x_2^q} = \Phi_{n-q-1,q,1}. \tag{7}$$

Cu aceste notații, expresiile (5), în planul $x_3 = 0$ $(z = 0)$ devin respectiv

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, y^q \, \Phi_{n-q,q,0}, \tag{8 a}$$

$$\frac{(n-1)!\,v}{x_1^{n-1}} = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, y^q \, \Phi_{n-q-1,q+1,0}, \tag{8 b}$$

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = \sum_{=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, y^q \, \Phi_{n-q-1,q,1}. \tag{8 c}$$

În planul lui **BUSEMANN**, $\omega\eta\zeta$, transformantul planului fizic, oyz, prin intermediul relațiilor

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \theta = \theta, \quad (r^2 = y^2 + z^2,\ \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2) \tag{9}$$

orice funcție $\Phi_{p,q,r}$, unde $p + q + r = n$, fiind omogenă de ordinul zero și satisfăcînd ecuația micilor perturbații, devine o funcție armonică de η și ζ și în consecință reprezintă partea reală a unei funcții de variabilă complexă $\xi = \eta + i\,\zeta$, fie

$$F_{p,q,r} = \Phi_{p,q,r} + i\,\Phi'_{p,q,r}, \tag{10}$$

$\Phi'_{p,q,r}$ fiind asociata armonică a funcției $\Phi_{p,q,r}$.

Într-un alt plan auxiliar $x = y + iz$, definit de transformarea

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \tag{11}$$

plan care are proprietatea de a reproduce la aceeași scară urma aripii din planul fizic, relațiile (8) se pot scrie, pentru punctele de pe aripă, sub forma

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = Re \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, x^q F_{n-q,q,0}, \tag{12 a}$$

$$\frac{(n-1)!\,v}{x_1^{n-1}} = Re \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, x^q F_{n-q-1,q+1,0}, \tag{12 b}$$

$$\frac{(n-1)!\,w}{x_1^{n-1}} = Re \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^q \, x^q F_{n-q-1,q,1}. \tag{12 c}$$

Funcțiile $\Phi_{n-q,q,0}$, $\Phi_{n-q-1,q+1,0}$, $\Phi_{n-q-1,q,1}$, fiind derivatele unei aceleiași funcții, sînt legate între ele prn *relațiile de compatibilitate* [5], [6], [7]. În aceeași situație se vor afla și funcțiile $F_{n-q,q,0}$, $F_{n-q-1,q+1,0}$, $F_{n-q-1,q,1}$, astfel încît cunoașterea uneia din ele, $F_{n-q,q,0}$ spre exemplu, ar antrena cunoașterea celorlalte, și în acest mod, prin intermediul relațiilor (12), mișcarea ar fi perfect determinată.

Aceste *relaţii de compatibilitate* impun identitatea tuturor expresiilor de forma

$$(-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,\,q,\,r}, \tag{13}$$

unde $0 \leqslant q + r \leqslant n$.

Să revenim acum la problema fizică şi să considerăm o aripă triunghiulară admisă, în primă aproximaţie, ca aplatisată în planul Ox_1x_2.

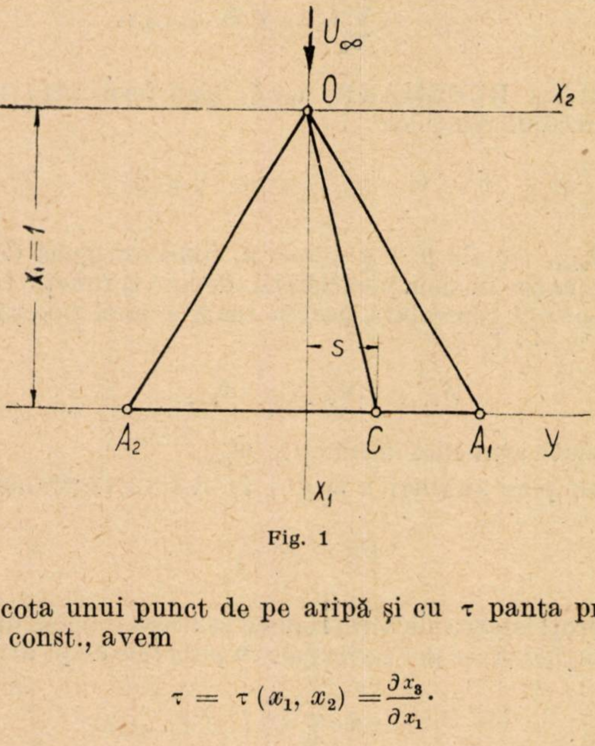


Fig. 1

Notînd cu x_3 cota unui punct de pe aripă şi cu τ panta profilului într-o secţiune x_3 = const., avem

$$\tau = \tau(x_1, x_2) = \frac{\partial x_3}{\partial x_1}. \tag{14}$$

În aceste condiţii, dacă U_∞ este viteza curentului neperturbat, componenta vitezei după direcţia Ox_3 este

$$w = U_\infty \tau(x_1, x_2). \tag{15}$$

Prin ipoteză w este o sumă de funcţii omogene de ordine $0, 1, 2, \ldots, n-1$, şi mişcarea ce rezultă în jurul aripii este o suprapunere de mişcări omogene de ordine $1, 2, 3, \ldots, n$.

În primă instanţă, vom presupune că w este o sumă de polinoame omogene şi scurgerile rezultate vor fi numite *scurgeri conice elementare*.

Sîntem acum în măsură să punem problema :

Să considerăm o aripă triunghiulară OA_1A_2 (fig. 1) şi să presupunem că pe suprafaţa OA_2C, pe extrados, panta (sau incidenţa) τ este nulă ;

să presupunem mai departe că începînd de la muchia OC, panta τ, sau viteza verticală w, variază conform relației

$$\tau\, U_\infty = w = \sum_{m=0}^{n-1} w_m (x_1, x_2) \tag{16}$$

unde w_m este un polinom omogen de ordin m,

$$w_m = \sum_{q=0}^{m-1} w_{m-q,q}\, x_1^{m-q} x_2^q . \tag{17}$$

Să considerăm polinomul de ordinul $m = n - 1$,

$$w_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^q . \tag{18}$$

Ne propunem să determinăm viteza de perturbație axială u, datorită prezenței pe aripă a unei muchii (sau bord) care separă două regiuni, una cu viteză verticală $w = 0$, alta cu viteză verticală $w = w_{n-1}$. Vom determina și efectul unui bord de atac subsonic al unei aripi subțiri.

În ipoteza micilor perturbații, se poate separa efectul grosimii de efectul incidenței astfel încît vom considera separat aripa de grosime simetrică și aripa subțire.

II. EXTINDEREA ANALOGIEI HIDRODINAMICE PRIN APLICAREA SINGULARITĂȚILOR DE ORDIN SUPERIOR

Potrivit relației (12 a) problema se reduce la găsirea formei funcțiilor $F_{n-q,q,0}$ a căror determinare este echivalentă cu o problemă de hidrodinamică plană, pe care o vom soluționa prin aceeași metodă *a analogiei hidrodinamice* care a fost utilizată pentru scurgerile conice propriu zise, de ordinul unu [1].

Să considerăm, în acest sens, una din relațiile de compatibilitate, dedusă din (13), aplicată pe aripă, ($x = y$, $z = 0$),

$$d\Phi_{n-q,q,0} + i\,d\Phi'_{n-q,q,0} = \frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}} \left(i\,d\Phi_{n-q-1,q,1} - d\Phi'_{n-q-1,q,1}\right); \tag{19}$$

identificînd acum relațiile (12c) și (16), deducem

$$C_{n-1}^q\, \Phi_{n-q-1.q.1} = (n-1)!\, w_{n-q-1,q} \tag{20}$$

și în consecință, vom avea, pe aripă,

$$d\Phi_{n-q-1,q,1} = 0 = d\Phi'_{n-q,q,0} . \tag{21}$$

Din această relație rezultă că urma aripii este o linie de curent în mișcare (fictivă) definită de potențialul $F_{n-q,q,0}$. Dar acest potențial poate fi construit cu ușurință. Este de ajuns să plasăm în planul lui BUSEMANN, $\xi = \eta + i\zeta$ sau, mai bine, în planul $x = y + iz$ singularitățile (surse, dublete, multipoli etc.) cerute de natura problemei și să trecem apoi (la nevoie) la un alt plan, unde restul condițiilor la limită pot fi satisfăcute fără greutate. Singularitățile plasate în planul ξ sau x se vor reproduce în orice alt plan transformat, în punctele corespunzătoare, astfel încît problema scurgerilor conice de ordin superior este efectiv o problemă de hidrodinamică plană.

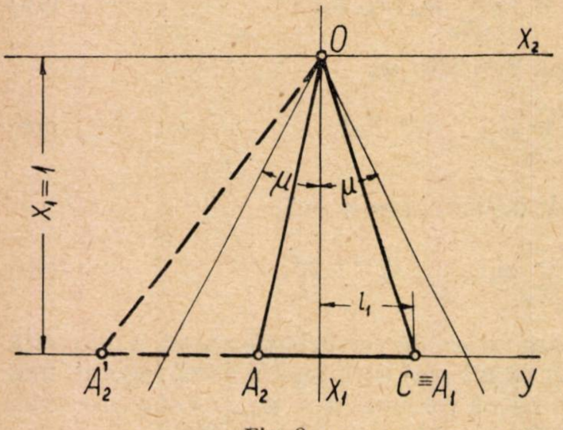


Fig. 2

Să examinăm în acest scop, singularitățile ce apar în expresia funcției $F_{n-q,q,0}$. Pentru aceasta, să ne reamintim rezultatele obținute pentru aripa conică, $n = 1$, și să luăm, în acest scop, o muchie OC sau un bord de atac OA_1, în interiorul conului MACH, pe o aripă triunghiulară :

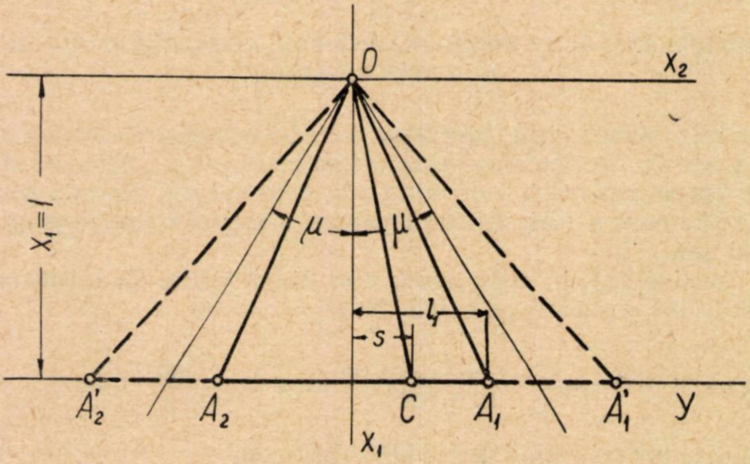


Fig. 3

a) Dacă OA_1 este chiar bordul de atac subsonic al unei aripi subțiri (fig. 2), viteza axială de perturbație tinde spre infinit în toate punctele acestui bord ca

$$u_{y \to l_1} = \frac{K_0}{(l_1 - y)^{1/3}} \cdot \tag{22}$$

b) Dacă muchia OC se găsește pe aripă (groasă sau subțire), sau dacă OC reprezintă chiar bordul de atac al unei aripi de grosime simetrică (fig. 3), presupunînd pe de altă parte că viteza verticală trece de la $w = 0$ de o parte a lui OC la $w =$ const. de partea cealaltă, viteza axială de perturbație tinde spre infinit în toate punctele lui OC ca

$$u_{y \to s} = K_0 \ln | s - y |. \tag{23}$$

În aceste două expresii K_0 este un coeficient constant, depinzînd de abscisa s a punctului C (sau abscisa l_1 a punctului A_1).

Pentru mișcări conice de ordin superior ($n > 1$), considerînd scurgerea în imediata vecinătate a unei astfel de muchii, putem admite, abstracție făcînd de infiniți mici de ordin superior, că viteza u tinde spre infinit în același mod :

respectiv $$K/(l_1 - y)^{1/2} \quad \text{și} \quad K \ln | s - y |.$$

Evident, de data aceasta coeficienții K nu mai sînt constanți, ci funcții de x_1 și x_2.

În aceste condiții, orice derivată $\Phi_{n-q,q,0}$ va conține, în afara termenilor de mai sus, toate derivatele acestora pînă la ordinul $n - 1$.

Rezultă că în planul $x = y + iz$, definit prin transformarea (11), funcția $F_{n-q,q,0}$ va conține singularitățile

$$\frac{1}{(l_1 - x)^{1/2}}, \ \frac{1}{(l_1 - x)^{3/2}}, \ldots, \frac{1}{(l_1 - x)^{\frac{2n-1}{2}}}, \tag{24}$$

în cazul a) și

$$\ln(s - x), \quad \frac{1}{s - x}, \ldots, \frac{1}{(s - x)^{n-1}}, \tag{25}$$

în cazul b).

Să trecem, acum, la calculul efectiv al vitezei axiale de perturbație datorită saltului vitezei verticale în vecinătatea muchiei OC de la zero la w_{n-1}, și datorită bordului de atac OA, ținînd seama de condițiile la limită.

Contribuțiile unei muchii

a) *Aripa subțire cu borduri de atac subsonice.* Transformînd planul $x = y + iz$ (13) într-un alt plan auxiliar $X = Y + iZ$ definit de transformarea

$$X^2 = \frac{l_2 + x}{l_1 - x}, \tag{26}$$

obținem configurația din figura 4, extradosul și intradosul aripii fiind reprezentați respectiv prin semiaxele reale $(0, +\infty)$ și $(-\infty, 0)$, segmentele A_1D_1, A_2D_2 și cercul MACH prin axa imaginară.

În acest plan, condițiile la limită se realizează imediat asociind sursei $A_0 \ln (X - S)$ sursa $-A_0 \ln (X + S)$ și fiecărei singularități $A_j/(X-S)^j$

singularitatea $-(-1)^j A_j/(X+S)^j$. În aceste expresii, $Y = S$ din planul X este omologul punctului $y = s$ din planul x,

$$S^2 = \frac{l_2 + s}{l_1 - s}\,\cdot \tag{27}$$

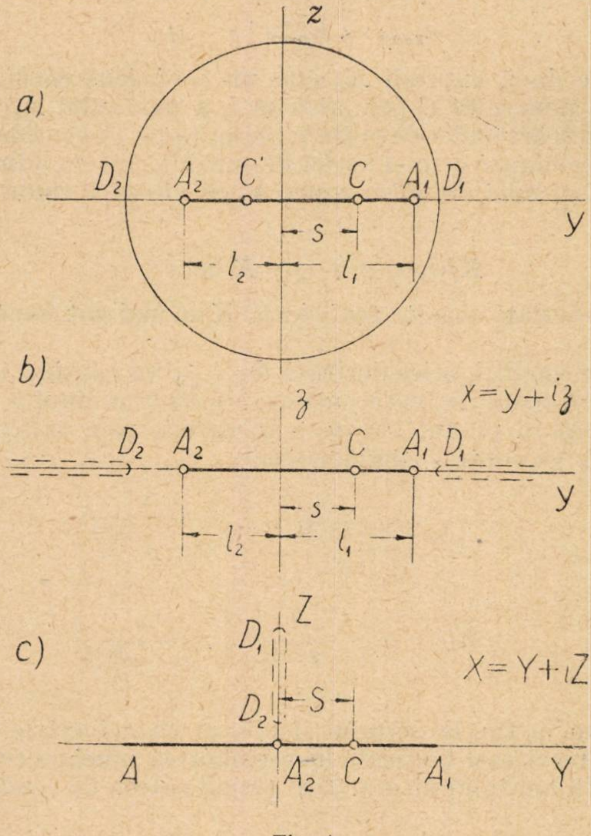

a)
z
D_2
A_2
C'
C
A_1
D_1
y
s
l_2
l_1
b)
z
x=y+iz
D_2
A_2
C
A_1
D_1
y
s
l_2
l_1
c)
Z
D_1
X=Y+iZ
D_2
S
A
A_2
C
A_1
Y

Fig. 4

În aceste condiţii, în planul X, orice funcţie $F_{n-q,q,0}$ este de forma

$$F_{n-q,q,0} = A_0 \ln \frac{X-S}{X+S} + \sum_{j=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(X-S)^j} - \frac{(-1)^j}{(X+S)^j}\right]\cdot \tag{28}$$

Pentru a reveni la planul x, vom ţine seamă de următoarele relaţii elementare

$$\ln\frac{X-S}{X+S} = -\,2\,\mathrm{argth}\,\frac{S}{X} = -\,2\,\mathrm{argch}\,\frac{X}{\sqrt{X^2 - S^2}} =$$

$$= -\,2\,\mathrm{argch}\sqrt{\frac{(l_1 - s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}} \tag{29}$$

și

$$\frac{1}{(X-S)^j} - \frac{(-1)^j}{(X+S)^j} = \frac{(S+X)^j - (S-X)^j}{(X^2-S^2)^j} = \frac{X(C_0 + C_2 X^2 + \ldots + C_{2p} X^{2p})}{(X^2-S^2)^j} =$$

$$= \sqrt{(l_1 - x)(l_2 + x)}\, \frac{D_0 + D_1 x + \ldots + D_{2p} x^{2p}}{(x-s)^j} \tag{30}$$

unde $2p = j - 1$ pentru j impar și $2p = j - 2$ pentru j par ; vom deduce imediat

$$F_{n-q,q,0} = A_0 \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}} + \sqrt{(l_2 + x)(l_1 - x)}\, \frac{\sum\limits_{q=0}^{n-2} a_q x^q}{(x-s)^{n-1}}\,. \tag{31}$$

Aplicînd formula (12 a) (pentru punctele aripii, $z = 0$, $x = y$) și observînd că viteza axială tinde spre infinit ca $\ln | s - y |$, după cum s-a arătat mai sus, obținem viteza de perturbație axială datorită muchiei OC $(s > 0)$,

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x - s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q x^q \sqrt{(l_2 + x)(l_1 - x)}\,\right]. \tag{32}$$

Se verifică cu ușurință faptul că soluția găsită satisface tuturor condițiilor la limită : partea sa reală este nulă pe cele două segmente A_1D_1, A_2D_2, precum și pe cercul MACH, și partea sa imaginară este constantă pe aripă (A_1A_2).

Dacă punctul C se află la stînga originei, în C' $(s < 0)$, deducem înlocuind s prin $-s$,

$$\frac{u^{(-)}}{x_1^{n-1}} = u_{n-1}^{(-)} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(-)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 + s)(x + l_2)}{(l_1 + l_2)(x + s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q^{(-)} x^q \sqrt{(l_2 + x)(l_1 - x)}\right]. \tag{33}$$

b) *Aripa subțire cu un bord de atac supersonic.* Pentru a rezolva acest caz, vom trece de la planul $x = y + iz$ (13) la planul $X = Y + iZ$ definit de relația

$$X^2 = \frac{1 + Bx}{B(l_1 - x)} \tag{34}$$

și vom obține configurația din figura 5*c*.

Este evident că problema de hidrodinamică ce se pune este identică cu cea precedentă, observînd că transformarea (34) utilizată în acest caz se deduce din transformarea (26) prin înlocuirea lui l_2 cu $1/B$.

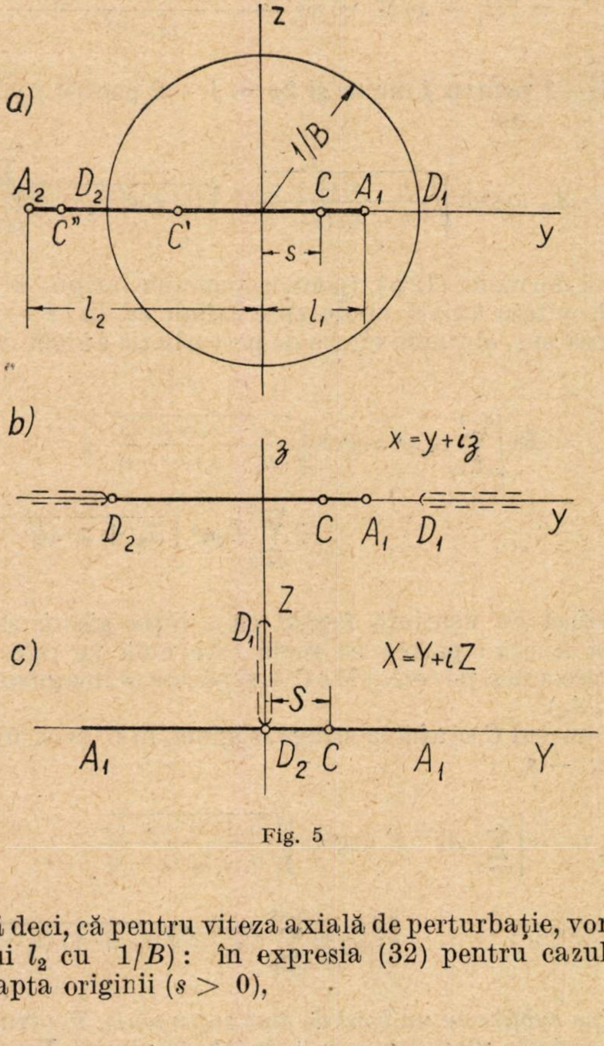

a)
z
1/B
A2
D2
C
A1
D1
C"
C'
y
s
l2
l1
b)
z
x=y+iz
D2
C
A1
D1
y
c)
Z
D1
X=Y+iZ
S
A1
D2
C
A1
Y

Fig. 5

Urmează deci, că pentru viteza axială de perturbaţie, vom face aceeaşi înlocuire (a lui l_2 cu $1/B$): în expresia (32) pentru cazul muchiei OC plasată la dreapta originii ($s > 0$),

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(1 + Bx)}{(1 + Bl_1)(x - s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q x^q \sqrt{(1 + Bx)(l_1 - x)}\right] \qquad (35)$$

și în expresia (33), dacă muchia OC' este plasată la stînga originii,

$$\frac{u^{(-)}}{x_1^{n-1}} = u_{n-1}^{(-)} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(-)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1+s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q^{(-)} x^q \sqrt{(1+Bx)(l_1-x)}\right]. \tag{36}$$

Dacă bordul considerat este în afara cercului MACH, în C'' ($s < -1/B$) de pildă, în acest caz, așa cum am arătat într-o lucrare anterioară [3], aceeași expresie (36) dă viteza de perturbație axială. Este ușor de văzut, într-adevăr, că coeficienții A_q conțin factorul $\sqrt{1 - Bs} = i\sqrt{Bs - 1}$ și funcția hiperbolică argch devine arccos ; rezultă astfel

$$\frac{u'_-}{x_1^{n-1}} = u'_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A'_q x^q \arccos \sqrt{\frac{(l_1+s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C'_q x^q \sqrt{(1+Bx)(l_1-x)}\right]. \tag{37}$$

c) *Aripa de grosime simetrică.* Și acest caz poate fi redus la acela al aripii subțiri cu borduri de atac subsonice dacă înlocuim pe l_2 și l_1 prin $1/B$ în transformarea (26),

$$X^2 = \frac{1+Bx}{1-Bx} \tag{38}$$

care ne dă configurația figurii 6. În aceste condiții, pentru a găsi viteza de perturbație axială datorită muchiei OC ($y = s$) este deajuns să înlocuim în expresiile (31) și (32) l_2 și l_1 cu $1/B$.

Găsim astfel :

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q x^q \operatorname{arcgch} \sqrt{\frac{(1-Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q x^q \sqrt{1-B^2x^2}\right] \tag{39}$$

pentru $s > 0$,

$$\frac{u^{(-)}}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(-)} x^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(1+Bs)(1+Bx)}{2B(x+s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q^{(-)} x^q \sqrt{1-B^2x^2}\right] \tag{40}$$

pentru $s < 0$, și

$$\frac{u'}{x_1^{n-1}} = u'_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A'_q x^q \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{(1+Bs)(1+Bx)}{2B(x+s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C'_q x^q \sqrt{1 - B^2x^2} \right], \tag{41 a}$$

$$\frac{u''}{x_1^{n-1}} = u''_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A''_q x^q \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{(1+Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C''_q x^q \sqrt{1 - B^2x^2} \right] \tag{41 b}$$

pentru $s < -1/B$ respectiv $s > +1/B$.

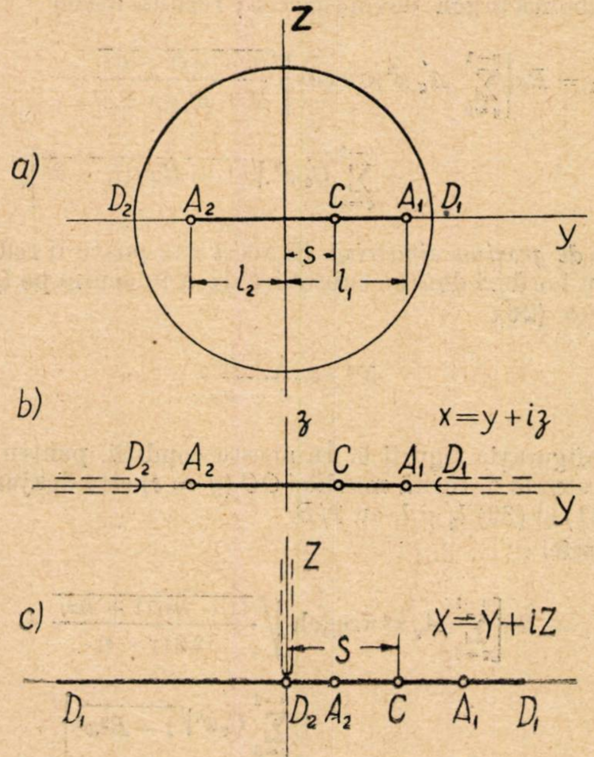


Fig. 6

Aceste formule sînt valabile și pentru aripa subțire cu borduri de atac supersonice.

III. CONTRIBUȚIA BORDULUI DE ATAC SUBSONIC AL ARIPILOR SUBȚIRI

Efectul unui bord de atac subsonic rezultă din considerațiile făcute mai sus. Vom presupune mai întîi că ambele borduri de atac sînt subsonice.

Într-un alt plan auxiliar, $X = Y + iZ$, definit de transformarea

$$x - c = \frac{l}{2}\left(X + \frac{1}{X}\right), \tag{42}$$

unde am pus, pentru simplificare,

$$2\,c = l_1 - l_2 \quad \text{și} \quad 2\,l = l_1 + l_2, \tag{43}$$

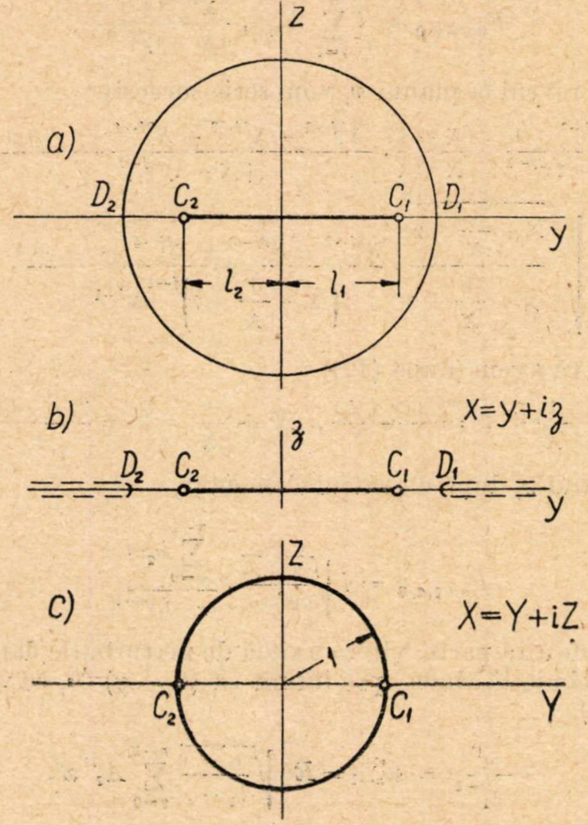


Fig. 7

obținem configurația figurii 7. Facem să corespundă astfel exteriorul tăieturii C_1C_2 din planul x pe exteriorul cercului unitate din planul X, punctul C_1 fiind omologul punctului $X = Y = 1$. În aceste condiții, se vede ușor că singularitățile

$$\frac{1}{(l_1 - x)^{1/2}}, \quad \frac{1}{(l_1 - x)^{3/2}}, \; \ldots, \; \frac{1}{(l_1 - x)^{\frac{2n-1}{2}}},$$

plasate în punctul C al planului x, devin în planul X, respectiv

$$\frac{i}{X-1}, \frac{i}{(X-1)^2}, \ldots, \frac{i}{(X-1)^{2n-1}}.$$

În acest caz, potenţialul fictiv se obţine imediat. Vom ataşa fiecărei singularităţi $iA_{2j-1}/(X-1)^{2j-1}$ singularitatea $-iA_{2j-1}\Big/\left(\frac{1}{X}-1\right)^{2j-1}$ pentru ca cercul unitate să fie linie de curent [6]. Vom găsi astfel

$$F_{n-q,q,0} = i\sum_{j=1}^{n} A_{2j-1}\frac{X^{2j-1}+1}{(X-1)^{2j-1}}. \tag{44}$$

Pentru a reveni la planul x, vom scrie succesiv

$$\frac{X^{2j-1}+1}{(X-1)^{2j-1}} = \frac{X+1}{X-1}\cdot\frac{X^{2j-2}-X^{2j-3}+X^{2j-4}-\ldots+1}{[(X-1)^2]^{j-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{X+\dfrac{1}{X}+2}{X+\dfrac{1}{X}-2}}\cdot\frac{X^{2j-2}-X^{2j-3}+X^{2j-4}-\ldots+1}{\left(X+\dfrac{1}{X}-2\right)^{j-1}X^{j-1}}; \tag{45}$$

observînd apoi că avem (după (42))

$$X+\frac{1}{X}+2 = \frac{2(x+l_2)}{l}, \quad X+\frac{1}{X}-2 = \frac{2(x-l_1)}{l}, \tag{46}$$

obţinem în planul x, după un calcul elementar,

$$F_{n-q,q,0} = i\sqrt{\frac{x+l_2}{x-l_1}}\cdot\frac{\sum\limits_{q=0}^{n-1} a_q x^q}{(x-l_1)^{n-1}}. \tag{47}$$

Cum, pe de altă parte, viteza axială de perturbaţie datorită bordului de atac OC_1 trebuie să tindă spre infinit ca $(l_1-y)^{-1/2}$, se va putea scrie, aplicînd (12 a),

$$\frac{u^{(1)}}{x_1^{n-1}} = u_{n-1}^{(1)} = Re\sqrt{\frac{l_2+x}{l_1-x}}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q. \tag{48}$$

Pentru bordul de atac OC_2 vom avea

$$\frac{u^{(2)}}{x_1^{n-1}} = u_{n-1}^{(2)} = Re\sqrt{\frac{l_1-x}{l_2+x}}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(2)} x^q. \tag{49}$$

În sfîrşit, viteza de perturbaţie axială datorită celor două borduri de atac, va putea fi pusă sub forma

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\,\frac{\sum\limits_{q=0}^{n} C_q x^q}{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}}. \tag{50}$$

Să remarcăm că putem obține soluția în cazul bordului subsonic (OC_1 spre exemplu), ca și în cazurile precedente, în același plan (26), ținînd seama însă, de data aceasta, că prima singularitate ce trebuie să punem în punctul $X = S$ nu mai este o sursă, ln $(X - S)$, ci un dublet, $1/X$. De altfel este ușor de văzut că acest dublet rezultă și din trecerea la limită a celor două surse din expresia (28).

Rezultă astfel că printr-o transformare (26) și o expresie (32), unice, avem soluția generală a problemei puse.

Vom observa că formulele (48) și (49) sînt valabile și pentru cazul în care bordul de atac ce nu a fost luat în considerație (OC_2 în primul caz și OC_1 în al doilea), devine un bord de atac supersonic. În acest caz, nu avem decît să înlocuim pe l_2 (repectiv l_1) prin $1/B$, așa cum am văzut mai înainte.

IV. EXTINDEREA METODEI LA CAZUL GENERAL AL UNEI MUCHII CARE SEPARĂ DOUĂ REGIUNI CU VITEZE VERTICALE DIFERITE

Schema de calcul folosită mai sus pentru determinarea vitezei de perturbație axială datorită unei muchii, se aplică și în cazul cînd viteza verticală variază brusc de la o valoare

$$w^{(s)}_{m-1} = \sum_{q=0}^{m-1} w^{(s)}_{m-q-1,s}\, x_1^{m-q-1}\, x_2^q\,, \tag{51}$$

la stînga muchiei OC, la valoarea

$$w^{(d)}_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} w^{(d)}_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q\,, \tag{52}$$

la dreapta ei.

Într-adevăr, se poate presupune că pe o fîșie elementară, $OC_s C_d$, în vecinătatea muchiei considerate (fig. 8), panta aripii este nulă. În aceste condiții muchia poate fi înlocuită, din punctul de vedere al calculului prin două muchii: OC_s, unde viteza verticală variază de la $w^{(s)}_{n-1}$ la 0, și OC_d, unde viteza verticală variază de la 0 la $w^{(d)}_{n-1}$.

Pentru calculul vitezei axiale u, totul se petrece ca și cum viteza verticală ar fi nulă la stînga muchiei OC și ar avea valoarea $w^{(d)}_{m-1} - w^{(s)}_{m-1}$, la dreapta acesteia.

Regăsim, prin urmare, cazul studiat mai sus, admițînd ca viteza verticală diferența dintre două polinoame omogene de ordine diferite. În virtutea aproximărilor admise în ipoteza micilor perturbații, putem separa efectele corespunzătoare acestor două polinoame. În aceste condiții considerînd cazul aripii subțiri cu borduri de atac subsonice, ale cărui rezultate se aplică și aripii subțiri cu un bord de atac supersonic și chiar, aripii groase, viteza de perturbație axială datorită muchiei considerate este dată de expresia

$$u = u^{(d)} - u^{(s)} \tag{53}$$

unde am notat cu $u^{(d)}$ și $u^{(s)}$ respectiv,

$$u^{(d)} = x_1^{n-1}\, Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(d)}\, x^q \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + \sum_{q=0}^{n-2} C_q^{(d)}\, x^q \sqrt{(l_2+x)(l_1-x)}\right] \tag{54 a}$$

și

$$u^{(s)} = x_1^{m-1}\, Re\left[\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(s)}\, x^q \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}} + \sum_{q=0}^{m-2} C_q^{(s)}\, x^q \sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}\right]. \tag{54 b}$$

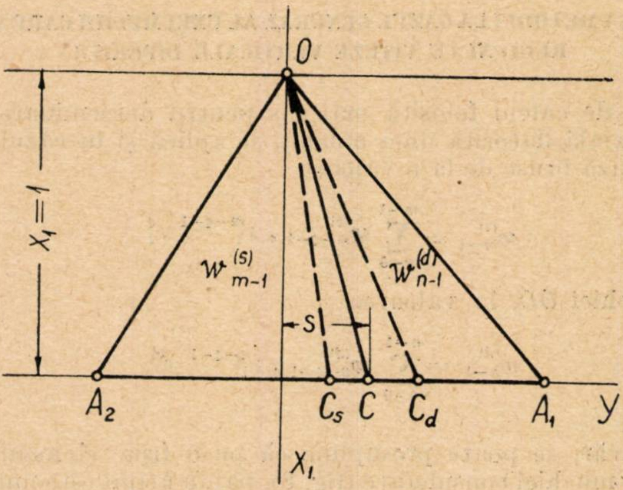


Fig. 8

Dacă cele două polinoame au același grad, fie $m - 1 = n - 1$ problema este întru totul analoagă aceleia din cazul precedent, considerînd la stînga viteza verticală 0 și la dreapta viteza verticală

$$w_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} \left(w^{(d)}_{n-q-1,q} - w^{(s)}_{n-q-1,q}\right) x_1^{n-q-1}\, x_2^q. \tag{55}$$

Rezultă că expresia vitezei u, datorită unei astfel de muchii, este identică cu expresiile stabilite mai sus.

Un caz interesant întîlnit adeseori în practică, este acela al aripilor delta de formă în plan simetrică ($l_1 = l_2 = l$), pe care viteza verticală este reprezentată prin polinoame omogene de același grad, fie $n - 1$, dar diferite la dreapta și la stînga axei Ox_1. În acest caz, viteza de perturbație axială datorită bordului situat de-a lungul acestei axei, se obține făcînd $s \to 0$ în expresia (54 b)

$$u^{(0)} = x_1^{n-1}\, Re\left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q\, x^q \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{l_1(x+l_2)}{(l_1+l_2)\,x}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q\, x^q \sqrt{l^2 - x^2}\right]. \tag{56}$$

V. APLICAȚII

Pentru fixarea ideilor, vom determina mai jos viteza de perturbație axială în jurul unei aripi triunghiulare, subțire sau groasă. În afara efectului bordurilor de atac, în vederea unor aplicații interesante, vom considera în plus, efectul unei muchii OC (fig. 1), care separă regimuri diferite de viteză verticală.

Să presupunem că viteza verticală pe aripa considerată, este dată de expresiile

$$w_{m-1}^{(2)} = \sum_{q=0}^{m-1} w_{m-q-1,\,q}^{(2)}\, x_1^{m-q-1}\, x_2^q \tag{57}$$

pe suprafața OA_2C și

$$w_{n-1}^{(1)} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,\,q}^{(1)}\, x_1^{n-q-1}\, x_2^q \tag{58}$$

pe suprafața OCA_1.

Prin aplicarea adecvată a formulelor generale stabilite mai sus, obținem, după cîteva calcule elementare, următoarele rezultate :

a) *pentru aripa subțire cu borduri de atac subsonice*, aplicăm formulele (48) și (49) pentru bordurile de atac și formula (32) pentru muchia OC, deci

$$u = Re\left[x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)}\, x^{(q)}\sqrt{\frac{l_2+x}{l_1-x}} + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(2)}\, x^q\sqrt{\frac{l_1-x}{l_2+x}} + \right.$$
$$\left. + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=1}^{n-1} A_q^{(1)}\, x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)}\, x^q\right)\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}}, \right. \tag{59}$$

unde termenii algebrici datoriți muchiei OC au fost înglobați în termeni datoriți bordurilor de atac ;

b) *pentru aripa subțire cu un bord de atac* (OA_2 *de pildă*) *supersonic* aplicăm formula (48) cu $l_2 = \frac{1}{B}$ pentru bordul OA_1, formula (35) cu $s = l_2$ pentru bordul OA_2 și tot formula (35) pentru muchia OC, în consecință

$$u = Re\left[x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)}\, x^q\sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{2}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right.$$
$$\left. + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)}\, x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)}\, x^q\right) \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x-s)}}\right]; \qquad (60)$$

c) *pentru aripa cu grosime simetrică* se aplică formula (39) o dată cu $s = l_1$ și apoi $s = l_2$ pentru bordurile OA_1 respectiv OA_2 și tot formula (39) pentru muchia OC, în consecință

$$u = Re\left[x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} C_q^{(1)}\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}} + \right.$$
$$+ x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} + \qquad (61)$$
$$+ \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-1} A_q^{(1)} x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-1} A_q^{(2)}\, x^q\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}} +$$
$$\left. + \left(x_1^{n-1}\sum_{q=0}^{n-2} D_q^{(1)}\, x^q + x_1^{m-1}\sum_{q=0}^{m-2} D_q^{(2)}\, x^q\right)\sqrt{1-B^2x^2}\right].$$

După cum am arătat mai sus, această ultimă formulă este valabilă și pentru aripa subțire sau groasă cu borduri de atac supersonice.

Dacă cele două polinoame $w_{n-1}^{(1)}$ și $w_{m-1}^{(2)}$ au același grad, fie $n - 1 = m - 1$, expresiile obținute pot fi scrise respectiv

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{n} C_q\, x^q}{\sqrt{(l_1-x)(l_2+x)}} + \sum_{q=0}^{n-1} A_q\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(x+l_2)}{(l_1+l_2)(x-s)}}\right], \qquad (62\,\mathrm{a})$$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\sum_{q=0}^{n-1}\left[C_q^{(1)}\, x^q\sqrt{\frac{1+Bx}{l_1-x}} + C_q^{(2)}\, x^q \arccos\sqrt{\frac{(l_1+l_2)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x+l_2)}} + \right.$$
$$\left. + A_q\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(l_1-s)(1+Bx)}{(1+Bl_1)(x-s)}}\right], \qquad (62\,\mathrm{b})$$

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{n-1}\left(C_q^{(1)}\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-Bl_1)(1+Bx)}{2B(x-l_1)}} + \right.\right.$$
$$+ C_q^{(2)}\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+Bl_2)(1+Bx)}{2B(x+l_2)}} +$$
$$\left.\left. + A_q\, x^q \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-Bs)(1+Bx)}{2B(x-s)}}\right) + \sum_{q=0}^{n-2} D_q\, x^q\sqrt{1-B^2x^2}\right]. \qquad (62\,\mathrm{c})$$

Un alt caz practic este acela al muchiei OC plasată de-a lungul axei Ox pe o aripă simetrică în raport cu planul $Ox_1\,x_3$. În acest caz avem $l_1 = l_2 = l$, $m = n$, $w^{(2)}_{m-1}(x_1, -x_2) \equiv w^{(1)}_{n-1}(x_1, x_2)$ şi observînd că în aceste condiţii viteza u trebuie să prezinte aceeaşi simetrie,

$$u(x_1, -x_2) \equiv u(x_1, x_2) \tag{63}$$

rezultă imediat că în expresiile (59) şi (61) trebuie să avem

$$C^{(1)}_{2q+1} = -C^{(2)}_{2q+1}, \qquad C^{(1)}_{2q} = C^{(2)}_{2q}, \tag{64}$$

şi relaţii analoage pentru coeficienţii A_q şi D_q.

Ţinînd seama, mai departe, de relaţiile

$$Re\left[\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(x+l)}} + \right.$$
$$\left. + \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-Bl)(1+Bx)}{2B(x-l)}}\right] = Re\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}}, \tag{65 a}$$

$$Re\left[\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1+Bl)(1+Bx)}{2B(x+l)}} - \arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{(1-Bl)(1+Bx)}{2B(x-l)}}\right] =$$
$$= Re\arg\operatorname{ch} Bl\sqrt{\frac{(1-B^2x^2)}{B^2(l^2-x^2)}}, \tag{65 b}$$

făcînd pe s să tindă spre 0 şi remarcînd mai departe că se poate scrie

$$Re\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{x+l}{2x}} = \frac{1}{2}\,Re\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}, \tag{66}$$

obţinem după cîteva calcule elementare

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} C_{2q}\,x^{2q}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2q}x^{2q}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\right], \tag{67}$$

pentru aripa subţire ca borduri de atac subsonice şi

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q}\,x^{2q}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2(l^2-x^2)}} + \right.$$
$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\,x^{2q+1}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{l^2(l^2-x^2)}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2q}\,x^{2q}\arg\operatorname{ch}\sqrt{\frac{1}{B^2x^2}} +$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{2q}\,x^{2q}\sqrt{1-B^2x^2}\right]. \tag{68}$$

pentru aripa groasă, unde am utilizat simbolul $E\,(t)$ pentru cel mai mare întreg care nu depășește t.

În sfîrșit, dacă distribuția vitezelor pe aripă este antisimetrică în raport cu planul Ox_1x_3, un raționament analog ne conduce la expresii similare cu (67) și (68)

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\frac{\sum\limits_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\,x^{2q+1}}{\sqrt{l^2-x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_{2q+1}\,x^{2q+1}\,\text{arg ch}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}\,\right] \tag{69}$$

pentru aripa subțire cu borduri de atac subsonice și

$$\frac{u}{x_1^{n-1}} = u_{n-1} = Re\left[\sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q+1}\,x^{2q+1}\,\text{arc cos}\sqrt{\frac{1-B^2x^2}{B^2\,(l^2-x^2)}} + \right.$$
$$+ \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} C_{2q}\,x^{2q}\,\text{arc cos}\,Bl\sqrt{\frac{1-B^2x^2)}{B^2\,(l^2-x^2}} +$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} A_{2q+1}\,x^{2q+1}\,\text{arg ch}\sqrt{\frac{1}{B^2x^2}} + \sum_{q=0}^{E\left(\frac{n-2}{2}\right)} D_{2q+1}\,x^{2q+1}\sqrt{1-B^2x^2}\,\right] \tag{70}$$

pentru aripa subțire cu borduri de atac supersonice.

VI. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Am văzut mai sus cum se determină expresia generală a vitezei de perturbație axială în cazul scurgerilor omogene de ordin superior.

Să determinăm acum constantele ce apar în expresia acestei viteze.

Pentru simplificarea expunerii vom studia cazul unei viteze verticale dată de două polinoame de forma (52), avînd același grad, $w_{n-1}^{(d)}$ la dreapta și $w_{n-1}^{(s)}$ la stînga unei muchii $OC\,(s \neq 0$ și $s \neq \pm 1/B)$ (fig. 1).

Viteza u va fi dată de expresia (62 a) pentru aripa subțire cu borduri de atac subsonice, de expresia (62b) pentru aripa subțire cu un bord de atac supersonic și de expresia (62c) pentru aripa groasă simetrică cu borduri de atac subsonice.

Reamintim că formula (62 c) este valabilă și pentru aripa groasă, ca și pentru aripa subțire cu borduri de atac supersonice.

Se vede lesne că numărul constantelor necunoscute, cuprinse în expresiile (62 a), (62b) și (62c) este respectiv $2n + 1$, $3n$ și $4n - 1$.

Pentru a obține sistemul de ecuații care va da aceste constante, vom pleca de la expresia (13) pe care o vom scrie sub forma

$$(-1)^q\,x^q\,\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\,dF_{n-q-1,\,q,\,1} = (-1)^{n-1}\,x^{n-1}\,dF_{1,\,n-1,\,0} \tag{71}$$

sau încă

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = Re(-1)^{n-q}\, i \int x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, dF_{1,n-1,0} \tag{72}$$

Observînd mai departe, ce se poate scrie

$$F_{1,n-1,0} = \frac{d^{n-1} U_{n-1}}{dx^{n-1}}, \tag{73}$$

unde am notat cu U_{n-1} funcția analitică de variabilă complexă x, a cărei parte reală pe aripă este $u_{n-1} = u/x_1^{n-1}$. deducem

$$\Phi_{n-q-1,q,1} = Re(-1)^{n-q}\, i \int_{x_0}^{x} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{74}$$

unde x_0 este un punct de viteză w nulă.

Vom impune acestor derivate $\Phi_{n-q-1,q,1}$ două serii de condiții :

a) ca valorile lor pe aripă, la stînga și la dreapta muchiei OC să fie date de expresiile

$$\Phi^{(s)}_{n-q-1,q,1} = Re(-1)^{n-q}\, i \int_{x_0}^{x_s} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{75 a}$$

$$\Phi^{(d)}_{n-q-1,q,1} = Re(-1)^{n-q}\, i \int_{x_0}^{x_d} x^{n-q-2} \sqrt{1 - B^2 x^2}\, \frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\, dx, \tag{75 b}$$

unde x_0 este un punct de viteză verticală nulă, x_d și x_s, respectiv, puncte pe aripă la dreapta și la stînga muchiei OC;

b) ca ele să nu varieze în vecinătatea axei Ox, sau a liniilor MACH ieșite din punctul O. Aceste două restricții impuse de natura problemei necesită condiția

$$\left(\frac{d^n U_{n-1}}{dx^n}\right)_{x=0} = 0 \tag{76}$$

și încă, relațiile

$$\left(\frac{d^p U_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=-1/B} = 0 \tag{77 a}$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n-1)$$

$$\left(\frac{d^p U_{n-1}}{dx^p}\right)_{x=+1/B} = 0 \tag{77 b}$$

Vom folosi cele $2n + 1$ ecuații (75) și (76) în cazul *aripii subțiri cu borduri de atac subsonice*, cele $2n + 1 + n - 1 = 3n$ ecuații (75), (76), (77 a sau b) pentru *aripa subțire cu un bord de atac supersonic* și toate cele $2n + 1 + 2n - 2 = 4n - 1$ ecuații (75), (76), (77) pentru cazul *aripii groase* sau al *aripii subțiri cu borduri de atac supersonice*.

Condițiile neutilizate în primele două cazuri sînt satisfăcute automat.

Cu ajutorul formulei (18) vom aplica ecuațiile (75 a) și (75 b) sub forma următoare :

$$Re(-1)^{n-q}\, i\int_{x_0}^{x_s} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^nU_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,w^{(s)}_{n-q-1,\,q}}{C^q_{n-1}} \qquad (78\text{ a})$$

și

$$Re(-1)^{n-q}\, i\int_{(\Gamma_s)} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^nU_{n-1}}{dx^n}\,dx =$$

$$= \frac{(n-1)!\left(w^{(d)}_{n-q-1,\,q} - w^{(s)}_{n-q-1,\,q}\right)}{C^q_{n-1}} \qquad (78\text{ b})$$

(unde Γ_s este un semicerc cu raza r infinit mică, descris în jurul punctului $x = y = s$), pentru aripa subțire cu borduri de atac subsonice sau pentru aripa subțire cu un singur bord de atac subsonic ; și sub forma

$$Re(-1)^{n-q}\, i\int_{(\Gamma_{l_1})} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^nU_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,w^{(d)}_{n-q-1,\,q}}{C^q_{n-1}} \qquad (79\text{ a})$$

și

$$-Re(-1)^{n-q}\, i\int_{(\Gamma_{l_2})} x^{n-q-2}\sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{d^nU_{n-1}}{dx^n}\,dx = \frac{(n-1)!\,w^{(s)}_{n-q-1,\,q}}{C^q_{n-1}} \qquad (79\text{b})$$

pentru aripa groasă sau pentru aripa subțire cu borduri de atac supersonice.

Dacă regimul vitezei verticale se schimbă de-a lungul mai multor muchii, fiecare muchie va introduce n coeficienți noi dar tot ea va furniza n noi ecuații de forma (78 b).

În sfîrșit, dacă aripa are o muchie de-a lungul axei Ox_1 $(s=0)$, condiția (76) privind axa Ox_1 nu mai este valabilă, dar locul ei va fi luat de condiția obținută impunînd vitezei u să rămînă finită pentru $x = 0$.

Această condiție anulează pentru $x = 0$ coeficientul C_0 al lui $\frac{1}{\sqrt{x}}$ cînd este vorba de bordul subsonic al unei aripi subțiri, sau coeficientul A_0 al lui log x în orice alt caz.

De altfel, se poate vedea lesne că soluția în acest caz se obține din cazul $s \neq 0$ făcîndu-l pe s să tindă spre zero.

Într-adevăr, făcînd $s \to 0$ în ecuația obținută din (76) pentru $s \neq 0$ rezultă noua condiție (C_0 sau A_0 egal cu zero), dar dacă $s \to 0$ nu vom mai avea $\left(\frac{d^nU_{n-1}}{dx^n}\right)_{x=0} = 0$ pentru că numitorul acestei expresii tinde spre zero în același timp cu s.

VII. EXTINDERE LA CAZUL SCURGERILOR OMOGENE ARBITRARE

Un alt caz remarcabil, care ilustrează posibilitățile metodei utilizate în acest studiu, este acela al vitezei verticale date de o *fucție omogenă arbitrară*

$$w_{n-1} = x_1^{n-1} F(y) = x_1^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}(s)\, y^q, \tag{80}$$

unde coeficienții $w_{n-q-1,q}(s)$ sînt funcții continue și derivabile de variabila $s = y$, abscisa unui punct curent situat pe aripă. Acest caz poate fi tratat prin aceeași metodă. În acest scop, observăm în prealabil că în cazul unei muchii care separă două regiuni cu regimuri de viteză verticală definite de polinoame omogene de același grad, $n-1$, coeficienții expresiei de perturbație axială (62), A_q, C_q, D_q sînt funcții liniare de diferențele $w^{(d)}_{n-q-1,q} - w^{(s)}_{n-q-1,q} = \Delta w_{n-q-1,q}$. În acest caz, pentru o variație continuă, aceste diferențe finite se transformă în diferențiale

$$dw_{n-q-1,q} = \frac{dw_{n-q-1,q}(s)}{ds}\, ds = f\,(s)\, ds \tag{81}$$

și viteza axială de perturbație într-un punct y, datorită unei astfel de schimbări de regim în punctul s, va fi (pentru o aripă subțire cu borduri de atac subsonice, de pildă)

$$du = x_1^{n-1} \, Re \left[\sum_{q=0}^{n-1} A_q(s) y^q \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(l_1 - s)(l_2 + y)}{(l_1 + l_2)(y - s)}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{q=0}^{n-2} C_q(s) y^q \sqrt{(l_1 - y)(l_2 + y)} \right] ds \tag{82}$$

și viteza axială pe întreaga aripă se obține printr-o singură cuadratură,

$$u = u_{l_1} + u_{l_2} + \int_{l_2}^{l_1} \frac{du}{ds}\, ds, \tag{83}$$

unde u_{l_1} și u_{l_2} reprezintă vitezele datorite schimbărilor de regim de-a lungul bordurilor de atac.

КОНИЧЕСКИЕ ОБТЕКАНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ТОНКИХ ТРЕУГОЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ ИЛИ КРЫЛЬЕВ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пользуясь гидродинамической аналогией, авторы доказывают, что исследование равномерного обтекания высшего порядка может быть сведено к исследованию некоторых особенностей (24) или (25) в плос-

кости Буземана в точках, соответствующих кромкам, отделяющим две области распределения различных вертикальных скоростей.

Эти особенности, обусловленные физическими условиями обтекания в непосредственной близости от рассматриваемой кромки, имеют гидродинамический характер (источники, диполи и пр.) и воспроизводятся в надлежащим образом выбранной плоскости (26) так, что задача граничных условий является известной задачей двухмерного обтекания.

Таким образом устанавливаются осевые скорости возмущения, вызваные кромкой (32) или подзвуковой передней кромкой тонкого крыла (48). Далее приводится общая форма скоростей возмущения вокруг тонких или толстых крыльев с подзвуковыми или сверхзвуковыми передними кромками (83).

Указывается также решение для произвольного равномерного обтекания.

В последней части рассматривается вопрос определения постоянных появляющихся в общем выражении осевых скоростей возмущения.

HIGH ORDER CONICAL FLOWS AROUND TRIANGULAR WINGS, THIN OR OF A VARIABLE THICKNESS

(ABSTRACT)

Based upon a hydrodynamic analogy, the authors show that any high order homogeneous motions can be reduced to the study of a series of singularities (24) or (25), placed in Busemann's plan along the wedges which separate two regions with different vertical velocity distributions.

These singularities, required by the physical flow conditions in the immediate proximity of the considered wedge, have a hydrodynamic character (sources, doublets, etc.), and are reproduced in a conveniently chosen plane (26) such that the problem of boundary conditions be a known problem of a two-dimensional motion.

Thus, the axial disturbance velocities, due to a wedge (32) or to subsonic leading edge of a thin wing (48), are established. Further, the axial disturbance velocities around thick or thin wings, with subsonic or supersonic leading edges, are given in their general forms.

The solution for an arbitrary homogeneous flow is also indicated (83).

The determination of such constants as appear in the general expression of the disturbance velocity is finally considered.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli. *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 9–10, 1952.
2. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mișcările conice la aripile groase și cu incidență variabilă.* Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 3–4, 1953.

3. E. Carafoli, M. Ionescu, *Traînée d'ailes triangulaires doublement coniques à pente variable, en écoulement supersonique*. Revue de Mécanique Appliquée, t. I, nº. 1, 1956.

4. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956,

5. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes Delta en régime supersonique*. La Recherche Aéronautique, nr. 7, 1949.

6. G. N. Lance, *The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream*. The Aeronautical Quarterly, vol. V, part. I a, 1954.

7. M. A. Heaslet, H. Lomax, *Supersonic and Transsonic Small Perturbation Theory*. p. 193. V. şi bibliografia, p. 340 (*General Theory of High-Speed Aerodynamics*), W. R. Sears, Editor, Princeton, 1954.

8. E. Carafoli, *Scurgeri conice în curent supersonic* (în l. chineză). Ediţia Academia Sinica, Pekin, 1955.

9. L. M. Milne-Thomson, *The Circle Theorem*. Proc. Cam. Phil. Soc., 36, 1940.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

AEROMECANICĂ

INFLUENŢA PEREŢILOR ASUPRA ÎNCERCĂRILOR DE ARIPI TOROIDALE ÎN SUFLERII CIRCULARE

DE

N. N. PATRAULEA şi L. DUMITRESCU

1. Introducere

În lucrarea de faţă ne propunem să determinăm corecţiile care trebuie aduse rezultatelor încercării în suflerie a aripilor toroidale, ţinînd seama de limitarea vînei de fluid.

Prin aripă toroidală *) înţelegem o aripă cu o formă apropiată unui cilindru circular (fig. 1), de rază R şi axă Oz.

Coarda unui profil poate face cu axa Oz un unghi de incidenţă α, considerat ca pozitiv cînd are orientarea din figura 1.

Vom presupune că în interiorul aripii, concentric cu ea, se află un fuselaj cilindric cu axa Oz, de rază r_0; de asemenea, vom presupune că limita jetului sufleriei formează un cerc concentric cu aripa, de rază r_1. Studiul va fi făcut atît pentru cazul cînd sufleria are pereţi solizi, cît şi pentru cazul unei vîne libere, şi reprezintă extinderea unei lucrări anterioare *).

2. Punerea problemei. Condiţii la limită

Linearizînd problema vom înlocui aripa cu un vîrtej legat inelar, cu o intensitate variabilă, plasat în planul xOy. Situîndu-ne în planul lui Trefftz, vom avea de determinat mişcarea în două coroane circulare. Viteza transversală $\boldsymbol{v}$ $(x, y,)$ va deriva din două potenţiale armonice :

$$\boldsymbol{v} = \nabla \varphi \quad (r_0 < \rho < R), \tag{1}$$

$$\Delta\varphi = 0 \tag{2}$$

---

*) N. N. Patraulea, *Mişcarea în jurul unui toropter cu fuzelaj cilindric.* Comunicările Acad. R.P.R., t. V, nr. 11, noiembrie 1955, p. 1631.

şi

$$\boldsymbol{v} = \nabla \Phi \qquad (R < \rho < r_1), \tag{3}$$

$$\Delta \Phi = 0, \tag{4}$$

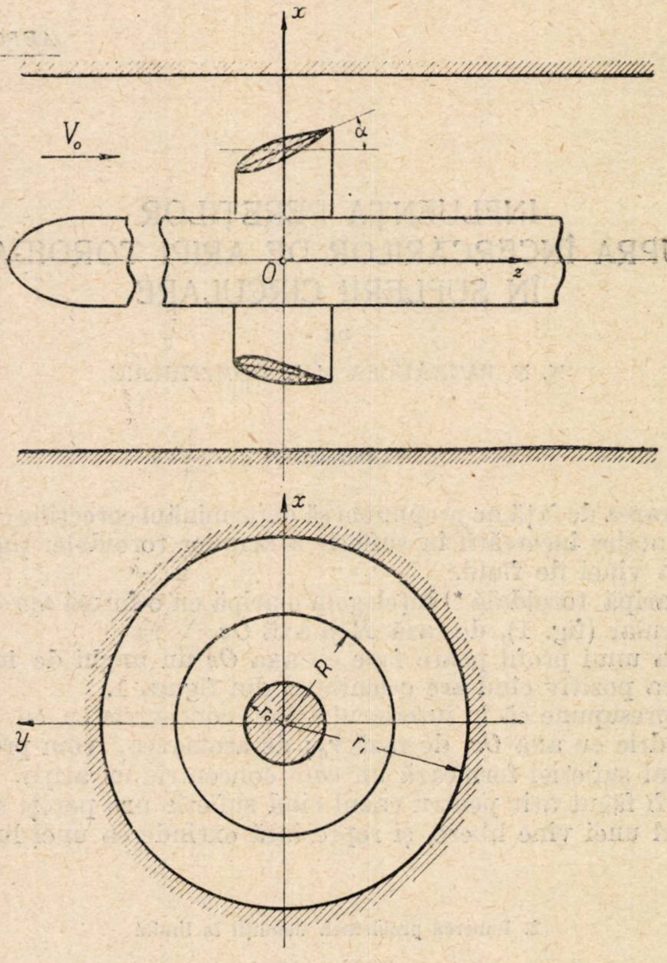


Fig. 1

ρ fiind raza vectoare a unui punct curent. Introducînd variabila complexă $\zeta = x + iy$, vom considera potenţialele complexe

$$f(\zeta) = \varphi + i\,\psi \qquad (r_0 < |\,\zeta\,| < R), \tag{5}$$

$$F(\zeta) = \Phi + i\,\Psi \qquad (R < |\,\zeta\,| < r_1). \tag{6}$$

Pentru aflarea lor, se folosesc următoarele condiții la limită :

$$|\zeta| = r_0 \qquad \psi = 0, \tag{7}$$

$$|\zeta| = R \qquad \Psi - \psi = k_2, \tag{8}$$

$$|\zeta| = r_1 \left\{ \begin{array}{ll} \Psi = k_2, & (9) \\ \Phi = k_1. & (9') \end{array} \right.$$

Condiția (9) corespunde pereților solizi pentru suflerie, iar (9′) vînei libere. Ecuația circulației este

$$\Gamma(\theta) = \varphi - \Phi = kcV_0 \left[\alpha(\theta) - \frac{1}{2V_0} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]. \tag{10}$$

3. Rezolvarea problemei

Dezvoltăm funcțiile $f(\zeta)$ și $F(\zeta)$ în serii Laurent :

$$f(\zeta) = V_0 R \left[a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n R^{-n} \zeta^n + a_{-n} R^n \zeta^{-n}) \right], \tag{11}$$

$$F(\zeta) = V_0 R \sum_1^{\infty} (A_n R^{-n} \zeta^n + A_{-n} R^n \zeta^{-n}) + k_1 + ik_2. \tag{12}$$

Aplicarea condiției (7) dă

$$a_{-n} = a_n \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2n}. \tag{13}$$

Din condiția (9) sau (9′) rezultă

$$A_{-n} = \pm A_n \left(\frac{r_1}{R} \right)^{2n} \tag{14}$$

În cele ce urmează, semnul superior va desemna cazul pereților rigizi, iar semnul inferior, cazul vînei libere. Prin aplicarea condiției (8) se găsește

$$A_n = a_n \frac{1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2n}}{1 \mp \left(\frac{r_1}{R} \right)^{2n}}. \tag{15}$$

Vom introduce notația

$$\Lambda_n = \pm 2 \frac{\left(\frac{r_1}{R} \right)^{2n} \mp \left(\frac{r_0}{R} \right)^{2n}}{1 \mp \left(\frac{r_1}{R} \right)^{2n}}. \tag{16}$$

Presupunem că incidența și coarda aripii se dezvoltă în polinoame trigonometrice, de forma

$$\frac{k}{R}c(\theta)\cdot\ \alpha(\theta) \cong \sum_{0}^{m_1} \varkappa_i \cos i\theta, \tag{17}$$

$$\frac{kc(\theta)}{2R} \cong \sum_{0}^{m_2} c_j \cos j\theta. \tag{18}$$

Acum se poate folosi ecuația circulației (10), care devine

$$\Gamma(\theta) = -V_0 R\left[\sum_{1}^{\infty} a_n \Lambda_n \cos n\theta + \frac{k_1}{V_0 R} - a_0\right] =$$

$$= V_0 R\left\{\sum_{0}^{m_1} \varkappa_i \cos i\theta - \sum_{0}^{m_2} c_j \cos j\theta \sum_{1}^{\infty} n a_n \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\right] \cos n\theta\right\}. \tag{19}$$

Întrucît nu interesează decît circulația Γ, se vede că se poate lua $k_1 = 0$. Ecuația (19) permite determinarea coeficienților a_0 și a_n ($n = 1, 2, \ldots, \infty$).

4. Portanța și rezistența indusă

Portanța și rezistența indusă a unui element de aripă au expresiile

$$dP = \rho V_0 \Gamma(\theta)\ R \cos\theta\ d\ \theta, \tag{20}$$

$$dR_i = \rho\Gamma\ (\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial n} R\, d\theta. \tag{21}$$

Rezultă prin integrare

$$P = -\pi\rho V_0^2 R^2 a_1 \Lambda_1, \tag{22}$$

$$R_i = -\pi\rho V_0^2 R^2 \sum_{1}^{\infty} n\, a_n^2 \Lambda_n \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\right]. \tag{23}$$

5. Cazul mișcării în fluidul nelimitat

Dacă $r_1 \to \infty$, în potențialul complex $F(\zeta)$ rămîn numai termenii în ζ^{-n}, iar în ecuația circulației (19) coeficienții Λ_n capătă valoarea -2. Vom introduce notații cu bară pentru acest caz, și anume $\overline{a}_n$ și $\overline{\Lambda}_n$ (ținînd seama că $\overline{\Lambda}_n = -2$). Coeficienții $\overline{a}_n$ se determină dintr-o ecuație analoagă ecuației (19), care coincide cu cea determinată de noi anterior*). De asemenea, portanța reală a aripei $\overline{P}$ și rezistența indusă reală (în absența pereților sufleriei), $\overline{R}_i$ se găsesc făcînd înlocuirile corespunzătoare în (22) și (23).

---

*) Loc. cit.

6. Coeficienţii de corecţie pentru vîna limitată

Vom defini doi coeficienţi de corecţie care permit să se treacă de la valorile obţinute pentru portanţă şi rezistenţă în suflerie, la cele reale, din aer liber. Ei sînt

$$\Pi_P = \frac{\overline{P}}{P} = \frac{\overline{a}_1 \overline{\Lambda}_1}{a_1 \Lambda_1}, \tag{24}$$

$$\Pi_R = \frac{\overline{R_i}}{R_i} = \frac{\sum_1^{\infty} n\, a_n^2\, \overline{\Lambda}_n \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\right]}{\sum_1^{\infty} n\, a_n^2 \Lambda_n \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^{2n}\right]}. \tag{25}$$

Formulele (24) şi (25) rezolvă problema propusă.

7. Caz particular

Vom considera un caz simplu şi anume o aripă fără fuzelaj, avînd coarda constantă c_0 şi incidenţa variind după legea

$$\alpha = \varphi_0 + \alpha_0 \cos \theta. \tag{26}$$

Aceasta corespunde unei conicităţi φ_0 a aripii la care se adaugă o incidenţă globală α_0 a planului aripii faţă de V_0.

În acest caz, ecuaţia (19) se rezolvă imediat. Se obţin următoarele rezultate :

$$\Lambda_1 = \frac{\pm 2 \left(\frac{r_1}{R}\right)^2}{1 \mp \left(\frac{r_1}{R}\right)^2}, \tag{27}$$

$$\Pi_P = \frac{\overline{\Lambda}_1 \left(\frac{k\, c_0}{2\, R} - \Lambda_1\right)}{\Lambda_1 \left(\frac{k\, c_0}{2\, R} - \overline{\Lambda}_1\right)}, \tag{28}$$

$$\Pi_R = \frac{\overline{\Lambda}_1 \left(\frac{k\, c_0}{2\, R} - \Lambda_1\right)^2}{\Lambda_1 \left(\frac{k\, c_0}{2\, R} - \overline{\Lambda}_1\right)^2}, \tag{29}$$

unde $\overline{\Lambda}_1 = -2$.

Reamintim că în aceste formule semnul superior corespunde sufleriei cu vînă ghidată, iar cel inferior, sufleriei cu vînă liberă.

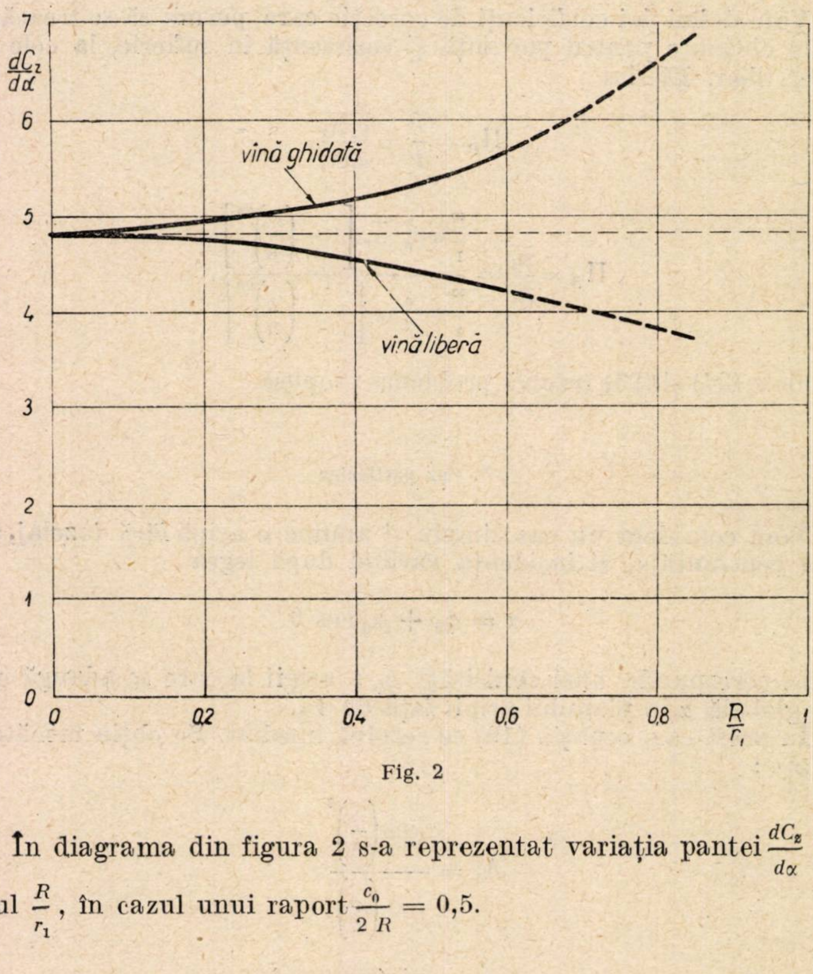


Fig. 2

În diagrama din figura 2 s-a reprezentat variaţia pantei $\frac{dC_z}{d\alpha}$ cu raportul $\frac{R}{r_1}$, în cazul unui raport $\frac{c_0}{2R} = 0{,}5$.

8. Verificări experimentale. Observaţii

Pentru verificarea rezultatelor prezentate s-au făcut experienţe cu aripi toroidale de diferite diametre, într-o suflerie cu vînă liberă şi într-una cu vînă ghidată *). Ele au pus în evidenţă un acord foarte bun cu valoarea teoretică a portanţei unei asemenea aripi în fluid nelimitat ; pentru diametrele încercate corecţiile de pereţi sînt mici avînd ordinul de mărime al preciziei de determinare experimentală a pantei $\frac{dC_z}{d\alpha}$. Variaţiile înregistrate au acelaşi sens cu teoria şi acelaşi ordin de mărime. S-a demonstrat astfel teoretic și experimental că, pînă la rapoarte $\frac{R}{r_1}$ de 0,2...0,25, se pot neglija corecțiile de pereți.

---

*) La experienţe au colaborat C. I. Popescu, D. Căpriţă şi H. Gab.

Mai trebuie remarcat că, pentru cazul vînei libere, ipotezele teoretice nu mai sînt satisfăcute la valori mari ale raportului $\frac{R}{r_1}$, întrucît întreaga vînă de aer este deviată de prezența aripii.

Primită la redacție la 31 martie 1957.

ВЛИЯНИЕ СТЕНОК НА ИСПЫТАНИЕ ТОРОИДАЛЬНЫХ КРЫЛЬЕВ В КРУГЛОЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Авторы рассматривают обтекание тороидального крыла с цилиндрическим фюзеляжем (рис. 1) в присутствии стенок аэродинамической трубы. Рассматривается как случай аэродинамической трубы с жесткими стенками, так и случай открытой струи. Задача рассматривается в плоскости Треффца путем введения двух комплексных потенциалов (5) и (6), которые определяются при помощи граничных условий (7), (8), (9), (10). При разложении потенциалов в ряды Лорана (11), (12) коэффициенты находятся из выражений (13), (14), (15), (19). Подъемная сила и индуктивное сопротивление определяются выражениями (22) и (23).

Для случая, когда жидкость не ограничена, выведенные для частного случая формулы совпадают с формулами, выведенными в одной из предыдущих работ [1]. Поправочные коэффициенты для перехода от подъемной силы P и сопротивления R_i, определенных в аэродинамической трубе, к подъемной силе и сопротивлению в неограниченной жидкости ($\overline{P}$ и $\overline{R}_i$) даются выражениями (24) и (25).

INFLUENCE DES PAROIS SUR LES RÉSULTATS DES ESSAIS D'AILES TOROÏDALES DANS LES SOUFFLERIES À VEINE CIRCULAIRE

(RÉSUMÉ)

Les auteurs étudient l'écoulement autour d'une aile toroïdale à fuselage (fig. 1), en tenant compte de la présence des parois d'une soufflerie. On considère les cas d'une veine libre et d'une veine guidée. Le problème

est traité dans le plan de Trefftz et on y introduit les potentiels complexes (5), (6), qui sont déterminés à l'aide des conditions aux limites (7), (8), (9), (10). Les potentiels sont développés en séries de Laurent, (11), (12), les coefficients étant donnés par (13), (14), (15), (19). La portance et la résistance induite ont les expressions données par (22), (23).

En l'absence des parois, on retrouve les résultats obtenus dans un ouvrage antérieur. Les coefficients de correction, qui permettent de passer des valeurs de la portance P et de la résistance induite R_i, déterminées par voie expérimentale en soufflerie, aux valeurs réelles, en fluide non limité, $(\bar{P}, \bar{R}_i)$, sont donnés par (24), (25).

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

AEROMECANICĂ

INDICAŢII ASUPRA MĂRIRII COEFICIENTULUI DE CALITATE AL ELICELOR PROPULSIVE[*]

DE

N. N. PATRAULEA

1. Introducere. Ideea măririi coeficientului de calitate prin întubarea elicelor a făcut, mai de mult, obiectul unor studii [1] [**]).

În ultimul timp, atît cercetători străini cît şi noi ne-am preocupat de posibilitatea realizării unor aparate cu aripă inelară (Coleopter, Toropter); de aceea, am crezut că este de actualitate să reluăm în studiu problema măririi coeficientului de calitate.

Încercăm să expunem aici aspectele teoretice ale problemei sub o formă mai generală şi să evaluăm influenţa frecării.

În afară de aceasta, lucrarea se încheie cu indicarea unei noi metode pentru mărirea coeficientului de calitate.

Cu această ocazie, se arată un fapt de o oarecare însemnătate ştiinţifică şi anume că elicele cu pale nerectilinii, de formă specială, pot avea coeficientul de calitate mai mare decît unu.

În acest studiu vor fi exceptate aparatele care se pot susţine la punct fix prin efecte de reacţie, şi ne vom referi numai la aparatele care înving greutatea lor proprie prin forţe exercitate de fluidul înconjurător [***]).

Se ştie că, principial, producerea unor forţe statice nu implică cheltuirea unei energii (de exemplu forţa portantă aerostatică).

Dacă însă în zborul la punct fix, forţa portantă este provocată prin dispozitive aerodinamice (de exemplu cu ajutorul elicelor), în aparatele folosite pînă acum este nevoie să se introducă o energie de la bordul aparatului şi aceasta chiar în lipsa frecărilor.

---

[*]) Prezentată la 28 martie 1957 în Sesiunea ştiinţifică A.M.T.

[**]) p. 323 şi următoarele.

[***]) Adică aparatele a căror forţă portantă nu implică în mod esenţial o micşorare a masei aparatului.

Este adevărat că pentru aceeași forță portantă și în lipsa frecărilor, puterea devine din ce în ce mai mică, pe măsură ce diametrul unei elice portante devine din ce în ce mai mare, anulîndu-se pentru un diametru infinit.

Așa se explică întrebuințarea diametrelor relativ mari ale rotoarelor de elicopter.

După cum se știe, însă, considerarea greutății proprii a palelor și a frecării, limitează diametrul optim al rotoarelor.

Pe de altă parte, interesează mult în practică și mărimea aparatului. De aceea, pentru caracterizarea unui sistem portant la punct fix, se introduce în discuție și mărimea suprafeței proiecției aparatului pe un plan perpendicular pe direcția tracțiunii.

2. Coeficient de calitate. După cum se știe, un număr deosebit de util pentru caracterizarea elicelor portante, funcționînd la punct fix, este așa numitul *coeficient de calitate*, definit prin următoarea expresie :

$$C = \frac{T^{3/2}}{P\sqrt{2S\rho}} \tag{2.1}$$

unde T este tracțiunea, S suprafața discului elicei și ρ masa specifică a aerului. Vom aplica această formulă de definiție nu numai la elicele portante ci la orice sistem portant la punct fix. Prin S vom înțelege deci, în general, suprafața proiecției aparatului pe un plan perpendicular pe direcția tracțiunii.

Scopul acestui studiu este de a arăta cum se poate obține o mărire a coeficientului de calitate și fenomenele care-l limitează.

3. Asupra calculului coeficientului de calitate în lipsa frecării. Să considerăm un aparat zburînd la punct fix. Forța portantă este aplicată de fluidul înconjurător și se exercită asupra unor părți fixe sau mobile ale aparatului. În virtutea principiului acțiunii și reacțiunii fluidul va suferi din partea aparatului o forță egală și de sens contrar.

Fie o suprafață de control care închide în interior aparatul. Mișcarea fluidului în interiorul suprafeței de control nu poate fi peste tot irotațională, deoarece în caz contrar paradoxul lui D'Alembert ar infirma existența unei forțe portante [2].

Trebuie să admitem deci că fluidul care iese din suprafața de control conține vîrtejuri libere, care se întind pînă la infinit aval. Presupunem că mișcarea este permanentă și domeniul turbionar este limitat de o suprafață de curent care se sprijină pe suprafața de control de mai sus. Admitem mai departe că această suprafață de curent, care delimitează vîna turbionară, tinde asimptotic la infinit aval către o suprafață cilindrică de secțiune finită.

În aceste ipoteze se poate arăta [2] *) că forța portantă aplicată de fluid e dată de teorema impulsului sub forma următoare :

$$T = \int_{S_\infty} \rho v^2 \, dS, \tag{3.1}$$

---

*) p. 131.

unde prin v s-a notat viteza la infinit aval, iar integrala se face pe secțiunea transversală a vînei la infinit aval.

Teorema energiei cinetice ne va da, în absența frecării, puterea introdusă,

$$P = \frac{1}{2}\int_{S_\infty} \rho v^3\, dS. \tag{3.2}$$

Din formulele de mai sus se vede cu ușurință că pentru obținerea unui randament bun de sustentație, este avantajos ca vîna de curent să aibă o viteză mică la infinit aval, deoarece *energia cinetică scade cu puterea a treia a vitezelor, pe cînd forța portantă numai cu puterea a doua.* Se poate arăta, pe de altă parte, că nu este indicată o repartiție neuniformă a vitezelor în secțiunea dreaptă a vînei la infinit aval.

În ipoteza unei repartiții uniforme la infinit aval, formulele precedente devin

$$T = \rho S_\infty v_\infty^2, \quad P = \frac{\rho}{2} S_\infty v_\infty^3. \tag{3.3}$$

Cu ajutorul acestor formule se poate calcula coeficientul de calitate definit de (2.1). Se obține

$$C = \sqrt{2\frac{S_\infty}{S}} = \sqrt{2\,\nu}. \tag{3.4}$$

4. Despre posibilitatea măririi „coeficientului de dilatație" a vînei. Vom numi coeficient de dilatare *) a vînei de curent care a trecut prin propulsor, raportul

$$\nu = \frac{S_\infty}{S},$$

care figurează în formula (3.4). Formula (3.4) arată că în absența frecării, coeficientul de calitate depinde numai de valoarea coeficientului de dilatație, crescînd cu aceasta. Se știe că la o elice ideală, izolată, funcționînd la punct fix, coeficientul de dilatare (numit în acest caz coeficient de contracție) este 0,5. Întrebarea care se pune este dacă prin anumite dispozitive sau propulsori speciali se poate obține un coeficient de dilatare mai ridicat. Ne putem convinge ușor că răspunsul este afirmativ și pe cale teoretică, considerînd o elice lucrînd într-un tub subțire și foarte lung *MN* (fig. 1).

Se constată cu ușurință că în acest caz coeficientul de dilatare este egal cu unitatea (vînă liberă cilindrică). Rezultă mai departe că, pe baza formulei (3.4), coeficientul de calitate al ansamblului format din elice și din tub va fi $C = \sqrt{2}$, sensibil mai mare ca al elicilor izolate ($C = 1$). Avantajul se menține aproape la fel de important chiar în cazul tuburilor relativ scurte.

---

*) Credem că pentru acest studiu, denumirea de „coeficient de dilatare" este mai potrivită decît aceea de coeficient de contracție.

În paragraful următor ne vom ocupa mai de aproape de metoda măririi coeficientului de calitate prin întubarea elicelor.

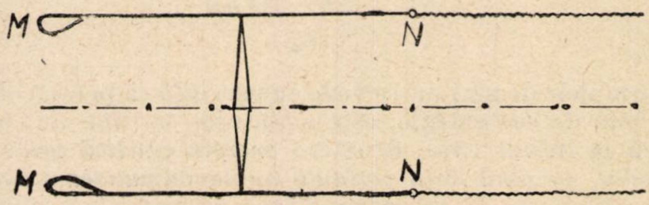


Fig. 1

5. Metoda întubării elicelor. Vom considera aici cîteva aspecte generale ale funcționării elicei întubate și o metodă de studiu teoretic bazată pe mișcările plane.

Să presupunem că discul elicei întubate (fig. 2) este o suprafață permeabilă activă care aplică fluidului care o străbate o forță unitară constantă, δp, care va reprezenta în același timp și un salt constant al constantei lui Bernoulli. Rezultă de aici că mișcarea în interiorul vînei va fi irotațională și, presupunînd o secțiune asimptotică a vînei la infinit aval, repartiția vitezelor în această secțiune va fi uniformă.

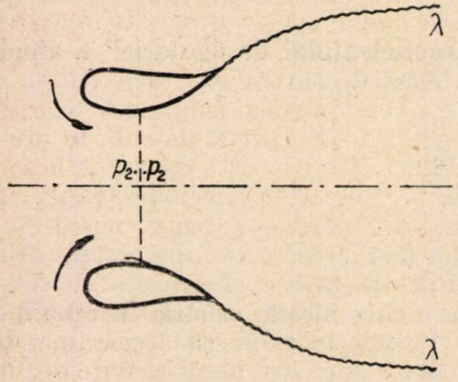


Fig. 2

Valoarea saltului de presiune δp determină valoarea vitezei din interiorul vînei la infinit aval, prin relația

$$\frac{\rho}{2}\, v_\infty^2 = \delta p. \tag{5.1}$$

Notînd cu S_0 secțiunea dreaptă a părții cilindrice a tubului pe care o vom presupune egală cu suprafața discului elicei, tracțiunea exercitată exclusiv pe palele elicei va fi, evident,

$$T' = S_0\, \delta p = \frac{\rho}{2}\, v_\infty^2 \cdot S_0. \tag{5.2}$$

Dar aplicînd teorema impulsului, forța de tracțiune totală exercitată pe propulsor, în ansamblul lui, rezultă

$$T = \rho\, S_0 v_0 v_\infty = \rho\, S_0\, v_\infty^2 \cdot \nu. \tag{5.3}$$

Se deduce deci că *diferența de tracțiune*

$$T'' = T - T' = \rho\, v_\infty^2\, S_0 \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \tag{5.4}$$

se exercită pe tub. Raportul dintre tracţiunea pe pale şi tracţiunea totală în lipsa frecării este dată de relaţia

$$\frac{T'}{T} = \frac{1}{2\nu}. \tag{5.5}$$

Existenţa tracţiunii pe tub se explică în mod direct prin depresiunile ce se crează la ocolirea bordului de atac. *Este esenţial deci să se prevadă tubul cu bord de atac rotunjit pentru a se evita deslipirea fluidului.*

Se deduce mai departe că mărirea coeficientului de dilatare (care este egal, evident, şi cu raportul dintre viteza medie în dreptul secţiunii maxime a tubului şi viteza de la infinit aval) este favorizată de existenţa unui strat de vîrtejuri inelare avînd sensul astfel încît să inducă pe baza formulelor lui Biot-Savart viteze mari de trecere prin tub. Astfel, viteza medie de trecere prin tub poate fi făcută oricît de mare, dacă stratul de vîrtejuri este suficient de puternic. La infinit aval însă stratul de vîrtejuri legate ne mai avînd nici o influenţă, viteza va fi determinată aici numai de saltul de presiune la traversarea discului elicei, după cum s-a arătat mai sus.

Bineînţeles că existenţa stratului de vîrtejuri inelare legate de tub (şi deci a unei circulaţii în jurul profilelor tubului) este condiţionată de anumite elemente fizice. O primă idee de realizare a acestor condiţii fizice este aceea de a termina tubul cu un divergent astfel ca să se dea vînei tendinţa de *evazare*, luînd în acelaşi timp precauţiunile necesare pentru a evita deslipirea curentului de pereţii divergentului. Admiţînd că aceste precauţiuni au fost luate, se poate încerca să se evalueze prin calcul coeficientul de dilatare care se poate obţine pentru diverse unghiuri şi lungimi ale divergentului.

Într-o lucrare precedentă [3] am dat o metodă liniarizată pentru determinarea mişcării axial simetrice în jurul unui astfel de tub, în prezenţa unor singularităţi axial simetrice date. Metoda este destul de laborioasă pentru calculele numerice şi în afară de aceasta are dezavantajul liniarizării. Vom da mai jos o altă metodă bazată pe teoria mişcărilor plane.

6. Studiul elicelor întubate bazat pe teoria mişcărilor plane Kirchhoff.

Pentru studiul variaţiei coeficientului de dilataţie în funcţie de parametrii divergentului, vom aplica rezultatele teoriei lui Kirchhoff privitoare la scurgerile prin orificii. Vom face în acest scop următoarele ipoteze simplificatoare :

a) Presupunem că tendinţa fenomenului este suficient de bine arătată dacă în loc de tub se consideră două plăci, astfel ca mişcarea să fie plană.

b) Admitem că plăcile sînt foarte lungi astfel că în studiul care urmează vor fi presupuse semiinfinite. În acest fel, condiţiile pe liniile de discontinuitate λ_1, λ_2 (fig. 3) nu sînt influenţate de scurgerea din vecinătatea bordului de atac.

Pe baza ipotezelor de mai sus, rezultă că în exteriorul vînei fluidul este în repaus şi deci în vînă, pe liniile λ, viteza are modulul constant.

c) Admitem că divergentul tubului poate fi reprezentat prin voleţii N_1C_1 şi N_2C_2, dispuşi simetric, şi că fluidul nu se deslipeşte în punctele unghiuloase N şi nici mai departe în divergent. Bracajul μ al voleţilor (fig. 3) s-a variat în intervalul $(0, \pi)$. Prin bracajul acestor voleţi dimensiunea transversală a propulsorului creşte şi de aceea vom considera, în calculul coeficientului de calitate, dimensiunea cea mai mare a aparatului C_1C_2 iar nu N_1N_2.

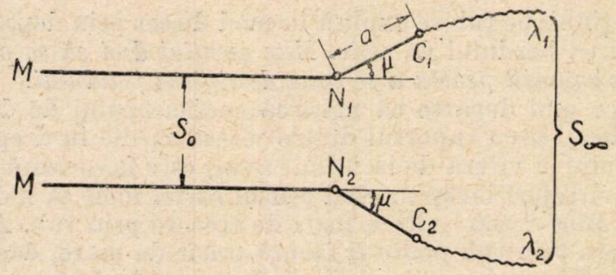


Fig. 3

Notînd cu a lungimea voletului, coeficientul de dilatare a vînei va fi calculat deci după formula

$$\nu = \frac{S_\infty}{S_0 + 2a \sin\mu}. \tag{6.1}$$

Rezolvarea problemei Kirchhoff prezentate mai sus se poate face după metodele cunoscute*).

Dăm aici, pe scurt, rezolvarea prin metoda reprezentării conforme a domeniului închis de pereţii tubului şi de liniile de discontinuitate λ_1, λ_2 pe interiorul unui semicerc din planul complex auxiliar (fig. 4).

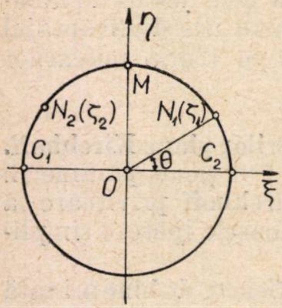


Fig. 4

Funcţia

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{w(\zeta)}{v_\infty}, \tag{6.2}$$

unde $w(\zeta)$ este viteza complexă din planul fizic în funcţie de variabila ζ, are partea sa reală cunoscută pe semicerc (abstracţie făcînd de faptul că nu se cunosc apriori imaginile punctelor N_1 şi N_2 pe semicerc). Pe de altă parte, partea imaginară a acestei funcţii este nulă pe diametrul orizontal al cercului, deoarece acest diametru reprezintă liniile de discontinuitate unde modulul vitezei este constant. Funcţia $\omega(\zeta)$ se poate prelungi deci prin simetrie în semicercul inferior.

---

*) A se vedea de exemplu [4].

Se obține pentru funcția $\omega(\zeta)$ următoarea expresie :

$$\omega(\zeta) = -\frac{\mu i}{\pi} \log \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta + \zeta_1} \cdot \frac{\zeta + \overline{\zeta_1}}{\zeta - \overline{\zeta_1}}, \tag{6.3}$$

unde ζ_1 este o constantă complexă care trebuie determinată.

Potențialul complex $f(\zeta)$, se poate defini deasemenea în tot cercul *). Dacă notăm cu Q debitul de fluid care trece prin tub, se constată cu ușurință că potențialul complex este dat de

$$f(\zeta) = \frac{Q}{\pi} \log \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + i\frac{Q}{2}. \tag{6.4}$$

Transformarea conformă, necunoscută apriori, se deduce din relația

$$\frac{df}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = w(\zeta). \tag{6.5}$$

Din formulele (6.2) și (6.3) se deduce mai departe

$$w(\zeta) = v_\infty \left(\frac{\zeta + \zeta_1}{\zeta - \zeta_1} \cdot \frac{\zeta - \overline{\zeta_1}}{\zeta + \overline{\zeta_1}}\right)^{\frac{\mu}{\pi}}, \tag{6.6}$$

iar din (6.4)

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{Q}{\pi} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta(\zeta^2 + 1)}. \tag{6.7}$$

Înlocuind expresiile (6.6) și (6.7) în (6.5), se obține

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{Q}{\pi v_\infty} \cdot \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta(\zeta^2 + 1)} \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta + \overline{\zeta_1}} \cdot \frac{\zeta + \overline{\zeta_1}}{\zeta - \overline{\zeta_1}}\right)^{\frac{\mu}{\pi}}. \tag{6.8}$$

Dacă se pune în această formulă $d\zeta = ie^{i\theta} . d\theta$, lungimea a a voletului se poate calcula pe baza relației

$$dz = \frac{Q}{\pi v_\infty} \cdot \operatorname{tg} \theta \left(\frac{\sin \theta_1 - \sin \theta}{\sin \theta_1 + \sin \theta}\right)^{\frac{\mu}{\pi}} \cdot d\theta. \tag{6.9}$$

Pentru studiul pe care ni l-am propus, am efectuat calculele în ordinea următoare : am dat valori numerice unghiului de bracaj μ și raportului

$$\nu_0 = \frac{v_\infty}{v_0} \tag{6.10}$$

dintre viteza de la infinit aval și viteza de la infinit amonte. Cu ajutorul relației

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) = \nu_0^{\frac{\pi}{2\mu}}, \tag{6.11}$$

---

*) Cu singularitate evidentă în origine.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

dedusă din (6.6), se calculează θ_1. Lungimea adimensională a voletului $\alpha = a/S_0$ se calculează din următoarele formule, deduse din. (6.9) :

$$\alpha = \frac{\nu_0}{\pi} f, \quad f = \int_0^{\theta_1} \varphi d\theta, \tag{6.12}$$

$$\varphi(\theta) = \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta_1 - \theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \right)^{\frac{\mu}{\pi}} \operatorname{tg} \theta \cdot d\theta. \tag{6.13}$$

În sfîrşit, se calculează coeficientul de dilataţie a vînei, cu formula

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + 2\alpha \sin \mu}. \tag{6.14}$$

Alăturat dăm cîteva valori obţinute pentru coeficientul de dilatare în funcţie de valorile date parametrilor μ, α. În ultima coloană s-au trecut valorile corespunzătoare ale coeficientului de calitate.

$\alpha = a/S_0$	μ	ν	C
—	0	1	1,410
0,790	$\frac{\pi}{8}$	1,250	1,580
0,266	$\frac{\pi}{4}$	1,275	1,595
0,707	$\frac{\pi}{4}$	1,465	1,710
0,184	$\frac{\pi}{2}$	2,200	2,095
0,640	$\frac{\pi}{2}$	2,600	2,230
0,081	$\frac{\pi}{4}$	2,600	2,280
0,274	$\frac{\pi}{4}$	4,650	3,040
0,131	π	3,000	2,450
0,136	π	6,000	3,460

După cum se vede, rezultatele calculelor sînt promiţătoare. Coeficientul de dilatare poate fi făcut oricît de mare şi o dată cu acesta şi coeficientul de calitate. În paragraful următor se va studia influenţa frecării.

7. Influenţa frecării. Un prim efect al frecării este deslipirea curentului în difuzor şi, în consecinţă, nerealizarea circulaţiei în jurul torului, acesta comportîndu-se aproape ca un tub fără divergent.

Să presupunem totuși că prin mijloace speciale, care vor fi arătate ulterior, se reușește să se evite deslipirea curentului. Se va vedea că nici în acest caz nu este avantajos să se meargă prea departe cu mărirea coeficientului de dilatare, deoarece pe măsură ce se economisește din energia cinetică de la infinit aval prin evazarea vînei de curent, vitezele în tub devin foarte mari, avînd ca urmare o pierdere din ce în ce mai mare de energie prin frecare.

În linii mari, putem să arătăm în felul următor limitarea coeficientului de dilatare optim cînd se consideră și frecarea. Formula (5.3) se mai poate scrie

$$T = \rho Q v_\infty, \tag{7.1}$$

unde prin Q s-a notat debitul masic de fluid care trece prin tub. Pentru realizarea aceleiași tracțiuni necesare, pe măsură ce se micșorează v_∞, datorită dilatării vînei de curent, trebuie să se mărească Q, pentru ca produsul Qv_∞ să rămînă constant. Cum suprafața tubului supusă frecării rămîne neschimbată, mărind Q se mărește viteza de trecere prin tub și deci pierderile de energie prin frecare.

Vom căuta să evaluăm aproximativ coeficientul de calitate în prezența frecării. Pentru aceasta să remarcăm de la început că teorema impulsului este aplicabilă sub aceeași formă (3.1). Datorită frecării care se manifestă în stratul limită al pereților solizi sau pe suprafața de discontinuitate λ, repartiția vitezelor la infinit aval nu mai este, în general, uniformă. Se știe totuși că se pot neglija forțele tangențiale de pe suprafața de discontinuitate λ, dacă în același timp nu se ține seama de pierderile de viteză corespunzătoare de la infinit aval.

În ceea ce privește forțele tangențiale aplicate de frontierele solide, vom considera că prin introducerea unei energii suplimentare de la bord, putem să aplicăm forțe fluidului, de sens contrar, astfel ca repartiția vitezelor la infinit aval, să rămînă tot uniformă.

Teorema impulsului și a energiei cinetice se vor scrie aproximativ astfel:

$$T = \rho S \frac{v^2}{\nu}, \tag{7.2}$$

$$P = \frac{\rho S v^3}{2\nu^2} + \frac{\rho}{2} S_f C_f v_f^3. \tag{7.3}$$

Introducînd aceste expresii în formula (2.1) se obține următoarea expresie pentru coeficientul de calitate:

$$C = \frac{\sqrt{2\nu}}{1 + f\nu^2}. \tag{7.4}$$

În formulele de mai sus s-a notat cu v_f valoarea medie a vitezei pe pereții tubului sau alte suprafețe solide ale aparatului, iar prin S_f suprafața frontierelor solide supuse frecării. C_f este coeficientul de frecare mediu, iar S

și v sînt secțiunea maximă a tubului și viteza medie de trecere prin această secțiune. Numărul adimensional f, care apare în (7.4), este definit prin

$$f = \frac{S_f}{S} \cdot C_f \cdot \left(\frac{v_f}{v}\right)^3 \cdot \nu^2. \tag{7.5}$$

În diagramele din figura 5 se arată variația coeficientului de calitate în funcție de coeficientul de dilatare și de parametrul f. Se constată că efectul favorabil al dilatării vînei este mult atenuat de numărul f. Pentru valori mici ale parametrului f, dilatarea vînei mărește sensibil coeficientul de calitate al aparatului ; cum coeficientul de frecare C_f se micșorează o dată cu creșterea numărului Reynolds, se deduce că dilatația vînei avantajează în mod deosebit aparatele mari, lucrînd cu viteze mari de trecere a fluidului.

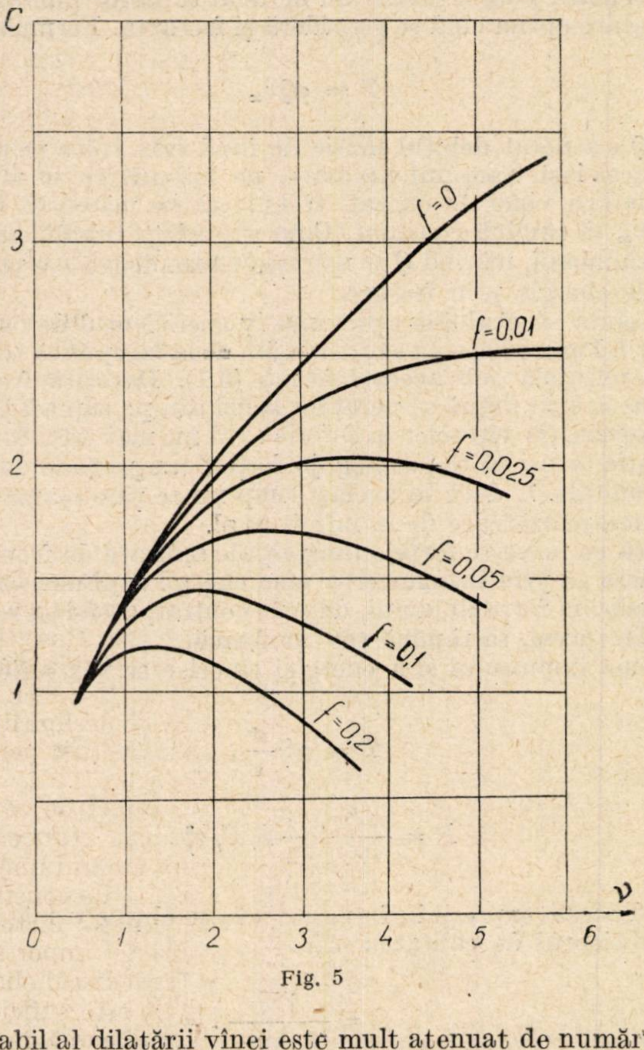


Fig. 5

După cum s-a mai spus, toate aceste rezultate s-au mai obţinut în ipoteza nedeslipirii curentului de aer şi deci a realizării efective a dilatării vînei la infinit aval.

8. Metode pentru prevenirea deslipirii curentului în divergent. În acest paragraf trecem în revistă metodele de care am putea dispune pentru prevenirea deslipirii curentului în divergent.

a. *Sucţiunea stratului limită.* Prin fante convenabil plasate în difuzor, stratul limită este extras pe măsură ce se formează, ceea ce are ca urmare nedeslipirea curentului. Sucţiunile pot fi realizate, de exemplu, punînd în legătură fantele de absorbţie a stratului limită cu fante de descărcare plasate în regiunea tubului unde domneşte o depresiune. Nu este indicat ca fantele de descărcare să fie practicate chiar pe suprafaţa tubului, deoarece în acest caz s-ar creea un strat limită important în amonte de difuzor, favorabil pentru întoarcerile de curent în difuzor. Debitul de fluid preluat din stratul limită al difuzorului trebuie descărcat suficient de departe de suprafeţele tubului, ca de exemplu în regiunea depresionară aflată în partea axială a tubului. Fluidul poate fi condus în această regiune centrală prin tuburi profilate radiale. La nevoie, se poate mări depresiunea la descărcare prin plasarea orificiului de descărcare în interiorul unui tub. Venturi coaxial. Aducerea debitului de fluid lent în interiorul tubului nu mai influenţează, în mod practic, deslipirea stratului limită în difuzor. Acest debit de fluid lent micşorează însă în oarecare măsură circulaţia în jurul profilelor tubului.

b. *Suflajul stratului limită în difuzor.* Se înţelege că în acest caz, trebuie să se introducă o energie suplimentară. Simpla punere în legătură a fantelor de suflaj de pe pereţii difuzorului cu zone de suprapresiune nu este suficientă, avînd în vedere că este vorba de difuzoare foarte scurte. Energia care trebuie să fie introdusă este cu atît mai mare, cu cît vrem să realizăm un coeficient de dilataţie mai mare. Un bilanţ energetic va arăta dacă energia necesară activării stratului limită şi energia pierdută prin frecare nu depăşesc puterea economisită prin dilataţia vînei.

c. *Pereţi mobili.* Un alt mijloc de prevenirea deslipirii curentului este, după cum se ştie, mişcarea pereţilor (în cazul nostru pereţii difuzorului) în sensul în care se scurge şi curentul.

Acest mijloc este deosebit de interesant din punct de vedere al scopului urmărit aici, deoarece el evită deslipirea prin reducerea frecării, ceea ce are ca urmare micşorarea numărului f, fapt a cărui importanţă s-a arătat în paragraful precedent. Din păcate, dificultăţile constructive sînt mari şi pînă acum nu a fost posibil să se aplice această metodă.

d. *Micşorarea „întreferului" elicei.* Este foarte important pentru stabilirea stratului limită în difuzor ca distanţa între discul elicii şi tub să fie cît mai mică cu putinţă. Dacă această distanţă nu este suficient de mică pentru a evita deslipirea curentului, va trebui să se dispună de mijloace de prevenire foarte puternice (sucţiuni sau suflaje), ceea ce implică un mare consum de energie, fapt incompatibil cu scopul urmărit.

Să remarcăm că din punct de vedere al întreferului este preferabil să se utilizeze metoda suflajului expusă la punctul *b*), deoarece completează în oarecare măsură acțiunea elicei, putînd suprima complet efectul întreferului elicei.

Acțiunea elicei mai poate fi prelungită dincolo de discul ei, prin pînze de fluid lansate din interiorul palelor.

e. *Înlocuirea pereților cu suprafețe permeabile active.* Prin suprafață permeabilă înțelegem o suprafață care poate fi străbătută de curent și care aplică fluidului forțe unitare, funcții de viteza efectivă a fluidului pe suprafață [2].

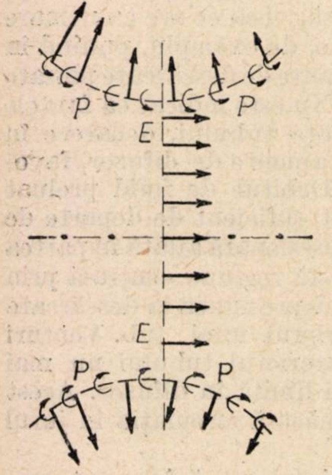


Fig. 6

O suprafață permeabilă cu simetrie de rotație poate fi realizată prin rotirea unor pale, teoretic infinit de dese, în jurul axei de simetrie. Ele sînt, în general, curbe și au o astfel de formă, încît prin rotire să genereze forma dorită a suprafeței permeabile.

S-a văzut în paragrafele precedente că mărirea coeficientului de calitate implică viteze mari de trecere prin tub și deci depresiuni mari în interiorul tubului. Pereții tubului pot fi supuși deci unor forțe axipete. Cînd fluidul se deslipește în divergent dispar și forțele menționate pe pereții divergentului. Aceste forțe reapar, dacă prin mijloace speciale, din care unele au fost menționate mai sus, provocăm relipirea curentului.

Noi indicăm aici controlul forțelor de pe tub prin înlocuirea pereților solizi ai tubului cu suprafețe permeabile convenabile. Înlocuirea poate fi totală sau numai a difuzorului. În figura 6 se reprezintă schema unui propulsor format din elicea *E*, care se rotește solidar cu palele curbe *P* de forma meridianelor suprafeței permeabile pe care o generează în rotație. Suprafața permeabilă *P* trebuie să fie astfel făcută încît să aplice fluidului forțe axifuge. Pe figura 5 se arată schematic forțele aplicate de către suprafața permeabilă întreagă, formată din discul elicii *E* și din suprafața permeabilă *P*. Realizarea acestor forțe se face prin fixarea convenabilă a incidențelor și coardelor profilelor în fiecare punct al suprafeței *EP*. Prin reglarea acestor elemente se poate face ca suprafața permeabilă *P* să devină suprafață de curent, după cum se poate face ca să fie străbătută de curent. În acest din urmă caz, pe unele părți ale ei, saltul de presiune este negativ (față de sensul fluxului), iar pe altele saltul de presiune este pozitiv. În regiunile unde saltul de presiune este negativ, fluidul exercită momente motoare. Din contra, în regiunile suprafeței permeabile *P* unde saltul de presiune este pozitiv, fluidul opune suprafeței permeabile un moment rezistent. Bilanțul energetic în totalitatea lui trebuie, teoretic, să fie favorabil, ducînd la o îmbunătățire a coeficientului de calitate.

Prin aplicarea forțelor amintite de către suprafața permeabilă *P*, se generează vîrtejuri libere. Vîrtejurile care se detașează din extremitățile amonte ale palelor *P*, au sensul convenabil pentru coeficientul de dilatare. Liniile de vîrtej au forma unor spirale, iar sensul vîrtejurilor astfel încît sporesc vitezele de trecere ale particulelor fluide prin elice.

Vîrtejurile care se detașează din extremitățile aval ale palelor P sînt de sens contrar. Ele anihilează vîrtejurile care au scăpat de la extremitățile amonte ale palelor, astfel că în aval de suprafața permeabilă P nu vor exista, teoretic, decît vîrtejurile libere, datorită acțiunii elicei E.

Din punct de vedere al vitezelor induse, totul se întîmplă ca și cum de suprafața permeabilă P ar fi legată o suprafață inelară de vîrtejuri, avînd sensul favorabil pentru dilatarea vînei la infinit aval.

Se înțelege că și această metodă de mărire a coeficientului de calitate depinde, în mare măsură, de importanța frecării fluidului cu palele, adică de finețea palelor.

Sperăm că experiențele pe care intenționăm să le facem, vor arăta dacă în felul acesta coeficientul de calitate poate fi mărit în mod sensibil.

Să remarcăm, pentru a încheia, că metoda pe care am prezentat-o în afară de faptul că poate controla forțele axifuge, favorabile pentru dilatarea vînei în aval, mai are și avantajul important că suprimă întreferul elicei.

Primită la redacție la 30 aprilie 1957.

УКАЗАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕНИЯ КАЧЕСТВЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПРОПУЛЬСИВНЫХ ВИНТОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматриваются несколько средств для достижения увеличения качественного коэффициента винтов, работающих в неподвижной точке при висении.

Если пренебрегать трением, то это увеличение связано с увеличением сечения жидкой струи в бесконечности вниз по течению.

Для теоретического исследования возможности «расширения» струи вниз по течению путем заключения винта в трубу применяется теория Кирхгофа для течений через отверстия.

Для упрощения расчетов автор допускает следующие предположения :

а) труба бесконечно длинная ;

б) труба заменяется двумя параллельными пластинами ;

в) раструб состоит из прямолинейных створок N_1C_1 и N_2C_2 (рис. 3) ;

г) вдоль трубы не имеется отрывов.

Таблица параграфа 3 дает значения коэффициента расширения ν, коэффициента качества C, определяемого выражением (2, 1) в зависимости от угла поворота μ створок и их длины a.

В параграфе 7 оценивается влияние трения (формулы (7, 4) и диаграммы (рис. 5).

Затем рассматриваются различные средства, которые могут быть использованы для предупреждения отрывов.

В конце автор излагает новый метод для повышения качественного коэффициента путем применения винта E, лопасти которого продолжены лопатками P, сообщающими жидкости центробежные силы (рис. 6).

QUELQUES INDICATIONS SUR L'AUGMENTATION DU COEFFICIENT DE QUALITÉ DES HÉLICES

(RÉSUMÉ)

On étudie certains moyens permettant d'obtenir l'augmentation du coefficient de qualité des hélices fonctionnant au point fixe.

Si l'on néglige les frottements, cette augmentation est liée précisément à l'évasement de la veine fluide à l'infini aval.

Pour étudier théoriquement la possibilité de faire évaser la veine par emplacement de l'hélice dans un tube, on applique la théorie de Kirchoff au sujet des écoulements des orifices.

Afin de simplifier les calculs, l'auteur admet les hypothèses suivantes :

a) le tube est infiniment long ;

b) on remplace le tube par deux plaques parallèlles ;

c) le divergent du tube est formé de deux volets rectilignes $N_1 C_1$ et $N_2 C_2$ (fig. 3) ;

d) il n'y a pas de décollements le long du tube.

Le tableau du paragraphe 3 donne les valeurs du coefficient de dilatation ν, celles du coefficient de qualité C (défini par (2.1)), en fonction des braquages, μ, des volets, et de leurs longueurs a.

Dans le paragraphe 7, on évalue l'influence du frottement (formules (7.4) et diagrammes de la figure 5).

On passe ensuite en revue les divers moyens à l'aide desquels on pourrait prévenir les décollements.

Finalement, l'auteur expose une nouvelle méthode d'augmentation du coefficient de qualité, à l'aide d'une hélice E, dont les pales se prolongent par les palettes P qui appliquent au fluide des forces axifuges (fig. 6).

BIBLIOGRAFIE

1. F. Weinig, *Aerodynamik der Luftschraube*. J. Springer, Berlin, 1940.
2. N. N. Patraulea, *Aerodinamica suprafețelor permeabile*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1956, p. 37.
3. — *Mișcarea axial simetrică în jurul aripilor toroidale subțiri*. Bul. științ. Acad. R.P.R., Secția de științe matematice și fizice, t. VIII, nr. 1, ianuarie-martie 1956, p. 115.
4. Caius Iacob, *Introducere matematică în mecanica fluidelor*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1952, p. 404 și urm.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

AEROMECANICĂ

APLICAREA METODEI CARAFOLI LA CALCULUL REZISTENŢEI DE UNDĂ A ARIPII DELTA DUBLU CONICE CU PANTA DUBLĂ

DE

GH. N. DARIE

INTRODUCERE

Lucrarea de faţă reprezintă o aplicaţie a metodei stabilite de E. Carafoli [1] şi dezvoltată de E. Carafoli şi M. Ionescu [2]. În cazul tratat mai jos, prin folosirea analogiei hidrodinamice şi prin procedeul de închidere utilizat, metoda respectivă, este mai avantajoasă, fiind mai operativă faţă de celelalte metode cunoscute în teoria mişcărilor conice.

Definirea aripii dublu conice

Fiind dată o aripă conică iniţială O (fig. 1), pentru închiderea ei autorii metodei, creează o nouă aripă conică A (fig. 2*a*), care are aceeaşi directoare $C_1D_1'O_1'D'C\ D''O_1''D_1''C_1$ (fig. 1) ca prima aripă O. Prin racordarea acestor două aripi după o tehnică expusă în lucrare [2], în aşa fel încît aripa A să rămînă conică, rezultă aripa dublu conică, care pentru $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ este reprezentată în figura 2*b*, iar în proiecţie orizontală în figura 2*a*.

Din figura 1 se observă că aripa tratată prezintă o variaţie discontinuă a pantei profilului. Salturile de pantă sînt în număr de două şi sînt egale între ele, fiind plasate simetric faţă de axa aripii în punctele D şi D_1 (fig. 2).

Calculul rezistenţei de undă se face pentru o aripă de coardă maximă egală cu unitatea, $OO_1 = 1$ (fig. 2*a*), şi depinde de o serie de parametrii geometrici, relativi la aripă, şi o altă serie de parametrii aerodinamici, privind mişcarea conică.

Parametrii geometrici sînt (fig. $2a$):
h = AO_1 distanţa vîrfului aripii A faţă de O_1,
d = ordonata lui D,
l = O_1C semianvergura,
γ = panta profilului pe porţiunea O_1D,
m = γ_1/γ raportul pantelor de pe porţiunea DC şi O_1D.

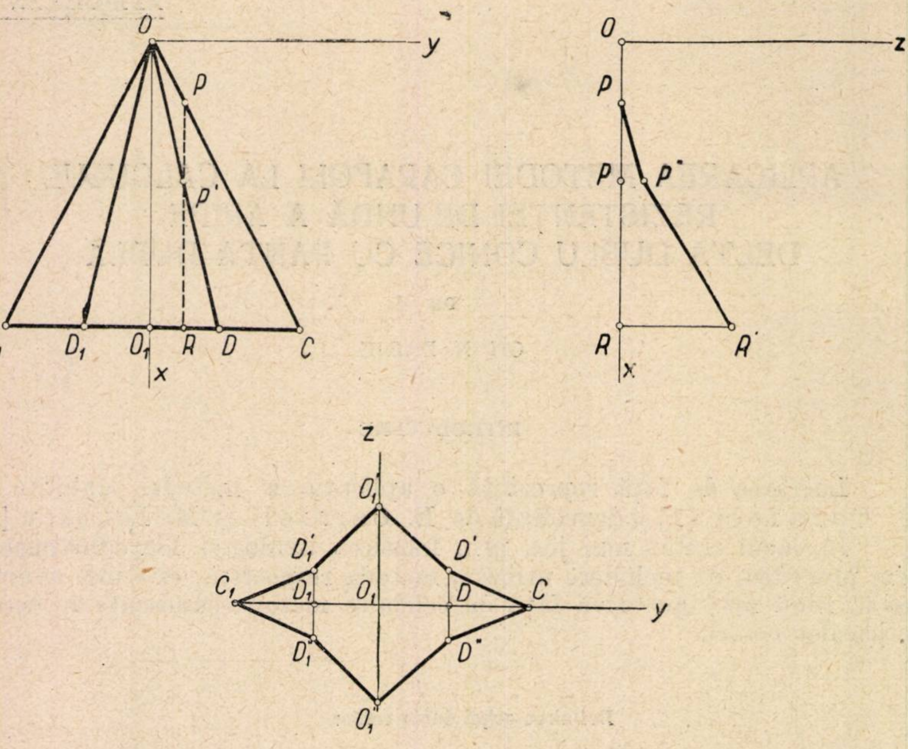


Fig. 1

Notînd cu M_0 şi M_A conurile Mach corespunzătoare aripilor O şi A, parametrii aerodinamici vor fi $\frac{1}{B}$, şi $\frac{1}{B'}$ (fig. $2a$), ordonatele punctelor de intersecţie ale lui M_0 şi M_A cu axa O_1y. Valorile acestor parametrii sînt date de relaţiile

$$B = \frac{1}{\text{tg}\,\mu} = \sqrt{M_\infty^2 - 1}\ , \quad B' = \frac{B}{h},$$

unde $M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty}$ este numărul lui Mach, iar U_∞ şi a_∞ sînt respectiv viteza curentului neperturbat şi viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat.

Rezistența se calculează pentru o aripă cu semianvergura unitate, de aceea în locul mărimilor corespunzătoare aripii de semianvergură l se vor folosi următoarele mărimi adimensionale :

$$\frac{y}{l} = \varepsilon, \quad \frac{d}{l} = \alpha, \quad \frac{1}{Bl} = n, \quad \frac{h}{Bl} = nh = n'. \tag{1}$$

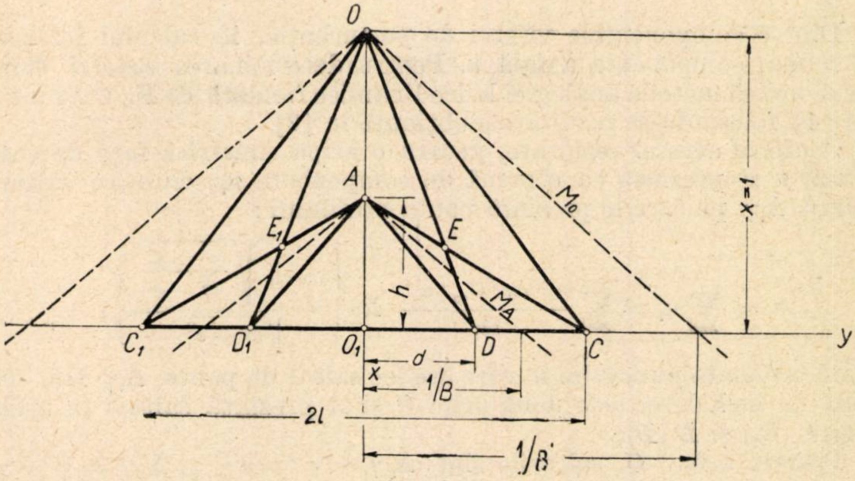


Fig. 2 *a*

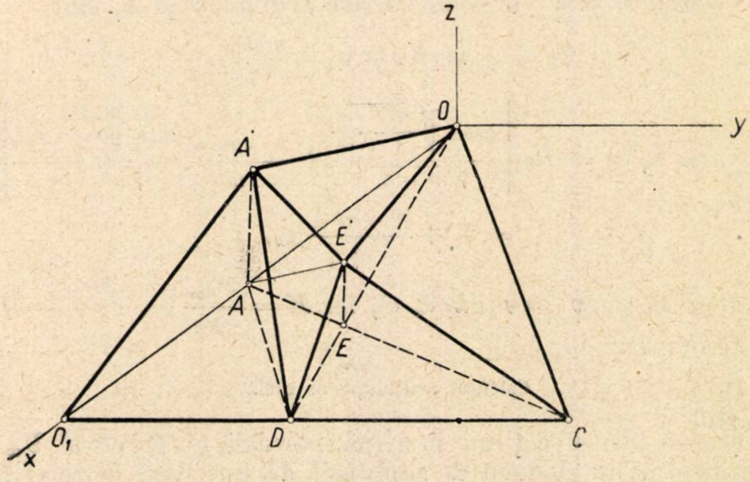


Fig. 2 *b*

Alte caracteristici ale aripii sînt raporturile, suficient de mici pentru a aproxima aripa groasă cu aripa plană triunghiulară (fig. 2*a*), dintre grosimea relativă maximă $2\,\tau = 2\gamma\,(1 - h)$ și coardă, respectiv anvergură. Din punct de vedere al efectelor aerodinamice, această aripă reprezintă, conform teoriei liniarizate a mișcărilor conice, însumarea efectelor a două aripi conice plane diferite O (OCC_1) și A (ACC_1) și a unui efect de interferență între aceste două aripi.

Viteza axială de perturbație

Dintre componentele vitezei de perturbație, în calculul rezistenței intră numai componenta axială u. Pentru determinarea acestei componente se aplică metoda analogiei hidrodinamice fundată de E. Carafoli [3] și [4], folosindu-se rezultatele obținute în [2].

Conform acestor rezultate, pentru o aripă simetrică față de coarda maximă, u se prezintă ca o sumă de componente u_i, datorite salturilor de pantă $\Delta_i\gamma$, pe care le prezintă panta profilului :

$$u = \sum u_i = \sum \frac{-2\,\Delta_i\gamma\, U_\infty\, |\varepsilon_i|}{B\pi} \cdot Re \left\{ \frac{\operatorname{arch} \sqrt{\dfrac{n^2-\varepsilon^2}{\varepsilon_i^2-\varepsilon^2}}}{\sqrt{n^2-\varepsilon_i^2}} \right\},$$

ε_i fiind ordonata punctului în care are loc saltul de pantă $\Delta_i\gamma$. Din însăși metoda de închidere, cele două aripi O și A prezintă salturi în aceleași puncte C (C_1) și D (D_1).

Pentru aripa O salturile sînt $\Delta_C\gamma = \gamma_1 = m\gamma$ și $\Delta_D\gamma = \gamma - \gamma_1 = (1-m)\,\gamma$, iar pentru aripa A ele sînt $\Delta_C\gamma' = -\dfrac{m\gamma}{h}$ și $\Delta_D\gamma' = \dfrac{-(1-m)\gamma}{h}$, de unde vitezele u și u' corespunzătoare aripilor O și A, sînt

$$u = -\,m\gamma K v \text{ și } u' = \frac{m\gamma K v'}{h},$$

unde

$$v = v\,(n, \alpha, \varepsilon) = Re \left\{ \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}}{\sqrt{n^2-1}} + \frac{(1-m)\,\alpha}{m} \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{\sqrt{n^2-\alpha^2}} \right\} =$$

$$= v_1 + \frac{(1-m)\,\alpha}{m}\, v_\alpha, \tag{2}$$

$$v' = v\,(nh, \alpha, \varepsilon), \text{ iar } K = \frac{2U_\infty}{B\pi}\cdot$$

Calculul rezistenței de undă

Se știe că într-o secțiune în aripă, paralelă cu curentul U_∞ (fig. 3). rezistența pentru un element de suprafață dS este dată de relațiile $dR \approx (p - p_\infty)\,\gamma\, dS$, $dR' \approx -\,(p - p_\infty)\,\gamma' dS'$, iar $p - p_\infty = -\,\rho_\infty U_\infty u = \dfrac{-\rho_\infty U_\infty^2}{2}\cdot\dfrac{2u}{U_\infty}$,

de unde

$$dR = -\,\frac{2\theta}{U_\infty}\, u\gamma dS,\quad dR' = \frac{2\theta}{U_\infty}\, u\gamma' dS' \qquad \left(\theta = \frac{\rho_\infty U_\infty^2}{2}\right),$$

U_∞, p_∞, ρ_∞ sînt viteze, presiunea şi respectiv densitatea curentului neperturbat, iar u şi p componenta axială a vitezei de perturbaţie şi respectiv presiunea curentului pe aripă.

Prin aproximarea aripii groase printr-o aripă plană, rezistența aripii groase va fi de patru ori rezistența unei jumătăţi din aripa plană (fig. 4).

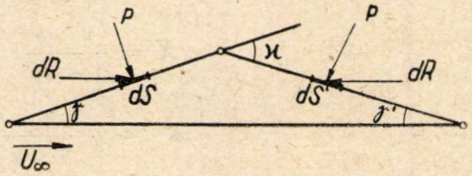


Fig. 3

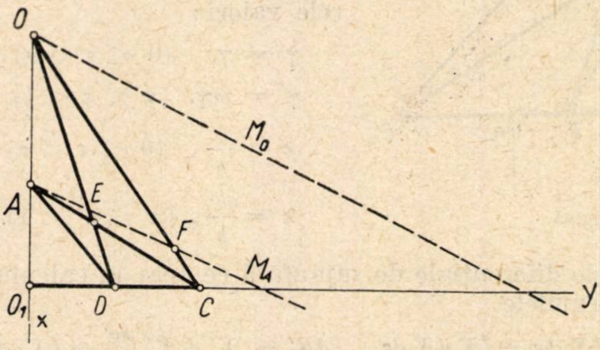


Fig. 4

În virtutea principiului însumării efectelor din teoria liniarizată, rezistența aripii închise se prezintă ca însumarea rezistențelor R_0 şi R_A a aripilor triunghiulare plane O şi A. În cazul cînd aripa A este subsonică ($n' > 1$) la rezistența totală R_t se mai ataşează şi rezistența R_i, a porţiunii ACF din aripa O, datorită vitezei u' induse de aripa A (fig. 4) :

$$R_t = R_0 + R_A + R_i. \tag{3}$$

Cele trei rezistențe se calculează cu următoarea formulă :

$$R_0 = -\frac{8\theta}{U_\infty}\left[\iint_{OO_1C} u\gamma dS - \iint_{AO_1C} u\,(\gamma + \gamma')\, dS\right] =$$

$$= -\frac{8\theta}{U_\infty}\left[\iint_{OO_1C} u\gamma dS - \iint_{AO_1C} u\,\varkappa dS\right] = R_1 - R_2,$$

$$R_A = -\frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AO_1C} u'(-\gamma')\, dS' = \frac{8\theta}{U_\infty}\left[\iint_{AO_1C} u'\,\varkappa dS' - \iint_{AO_1C} u'\gamma dS'\right] = R_1' - R_2', \tag{4}$$

$$R_i = -\frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AFC} u'\gamma dS',$$

unde $\varkappa = \gamma + \gamma'$ (fig. 3).

Din teoria mişcărilor conice şi din metoda de închidere rezultă următoarele observaţii (fig. 5):

— vitezele u, u' sînt constante în lungul razelor Ob şi respectiv Aa, caracterizate prin $y = \text{const.}$ ($\varepsilon = \text{const.}$) şi $y' = \text{const.}$ ($\varepsilon' = \text{const.}$),

— coordonatele X şi X' ale unui punct P sînt funcţie de razele ε şi ε' ce trec prin P,

$$X = \frac{1-h}{1-\varepsilon\rho}, \quad \left(\rho = \frac{h}{\varepsilon'}\right),$$

$$X' = -\frac{1-h}{1-\varepsilon'\rho'}, \quad \left(\rho' = \frac{1}{h\varepsilon}\right)$$

— unghiurile γ şi $\varkappa$ iau următoarele valori:

$$\gamma = \gamma, \quad (0 < \varepsilon < \alpha);$$

$$\gamma' = m\gamma, \quad (\alpha < \varepsilon < 1)$$

$$\varkappa = \frac{\gamma}{h}, \quad (0 < \varepsilon < \alpha);$$

$$\varkappa = \frac{m\gamma}{h}; \quad (\alpha < \varepsilon' < 1).$$

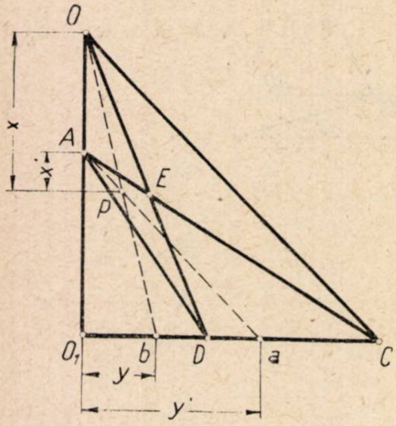


Fig. 5

Elementele diferenţiale de suprafaţă ce apar în calculul integralelor sînt date de formulele

$$dS = X\,dX\,dy = lX\,dX\,d\varepsilon, \qquad dS' = X'\,d\,X'\,\frac{dy'}{h} = lX'\,dX'\,\frac{d\varepsilon'}{h}\,.$$

Se poate trece acum la calculul integralelor

$$
\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{OO_1C} u\gamma dS = -\frac{4\theta\gamma l}{U_\infty}\left\{\int_0^1 u\,d\,\varepsilon - (1-m)\int_\alpha^1 u\,d\,\varepsilon\right\},\\
R_2 &= -\frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AO_1C} u\,\varkappa dS = -\frac{4\theta\gamma l}{U_\infty}\left\{\int_0^1 u\,d\,\varepsilon - m\int_0^1 u\,X_1^2\,d\,\varepsilon - \right.\\
&\qquad\qquad \left. -(1-m)\left[\int_0^\alpha uX_\alpha^2 d\,\varepsilon + \int_\alpha^1 u\,d\,\varepsilon\right]\right\},\\
R_1' &= \frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AO_1C} u'\,\varkappa dS' = \frac{4\theta\gamma l}{U_\infty}\left\{\int_0^1 u' d\,\varepsilon' - (1-m)\int_\alpha^1 u' d\,\varepsilon'\right\},\\
R_2' &= \frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AO_1C} u'\gamma dS' = \frac{4\theta\gamma l}{U_\infty}\left\{h\int_0^1 u' d\,\varepsilon' - \frac{(1-m)}{h}\left[h^2\int_\alpha^1 u' d\,\varepsilon' - \int_\alpha^1 u' X_\alpha'^2 d\,\varepsilon'\right]\right\},\\
R_i &= -\frac{8\theta}{U_\infty}\iint_{AFC} u'\gamma dS' = -\frac{4\theta\gamma l}{U_\infty}\left\{m\int_1^{nh} u' X_1'^2\,d\,\varepsilon + (1-m)\int_1^{nh} u' X_\alpha'^2\,d\,\varepsilon\right\},
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$\left(X_1 = \frac{1-h}{1-\varepsilon h},\ X_\alpha = \frac{1-h}{1-\dfrac{\varepsilon h}{\alpha}},\ X_1' = -\frac{1-h}{1-\dfrac{\varepsilon'}{h}},\ X_\alpha' = -\frac{1-h}{1-\dfrac{\varepsilon'}{h\alpha}}\right).$$

După ce în aceste integrale se introduc valorile lui u și u' se trece la calculul unui coeficient adimensional

$$C_t = \frac{R_t B}{4\tau^2 \theta l} = \frac{C_x B}{4\tau^2}. \tag{6}$$

Acest coeficient se prezintă ca o funcție de parametrii m, n, h și α. În raport cu m această funcție este un polinom de gradul doi

$$C_t = m^2 C_1 + m C_d + C_0, \tag{7}$$

unde

$$C_s = C_1 + C_0 - (D_1 + D_2) \text{ și } C_d = D_1 + D_2 - 2C_0,$$

iar

$$C_1 = \frac{1}{2\pi(1-h)h}\left[\int_0^1 v_1' d\varepsilon - \int_0^1 v_1 d\varepsilon + (1-h)\left(\int_0^1 \frac{v_1}{(1-\varepsilon h)^2} d\varepsilon - \frac{1}{h}\int_s^{nh} \frac{v_1'}{\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^2} d\varepsilon\right)\right],$$

$$C_0 = \frac{\alpha}{2\pi(1-h)h}\left[\int_0^\alpha v_\alpha' d\varepsilon - \int_0^\alpha v_\alpha d\varepsilon + (1-h)\left(\int_0^\alpha \frac{v_\alpha\, d\varepsilon}{\left(1-\frac{\varepsilon h}{\alpha}\right)} - \frac{1}{h}\int_\alpha^{nh} \frac{v_\alpha'}{\alpha\left(1-\frac{\varepsilon}{h\alpha}\right)^2} d\varepsilon\right)\right]$$

$$D_1 = \frac{1}{2\pi(1-h)h}\left[\int_0^\alpha v_1' d\varepsilon - \int_0^\alpha v_1 d\varepsilon + \right.$$

$$\left. + (1-h)\left(\int_0^\alpha \frac{v_1}{\left(1-\frac{\varepsilon h}{\alpha}\right)^2} d\varepsilon - \frac{1}{h}\int_\alpha^{nh} \frac{v_1'}{\left(1-\frac{\varepsilon}{h\alpha}\right)^2} d\varepsilon\right)\right], \tag{8}$$

$$D_2 = \frac{\alpha}{2\pi(1-h)h}\left[\int_0^1 v_\alpha' d\varepsilon - \int_0^1 v_\alpha\, d\varepsilon + (1-h)\left(\int_0^1 \frac{v_\alpha\, d\varepsilon}{(1-\varepsilon h)^2} - \frac{1}{h}\int_1^{nh} \frac{v_\alpha'\, d\varepsilon}{\left(1-\frac{\varepsilon}{h}\right)^2}\right)\right].$$

Din aceste formule rezultă

$$C_0(n, \alpha, h) = \alpha C_1\left(\frac{n}{\alpha}, h\right). \tag{9}$$

De asemenea, se mai observă că

$$C_1 = C_t \quad (m = 1), \tag{10}$$

ceea ce înseamnă că C_1 reprezintă coeficientul de rezistență pentru o aripă cu panta constantă. Calculul acestor aripi a fost făcut în lucrarea [5], de unde se vor lua și valorile lui C_1 și C_0 pentru calculul numeric efectiv al lui C_t.

Calculul numeric

Pentru calcul, se observă că integralele care intervin se pot calcula toate cu ajutorul următoarei primitive :

$$P(N, \alpha, \rho, \varepsilon) = Re\int\frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{N^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{(1-\varepsilon\rho)^2\sqrt{N^2-\varepsilon^2}}\,d\varepsilon = Re\left\{\frac{(\varepsilon-\rho\alpha^2)\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{N^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{(1-\varepsilon\rho)(1-\alpha^2\rho^2)\sqrt{N^2-\alpha^2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\alpha\operatorname{arch}\dfrac{\alpha}{N}\sqrt{\dfrac{N^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{(1-\rho^2\alpha^2)\sqrt{N^2-\alpha^2}} - \frac{\operatorname{arch}\dfrac{N^2\rho-\varepsilon}{N(1-\rho\varepsilon)}}{(1-\rho^2\alpha^2)\sqrt{N^2\rho^2-1}}\right\} \qquad (11)$$

prin particularizarea parametrilor.

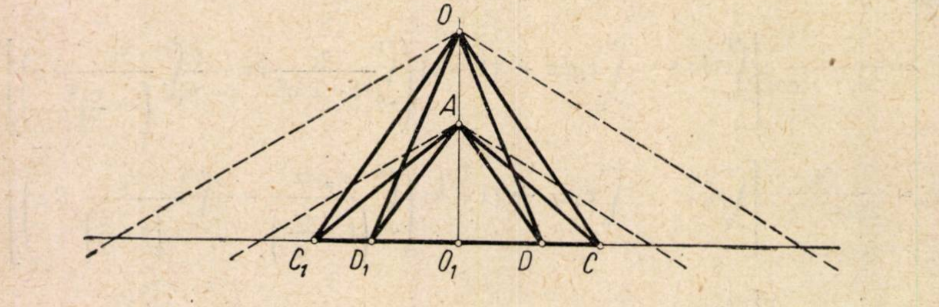


Fig. 6

În funcție de raporturile dintre parametrii aerodinamici n, nh și parametrii geometrici 1 (semianvergura) și α (ordonatele liniei după care se face saltul de pantă), se prezintă pentru calcul șase cazuri ale aripii (fig. 6).

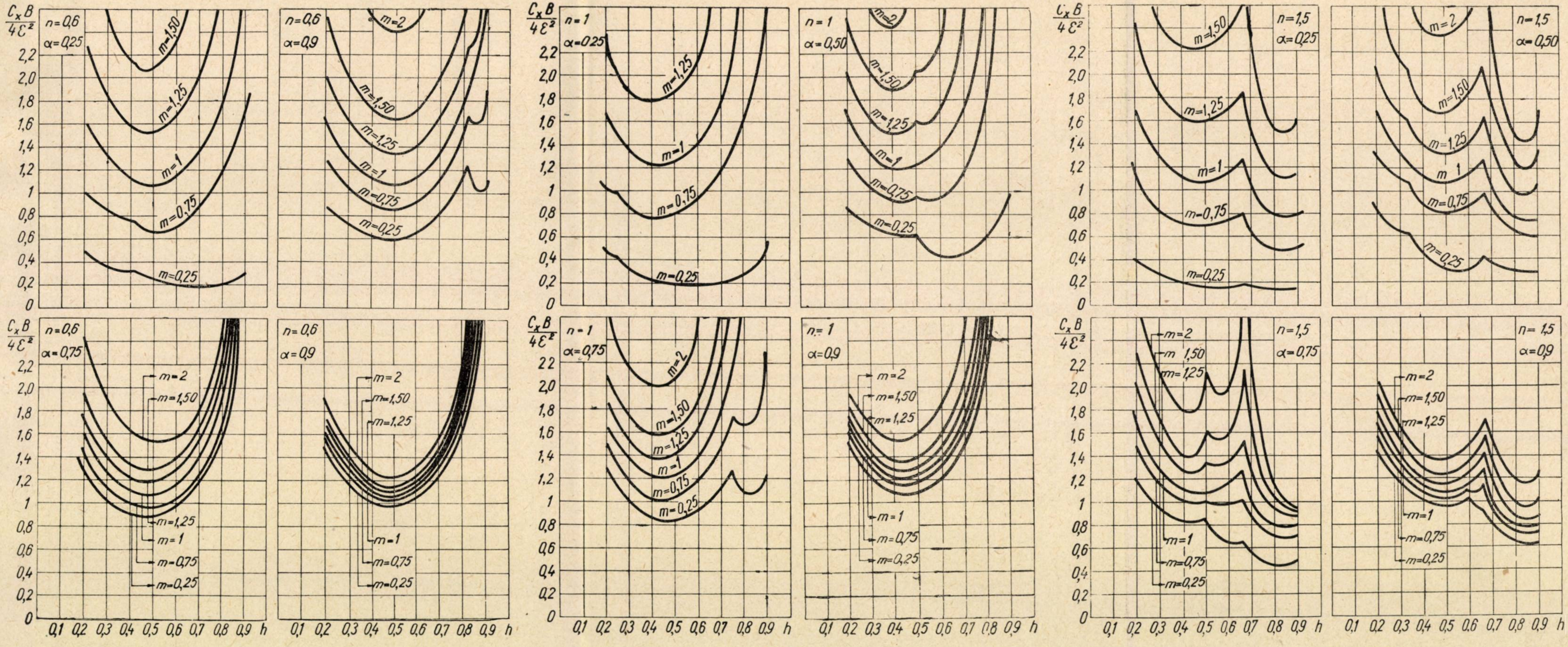

$\frac{C_x B}{4\varepsilon^2}$
n=0,6 α=0,25
n=0,6 α=0,9
n=1 α=0,25
n=1 α=0,50
n=1,5 α=0,25
n=1,5 α=0,50
n=0,6 α=0,75
n=0,6 α=0,9
n=1 α=0,75
n=1 α=0,9
n=1,5 α=0,75
n=1,5 α=0,9
m=2
m=1,50
m=1,25
m=1
m=0,75
m=0,25
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
h

Fig. 7

Aceste cazuri se obțin prin combinarea pozițiilor de sub-sau supersonicitate a muchiilor OC, OD, AC și AD.

În lucrarea [2] s-a arătat că formulele de calcul pentru toate cele șase cazuri se pot deduce din cazul general în care aripa este subsonică, prin păstrarea părții reale a expresiilor cînd n și nh variază. Pentru acest caz integralele din D_1 și D_2 (cele din C_0 și C_1 nu interesează pentru că acești coeficienți sînt luați global din lucrarea [5]) sînt date de expresiile

$$I_1' = Re\int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}}{\sqrt{n^2h^2-\varepsilon^2}}\,d\varepsilon =$$

$$= Re\left\{\frac{\alpha\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}-\operatorname{arch}\dfrac{1}{nh}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2h^2-1}}+\operatorname{arc\,sin}\frac{\alpha}{nh}\right\},$$

$$I_1 = I'_{1(h=1)} = Re\left\{\frac{\alpha\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}-\operatorname{arch}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2-1}}+\operatorname{arc\,sin}\frac{\alpha}{n}\right\},$$

$${}^{2}I = Re\int_{\alpha}^{nh}\frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}}{\left(1-\dfrac{\varepsilon h}{\alpha}\right)^2\sqrt{n^2-1}}\,d\varepsilon = Re\left\{\frac{\alpha(\alpha^2-h)\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{(1-h)(\alpha^2-h^2)\sqrt{n^2-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha\left(h\operatorname{arch}n-\alpha\operatorname{arch}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}\right)}{(\alpha^2-h^2)\sqrt{n^2-1}}+\frac{\alpha^3\left[\operatorname{arch}\dfrac{n^2h-\alpha^2}{n\alpha(1-h)}-\operatorname{arch}\dfrac{nh}{\alpha}\right]}{(\alpha^2-h^2)\sqrt{n^2h^2-1}}\right\},$$

$$I_2' = Re\int_{\alpha}^{nh}\frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}}}{\left(1-\dfrac{\varepsilon}{h\alpha}\right)^2\sqrt{n^2h^2-1}}\,d\varepsilon = Re\,\frac{h^2\alpha}{1-h^2\alpha^2}\left\{\frac{\dfrac{1-h\alpha^2}{1-h}\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2h^2-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha\operatorname{arch}\dfrac{1}{nh}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2h^2-1}}+\frac{\alpha^2\operatorname{arch}\dfrac{n^2h-\alpha^2}{n\alpha(1-h)}}{\sqrt{n^2-\alpha^2}}\right\},$$

$$I_3' = Re\int_0^1\frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{\sqrt{n^2h^2-\alpha^2}} =$$

$$= Re\left\{\frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}-\alpha\operatorname{arch}\dfrac{1}{nh}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2h^2-\alpha^2}}+\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{nh}\right\}, \qquad (12)$$

$$I_3 = I'_{3(h=1)} = Re\left\{ \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}} - \alpha \operatorname{arch}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2-\alpha^2}} + \operatorname{arc\,sin}\frac{1}{n} \right\},$$

$$I_4 = Re\int_0^1 \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{(1-\varepsilon h)^2\sqrt{n^2-\alpha^2}}\, d\varepsilon =$$

$$= Re\,\frac{1}{1-h^2\alpha^2}\left\{ \frac{\dfrac{1-h\alpha^2}{1-h}\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}} + h\alpha^2 \operatorname{arch}\dfrac{n}{\alpha} - \alpha\operatorname{arch}\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2-\alpha^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{arch}\dfrac{n^2h-1}{n(1-h)} - \operatorname{arch} nh}{\sqrt{n^2h^2-1}} \right\}$$

$$I'_4 = Re\int_1^{nh} \frac{\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\varepsilon^2}{\alpha^2-\varepsilon^2}}}{\left(1-\dfrac{\varepsilon}{h}\right)^2\sqrt{n^2h^2-\alpha^2}}\, d\varepsilon =$$

$$= Re\,\frac{h^2}{h^2-\alpha^2}\left\{ \frac{\dfrac{h^2-\alpha^2}{1-h}\operatorname{arch}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}} + \alpha\operatorname{arch}\dfrac{1}{nh}\sqrt{\dfrac{n^2h^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\sqrt{n^2h^2-\alpha^2}} - \frac{\operatorname{arch}\dfrac{n^2h-1}{n(1-h)}}{\sqrt{n^2-1}} \right\}.$$

Cu aceste notații formulele de calcul ale lui D_1 și D_2 se transcriu în forma condensată :

$$D_1 = \frac{1}{2\pi(1-h)h}\left\{ I'_1 - I_1 + (1-h)(I_2 - I'_2) \right\},$$
$$D_2 = \frac{\alpha}{2\pi(1-h)h}\left\{ I'_3 - I_3 + (1-h)(I_4 - I'_4) \right\}. \tag{13}$$

În diagramele de mai jos (fig. 7), se dau rezultatele pentru $n = 0{,}6$; 1 ; 1,5 ; $\alpha = 0{,}25$; 0,5 ; 0,75 ; 0,9 și $m = 0{,}25$; 0,75 ; 1 ; 1,25 ; 1,50 ; 2, în funcție de h.

CONCLUZII

Prezenta lucrare s-a preocupat de influența variației, pantei m la bordul de atac și a poziției α a saltului de pantă de pe aripă, asupra coeficientului de rezistență C_x. Din graficele de mai sus se observă că pentru $m < 1$ creșterea lui α determină o creștere a lui C_x și invers, pentru $m > 1$, creșterea lui α determină o descreștere a lui C_x.

Primită la redacție la 9 martie 1957.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КАРАФОЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНОГО ДВУКОНУСНОГО КРЫЛА С ДВОЙНЫМ УГЛОМ НАКЛОНА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Применяя теоретические результаты работ [1], [2], [3] и [4] и числовые результаты работы [5], в настоящей работе рассчитывают сопротивления треугольного двуконусного крыла с переменным углом наклона (рис. 1, 2).

Сначала определяется осевая скорость возмущения (2), а затем — выражение полного сопротивления (3), (4), (5). Пользуясь безразмерными величинами (1), вместо полного сопротивления R_t рассчитывают коэффициент C_t (6). Этот коэффициент зависит от четырех параметров: $m=\gamma_1/\gamma$ — отношения двух углов наклона, n — безразмерной ординаты точки пересечения образующей конуса Маха, определяемой вершиной O и осью $O_1\varepsilon$, h — абсциссы A по отношению к O_1 (рис. 1) и α — безразмерной ординаты точки пересечения радиуса, вдоль которого происходит скачок с углом наклона $(\gamma_1-\gamma)$ относительно оси O,ε.

Формула (7) устанавливает параболическую зависимость C_t от m. Четыре коэффициента, входящие в состав C_t даются соотношениями (8), а соотношения (9), (10) указывают на то, что два из них, C_0 и C_1 являются характерными для крыла с постоянным углом наклона $m=1$, рассмотренного в [5].

Интегралы, появлющиеся в коэффициентах D_1 и D_2 могут быть вычислены при помощи одной первообразной функции (11) путем применения к частным случаям параметров (12).

Диаграммы показывают, что когда α возрастает, то при $m<1$ возрастает и C_x, а при $m>1$ C_x убывает.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DE CARAFOLI AU CALCUL DE LA RÉSISTANCE D'ONDE DE L'AILE DELTA DOUBLEMENT CONIQUE, À DOUBLE PENTE

(RÉSUMÉ)

Partant des résultats théoriques des travaux [1], [2], [3], [4] et des données numériques [5], on calcule dans le présent travail la résistance d'une aile delta doublement conique à pente variable (fig. 1, 2).

On détermine tout d'abord la vitesse axiale de perturbation (2) et ensuite l'expression de la résistance totale (3), (4), (5). Faisant usage des grandeurs adimensionnelles (1), à la place de la résistance totale R_t on calculera le coefficient C_t (6). Ce coefficient dépend de quatre paramètres : $m = \gamma_1/\gamma$, rapport des deux pentes, n, ordonnée adimensionnelle du point

d'intersection de la génératrice du cône de Mach, déterminé par le sommet O et l'axe $O_1\varepsilon$, h, l'abscisse de A par rapport à O_1 (fig. 1) et α, ordonnée adimensionnelle du point d'intersection du rayon le long duquel se produit le saut de pente ($\gamma_1 - \gamma$) avec l'axe $O_1\varepsilon$.

La formule (7) établit la dépendance parabolique de C_t par rapport à m. Les quatres coefficients qui entrent dans la composition de C_t sont donnés par les relations (8) ; les relations (9), (10) montrent que deux de ces coefficients C_0 et C_1 sont caractéristiques pour l'aile à pente constante $m = 1$, traitée dans [5].

Les intégrales qui apparaissent dans les coefficients D_1 et D_2 peuvent être calculées à l'aide d'une seule primitive (11), en donnant aux paramètres des valeurs particulières (12).

Les diagrammes montrent que pour $m < 1$, lorsque α croît, C_x croît en même temps et, pour $m > 1$, inversement, lorsque α croît, C_x décroît.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Asupra portanței și rezistenței aripii triunghiulare la viteze supersonice*. Comunicările Acad. R.P.R., t. IV, nr. 5—6, mai-iunie 1954, p. 261.
2. E. Carafoli și M. Ionescu, *Rezistența aripilor triunghiulare dublu conice, cu pantă variabilă, în curent supersonic*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, iulie-decembrie 1954, p. 285.
3. E. Carafoli. *Asupra caracterului hidrodinamic al soluțiilor din mișcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale*. Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 9—10, septembrie-octombrie 1952, p. 629.
4. — *Extinderea analogiei hidrodinamice din mișcările conice la aripile groase și cu incidență variabilă*. Comunicările Acad. R.P.R., t. III, nr. 3—4, martie-aprilie 1953, p. 141.
5. A. E. Puckett, *Supersonic Wave Drag of Thin Airfoils*. Journ. of Aero. Sci., 1946, p. 475.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

AEROMECANICĂ

DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A REPARTIȚIEI DE PRESIUNI ÎN LUNGUL UNUI OBSTACOL SITUAT ÎN CURENT SUPERSONIC DE GAZ

DE

D. PANTAZOPOL

În lucrarea de față se propune o metodă aproximativă pentru determinarea repartiției de presiuni în lungul părții frontale a unui obstacol situat într-un curent supersonic de gaz. Scurgerea este considerată plană și gazul lipsit de viscozitate.

Metoda permite, cu aproximație suficientă, și determinarea *punctului de detașare* al undei de șoc, adică poziția pe care o ocupă în fața corpului porțiunea undei de șoc perpendiculară pe direcția curentului de gaz neperturbat.

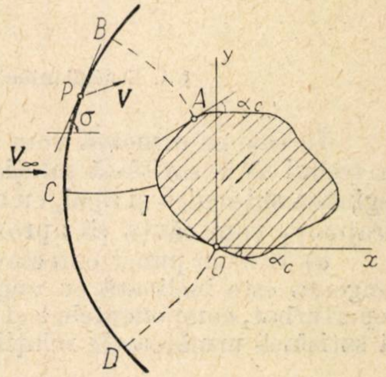


Fig. 1

Să considerăm un obstacol oarecare plasat într-un curent supersonic de gaz, plan paralel, a cărui viteză este V_∞ și al cărui număr Mach este $M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$, a_∞ fiind viteza sunetului.

Aspectul calitativ și schematic al scurgerii este indicat în figura 1 : în fața corpului ia naștere unda de șoc detașată *BCD*. Curentul de gaz este neperturbat în amontele acestei linii de discontinuitate. Imediat în spatele porțiunii *BCD* a undei de șoc, mișcarea devine brusc subsonică. Mișcarea gazului rămîne subsonică în toată regiunea *OIABCD*, pe care o vom numi *regiune subsonică.*

Punctul *I* este punctul de viteză nulă.

Lucrarea de față se referă numai la regiunea subsonică a scurgerii, deoarece, în special pentru profilele utilizate în mod curent, calculul repartiției de presiuni în regiunea supersonică este cunoscut.

Pe liniile *AB* și *OD* viteza curentului devine critică (egală cu viteza locală a sunetului), iar în avalul acestor linii, denumite ***linii sonice***, mișcarea redevine supersonică.

Vom observa că forma corpului din avalul liniilor sonice nu influențează scurgerea din regiunea subsonică. Într-adevăr; perturbațiile care se nasc în spatele liniilor sonice nu se pot propaga în amontele acestora, mișcarea de după aceste linii fiind supersonică.

★

Dintre ipotezele și aproximațiile folosite în mod curent în studiul scurgerilor de acest fel, le vom utiliza pe următoarele :

1. Presiunea și viteza gazului pe conturul obstacolului sînt aproximativ egale cu cele ale curentului neperturbat de gaz în punctele în care tangenta la contur este paralelă cu direcția vitezei curentului neperturbat [1].

2. Punctele *O* și *A* de pe conturul corpului, din care pornesc liniile sonice (puncte critice), se caracterizează prin faptul că tangenta la contur în aceste puncte este înclinată cu unghiul critic α_c față de direcția vitezei curentului neperturbat. Dacă conturul prezintă un punct unghiulos, astfel încît în acest punct tangenta din spre amonte este înclinată cu un unghi mai mare decît cel critic, iar cea din spre aval cu un unghi mai mic decît cel critic, atunci viteza critică este atinsă în acest punct [1], [2].

3. Liniile de curent care intersectează liniile sonice sînt normale pe acestea în punctele de intersecție [1].

Aceste ipoteze și aproximații dau rezultate mulțumitoare așa cum se arată în lucrarea [1].

§ 1. Condiții la limită, ipoteze și aproximații suplimentare

În cele ce urmează vom arăta mai întîi condițiile la limită pe care ar trebui să le satisfacă soluția riguroasă a ecuațiilor de mișcare pentru regiunea subsonică și apoi, cu ajutorul unor ipoteze și aproximații simplificatoare, vom căuta să aproximăm această soluție.

a) Într-un punct oarecare *P*, situat pe unda de șoc (fig. 1), în care tangenta este înclinată cu unghiul σ față de direcția vitezei curentului neperturbat, componentele u și v ale vitezei subsonice **V** a fluidului trebuie să satisfacă următoarele relații :

$$\left.\begin{aligned} u &= V_\infty\left[1-\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)\sin^2\sigma\right],\\ v &= V_\infty\left(1-\frac{\rho_\infty}{\rho}\right)\sin\sigma\cos\sigma, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

care rezultă prin aplicarea teoremei impulsului și a ecuației de continuitate.

b) Pe liniile sonice viteza gazului este egală cu viteza critică c:

$$u^2 + v^2 = c^2. \tag{2}$$

În plus, ținînd seama și de ipoteza 3 de mai sus, liniile de curent sînt perpendiculare pe liniile sonice.

c) Pe linia *OIA*, care este linie de curent, viteza normală este nulă,

$$v_n = 0. \tag{3}$$

Observăm că dacă unda de șoc și liniile sonice ar fi cunoscute, atunci una dintre condițiile (1) precum și condiția ca liniile de curent să fie perpendiculare pe liniile sonice, nu sînt necesare. Cum însă unda de șoc și liniile sonice nu sînt cunoscute apriori, aceste condiții folosesc tocmai pentru determinarea lor.

La condițiile la limită indicate mai sus, mai trebuie adăugate și relațiile salturilor de densitate și presiune prin unda de șoc, deoarece în ecuațiile de mișcare intervin și aceste mărimi.

Determinarea potențialului scurgerii subsonice (în ipoteza că se neglijează rotorul care apare datorită curburii undei de șoc) cu ajutorul condițiilor la limită indicate mai sus, este o problemă extrem de grea.

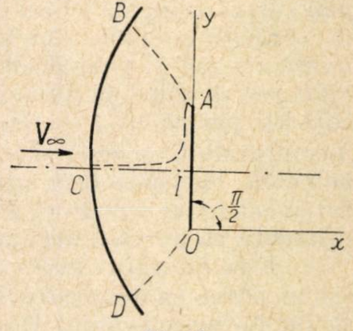


Fig. 2

Pentru a rezolva mai ușor această problemă, vom recurge la cîteva ipoteze simplificatoare, care ne vor permite să aproximăm scurgerea în condiții mulțumitoare.

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că porțiunea *OIA* a obstacolului este rectilinie și perpendiculară pe direcția vitezei curentului neperturbat (fig. 2). În acest caz scurgerea este simetrică în raport cu o axă paralelă cu V_∞ și trecînd prin mijlocul acestei porțiuni.

Să considerăm un ajutaj plan infinit de subțire, format de linia de curent *CIA* și de alta infinit apropiată (desenată punctat în fig. 2). În punctul C unda de șoc este perpendiculară pe direcția vitezei V_∞, iar viteza subsonică în acest punct este dată de relația

$$V_1 = V_\infty \frac{\rho_\infty}{\rho_C} = \frac{c^2}{V_\infty}. \tag{4}$$

Raportul $\frac{\rho_\infty}{\rho_C}$, dintre densitățile din fața și din spatele undei de șoc în punctul C, este definit de relația

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_C} = \frac{2}{\varkappa + 1} \cdot \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}. \tag{5}$$

Dacă am putea determina legea de variație a secțiunii ajutajului considerat în lungul său, atunci repartiția vitezelor și presiunilor în lungul porţiunii OIA ar fi foarte uşor de găsit, prin aplicarea ecuaţiilor scurgerii unidimensionale.

Să presupunem acum că în regiunea subsonică se scurge un fluid incompresibil, mişcarea sa fiind irotaţională. Cu alte cuvinte, să ne imaginăm că fluidul la trecerea prin porţiunea BCD a undei de şoc, devine brusc incompresibil. Este evident că, din cauza simetriei, linia CIA va fi linie de curent şi pentru fluidul incompresibil fictiv.

Dacă vom putea determina pentru scurgerea incompresibilă irotaţională condiţii la limită, astfel încît spectrul real al liniilor de curent să coincidă în apropierea porţiunii OIA cu spectrul scurgerii incompresibile fictive, cu alte cuvinte dacă am putea face ca ajutajul real, considerat mai sus, să coincidă cu cel corespunzător scurgerii fictive, atunci problema de care ne ocupăm s-ar simplifica considerabil. Cum însă condiţiile la limită nu pot fi puse decît la frontierele domeniului, vom putea face ca ajutajele să coincidă numai în vecinătatea punctelor C şi A. Dar, în vecinătatea punctului I de viteză nulă, scurgerea reală poate fi considerată incompresibilă şi deci şi în această vecinătate ajutajele pot fi făcute să coincidă. Se poate însă admite uşor că, dacă ajutajele coincid în vecinătatea celor trei puncte C, I şi A, pe porţiunile cuprinse între aceste puncte, diferenţa va putea fi neglijată.

Este adevărat însă că poziţia punctului C nu este cunoscută apriori şi s-ar putea ca determinarea ei cu ajutorul scurgerii incompresibile fictive să nu fie prea exactă. Deşi pentru aflarea repartiţiei de presiuni nu ne interesează decît porţiunea IA a ajutajului, totuşi putem spera ca şi porţiunea CI a ajutajului real să coincidă aproximativ cu cea a ajutajului dat de scurgerea incompresibilă. Aceasta în special pentru numere M_∞ suficient de mari, deoarece în acest caz vitezele în spatele undei de şoc, în vecinătatea liniei CI, sînt destul de mici în raport cu viteza locală a sunetului şi deci comportarea fluidului real se apropie de cea a unui fluid incompresibil.

Vom arăta mai departe că aceste consideraţii sînt apropiate de rezultatele experimentale, în ceea ce priveşte scurgerea în jurul unei plăci plane perpendiculare pe direcţia vitezei curentului neperturbat. Avînd în vedere acest lucru, dacă porţiunea OIA este o curbă simetrică faţă de dreapta CI, putem aplica cele de mai sus, cel puţin în cazurile în care curburile nu sînt prea pronunţate. Dacă porţiunea OIA este o curbă nesimetrică, atunci punctul I nu mai este cunoscut apriori. Vom face însă ipoteza că punctul de viteză nulă al scurgerii incompresibile fictive coincide aproximativ cu cel al scurgerii reale, dacă disimetria conturului nu este prea mare.

Să determinăm în continuare, ţinînd seama de consideraţiile de mai sus, condiţiile la limită pentru scurgerea incompresibilă şi irotaţională.

Vom presupune deci că în regiunea subsonică se scurge un fluid incompresibil fictiv, mişcarea sa fiind irotaţională. Vom nota cu ρ_i densitatea acestui fluid.

Vom pune condiţia ca viteza pe care o atinge acest fluid în dreptul liniilor sonice să aibă o valoare constantă

$$V_i = c_i. \tag{6}$$

De asemenea, vom impune condiția ca și liniile de curent ale fluidului incompresibil fictiv să fie perpendiculare pe liniile sonice.

Considerînd din nou ajutajul plan infinit de subțire de mai sus și scriind ecuația de continuitate întîi pentru fluidul real și apoi pentru cel incompresibil, obținem relațiile

$$\rho_A c\, \Delta s_A = \rho_c V_1\, \Delta s_C, \tag{7}$$

$$c_i\, \Delta s_A = V_{1i}\, \Delta s_C, \tag{8}$$

unde prin Δs_A s-a notat secțiunea ajutajului în dreptul punctului critic, iar prin Δs_C secțiunea în dreptul punctului C.

Într-un punct situat pe unda de șoc, procedînd în același mod ca în cazul fluidului real, obținem relațiile

$$\left.\begin{aligned} u_i &= V_\infty \left[1 - \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_i}\right)\sin^2 \sigma\right], \\ v_i &= V_\infty \left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho_i}\right)\sin \sigma \cos \sigma. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Vom pune condiția ca în punctul C viteza fluidului incompresibil fictiv să satisfacă o relație asemănătoare cu (4) :

$$V_{1i} = \frac{c_i^2}{V_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\rho_i} V_\infty. \tag{10}$$

Comparînd între ele relațiile (7), (8), (4) și (10), se obține

$$\rho_i = \frac{\rho_A^2}{\rho_i}, \tag{11}$$

$$c_i = \frac{\rho_c}{\rho_A} c. \tag{12}$$

Din cele de mai sus rezultă că dacă relațiile (9) sînt satisfăcute de soluția care reprezintă scurgerea incompresibilă, atunci soluția aproximativă a scurgerii reale va satisface relațiile (1) în mod riguros în punctul C și aproximativ în celelalte puncte ale undei de șoc. Aproximația va fi cu atît mai bună cu cît punctele considerate de pe undă vor fi mai apropiate de punctul C.

Afirmații asemănătoare se pot face și asupra relațiilor (11) și (12); dacă soluția scurgerii incompresibile le satisface, atunci vor fi satisfăcute și condițiile impuse fluidului real în vecinătatea punctelor A și O.

În concluzie, dacă relațiile de mai sus sînt îndeplinite, atunci ajutajele considerate mai înainte vor coincide aproximativ.

Problema se reduce deci la determinarea potențialului complex al scurgerii incompresibile și irotaționale,

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y), \tag{13}$$

care să satisfacă următoarele condiții la limită :

1. Întrucît liniile sonice sînt perpendiculare pe liniile de curent, le putem considera ca linii de egal potențial. Referindu-ne la figura 1, vom lua

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \quad \text{pe } OD, \\ \varphi &= k \quad \text{pe } AB, \end{aligned} \tag{14}$$

unde k se va determina ulterior.

În plus va trebui ca

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| = c_i \tag{15}$$

în lungul acestor linii.

2. Pe porțiunea OIA, care este linie de curent, vom lua

$$\psi = 0. \tag{16}$$

3. Într-un punct al porțiunii BCD a undei de șoc, putem scrie

$$\begin{aligned} d\varphi &= u_i\,dx + v_i\,dy, \\ d\psi &= -\,v_i\,dx + u_i\,dy. \end{aligned} \tag{17}$$

Ținînd seama de (9) și de faptul că $\operatorname{tg}\sigma = \frac{dy}{dx}$, obținem după calcule elementare, condiția la limită.

$$v_i\,d\psi - \frac{\rho_\infty}{\rho_i}(V_\infty - u_i)\,d\varphi = 0. \tag{18}$$

Pentru obținerea de soluții vom utiliza o metodă hodografică.

§ 2. Domeniul hodografic. Condițiile la limită în domeniul hodografic

Viteza complexă a scurgerii incompresibile este dată de relația

$$w_i = u_i - iv_i = \frac{df}{dz}, \tag{19}$$

unde $z = x + iy$ este variabila complexă din planul fizic.

Vom face în prealabil următoarea transformare :

$$w' = u' + iv' = \frac{w_i}{c_i} = \frac{u_i}{c_i} - i\,\frac{v_i}{c_i} \tag{20}$$

și vom considera planul variabilei complexe w', în care vom căuta să determinăm domeniul corespunzător regiunii subsonice $ABCDOIA$ (fig. 1).

Pentru a determina imaginea hodografică a undei de şoc detaşate, vom elimina pe σ între relaţiile (9). Ţinînd seama şi de relaţiile (11) şi (20), obţinem:

$$u'^2 + v'^2 - \left(1 + \frac{\rho_\infty \rho_C}{\rho_A^2}\right)\frac{V_\infty}{c_i}u' + \frac{V_\infty^2}{c_i^2}\,\frac{\rho_\infty \rho_C}{\rho_A} = 0. \qquad (21)$$

Ecuaţiile de mai sus reprezintă un cerc, ortogonal cercului unitate cu centrul în origină (fig. 3). Deci porţiunea *BCD* a undei de şoc este reprezentată în planul w' de arcul de cerc *BCD* cuprins în interiorul cercului unitate cu centrul în origină:

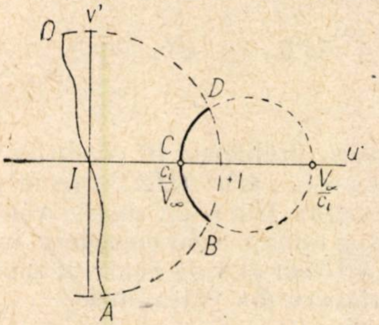


Fig. 3

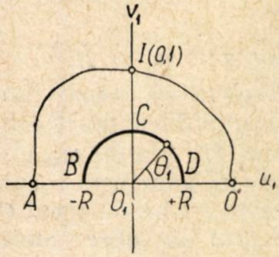


Fig. 4

$$| w' | = 1. \qquad (22)$$

Arcurile *AB* şi *OD* ale cercului unitate sînt imaginile hodografice ale liniilor sonice.

Porţiunea *OIA* a obstacolului este reprezentată de linia curbă necunoscută *OIA* din figura 3.

Condiţiile la limită în planul w' sînt următoarele:

1. Pe arcul *OD* $\varphi = 0$ (23)
2. Pe arcul *AB* $\varphi = k$ (24)
3. Pe linia *OIA* $\psi = 0$ (25)
4. Pe arcul *BCD*, care reprezintă unda de şoc, trebuie satisfăcută condiţia (18).

Vom utiliza mai întîi următoarea transformare conformă:

$$w_1 = -i\frac{w' - 1}{w' + 1}, \qquad (26)$$

care transformă domeniul din figura 3 în domeniul indicat pe figura 4. Corespondenţa frontierelor rezultă din figură.

În noul domeniu w_1, condiţiile la limită sînt următoarele:

1. Pe segmentul *OD* $\varphi = 0$ (27)
2. Pe segmentul *AB* $\varphi = k$ (28)
3. Pe linia *OIA* $\psi = 0$ (29)

4. Pe semicercul superior *BCD*

$$|w_1| = R = \frac{1 - \frac{c_i}{V_\infty}}{1 + \frac{c_i}{V_\infty}}, \tag{30}$$

care reprezintă unda de şoc, se obţine prin intermediul lui (26), transformata relaţiei (18) :

$$\cos\theta_1\, d\psi + \frac{c_i}{V_\infty}(1 + \sin\theta_1)\, d\varphi = 0, \tag{31}$$

unde s-a pus $w_1 = Re^{i\theta_1}$.

Trebuie să remarcăm că rezolvarea problemei în condiţiile de mai sus prezintă încă mari dificultăţi, deoarece curba *OIA*, care mărgineşte domeniul din planul w_1, nu este cunoscută. Din acest motiv, vom căuta să obţinem soluţii pe o cale indirectă şi anume vom considera în planul w_1 diferite curbe de tipul *OIA*, alese arbitrar şi vom construi aposteriori, cu ajutorul lor, obstacolele corespunzătoare din planul fizic.

Pentru aceasta vom observa că funcţia

$$w_1 = w_2\, e^{l(w_2)}, \tag{32}$$

în care

$$l(w_2) = \sum_0^\infty A_n\left(w_2^n - \frac{R'^{2n}}{w_2^n}\right), \tag{33}$$

poate transforma un domeniu de tipul domeniului *OIABCD* (fig. 4), într-o semicoroană circulară *OIABCD* (fig. 5). Cum în expresia funcţiei (33) numărul de termeni şi valorile coeficienţilor reali A_n pot fi alese arbitrar rezultă că avem posibilitatea să acoperim o gamă largă de curbe de tipul *OIA* şi deci de forme de obstacole.

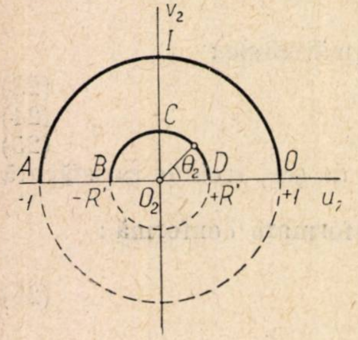


Fig. 5

Alegerea coeficienţilor A_n nu este însă cu totul arbitrară. În primul rînd va trebui să impunem condiţia evidentă ca linia *OIA*, corespunzătoare alegerii (33) făcute, să treacă prin punctul *I* (0,1).

În al doilea rînd, o alegere cu totul arbitrară a coeficienţilor A_n ar putea conduce la unele incompatibilităţi de natură fizică. De exemplu, s-ar putea întîmpla ca frontierele domeniilor reprezentate conform unul pe altul prin transformarea (32), să prezinte puncte de întoarcere. Practic, obstacolele utilizate sînt mărginite de curbe în general regulate şi din acest motiv alegerea numerică a coeficienţilor A_n este bine să satisfacă anumite condiţii de regularitate.

§ 3. Expresia potențialului complex

În cele ce urmează, vom considera că transformarea (32) este aleasă convenabil.

Vom căuta acum să determinăm potențialul scurgerii incompresibile fictive, în funcție de variabila complexă w_2. În planul acestei variabile complexe, condițiile la limită rămîn aceleași, cu deosebire de condiția (31), în care trebuie introdusă expresia

$$\theta_1 = \theta_2 + 2 \sum_1^\infty A_n R'^n \sin n\,\theta_2. \tag{34}$$

Vom pune potențialul complex sub forma [3]

$$f(w_2) = -i\frac{k}{\pi}\ln w_2 + f_1(w_2). \tag{35}$$

Se observă ușor că funcția analitică

$$f_1(w_2) = \varphi_1 + i\,\psi_1 \tag{36}$$

trebuie să satisfacă următoarele condiții la limită (fig. 5):

1. Pe segmentul OD $\qquad \varphi_1 = 0$ (37)

2. Pe segmentul AB $\qquad \varphi_1 = 0$ (38)

3. Pe semicercul superior $|w_2| = 1, \quad \psi = 0$ (39)

4. Pe semicercul superior $|w_2| = R'$ se obține, introducînd expresia (35) în condiția la limită (31),

$$\cos\theta_1 \frac{d\psi_1}{d\theta_2} + \frac{c_i}{V_\infty}(1 + \sin\theta_1)\frac{d\varphi_1}{d\theta_2} = -\frac{k}{\pi}\,\frac{c_i}{V_\infty}(1 + \sin\theta_1). \tag{40}$$

În baza condițiilor la limită (37) și (38), funcția $f_1(w_2)$ poate fi prelungită analitic, după principiul lui Schwartz, în semicoroana inferioară (desenată punctat în fig. 5) și admite deci o dezvoltare în serie Laurent. Ținînd seama și de condiția (39), seria Laurent va fi de forma următoare:

$$f_1(w_2) = i\sum_1^\infty C_n\left(w_2^n - \frac{1}{w_2^n}\right), \tag{41}$$

coeficienții C_n fiind reali.

Pentru calculul coeficienților C_n vom lua n puncte pe semicercul superior $|w_2| = R'$ și vom scrie că relația (40) este satisfăcută în aceste puncte. Rezultă un sistem de n ecuații liniare, din care se pot deduce coeficienții $C_2, \ldots, C_n$ și constanta k, în funcție de coeficientul C_1, care rămîne arbitrar.

Configuraţia din planul fizic se obţine cu ajutorul relaţiei (19), din care rezultă, introducînd transformările conforme efectuate :

$$dz = \frac{1}{c_i} \frac{df}{dw_2} \frac{i + w_2 e^{l(w_2)}}{i - w_2 e^{l(w_2)}} dw_2. \tag{42}$$

Formula de mai sus, nefiind uşor de integrat, în afara unor cazuri particulare simple, construcţia obstacolului din planul fizic se va efectua pe cale grafică.

§ 4. Calculul repartiţiei de presiuni

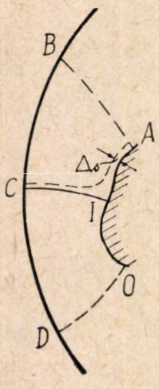


Fig. 6

Să considerăm (fig. 6) un ajutaj plan infinit de subţire, format din linia de curent $\psi = 0$ şi din una infinit apropiată. Secţiunea acestui ajutaj într-un punct oarecare, va fi notată cu Δs. Scriind ecuaţia de continuitate pentru fluidul fictiv incompresibil, în lungul ajutajului considerat, vom obţine

$$\frac{\Delta s}{\Delta s_A} = \frac{c_i}{V_i}, \tag{43}$$

unde prin $V_i = | w_i |$ s-a notat mărimea vitezei fluidului incompresibil în dreptul secţiunii Δs.

Din relaţia (43) rezultă că fiecare raport $\frac{c_i}{V_i}$ corespunde unui anumit raport $\frac{\Delta s}{\Delta s_A}$ dintre secţiunea Δs şi secţiunea corespunzătoare vitezei critice. Prin intermediul transformărilor (20), (26) şi (32), se calculează apoi valoarea complexă w_2, care corespunde la $| w_i | = V_i$, şi se obţine cu ajutorul relaţiei (42) punctul z de pe obstacol, corespunzător raportului $\frac{\Delta s}{\Delta s_A}$. Din tabelele sau din diagramele existente [4] se determină apoi raportul $\frac{p}{p_0}$ corespunzător lui $\frac{\Delta s}{\Delta s_A}$, pentru fluidul real care se scurge prin ajutajul considerat. Aici p_0 este presiunea din punctul de viteză nulă I.

În modul acesta se determină repartiţia presiunilor în lungul porţiunii OIA (fig. 1) a obstacolului.

§ 5. Exemplu de calcul

Vom alege

$$l(w_2) = A_0 + A_2 \left(w_2^2 - \frac{R'^4}{w_2^2} \right). \tag{44}$$

Separînd părţile reală şi imaginară, obţinem pentru $w_2 = e^{i\theta_2}$

$$\left. \begin{aligned} L &= A_0 + A_2 (1 - R'^4) \cos 2\theta_2, \\ N &= A_2 (1 + R'^4) \sin 2\theta_2. \end{aligned} \right\} \tag{45}$$

Pentru ca punctele $w_1 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ şi $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ să se corespundă, este necesar ca

$$A_0 = A_2(1 - R'^4). \tag{46}$$

Alegînd

$$A_0 = -0,4 \tag{47}$$

obţinem o curbă suficient de regulată şi, în acelaşi timp, frontierele domeniilor din planurile variabilelor complexe w_1 şi w_2 nu prezintă puncte de întoarcere.

Curba OIA, corespunzătoare alegerii făcute, fiind simetrică în raport cu axa imaginară din planul w_1, vom lua

$$k = 0. \tag{48}$$

De asemenea, în virtutea aceleaşi simetrii, în lungul segmentului CI vom putea lua

$$\psi = 0. \tag{49}$$

În baza celor de mai sus, expresia (35) a potenţialului complex capătă forma

$$f(w_2) = i\sum_{1}^{\infty} C_{2q-1}\left(w_2^{2q-1} - \frac{1}{w_2^{2q-1}}\right). \tag{50}$$

Vom determina acum coeficienţii C_3 şi C_5 cu ajutorul relaţiei (31), luînd coeficientul C_1 egal cu unitatea. Pentru aceasta vom observa mai întîi că în punctul $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, această relaţie este îndeplinită automat. Mai departe vom pune condiţia ca relaţia (31) să fie satisfăcută riguros în punctele $\theta_2 = 30°$ şi $\theta_2 = 60°$. Vom efectua calculele alegînd de exemplu

$$M_\infty = 1,5. \tag{51}$$

Se calculează uşor următoarele valori, luînd pentru aer $\varkappa \simeq 1,4$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_i}{V_\infty} &= 0,869, \\ \frac{\rho_C}{\rho_A} &= 1,3, \\ R' &= 0,104. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

După efectuarea calculelor, se găseşte sistemul de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\left.\begin{aligned} 336\ C_3 + 92\,500\ C_5 &= 1, \\ 1\,140\ C_3 - 13\,400\ C_5 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

din care rezultă

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= 0,97 \times 10^{-3}, \\ C_5 &= 0,734 \times 10^{-5}. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Se observă că mărimile coeficienţilor C_3 şi C_5 sînt mult mai mici decît unitatea. Din acest motiv vom neglija termenii corespunzători acestor coeficienţi la trasarea profilului din planul real şi la calcularea repartiţiei de presiuni.

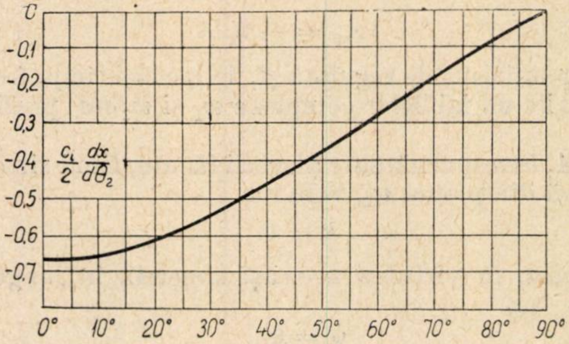


Fig. 7

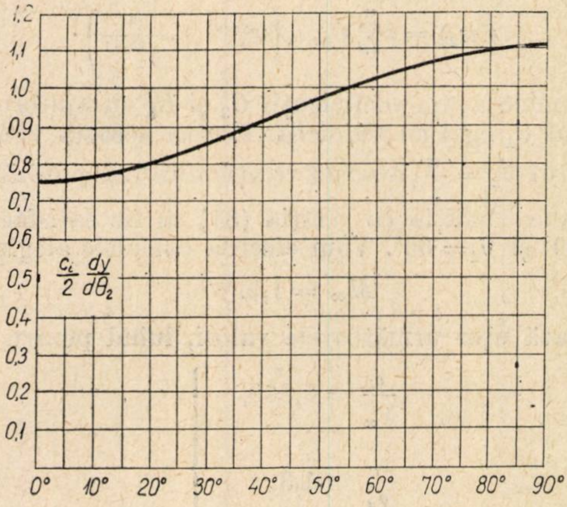


Fig. 8

Ţinînd seama de cele de mai sus şi separînd în (42) partea reală de cea imaginară, obţinem, după efectuarea calculelor :

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{2}{c_i}\,\frac{(1-e^{2L})\cos\theta_2 d\theta_2}{e^{2L}-2e^{L}\sin(\theta_2+N)+1}, \\ dy &= \frac{2}{c_i}\,\frac{2e^{L}\cos(\theta_2+N)\cos\theta_2 d\theta_2}{e^{2L}-2e^{L}\sin(\theta_2+N)+1}. \end{aligned} \tag{55}$$

Integrarea expresiilor de mai sus se face pe cale grafică după cum urmează : se trasează curbele reprezentative ale funcțiilor $\frac{dx}{d\theta_2}(\theta_2)$ și $\frac{dy}{d\theta_2}(\theta_2)$ și se planimetrează ariile corespunzătoare diferitelor valori ale lui θ_2. În figurile 7 și 8 sînt trasate aceste curbe.

Coordonatele profilului sînt indicate în tabloul alăturat.

Tablou

θ_2	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$\frac{c_i}{2}x$	1 330	2 600	3 750	4 750	5 580	6 220	6 660	6 920	7 000
$\frac{c_i}{2}y$	1 510	3 070	4 710	6 460	8 345	10 335	12 415	14 565	16 755
p/p_0	0,67	0,72	0,77	0,83	0,9	0,94	0,98	0,99	1,00

În același tablou sînt indicate și valorile p/p_0 corespunzătoare.

În figura 9 este trasată jumătatea inferioară a curbei OIA din planul izic (fig. 1), precum și repartiția de presiuni.

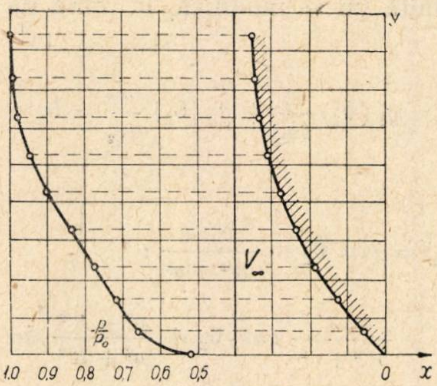


Fig. 9

Vom observa că profilul din figura 9 nu se deosebește mult de arcul de parabolă :

$$x = 2{,}49 \times 10^{-5} (y - 16\ 755)^2 - 7\ 000. \tag{56}$$

§ 6. Cazul cînd porțiunea OIA a obstacolului este rectilinie

Să considerăm că partea frontală OIA a obstacolului este o linie dreaptă, înclinată cu unghiul θ_0 față de direcția vitezei curentului neperturbat. În acest caz soluția problemei se poate obține direct, deoarece domeniul hodografic este cunoscut în întregime.

Domeniul hodografic corespunzător acestui caz este indicat în figura 10.

Cu ajutorul transformării conforme (26), la care se mai adaugă și transformarea

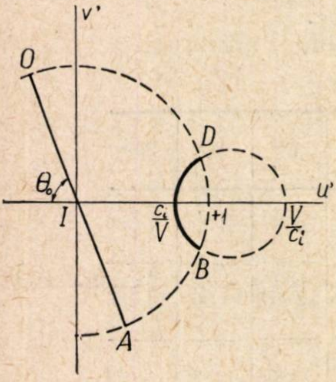


Fig. 10

$$w_2 = a\frac{w_1 - x_1}{w_1 - x_2}, \tag{57}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1 - R^2}{2R_1 \cos\theta_0} + \sqrt{\frac{(1 - R^2)^2}{4\,R_1^2 \cos^2\theta_0} - R^2}, \\ x_2 &= -\frac{1 - R^2}{2R_1 \cos\theta_0} - \sqrt{\frac{(1 - R^2)^2}{4\,R_1^2 \cos^2\theta_0} - R^2}, \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

$$a = \cos\,\theta_0 - x_2 \sin\,\theta_0, \tag{59}$$

$$R = \frac{1 - \frac{c_i}{V_\infty}}{1 + \frac{c_i}{V_\infty}},\; R_1 = \frac{1}{\sin\theta_0}, \tag{60}$$

domeniul din figura 10 se transformă în semicoroana circulară din figura 5.

Condițiile la limită nu se modifică, în afară de condiția (31), care devine

$$g_1(\theta_2)\frac{d\psi}{d\theta_2} + g_2(\theta_2)\frac{d\varphi}{d\theta_2} = 0, \tag{61}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} g_1(\theta_2) &= \cos\,\theta_2 - \frac{2R'a}{R'^2 + a^2}, \\ g_2(\theta_2) &= \frac{c_i}{V_\infty}\left[1 - \frac{2aR'}{R'^2 + a^2}\cos\,\theta_2 + \frac{a^2 - R'^2}{a^2 + R'^2}\sin\,\theta_2\right], \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

$$R' = a\frac{1 - \frac{c_i}{V_\infty} - x_1\left(1 + \frac{c_i}{V_\infty}\right)}{1 - \frac{c_i}{V_\infty} - x_2\left(1 + \frac{c_i}{V_\infty}\right)}. \tag{63}$$

Determinarea potențialului complex se face în modul descris la § 3. Pentru trecerea la planul fizic se obține formula

$$z = \frac{i}{c_i}\,\frac{x_2 + i}{x_2 - i}\,C_1\left[-\frac{k}{c_1}\,\frac{1}{\pi}I_0 + \sum_{q=1}^{n} q\,\frac{C_q}{C_1}\,I_q + H\right]. \tag{64}$$

Funcţiile I_0 şi I_q sînt date de expresiile următoare :

$$I_0 = \frac{\bar{b} - b}{\bar{b}} \ln (w_2 - \bar{b}) + \frac{b}{\bar{b}} \ln w_2, \tag{65}$$

$$\begin{aligned} I_q = & \frac{1}{q}\left[w_2^q - \frac{b}{\bar{b}} \frac{1}{u_2^q}\right] + \\ & + (\bar{b} - b)\left[(\bar{b})^{q-1} \ln (w_2 - \bar{b}) + \frac{1}{(\bar{b})^{q+1}} \ln \frac{w_2 - \bar{b}}{w_2}\right] + \\ & + \sum_{p=2}^{q} (\bar{b})^{p-2} \frac{\bar{b} - b}{q - p + 1}\left[w_2^{q-p+1} + \frac{1}{(\bar{b})^{2p-2}} \cdot \frac{1}{u_2^{q-p+1}}\right], \end{aligned} \tag{66}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} b &= a \frac{x_1 + i}{x_2 + i}, \\ \bar{b} &= a \frac{x_1 - i}{x_2 - i}. \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

S-a făcut convenţia ca $\sum\limits_{2}^{1} = 0$.

Constanta H, în general complexă, provine din integrare. Ea se determină astfel încît la $z = 0$, în planul real să corespundă $w_2 = 1$ în planul semicoroanei circulare.

Coeficientul C_1 este arbitrar. Dacă lungimea porţiunii OIA este dată atunci se poate determina acest coeficient astfel încît punctul A din planul fizic să corespundă punctului A din planul semicoroanei circulare.

În cazul cînd porţiunea rectilinie OIA este normală pe direcţia vitezei curentului neperturbat, formulele de mai sus se simplifică considerabil.

În primul rînd vom observa că reprezentarea conformă (26) transformă domeniul din planul hodografic direct într-o semicoroană circulară. De asemenea simetria scurgerii simplifică mult calculele.

Procedînd în acelaşi mod ca şi pînă acum se obţine următoarea formulă, care efectuează trecerea de la planul w_1 la planul fizic :

$$\begin{aligned} z = i \frac{C_1}{c_i} \Big\{ & 2i\, k_0 \ln \frac{1}{w_1} - k_1\left[\frac{1}{w_1} + w_1\right] + i\, k_2 \left[\frac{1}{w_1^2} - w_1^2\right] - \\ & - k_3\left[\frac{1}{w_1^3} + w_1^3\right] + i\, k_4\left[\frac{1}{w_1^4} - w_1^4\right] - k_5\left[\frac{1}{w_1^5} + w_1^5\right] - \pi k_0 \Big\}. \end{aligned} \tag{68}$$

S-au făcut notațiile

$$
\begin{aligned}
k_0 &= 1 - 3\frac{C_3}{C_1} + 5\frac{C_5}{C_1}, \\
k_1 &= 1 - 6\frac{C_3}{C_1} + 10\frac{C_5}{C_1}, \\
k_2 &= 3\frac{C_3}{C_1} - 5\frac{C_5}{C_1}, \\
k_3 &= \frac{C_3}{C_1} - \frac{10}{3}\frac{C_5}{C_1}, \\
k_4 &= \frac{5}{2}\frac{C_5}{C_1}, \\
k_5 &= \frac{C_5}{C_1}.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Calculele s-au mărginit numai la coeficienții C_1, C_3 și C_5.

Originea axelor de coordonate în planul fizic a fost aleasă în punctul I, care se găsește la mijlocul porțiunii OIA.

Dacă lungimea porțiunii OIA este $2h$, atunci putem determina coeficientul C_1 astfel încît la $z = ih$ să corespundă $w_1 = e^{i\pi}$. Rezultă

$$
C_1 = \frac{hc_i}{2 + \pi - (10 + 3\pi)\frac{C_3}{C_1} + \frac{46 + 15\pi}{3}\frac{C_5}{C_1}}. \tag{70}
$$

Dacă ne alegem în mod arbitrar valoarea coeficientului C_1, atunci lungimea plăcii se va determina ulterior.

Pentru calculul repartiției de presiuni se obține, după efectuarea unor calcule simple și neglijînd termenii corespunzători coeficienților C_3 și C_5, următoarea formulă de corespondență între punctele porțiunii rectilinii OIA și cele ale semicercului corespunzător din planul w_1 :

$$
y = 2\frac{C_1}{c_i}\left[\theta_1 - \cos\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right]. \tag{71}
$$

Se obține de asemenea o relație simplă între viteza fluidului incompresibil dintr-un punct al porțiunii OIA și punctul corespunzător din planul w_1 :

$$
\frac{V_i}{c_i} = \sqrt{\frac{1 - \sin\theta_1}{1 + \sin\theta_1}}. \tag{72}
$$

§ 7. Comparație cu rezultate experimentale

În lucrarea [1] sînt trasate cîteva curbe experimentale pentru repartiția de presiuni în lungul unei plăci normale pe direcția vitezei curentului neperturbat de aer.

În figura 11, sînt reproduse aceste curbe, în comparație cu cele obținute prin calcul, au ajutorul formulelor date în lucrarea de față.

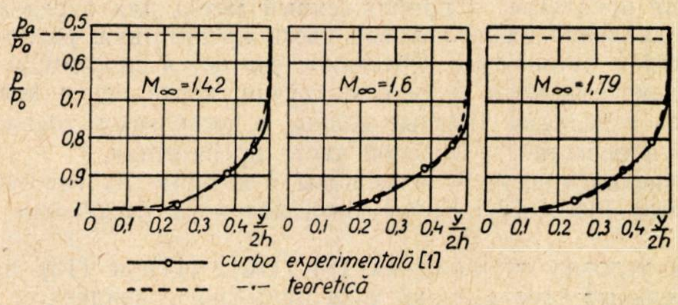


Fig. 11

În figura 12 se compară, pentru diferite numere M_∞, distanța de la placă a punctului de detașare a undei de șoc obținută experimental, cu cea obținută cu ajutorul formulei (68).

Diferențele destul de mici care există între rezultatele experimentale și cele ale lucrării de față, în ceea ce privește placa normală pe direcția vitezei curentului neperturbat, dovedesc că ipotezele și aproximațiile inițiale reprezintă satisfăcător fenomenul real.

Dacă presupunem că porțiunea rectilinie OIA se deformează prin continuitate și devine astfel o curbă oarecare, este normal să admitem în același timp că repartiția de presiuni, punctul de viteză nulă și punctul în care unda de șoc este perpendiculară pe direcția vitezei curentului neperturbat, variază de asemenea în mod continuu. Cu alte cuvinte, putem admite că rezultatele lucrării de față sînt valabile și pentru cazuri mai generale ca cel al plăcii normale, cel puțin atunci cînd curbele OIA nu sînt prea deformate.

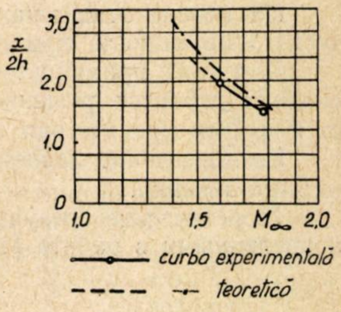


Fig. 12

Primită la redacție la 30 aprilie 1957.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЙ ВДОЛЬ ПРЕПЯТСТВИЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе предлагается приближенный метод для определения распределения давлений вдоль лобовой части препятствия, расположенного в сверхзвуковом потоке газа. Обтекание считается плоским, и газ — невязким. Рассматриваются только те случаи, когда перед препятствием зарождаются отдельные ударные волны, и исследуется только дозвуковое течение в окрестности лобовой части препятствия.

Для решения задачи использованы некоторые из гипотез, указанных в работах [1] и [2]. Кроме того, делаются следующие предположения :

1. Если условия соотношений (9), (10), (11) и (12) выполнены, то действительный спектр линий тока примерно совпадает со спектром, получаемым в предположении, что в области дозвукового течения жидкость является несжимаемой, а движение безвихревое.

2. Гипотеза, указанная выше, дает хорошие результаты в том случае, когда препятствием является плоская пластина, перпендикулярная к направлению невозмущенного потока. Вследствие этого гипотеза может быть распространена и на более общие случаи, как это указано в работе.

На основе этих гипотез задача сводится к определению аналитического потенциала при граничных условиях, указанных в работе.

Для этого применяется косвенный годографический метод, а именно, сначала строится решение в плоскости годографа, а затем определяется форма препятствия и звуковое течение в окрестности последнего.

Распределение давлений вычисляется на основе соотношений одномерных течений.

Теоретические результаты сравниваются с экспериментальными, приведенными в работе [1], и хорошо согласуются с ними.

DÉTERMINATION APPROXIMATIVE DE LA RÉPARTITION DES PRESSIONS LE LONG D'UN OBSTACLE PLACÉ EN COURANT SUPERSONIQUE DE GAZ

(RÉSUMÉ)

On propose, dans le présent travail, une méthode approximative pour déterminer la répartition des pressions le long de la partie frontale d'un obstacle, placé dans un courant supersonique de gaz. L'écoulement est considéré plan et le gaz, dépourvu de viscosité. On ne prend en consi-

dération que les cas dans lesquels prennent naissance des ondes de choc détachées en face de l'obstacle et l'on étudie seulement l'écoulement subsonique dans le voisinage de la partie frontale de l'obstacle.

Pour résoudre le problème, on utilise quelques hypothèses mentionnées dans les travaux [1] et [2]. De plus, on fait encore les hypothèses suivantes :

1. Si les relations (9), (10), (11) et (12) sont réalisées, le spectre réel des lignes de courant coïncide approximativement avec le spectre qu'on obtient en admettant que, dans la région où l'écoulement est subsonique, le fluide est incompressible et irrotationnel.

2. L'hypothèse ci-dessus donne de bons résultats pour le cas où l'obstacle est une plaque plane, normale à la direction du courant nonperturbé. Par conséquent, elle peut être étendue, ainsi qu'il est montré dans le travail, à des cas plus généraux aussi.

En vertu de ces hypothèses, le problème se réduit à la détermination d'un potentiel analytique, dans les conditions à la limite, indiquées dans le travail.

A ces fins, on a recours à une méthode hodographique indirecte, c'est-à-dire que l'on construit tout d'abord la solution dans le plan hodographique et l'on détermine ensuite la forme de l'obstacle et l'écoulement subsonique dans le voisinage de celui-ci.

La répartition des pressions est calculée sur la base des relations des écoulements unidimensionnels.

Les résultats théoriques sont comparés avec les résultats expérimentaux donnés dans le travail [1] et concordent avec ces derniers.

BIBLIOGRAFIE

1. Holder i Chinneck, Obdekanie tel vrașcenia i plastin s elipticeskoi nosovoi ceastin sverhzvukovîm potokom. Mehanica, 1955, nr. 2, p. 48—96.
2. L. Viaud. *Contribution à l'étude des ondes de choc détachées*. Les cahiers d'aérodynamique, septembrie 1947. nr. 7.
3. N. Patraulea și D. Pantazopol. *Miscarea conică în jurul unei aripi avînd la unul din capete un con aproape circular.* Bul. științ. Acad. R.P.R., t. VI, 1954, p. 13.
4. Pierre Rebuffet, *Aérodynamique expérimentale*. Paris, 1950.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

HIDRODINAMICĂ

STUDIUL MIŞCĂRII ALUVIUNILOR ÎN REGIM UNIFORM

DE

GR. MATEESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R.P.R.
M. KAHAN, A. FILOTTI şi D. DELICAN

Prezenta lucrare a avut ca obiect determinarea caracteristicilor critice de antrenare şi de formare a riflurilor aluviunilor dintr-un sector fluvial al Dunării şi stabilirea materialului ce urmează a fi utilizat în studiul problemei pe model.

Studiul a fost efectuat în Institutul de studii şi cercetări hidrotehnice de către un colectiv al Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. şi al Institutului de studii şi cercetări hidrotehnice al C.S.A.

★

Rezultatele obţinute de alţi cercetători în studiul mişcării aluviunilor sînt încă greu, dacă nu chiar imposibil, de generalizat şi aplicat în condiţii diferite celor în care ele au fost stabilite.

Această situaţie se explică prin faptul că mişcarea aluviunilor este un fenomen foarte complex şi influenţat de o serie de factori a căror prindere în calcul este foarte anevoioasă. De aceea, determinarea influenţei acestor factori s-a făcut în etape îndelungate şi sîntem încă departe de terminarea acestui proces de clarificare.

Pentru a ilustra cele de mai sus este suficient să ne referim la faptul că nu există încă un criteriu unic şi nici măcar un parametru unic pentru caracterizarea momentului de început al mişcării. De aici a rezultat de altfel şi multitudinea de formule astăzi în uz.

Nici mecanismul pornirii particulelor nu este încă clarificat.

Există diferite teorii asupra acestui mecanism al pornirii particulelor solide. Unii cercetători susţin pornirea particulelor prin răsturnare, alţii prin alunecare sau smulgere, sau, în sfîrşit, prin efecte combinate.

Cercetătorii care au studiat problema momentului critic de pornire a aluviunilor pot fi împărţiţi, în general, în două categorii : unii care studiază pornirea luviunilor pe baza vitezei medii a curentului, iar alţii pe baza forţei de antrenare. Pentru fiecare din cei doi parametri de referire s-au indicat o serie de relaţii empirice, foarte diferite din cauza numeroşilor factori secundari care influenţează mişcarea aluviunilor.

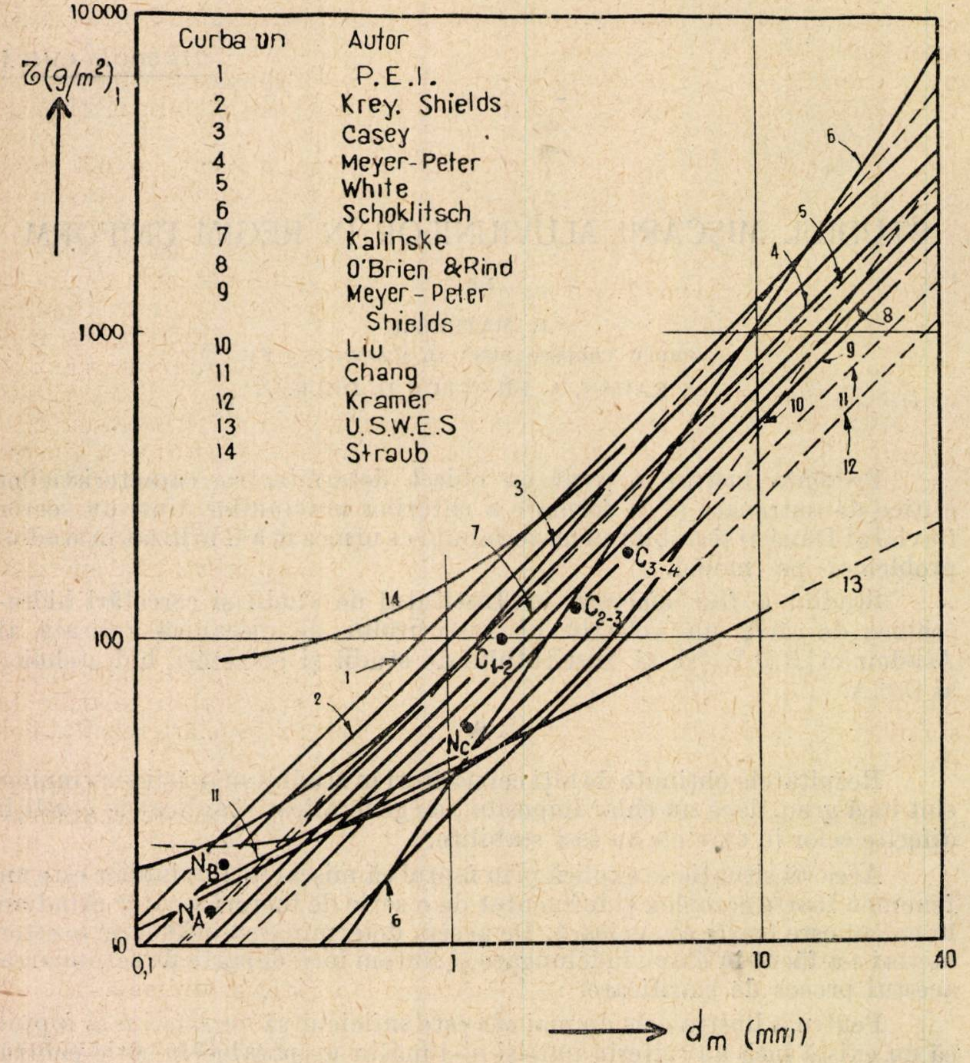


Fig. 1. — Dependenţa forţei de antrenare de diametrul mediu (după N. Chien).

Ning Chien [3] a suprapus o parte din reprezentările formulelor propuse (fig. 1). Din diagrama lui Chien rezultă clar marea dispersie a rezultatelor formulelor propuse. Această dispersie se explică atît prin considerentele de mai sus, cît și prin elementul subiectiv care intervine în măsurători și factorii secundari, specifici fiecărei instalații și metodici în parte.

Din aceste motive, literatura tehnică recomandă pentru efectuarea calculelor de similitudine a modelelor de albie cu fund mobil, organizarea unor încercări proprii în fiecare mare laborator hidrotehnic. Prin efectuarea unor asemenea studii se elimină o parte din subiectivitatea încercărilor și, independent de instalația și metodica adoptată, se pot stabili relațiile de similitudine necesare.

În studiile efectuate de diferiți cercetători s-a utilizat o gamă mare de materiale și s-au variat caracteristicile hidraulice ale curenților în limite foarte largi.

Materialele utilizate de majoritatea cercetătorilor sînt însă, în general, mai mari decît materialul natural al Dunării, al cărui diametru mediu în sectorul studiat, așa cum va rezulta mai departe, este de aproximativ 0,18 mm. Fracțiunile de asemenea dimensiuni nu reprezintă în cele mai frecvente cazuri studiate decît fracțiuni minime în aluviuni cu granulometrie neuniformă.

Cele de mai sus trebuie semnalate deoarece, la materialele cu diametrul sub 1 mm, se pune problema deosebit de delicată a riflurilor (încrețiturilor). Riflurile sînt dune primare, în general regulate, apropiate și echidistante unele față de altele.

Apariția riflurilor este deosebit de importantă în studiile de modelare, deoarece existența lor modifică esențial regimul de scurgere, prin sporirea sensibilă a rugozității fundului.

★

Din motivele examinate mai sus rezultă necesitatea unor studii bidimensionale ale mișcării aluviunilor pentru a putea stabili relațiile de similitudine necesare în dimensionarea modelelor și extrapolării rezultatelor de pe model la natură în fiecare caz în parte.

În studiul de față se prezintă rezultatele primului ciclu de încercări efectuat în legătură cu studiul pe model al complexului de încercări amintit mai sus.

S-au studiat șase materiale :

a) două sorturi din materialul din natură și anume :

— nisip, N_A $(d_m = 0{,}175$ mm) ;

— nisip, N_B $(d_m = 0{,}178$ mm) ;

b) un sort de nisip pentru încercări de laborator și anume :

— nisip granulat ø 0,5—2 mm N_C $(d_m = 1{,}16$ mm) ;

c) trei sorturi de cărbune pentru încercări de laborator și anume :

— cărbune granulat ø 1—2 mm (C_{1-2})

— cărbune granulat ø 2—3 mm (C_{2-3})

— cărbune granulat ø 3—4 mm (C_{3-4})

★

Instalația folosită a fost un canal vitrat cu pantă variabilă ($i = 0 \ldots 50$ ‰), de 9 m lungime și 0,30 m lățime (fig. 2).

Tronsoanele de intrare şi ieşire au fost de 2,50 m, iar tronsonul central de lucru de 4 m lungime.

Nivelul apei a fost măsurat cu ajutorul unor ace de măsură înzestrate cu un sistem de semnalizare electrică cu o precizie de ±0,1 mm. Debitele au fost măsurate cu ajutorul unui deversor triunghiular. Pentru asigurarea constanţei debitelor s-a utilizat un rezervor de nivel constant. Canalul era articulat la capătul amonte şi sprijinit pe un dispozitiv de ridicare cu şurub la capătul aval. Panta superficială a apei se regla cu ajutorul unei clapete instalate la capătul aval al canalului.

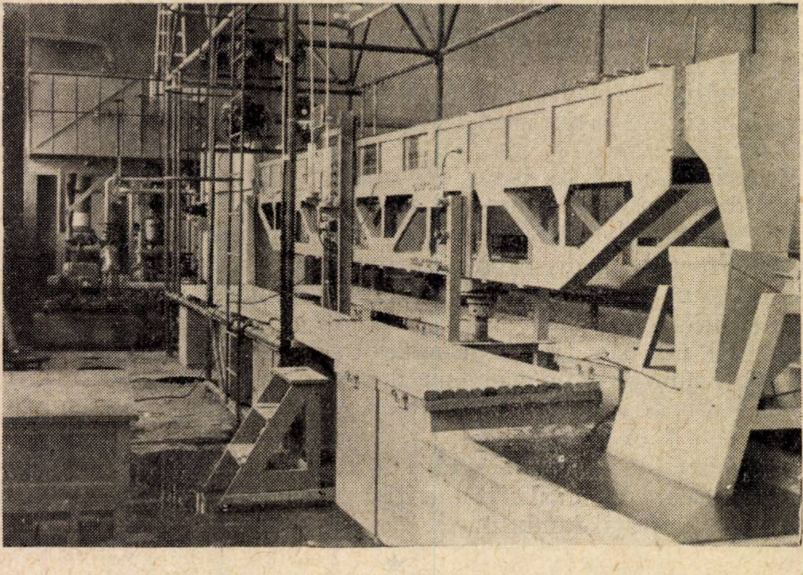


Fig. 2. — Canalul cu panta variabilă. Instalaţie experimentală.

Pentru preluarea probelor de debit solid a fost prevăzut un decantor de 2,50 m lungime, în care se depuneau aluviunile antrenate. După terminarea experienţei ele erau strînse, uscate şi apoi cîntărite. Pentru a putea determina exact timpul de experimentare, decantorul era împărţit în două jumătăţi şi era prevăzut cu un dispozitiv care permitea devierea alternativă a curentului în fiecare din acestea.

Vizualizarea fenomenelor de scurgere şi a mişcării aluviunilor se realiza prin geamuri laterale.

Metoda de studiu adoptată a fost cea utilizată de E. Meyer-Peter, R. Mueller şi H. A. Einstein şi anume a constat în determinarea legii debitului solid şi considerarea ca moment de început momentul în care, conform legii stabilite, debitul solid devine nul.

Această metodă pare să elimine la maximum factorul subiectiv. Rezultatele obţinute au fost comparate vizual cu starea naturală. În general, s-a constatat un transport de particule izolate şi sub caracteristicile critice determinate pe această cale ; totuşi, acest transport nu depăşea, de obicei, 25 g/m.h.

Greutatea specifică a nisipului studiat este de 2 660 kg/m^3. Din analiza mai multor curbe granulometrice a rezultat că nisipul natural este în general omogen, diferitele curbe granulometrice prezentînd abateri mici faţă de medie. Materialul este uniform, raportul dintre d_{90} şi d_{10} fiind 2,3 pentru nisipul N_A, 2,4 pentru N_B şi 2,75 pentru N_C. Curbele granulometrice respective sînt reprezentate în figura 3.

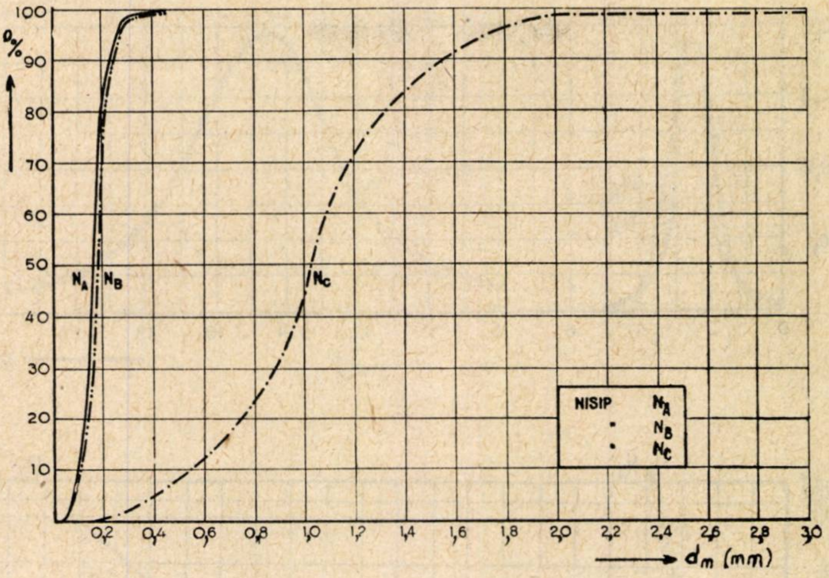


Fig. 3. — Curbele granulometrice ale nisipurilor studiate.

Particulele sînt, în general, bine rotunjite şi nu prezintă colţuri. Raportul dintre dimensiunea minimă şi cea maximă variază între extremele 1 : 1,5 şi 1 : 5, fiind în medie 1 : 2,5.

Pentru caracterizarea materialului s-a determinat mărimea hidraulică, parametru esenţial în definirea hidraulică, a materialului.

Pentru aceasta s-a utilizat o instalaţie provizorie cu o lungime de cădere uniformă de 40 cm. S-a studiat viteza de cădere a unor particule izolate. Pentru fiecare material s-au efectuat 50 de lansări de particule diferite. În figura 4 sînt date curbele de dispersiune şi probabilitate calculate după metoda indicată de I. V. Dunin-Barkovski şi N. V. Smirnov [4]. Se constată că se poate admite pentru rezultatele obţinute, curba de repartiţie a lui Poisson.

Valorile medii rezultate sînt cele din tabloul nr. 1, în care s-a dat şi eroarea probabilă după metoda indicată de Iakovlev.

În graficul din figura 5 s-au indicat şi punctele experimentale astfel obţinute, trasîndu-se în acelaşi timp şi curbele calculate cu formulele

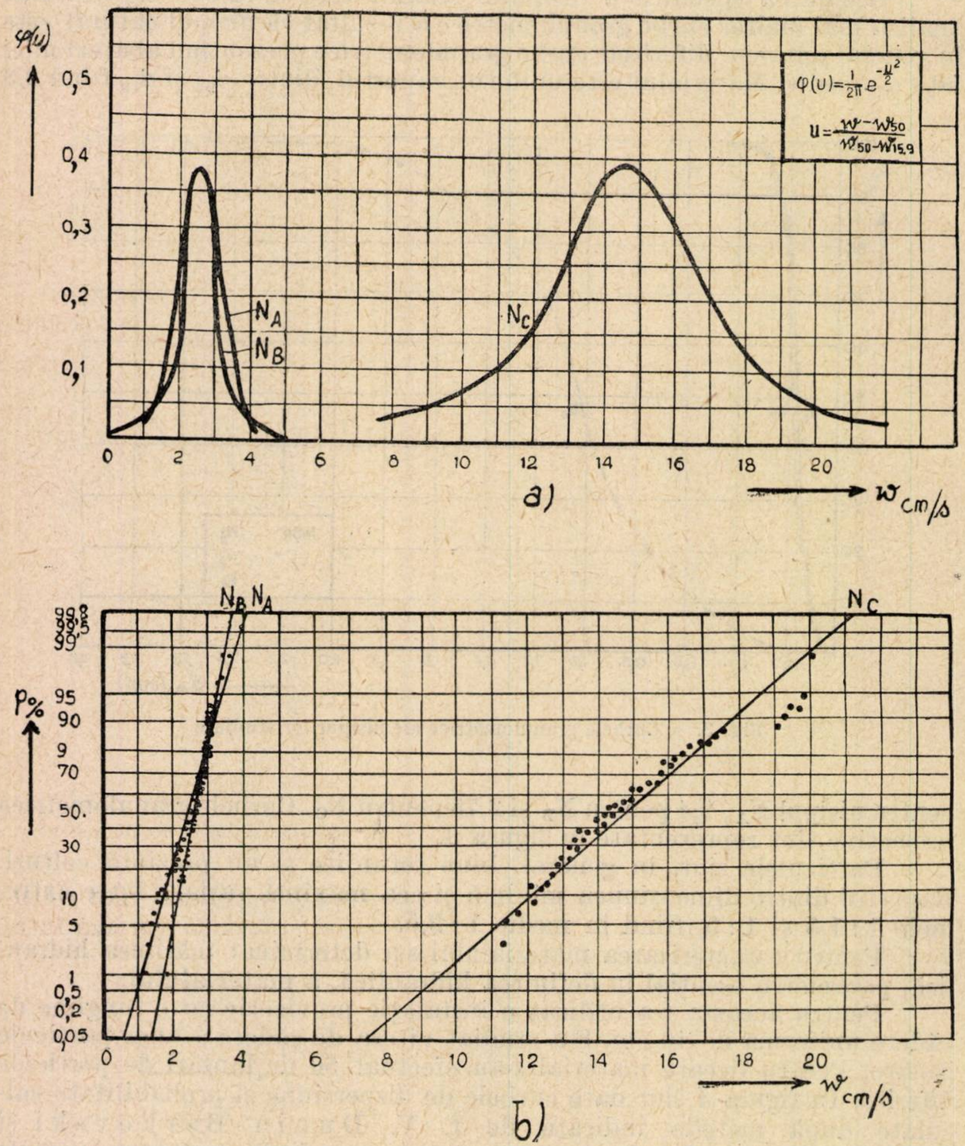


Fig. 4. — Determinarea mărimii hidraulice pentru nisip ; *a*) curbe de dispersie ; *b*) curbe de probabilitate.

indicate în literatură, pentru a se putea constata abaterea. În general, punctele se înscriu satisfăcător pe curbele obținute de alți cercetători.

Pentru încercările pe model s-a studiat cărbune brun concasat. Greutatea sa specifică este 1 250 kg/m³.

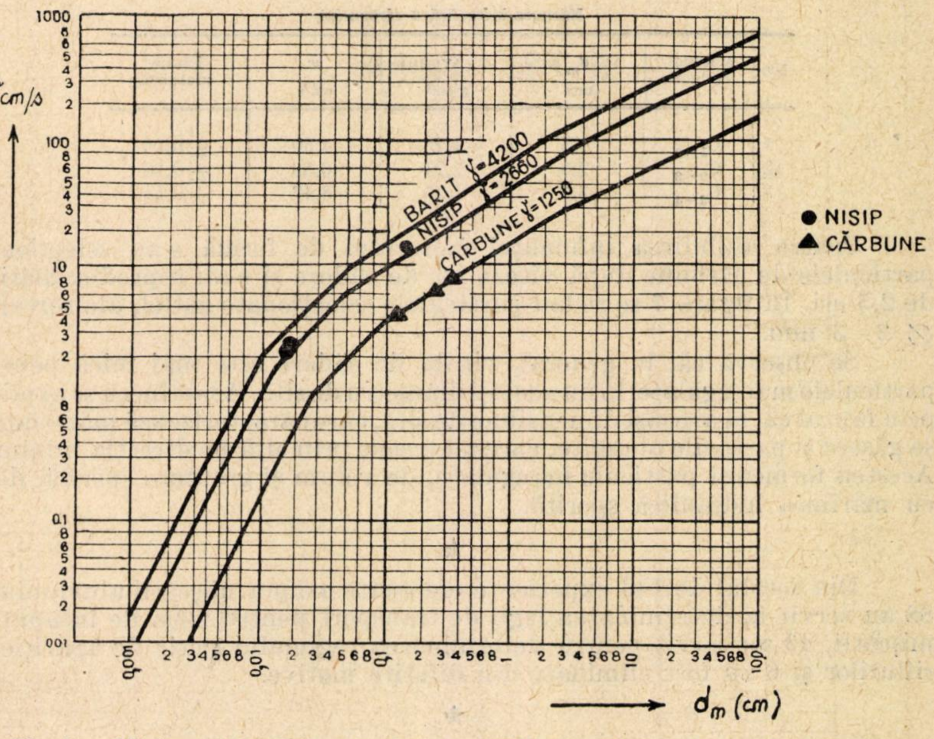


Fig. 5. — Mărimea hidraulică a particulelor de diferite mărimi funcție de diametru.

Fiind rezultate din concasare, particulele sînt în general mai colțuroase. Raportul dintre dimensiunea minimă și cea maximă variază între extremele 1 : 3 și 1 : 8, media fiind în jur de 1 : 5.

Tabloul nr. 1

Mărimea hidraulică a nisipului de Dunăre

Nr	Material nisip	d_m mm	γ g/cm	w cm/s	Eroare probailă
1	N_A	0,175	2,66	2,50	± 0,05
2	N_B	0,178	2,66	2,62	± 0,03
3	N_C	1,160	2,66	14,91	± 0,22

Din curba granulometrică a cărbunelui C_{1-2} a rezultat că ea poate fi considerată o dreaptă, de la diametrul minim la cel maxim. Ca și pentru nisip, s-au efectuat experienţe pentru determinarea mărimii hidraulice a cărbunelui. Curbele de dispersiune şi probabilitate sînt date în figura 6, iar rezultatele în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2

Mărimea hidraulică a cărbunelui

Nr.	Material cărbune	d_m mm	γ g/cm³	w cm/s	Eroare probabilă
1	C_{1-2}	1,5	1,25	4,50	± 0,19
2	C_{2-3}	2,5	1,25	6,59	± 0,16
3	C_{3-4}	3,5	1,25	8,47	± 0.14

Pentru stabilirea influenţei factorului de formă s-au selecţionat particulele de cărbune după viteza lor de cădere şi s-au reprodus mărite de 2,5 ori. În figura 7 se redau particulele selecţionate astfel, ale sortului ∅ 2—3 mm.

Se observă că, în general, viteza de cădere este mai mică pentru particulele mai regulate, la un acelaşi diametru de sită. Acest lucru se explică prin faptul că, la aceeaşi dimensiune de sită, care caracterizează materialul, se găsesc şi particule alungite, care au trecut prin sită pe direcţia minimă. Acestea formează particule neregulate, de volum şi greutate sporită, deci cu mărimea hidraulică sporită.

★

Din totalul de 143 experienţe efectuate asupra mişcării aluviunilor, 88 au servit la determinarea legii de transport pentru zona de început a mişcării, 49 au servit pentru determinarea regimului critic de apariţie a riflurilor şi 6 au fost eliminate din diferite motive.

★

Pentru determinarea forţei de antrenare critice s-a diagramat caracteristica hidraulică funcţie de debitul solid şi s-a extrapolat relaţia pînă la valoarea la care debitul solid devine egal cu zero. În acest scop s-a calculat pentru fiecare experienţă valoarea forţei de antrenare τ şi a debitului solid g_s şi s-au reprezentat pentru fiecare material în parte punctele experimentale $\tau = f\,(g_s^{2/3})$. Deoarece atît din literatură, cît şi din rezultatele obţinute, reiese că funcţia este foarte apropiată de o dreaptă, s-au calculat expresiile dreptelor respective prin metoda patratelor minime a erorilor, şi s-a impus condiţia suplimentară ca dreptele materialelor de acelaşi gen (nisip sau cărbune) să fie paralele, după metoda indicată de A. Hald [7] (fig. 8, 9 şi 10).

Pe aceleaşi figuri s-au trasat punctat şi dreptele în ipoteza că nu se impune condiţia de paralelism. Se constată că diferenţele de pantă ale dreptelor, care corespund diferitelor materiale cu aceeaşi greutate specifică sînt neînsemnate.

Din reprezentarea $\tau = f\,(g_s^{2/3})$ s-au obţinut valorile forţei de antrenare critice indicate în tabloul nr. 3. Aceste valori se referă la începutul

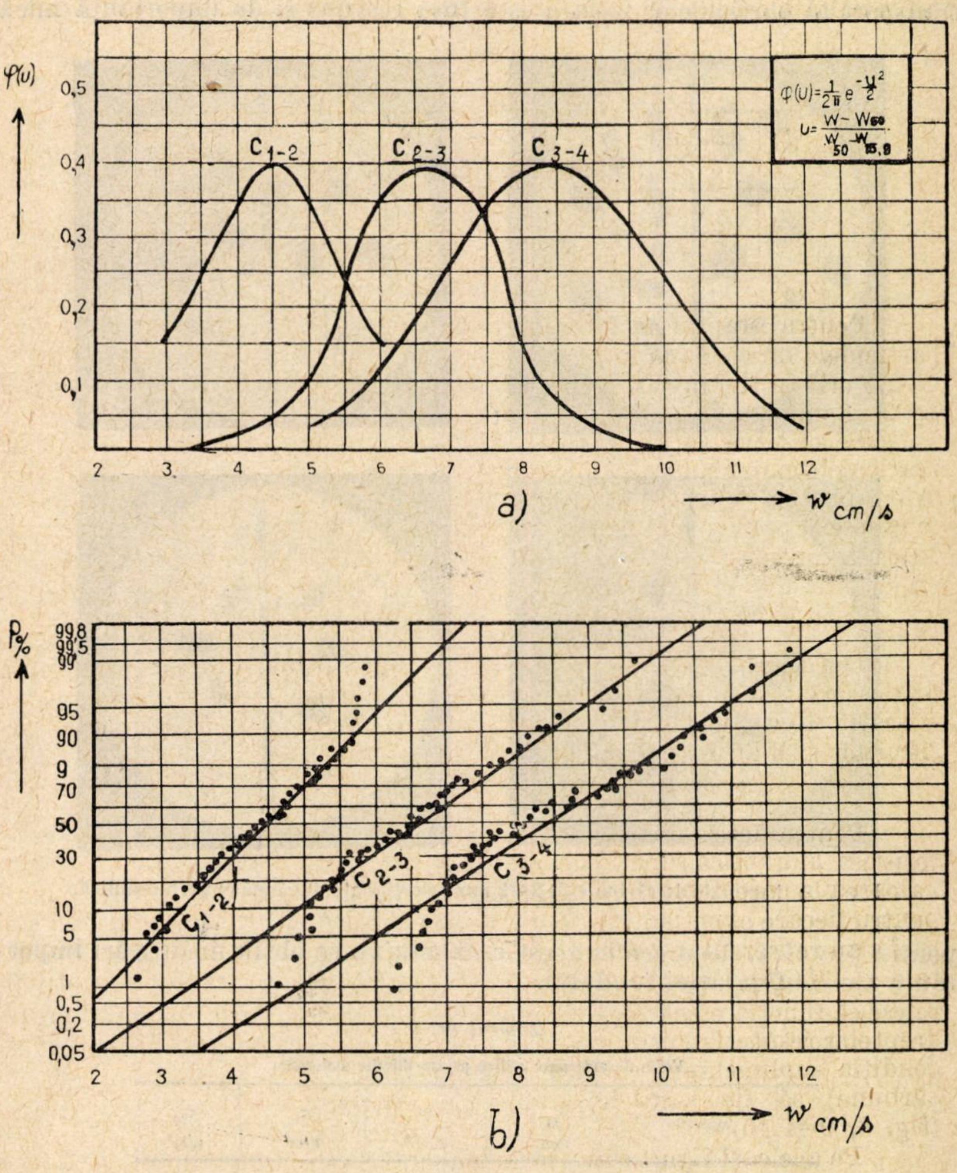


Fig. 6. — Determinarea mărimii hidraulice a cărbunelui : *a*) curbe de dispersie ; *b*) curbe de probabilittae.

mişcării de masă a particulelor, astfel încît sub această forţă de antrenare mai există încă un domeniu de transport de particule izolate. Domeniul de transport al particulelor izolate este însă restrîns şi de importanţă mică

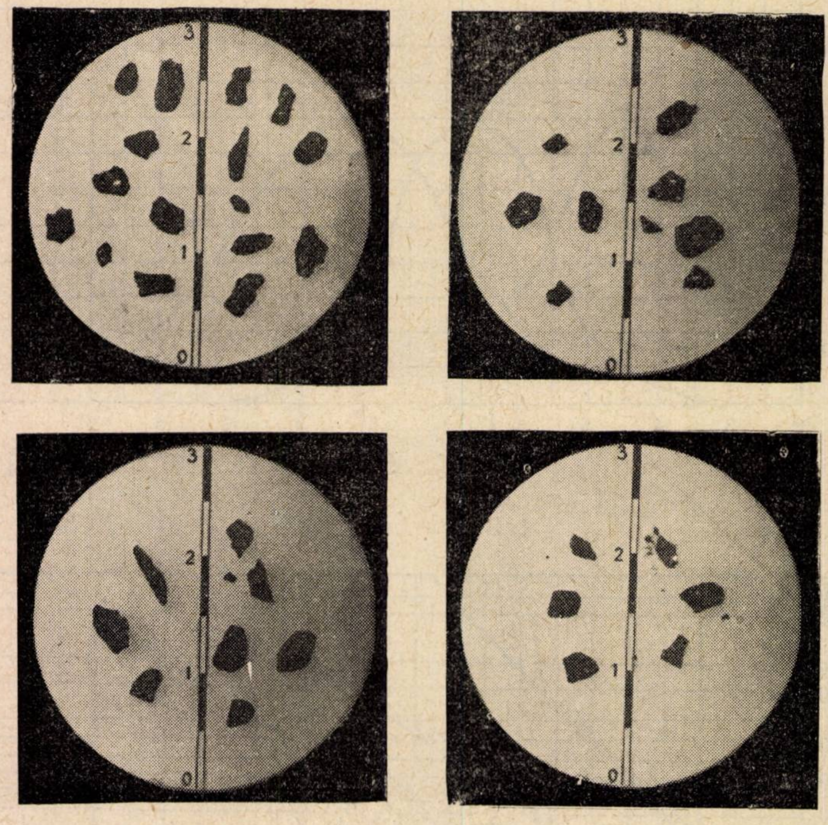


Fig. 7. — Particule de cărbune ∅ 2—3 mm selecţionate după mărimea hidraulică.

pentru practică, deoarece în acest domeniu nu se obţin modificări importante ale configuraţiei fundului.

Tabloul nr. 3

Forţa de antrenare critică pentru diferite materiale

Nr.	Material	d_m mm	γ g/cm³	τ_0 g/m²	τ_{0e} g/m²
1	Nisip N_A	0,175	2,66	13,0	13,0
2	Nisip N_B	0,178	2,66	19,7	19,7
3	Nisip N_C	1,160	2,66	51,0	51,0
4	C_{1-2}	1,500	1,25	14,9	98,9
5	C_{2-3}	2,500	1,25	18,7	124,2
6	C_{3-4}	3,500	1,25	27,5	182,6

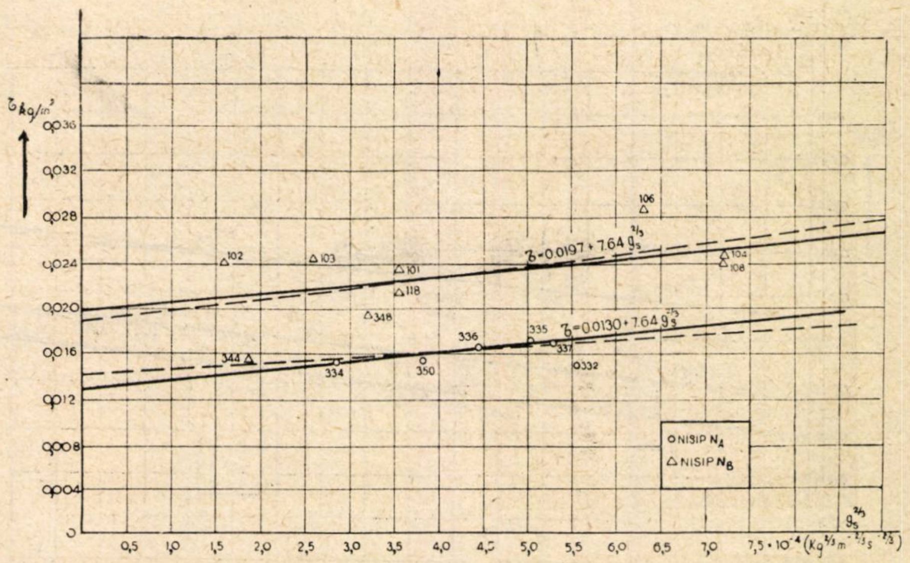


Fig. 8. — Rezultate experimentale asupra variației debitului solid (nisip N_A și N_B) funcție de forța de antrenare.

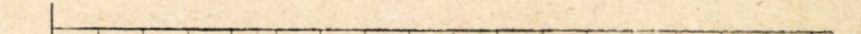


Fig. 9. — Rezultate experimentale asupra variației debitului solid (nisip N_O) funcție de forța de antrenare.

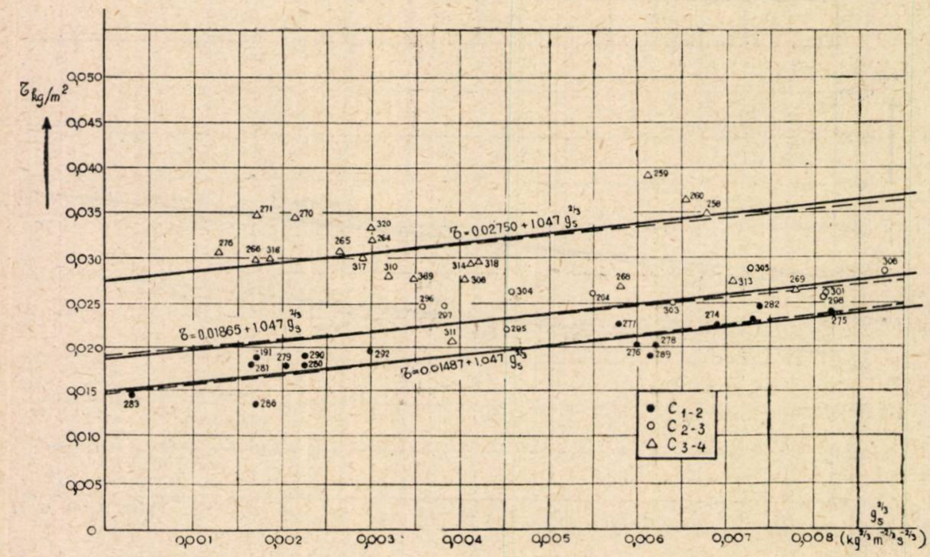


Fig. 10. — Rezultate experimentale asupra variației debitului solid (cărbune) funcție de forța de antrenare.

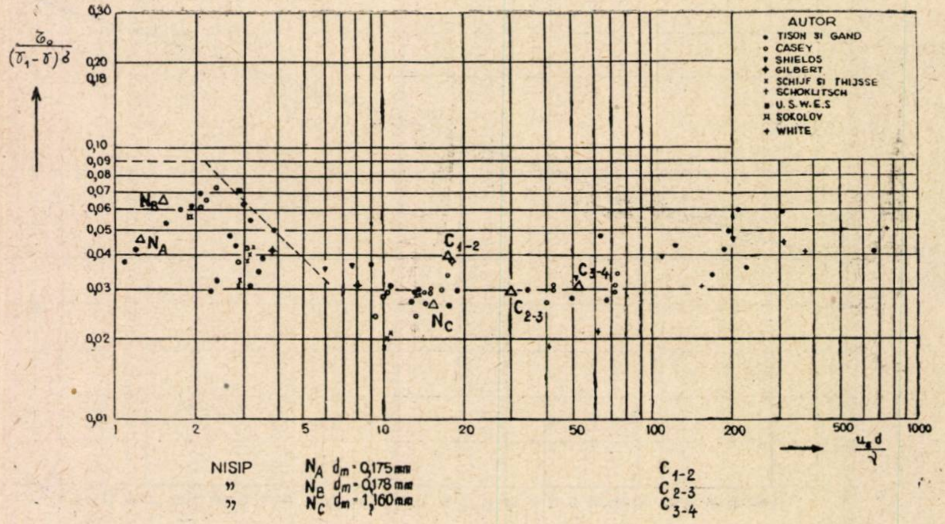


Fig. 11. — Dependența fortei de antrenare critice de numărul Reynolds (după L. J. Tison).

Pentru a putea compara rezultatele obținute pentru materialele de diferite greutăți specifice, s-a calculat forța de antrenare echivalentă τ_{0e}, care ar corespunde unui nisip cu aceeași dimensiune a particulelor.

Plecînd de la ipoteza că forța de antrenare critică este proporțională cu greutatea specifică sub apă a materialului, s-a utilizat pentru forța de antrenare echivalentă formula

$$\tau_{0e} = \tau_0 \frac{\gamma_n''}{\gamma_e''}. \tag{1}$$

Rezultatele experimentale obținute au fost suprapuse în figura 1 peste diagrama $\tau_0 = f(d_m)$, prezentată de Ning Chien [3]. Se observă că rezultatele se așază foarte aproape de curbele Meyer-Peter și Kalinske, fiind în general apropiate de media rezultatelor obținute de alți cercetători.

În afară de aceasta s-a mai considerat modul de interpretare al lui C. M. White [19] și L. J. Tison [16]. Punctele au fost suprapuse peste cele experimentale ale altor cercetători (fig. 11). În general, rezultatele se încadrează bine în limitele indicate de cei doi cercetători, valoarea *coeficientului de turbulență* variind între 2,05 și 3,34 pentru domeniul $1{,}2 < \mathfrak{Re}_* < 51$. Se definește coeficientul de turbulență raportul dintre efortul tangențial teoretic rezultat din calcul, și cel real, determinat experimental.

Efortul tangențial teoretic se calculează cu relația $\tau_{0t} = 0{,}18\,(\gamma_1 - \gamma)\, d.\operatorname{tg}\psi$.

Determinarea legii debitului solid s-a făcut pentru domeniul de început al mișcării. Avînd în vedere concordanța forței de antrenare critice cu legea lui Meyer-Peter, s-a considerat că această lege este mai reprezentativă pentru legea debitului solid, adică

$$\frac{q^{2/3} J_e}{d_m} = a'\gamma''^{10/9} + b''\gamma''^{1/3}\,\frac{g_s^{2/3}}{d_m}\left[\frac{\gamma_s''}{\gamma_s}\right]^{2/3}. \tag{2}$$

Pentru a separa efectul pereților s-au efectuat o serie de încercări preliminare. Din experiențe a rezultat că coeficientul de rugozitate al pereților urmărește cu suficientă exactitate legea lui Blasius și că, în consecință pereții pot fi considerați netezi.

Pe baza relației lui Blasius s-a putut determina în fiecare caz în parte coeficientul de rugozitate al pereților funcție de numărul Reynolds al scurgerii. În calculele de separare a rugozității s-a considerat valabilă relația lui Strickler,

$$k = \frac{v}{R^{2/3} J_e}. \tag{3}$$

Cunoscînd coeficientul Strickler de rugozitate a pereților k_w din

$$k_w = \frac{C}{R^{1/6}}, \tag{4}$$

precum și coeficientul mediu k_m, s-a putut ușor calcula coeficientul **Strickler** de rugozitate a fundului k_s și apoi debitul specific pe unitatea de lățime a fundului q cu ajutorul formulelor

$$k_s = \frac{k_m k_w b^{2/3}}{\left[b k_w^{3/2} + 2h_m \left(k_w^{3/2} - k_m^{3/2}\right)\right]^{2/3}}, \tag{5}$$

$$q = Q \frac{k_w^{3/2}}{2h_m k_s^{3/2} + b k_w^{3/2}}, \tag{6}$$

unde h_m reprezintă adîncimea medie a canalului.

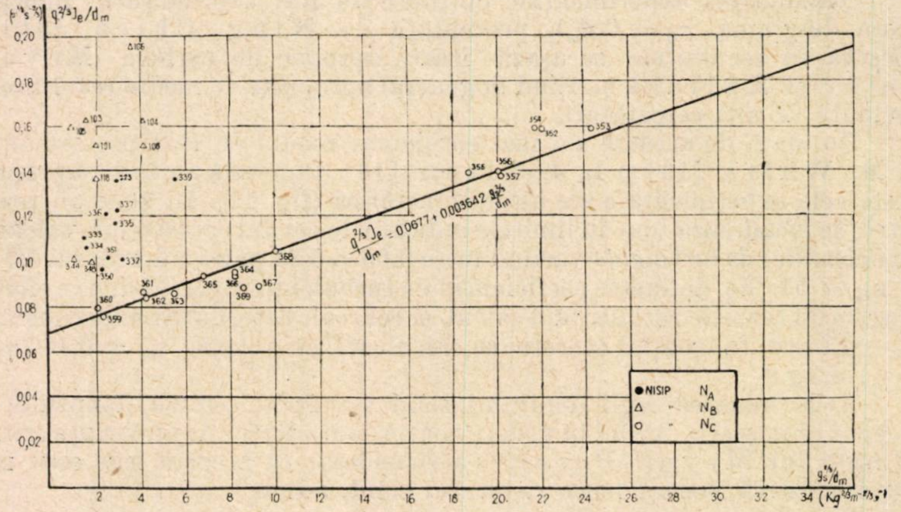


Fig. 12. — Rezultate experimentale asupra legii debitului solid (nisip).

În figurile 12 și 13 s-au reprezentat valorile $\frac{g^{2/3} J_e}{d_m} = f\left(\frac{g_s^{2/3}}{d_m}\right)$ pentru nisip și cărbune. Se observă că, în special pentru nisipul fin (figura 12), diagramele obținute sînt deasupra curbelor indicate de **Meyer-Peter**, ceea ce se poate explica prin faptul că pornirea particulelor fine de nisip se face mai greu decît intrarea în mișcare a întregului amestec, deoarece ele se găsesc prinse în zona de lîngă perete, unde vitezele curentului scad rapid.

Ecuațiile care au rezultat prin calcul după metoda patratelor minime a erorilor sînt :

$$\text{Nisip } N_A,\ N_B \quad \frac{q^{2/3} J_e}{d_m} = 0{,}114 + 0{,}00652 \frac{g_s^{2/3}}{d_m}$$

$$\text{Nisip } N_C \quad \frac{q^{2/3} J_e}{d_m} = 0{,}0677 + 0{,}00364 \frac{g_s^{2/3}}{d_m}$$

$$\text{Cărbune} \quad \frac{q^{2/3} J_e}{d_m} = 0{,}00912 + 0{,}00137 \frac{g_s^{2/3}}{d_m}$$

Pentru a putea compara rezultatele obținute pentru nisip și pentru cărbune, acestea au fost suprapuse în reprezentarea propusă de Meyer-Peter și Mueller la Congresul asociației internaționale de cercetări hidraulice A.I.R.H. la Stockholm, în care se ține seama de greutatea specifică diferită a materialelor. Ecuația propusă de Meyer-Peter este

$$\gamma \frac{R_s J_r}{\gamma_s'' d_m} = A'' \gamma_s'' + B\left(\frac{\gamma_a}{g}\right)^{1/3} \frac{g_s''^{2/3}}{d_m}. \tag{7}$$

Avînd în vedere că pentru regimul pe care îl studiem nu au apărut rifluri

$$J_r = J_e \tag{8}$$

și

$$R_s = bh_m \frac{k_w^{3/2}}{2h_m k_s^{3/2} + bk_w^{3/2}}. \tag{9}$$

În figura 14 s-a dat reprezentarea $\frac{R_s J_e}{\gamma_s'' d_m} \frac{\gamma_s}{\gamma_s''} = f\left[\left(\frac{\gamma_a}{g}\right)^{1/3} \gamma_s' \frac{g_s''^{2/3}}{d_m}\right]$.

Rezultatele prezentate mai sus se referă, așa cum s-a arătat la început, la zona transportului slab dezvoltat.

★

În ceea ce privește problema apariției riflurilor, din cercetările efectuate rezultă că nu există un punct critic de apariție a lor, ci mai curînd o zonă a acestei apariții. În această zonă nu apar rifluri în mod normal, însă la cel mai mic efect perturbator al scurgerii, ele apar și se dezvoltă.

Fenomenul este ireversibil ; o dată apărute, riflurile nu mai dispar, chiar trecînd la caracteristicile hidraulice ale scurgerii din exteriorul zonei critice.

Trebuie menționat că rifluri nu au apărut decît pentru nisipul de Dunăre. Pentru nisipul No și cărbunele ∅ 2 — 3 mm și 3 — 4 mm nu s-a constatat nici o tendință de formare a acestora. Pentru cărbunele ∅1—2 mm s-au observat slabe tendințe de formare a riflurilor, puțin înainte de începutul mișcării în bancuri.

Rezultatele cercetărilor au fost definite în modul următor :

Valoarea maximă : forța de antrenare la care apar totdeauna rifluri în intervalul a două ore de experimentare.

Valoarea minimă : forța de antrenare la care nu apar rifluri decît după 10 ore de funcționare.

Valoarea medie : forța de antrenare la care în intervalul a două ore de experimentare, uneori apar și uneori nu apar rifluri.

Rezultatele obținute au fost reprezentate în figura 15 peste rezultatele experimentale ale lui H. K. Liu.

După cum se vede punctele caracteristice obținute coincid cu curba lui Liu.

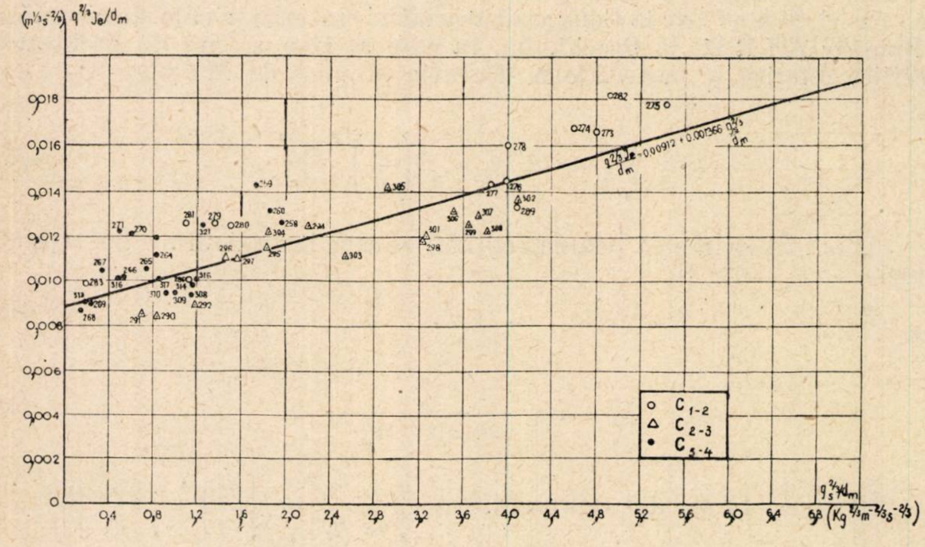


Fig. 13. — Rezultate experimentale asupra legii debitului solid (cărbune).

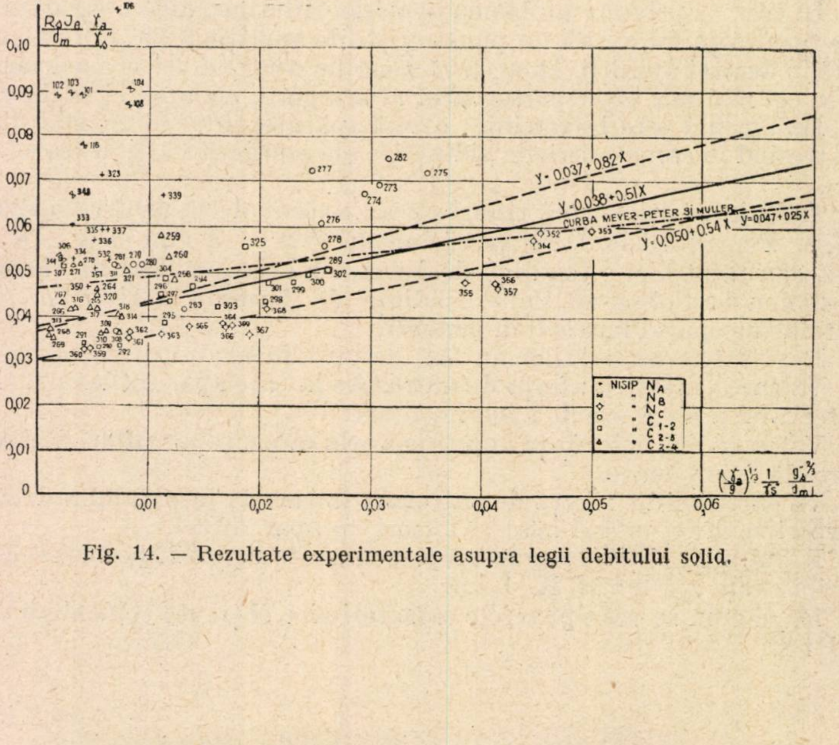


Fig. 14. — Rezultate experimentale asupra legii debitului solid.

În ceea ce privește forma riflurilor, în timpul experiențelor au apărut trei formațiuni de rifluri și anume :

1. Rifluri de masă, uniforme, sub forma unor linii paralele echidistante, perpendiculare pe direcția de scurgere. Distanța între ele este, în general, de același ordin de mărime cu înălțimea curentului. Ele sînt probabil datorate turbulențelor de gradul II (șenilele cu ax orizontal, indicate de Mihailov, fig. 16).

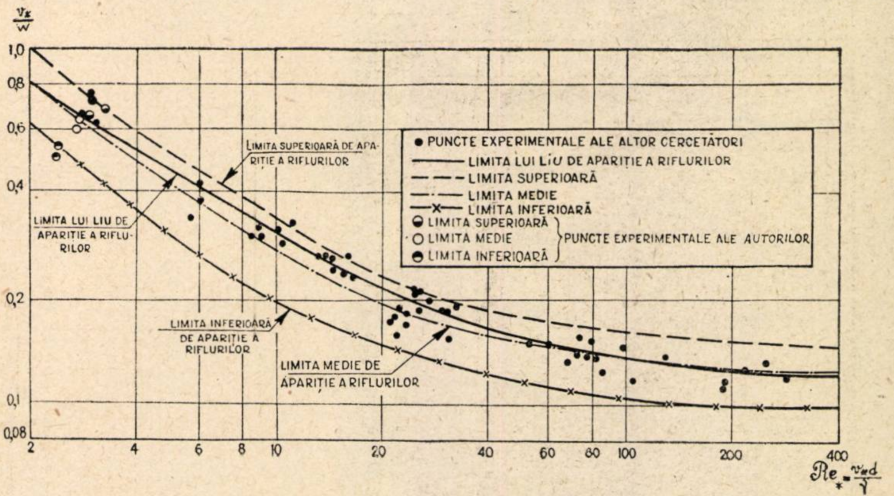


Fig. 15. — Limita de apariție a riflurilor (după H. K. Liu).

2. Rifluri uniforme sub formă de pană. Distanța între ele este și aici de același ordin de mărime cu înălțimea curentului; ele se datoresc turbioanelor cu ax vertical, care se desprind de la cei doi pereți ai canalului (fig. 17).

3. Rifluri neuniforme, care iau naștere sub influența unor cauze locale, deobicei neuniformități în așezarea nisipului.

Aceste rifluri se dezvoltă rapid, datorită turbioanelor cu ax vertical ce apar în masa curentului (fig. 18).

După cum am amintit mai sus, la cărbunele studiat nu se formează rifluri, în schimb, datorită diferențelor de rugozitate între fund și pereți, care dau naștere în lungul scurgerii la două mișcări elicoidale cu ax orizontal, apare o coamă centrală. Această coamă este mai accentuată la cărbunele ∅ 3—4 mm (fig. 19).

Pentru diferite experiențe s-a strîns materialul din care erau formate riflurile. Din analiza granulometrică făcută s-a constatat că acest material este identic cu cel inițial, adică în regim de rifluri nu s-a obținut un fenomen de segregație a amestecului.

Este de semnalat faptul că la nisipul N_C nu au apărut rifluri, ceea ce a confirmat indicațiile ce se întîlnesc în literatura de specialitate și anume că asemenea formațiuni nu apar la materialul aluvionar cu $d_m > 0{,}5$ mm. La acest material au apărut ca formațiuni caracteristice bancuri echidistante și regulate, dirijate normal pe direcția curentului (fig. 20). Aceste formațiuni au apărut în condițiile unui transport aluvionar intens.

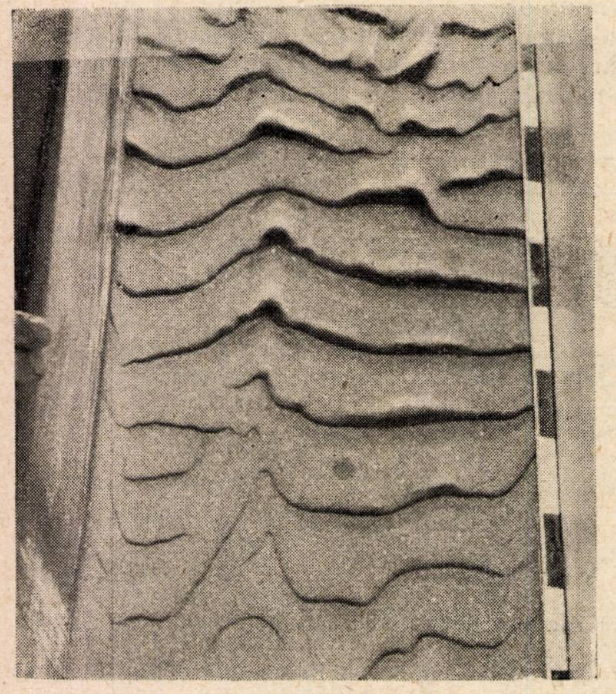


Fig. 16. — Formaţiuni de rifluri uniforme, perpendiculare pe direcţia de scurgere.

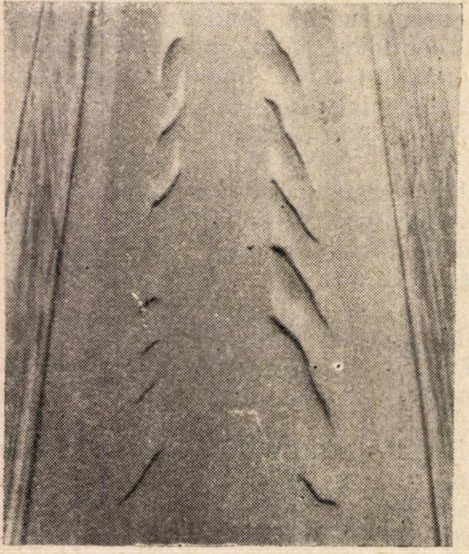


Fig. 17. — Formaţiuni de rifluri uniforme sub formă de pană.

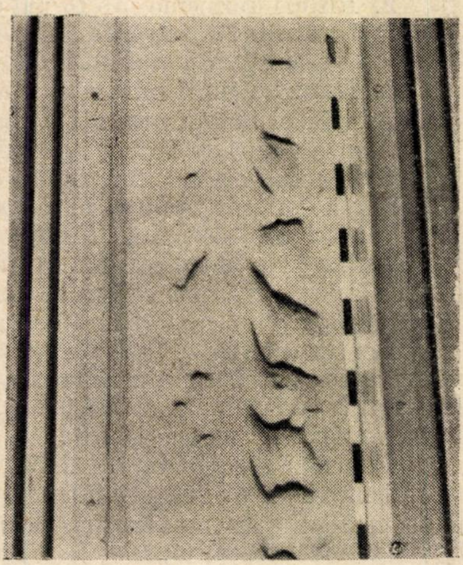


Fig. 18. — Formaţiuni de rifluri neuniforme.

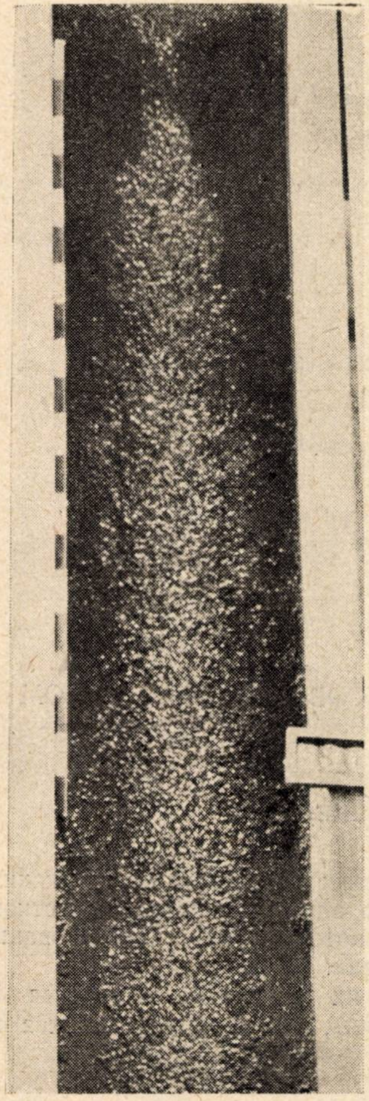


Fig. 19. — Formaţiuni caracteristice la cărbune ; coamă centrală.

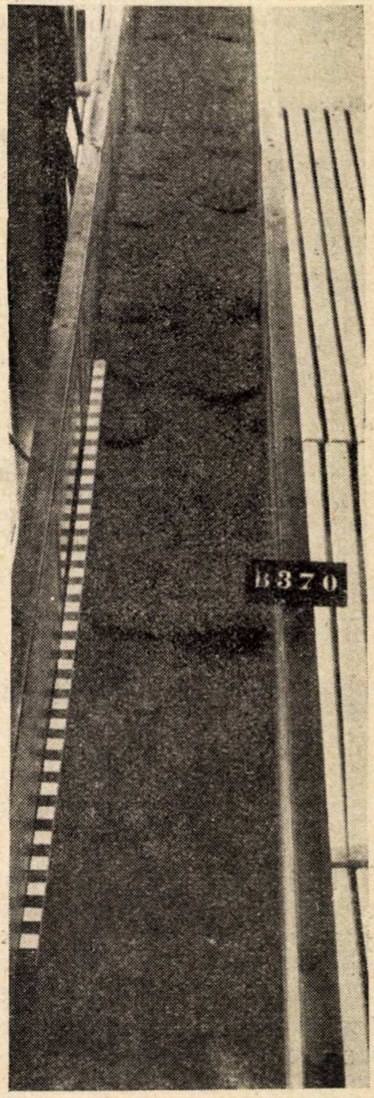


Fig. 20. — Formaţiuni caracteristice la nisipul N_C (bancuri echidistante).

NOTAŢII

b = lăţimea canalului,
C = Coeficientul Chézy,
d = diametrul particulei,
d_m = diametrul mediu al amestecului,
g = acceleraţia gravităţii,
g_s, g''_s = debitul solid în greutate uscată, respectiv sub apă,
h = adîncimea curentului de apă,
J_e = panta energetică,
k_m, k_s, k_w = coeficientul Strickler de rugozitate, respectiv mediu, al fundului şi al pereţilor,
R = raza hidraulica,
$\mathcal{R}e$ = numărul Reynolds,
$\mathcal{R}e_*$ = numărul Reynolds redus,
v_* = viteza de frecare,
v_a = viteza critică de pornire,
γ_a = greutatea specifică a apei,
γ_s, γ''_s = greutatea specifică a materialului solid uscat, respectiv sub apă,
τ = forţa de antrenare,
τ_0 = forţa de antrenare critică,
τ_{0t}, τ_{0r} = forţa de antrenare critică teoretică, respectiv reală,
w = mărimea hidraulică,
ψ = unghiul taluzului natural,
a', b'' = constante în relaţia (1) a debitului solid a lui Meyer-Peter,
A'', B = constante în relaţia (2) a debitului solid a lui Meyer-Peter.

Primită la redacţie la 22 martie 1957.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НАНОСОВ В РАВНОМЕРНОМ ПОТОКЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа касается исследования критических характеристик движения наносов и образования рифлов для наносов одного из речных участков Дуная и различных зернистых материалов, которые будут использованы при изучении поставленной задачи на модели.

Полученные опытные результаты и их обработка относятся к области материалов (мелких песков и угля), редко встречающихся в технической литературе.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Зависимость силы трогания от среднего диаметра (по Шиену).
Рис. 2. — Канал с переменным уклоном. Общий вид установки.
Рис. 3. — Гранулометрические кривые исследованных песков.
Рис. 4. — Определение гидравлической крупности для песка: *a* — кривые рассеяния; *b* — кривые вероятности.

Рис. 5. — Гидравлическая крупность частиц разных размеров в зависимости от диаметра.

Рис. 6. — Определение гидравлической крупности угля: *a* — кривые рассеяния; *b* — кривые вероятности.

Рис. 7. — Частицы угля 2—3 мм диаметра, отобранные по гидравлической крупности.

Рис. 8. — Результаты опытов изменения твердого расхода (песок N_A и N_B в зависимости от силы трогания.

Рис. 9. — Результаты опытов изменения твердого расхода (песок N_C) в зависимости от силы трогания.

Рис. 10. — Результаты опытов изменения твердого расхода (уголь) в зависимости от силы трогания.

Рис. 11. — Зависимость критической силы трогания от числа Рейнольдса (по Л. Ж. Тисону).

Рис. 12. — Результаты опытов, связанных с законом твердого расхода (песка).

Рис. 13. — Результаты опытов, связанных с законом твердого расхода (угля).

Рис. 14. — Результаты опытов, связанных с законом твердого расхода.

Рис. 15. — Предел появления рифленности (по Н. К. Лиу).

Рис. 16. — Образование равномерной рифленности перпендикулярной направлению течения.

Рис. 17. — Образование равномерной клиновидной рифленности.

Рис. 18. — Образование неравномерной рифленности.

Рис. 19. — Характерные образования из угля: средний гребень.

Рис. 20. — Характерные образования из песка N_C (равноотстоящие друг от друга отмели).

ÉTUDE DU MOUVEMENT DES ALLUVIONS EN RÉGIME UNIFORME

(RÉSUMÉ)

Le présent travail envisage l'étude des caractéristiques critiques d'entraînement et de formation des ripple-marks pour les alluvions d'un secteur du Danube, ainsi que l'examen des différents matériaux granulaires destinés à être utilisés dans l'étude de ce problème.

Les résultats expérimentaux obtenus et leurs applications couvrent un domaine de matériaux (sables fins et charbon) qu'on rencontre rarement dans la littérature technique de spécialité.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Relation entre la force d'entraînement et le diamètre moyen (d'après N. Chien).

Fig. 2. — Canal à pente variable.

Fig. 3. — Courbes granulométriques des matériaux (sable).

Fig. 4. — Détermination de la vitesse de chute uniforme pour le sable : *a*) courbes de dispersion, *b*) courbes de probabilité.

Fig. 5. — La vitesse de chute uniforme des grains de dimensions diverses, en fonction du diamètre.

Fig. 6. — Détermination de la vitesse de chute uniforme pour le charbon : *a*) courbes de dispersion, *b*) courbes de probabilité.

Fig. 7. — Grains de charbon de 2—3 mm de diamètre, classés selon la vitesse de chute uniforme.

Fig. 8. — Résultats des expériences sur la variation du débit solide (sable N_A, N_B) par rapport à la force d'entraînement.

Fig. 9. — Résultats expérimentaux concernant la variation du débit solide (sable N_C) en fonction de la force d'entraînement.

Fig. 10. — Résultats des expériences sur la variation du débit solide (charbon) par rapport à la force d'entraînement.

Fig. 11. — Relation entre la force critique d'entraînement et le nombre de Reynolds (d'après L. J. Tison).

Fig. 12. — Résultats expérimentaux concernant la loi du débit solide (sable).

Fig. 13. — Résultats des expériences sur la loi du débit solide (charbon).

Fig. 14. — Résultats expérimentaux sur la loi du débit solide.

Fig. 15. — Limite d'apparition des dunes primaires (d'après H. K. Liu).

Fig. 16. — Formation de dunes primaires uniformes, normales à la direction d'écoulement.

Fig. 17. — Formation de dunes primaires uniforme sous forme de flèches.

Fig. 18. — Formation de dunes primaires irrégulières.

Fig. 19. — Formation caractéristique pour le charbon.

Fig. 20. — Formation caractéristique pour le sable N_C (des bancs à intervalles égaux).

BIBLIOGRAFIE

1. Casey H., *Ueber Geschiebetrieb*, Berlin, 1936.
2. Chang Y. L., *Laboratory Investigation on Flume Traction and Transportation.* Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1932, vol. 104.
3. Chien, Ning, The Present Status of Research on Sediment Transport. Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1954, t. 80, nr. 565.
4. Dunin-Barkovski I. V. i Smirnov N. V., *Teoria veroiatnostei i matematiceskaia statistika v tehnike* (Obșceaia ceast). Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoriceskoi literaturî, Moscova, 1955.
5. Goncearov N. V., *Dvijenie nanosov v ravnomernom potoke.* ONTI, Leningrad-Moscova, 1938.
6. — *Osnovî dinamiki ruslovîh potokov.* Ghimiz., Leningrad, 1954.
7. Hald A., *Matematiceskaia statistika s tehniceskimi prilojeniami.* Izdatelstvo inostrannoi literaturî, Moscova, 1954.
8. Knoroz V. S., *Dvijenia ghidrosmesei v napornîh truboprovodah i metod ih rascetah.* Izvestiia V.N.I.I.G. 1941, nr. 30.
9. — *Permescenie pesceanîh materialov naprornîmi potokami jidkosti.* Izvestiia V.N.I.I.G., 1949, nr. 40.
10. Lane E. W. a. Carlson N. J., *Some Factors Affecting the Stability of Stable Channels Constructed in Coarse Granular Materials.* Proceedings of the Minnesota International Hydraulics Conference, 1953.
11. Levi I. I. *Dinamica cursurilor de apă.* Ed. tehnică, București, 1951.
12. Meyer, Peter E., Favre H. u. Einstein H. A., *Neue Versuchsresultate über den Geschiebetrieb.* Schweizerische Bauzeitung 31 martie 1934.
13. Meyer Peter E. a. Mueller R., *Formulas for Bed Load Transport.* International Association for Hydraulic Research. Third Meeting. Stockholm, 1948.
14. Mueller R. *Theoretische Grundlagen der Fluss- und Wildbachverbauungen.* Leemann Verlag, Zürich, 1943.
15. Nizery A., *Note sur l'entraînement des matériaux par charriage.* La Houille Blanche, 1949, nr. A.
16. Tison L. J., *Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit.* Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Ser. I, 1947.
17. Velikanov N. A., *Dinamika ruslovîh potokov.* Ghimiz, Moscova, Leningrad, 1948.
18. — *Ghidrologia Susci.* Ghimiz., Leningrad, 1948.
19. White C. M., *Equilibrium of Grains on the Bed of a stream.* Proceedings of the Royal Society of London, Seria A, 174, 1940.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

HIDRODINAMICĂ

ASUPRA SCURGERII NESTAŢIONARE A UNUI AMESTEC COMPRESIBIL DE LICHID ŞI GAZ PRINTR-UN MEDIU POROS

DE

T. OROVEANU

1. Într-o lucrare anterioară [3], am pus bazele unei metode de studiu pentru problema scurgerii amestecurilor de lichid şi gaz, în proporţii variabile, printr-un mediu poros omogen şi izotrop. Ca punct de plecare a servit ideea de a se examina scurgerea amestecului ca atare, în ipoteza valabilităţii legii lui Darcy, evitîndu-se astfel scrierea de ecuaţii pentru fiecare fază în parte, aşa cum se procedează de obicei [2].

În acest scop, a fost necesar să se stabilească o ecuaţie de stare pentru amestec. Acest lucru a fost făcut în lucrarea citată [2], în ipoteze destul de generale. Pentru aplicaţiile pe care le avem în vedere este însă suficient să se considere un caz particular mai simplu. Într-adevăr, deoarece scurgerea prin mediul poros este foarte lentă, fenomenul poate fi privit ca izotermic şi ecuaţia de stare se găseşte mai uşor.

Notînd ca în lucrarea [3] cu m_g masa de gaz conţinută într-un anumit volum şi cu m_l masa corespunzătoare de lichid, avem

$$\frac{m_g}{\rho_g} + \frac{m_l}{\rho_l} = \frac{m_g + m_l}{\rho}, \tag{1}$$

unde ρ_g şi ρ_l sînt masele spcifice ale gazului, respectiv lichidului, iar ρ masa specifică a amestecului. Dacă introducem notaţia

$$\mu = \frac{m_g}{m_l}, \tag{2}$$

relaţia precedentă se poate scrie

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\mu + 1}{\rho} - \frac{1}{\rho_l}\right). \tag{3}$$

Pentru faza gazoasă, mai avem la dispoziţie ecuaţia generală

$$\frac{p}{\rho_g} = ZRT \tag{4}$$

şi înlocuind pe ρ_g în relaţia (3) găsim imediat

$$\frac{\mu + 1}{\mu} \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\mu} \frac{p}{\rho_l} = ZRT. \tag{5}$$

Temperatura fiind constantă, această ecuaţie capătă forma

$$\frac{\mu + 1}{\mu} \frac{p}{\rho} - \frac{1}{\mu} \frac{p}{\rho_l} = \frac{Z}{Z_0} \left(\frac{\mu_0 + 1}{\mu_0} \frac{p_0}{\rho_0} - \frac{1}{\mu_0} \frac{p_0}{\rho_{0l}} \right), \tag{6}$$

p_0 fiind o presiune oarecare de referinţă, iar ρ_0, ρ_{0l}, μ_0 şi Z_0 valorile parametrilor ρ, ρ_l, μ şi Z, corespunzătoare acestei presiuni. În conformitate cu rezultatele experimentale, variaţia masei specifice a fazei lichide în funcţie de presiune poate fi reprezentată, cu o bună aproximaţie, printr-o lege liniară de forma

$$\rho_l = \rho_{0l} \left[1 + \varkappa (p_0 - p)\right], \tag{7}$$

p_0 fiind de data aceasta presiunea maximă din mediul poros, ρ_{0l} valoarea corespunzătoare a lui ρ_l şi $\varkappa$ o constantă experimentală. Deoarece raportul $\frac{Z}{Z_0}$ şi μ sînt, de asemenea, funcţii de presiune, rezultă că relaţia (6) reprezintă ecuaţia de stare căutată.

2. În continuare, vom considera problema scurgerii propriu-zise. Dacă mediul poros este omogen şi izotrop şi dacă facem abstracţie de influenţa forţelor masice, putem scrie ecuaţia

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = - f \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{8}$$

ρ fiind masa specifică a amestecului, v viteza de filtrare a acestuia şi f porozitatea mediului. Notînd cu v_l viteza de filtrare a lichidului şi cu v_g pe aceea a gazului, avem, evident,

$$\rho v = \rho_l v_l + \rho_g v_g \tag{9}$$

şi, deoarece legea lui Darcy este presupusă valabilă, rezultă

$$\rho \mathbf{v} = - \left(\rho_l \frac{k_l}{\eta_l} + \rho_g \frac{k_g}{\eta_g} \right) \nabla p, \tag{10}$$

η_l şi η_g fiind viscozităţile dinamice ale lichidului, respectiv ale gazului, iar k_l şi k_g permeabilităţile efective pentru lichid, respectiv pentru gaz. În acest caz, ecuaţia (8) devine

$$\nabla \cdot \left[\left(\rho_l \frac{k_l}{\eta_l} + \rho_g \frac{k_g}{\eta_g} \right) \nabla p \right] = f \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{11}$$

și dacă punem ecuația de stare (6) sub forma

$$\frac{1}{\rho} = \psi(p), \tag{12}$$

găsim

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\psi'(p)}{[\psi(p)]^2}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{13}$$

ceea ce ne dă

$$\nabla \cdot \left[\left(\rho_l \frac{k_l}{\eta_l} + \rho_g \frac{k_g}{\eta_g}\right)\nabla p\right] = -f\frac{\psi'}{\psi^2}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{14}$$

Pentru cazul izotermic considerat, funcția $\psi(p)$ are forma

$$\psi(p) = \frac{1}{\mu+1}\left[\frac{1}{\rho_l} + \left(\frac{\mu_0+1}{\mu_0}\frac{p_0}{\rho_0} - \frac{1}{\mu_0}\frac{p_0}{\rho_{0l}}\right)\frac{Z}{Z_0}\frac{\mu}{p}\right], \tag{15}$$

dedusă din (6); funcția $\rho_l(p)$ are expresia (7), iar $\mu(p)$ urmează a fi calculat printr-un procedeu care va fi indicat mai departe.

Cazul scurgerii staționare a fost tratat de asemenea în lucrări anterioare, pe o cale mai aproximativă [4] precum și pe o alta mai riguroasă [5]. În cadrul acestui studiu, vom ataca problema scurgerii nestaționare, care prezintă dificultăți mai mari.

3. Dacă ne limităm deocamdată la examinarea scurgerii plan-radiale, ecuația (14) devine

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{g(p)\left[r\frac{\partial p}{\partial r}\right]\right\} = f\frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{16}$$

unde am introdus notația

$$g(p) = \rho_l\frac{k_l}{\eta_l} + \rho_g\frac{k_g}{\eta_g} = \frac{k_l}{\nu_l} + \frac{k_g}{\nu_g}, \tag{17}$$

ν_l și ν_g fiind viscozitățile cinematice ale celor două fluide; derivata $\frac{d\rho}{dp}$ rezultă, la rîndul ei, din relațiile (13) și (15).

Rezolvarea ecuației (16) este legată de mari dificultăți și din această cauză este necesar să se recurgă la unele aproximații. Acestea se referă la unii coeficienți ai ecuației și în primul rînd la derivata $\frac{d\rho}{dp}$, pe care o vom examina prin intermediul ecuației de stare (6). Vom presupune, în primul rînd, că presiunea p_0 este chiar presiunea de saturație ($\mu_0 = 0$), ceea ce face ca ecuația (6) să capete forma

$$(\mu+1)\frac{p}{\rho} - \frac{p}{\rho_l} = \mu\frac{Z}{Z_0}\frac{p_0}{\rho_{0l}}. \tag{18}$$

În continuare, pentru calcule, sînt necesare o serie de caracteristici ale celor două faze precum și ale mediului poros. Deoarece studiul pe care îl efectuăm se referă la scurgerea unui amestec de țiței și gaze printr-un mediu poros, am ales aceste caracteristici în consecință. Astfel, în figura 1

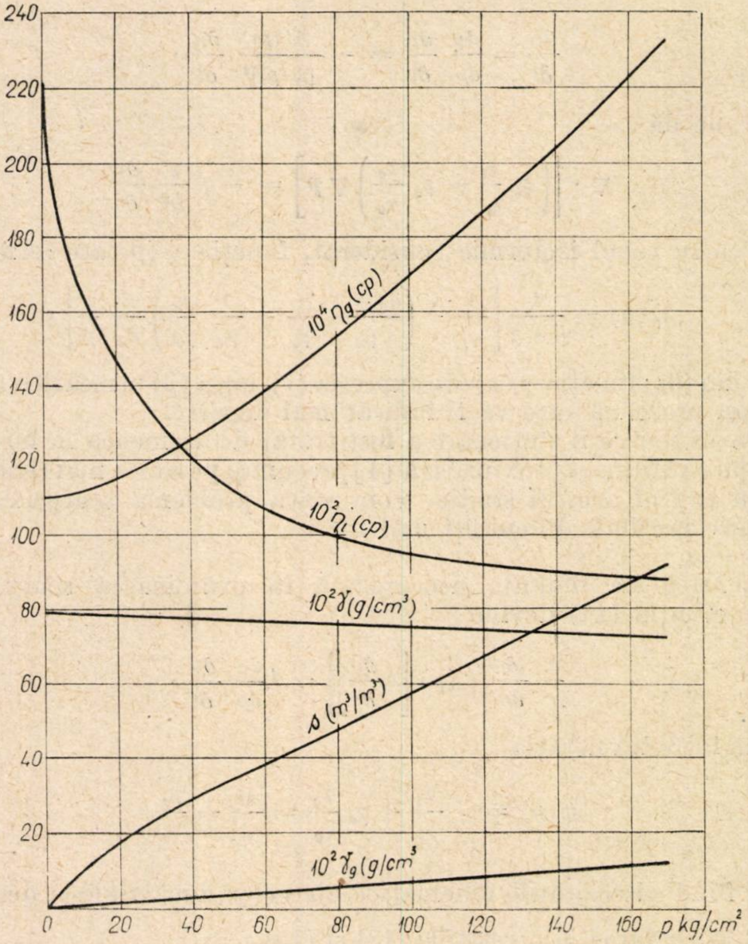


Fig. 1

sînt redate curbele de variație cu presiunea ale viscozităților și greutăților specifice, notate cu η_l, respectiv γ_l, pentru faza lichidă și cu η_g respectiv γ_g, pentru faza gazoasă. Pe aceeași diagramă este reprezentată și curba de solubilitate a gazelor în țiței, mărimea s fiind rația de soluție (volumul de gaze în soluție pe unitatea de volum de lichid, ambele exprimate în condiții standard). Toate curbele se referă la un șantier de exploatare din țara noastră, însă trebuie remarcat că alura acestor curbe se păstrează aceeași pentru un număr mare de zăcăminte, regăsindu-se și la cele din alte țări, astfel încît concluziile rezultate de pe urma examinării lor, au, din punct de vedere calitativ, un caracter general.

În ceea ce privește caracteristicile mediului poros, este necesar să se cunoască variația permeabilităților relative $\frac{k_l}{k}$ și $\frac{k_g}{k}$ pentru faza lichidă și pentru faza gazoasă, în funcție de saturația în lichid a mediului poros. Deoarece nu am dispus de aceste curbe pentru zăcămîntul considerat, am adoptat relațiile aproximative date în literatura de specialitate pentru nisipurile neconsolidate și anume

$$\begin{aligned} \frac{k_l}{k} &= 1{,}06\ S^3 - 0{,}06, \\ \frac{k_g}{k} &= 1{,}16\,(1 - S)^2 - 0{,}01, \end{aligned} \tag{19}$$

unde S este saturația în lichid. Aceste relații sînt valabile în intervalul $0{,}6 < S < 0{,}9$; saturația în apă interstițială imobilă nu este luată în considerare, efectul ei reducîndu-se la o scădere a permeabilității absolute k. Se admite, de asemenea, o saturație de echilibru în gaze care, în conformitate cu datele experimentale are valoarea 0,1. În locul relațiilor (19) pot fi întrebuințate și curbele experimentale corespunzătoare fără a se obține însă o precizie mai mare.

Dintre mărimile care intervin în ecuația (18), masa specifică a lichidului este cunoscută ca funcție de presiune; dacă se fixează temperatura zăcămîntului precum și constantele pseudocritice ale gazelor, se poate determina presiunea pseudoredusă și temperatura pseudoredusă, iar raportul $\frac{Z}{Z_0}$ în funcție de presiune rezultă din diagrama dată în literatura de specialitate [1]. Mai rămîne deci să se determine variația raportului μ cu presiunea. Notînd, ca și mai înainte, cu S saturația în lichid a mediului poros, se observă imediat că avem

$$\mu = \frac{\rho_g}{\rho_l}\,\frac{1 - S}{S}, \tag{20}$$

deoarece S reprezintă fracțiunea din unitatea de volum pe care o ocupă lichidul.

În relația precedentă, ρ_g și ρ_l sînt funcții cunoscute de presiune dar nu același lucru se poate spune despre saturația S, a cărei variație cu presiunea nu este cunoscută apriori. Deoarece pentru moment urmărim numai cu rezultate cu caracter calitativ, vom căuta să obținem o serie de curbe de variație a saturației cu presiunea printr-o metodă cunoscută și anume făcînd să varieze rația de gaze-țiței. Într-o lucrare anterioară [5], am definit această rație prin relația

$$R = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{0g}}{\rho_{0l}}\,s}\left(\frac{\rho_{0l}}{\rho_{0g}}\,\frac{\nu_l}{\nu_g}\,\frac{k_g}{k_l} + s\right), \tag{21}$$

în care ρ_{0g} şi ρ_{0l} sînt masele specifice ale fluidelor în condiţii standard. Pentru cazul scurgerii staţionare, R este o constantă şi, prin fixarea valorii ei, relaţia precedentă ne dă raportul $\frac{k_g}{k_l}$ ca funcţie de presiune, toţi ceilalţi termeni fiind funcţii cunoscute de presiune. Pe de altă parte, din (19) rezultă

$$\frac{k_g}{k_l} = \frac{1{,}16\,(1 - S)^2 - 0{,}01}{1{,}06\ S^3 - 0{,}06} \tag{22}$$

şi se obţine în felul acesta variaţia saturaţiei în lichid cu presiunea pentru o valoare dată a parametrului R. În scurgerea nestaţionară, raţia de gaze-ţiţei poate varia şi din această cauză am considerat o serie de valori pentru R, pornind de la aceea de 200 m^3/m^3, pînă la aceea de 900 m^3/m^3, ultima valoare fiind aproximativ egală cu de zece ori raţia de soluţie maximă în exemplul ales. Au rezultat curbele corespunzătoare de variaţie a saturaţiei cu presiunea, iar prin intermediul relaţiei (20) dependenţa lui μ de presiune. Pentru calculele ce trebuiau efectuate în ecuaţia (18), am luat ca date pseudocritice ale fazei gazoase $p_c = 42{,}69$ kg/cm^2 şi $T_c = 281$ °K, cu ajutorul cărora am calculat presiunile pseudoreduse p_r şi temperatura pseudoredusă T_r, admiţînd pentru zăcămînt $T = 337$°K. Am obţinut astfel curbele de variaţie a masei specifice a amestecului în funcţie de presiune, pentru valorile date ale raţiei de gaze-ţiţei. În figura 2 sînt reprezentate aceste curbe pentru $R_1 = 200$, $R_2 = 400$, şi $R_3 = 900$, masele specifice fiind notate respectiv cu ρ_1, ρ_2, ρ_3. De asemenea, curba punctată reprezintă variaţia masei specifice ρ_l a fazei lichide. Determinarea masei specifice a amestecului pe această cale prezintă o oarecare aproximaţie, întrucît datele pseudocritice au fost estimate după corelări empirice, din lipsa datelor asupra compoziţiei gazelor din zăcămînt. Se observă însă în figura 1 că variaţia greutăţii specifice a fazei gazoase cu presiunea este practic liniară, fapt care se confirmă şi pentru celelalte exemple pe care le-am avut la dispoziţie precum şi pentru datele din literatură [1, 2]. Considerînd deci această situaţie, am trasat din nou curbele de variaţie ale masei specifice a amestecului în funcţie de presiune, obţinînd rezultatele indicate în figura 3, în care ρ_1, ρ_2, ρ_3 şi ρ_l au aceeaşi semnificaţie ca şi în figura 2. Compararea curbelor din cele două figuri arată că diferenţele sînt mici, ele devenind mai sensibile la valorile reduse ale presiunii unde nu depăşesc însă 4,5% chiar în cazul celei mai mari valori a lui R.

În ambele situaţii, variaţia masei specifice a amestecului este relativ redusă, chiar pentru valori mari ale lui R. De asemenea, în intervale destul de mari de presiune, în special la curbele din figura 3, panta curbelor construite este aproximativ constantă. Putem deci aproxima derivata $\frac{d\rho}{dp}$ din ecuaţia (16) printr-o constantă, eroarea fiind cu atît mai mică dacă presiunea diferenţială nu este mare. Se mai observă şi că o variaţie însemnată a raţiei de gaze-ţiţei aduce o schimbare relativ redusă a valorii derivatei $\frac{d\rho}{dp}$. Astfel, pentru curbele trasate în figura 3, în intervalul de presiuni cuprins între 90 și 170 atm, avem pentru $R = 200$ o pantă medie de $-2{,}588 \times 10^{-6}$ s²/m², iar pentru $R = 400$, în același interval de presiuni, panta medie are valoarea $-2{,}167 \times 10^{-6}$ s²/m². Aceste valori extrem de

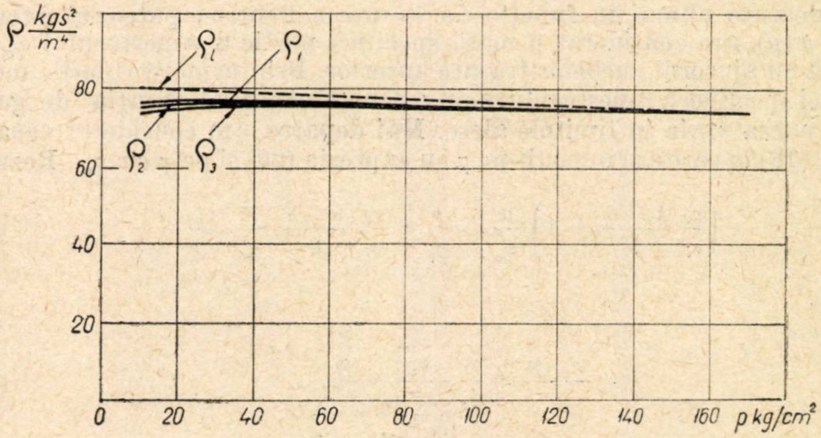


Fig. 2

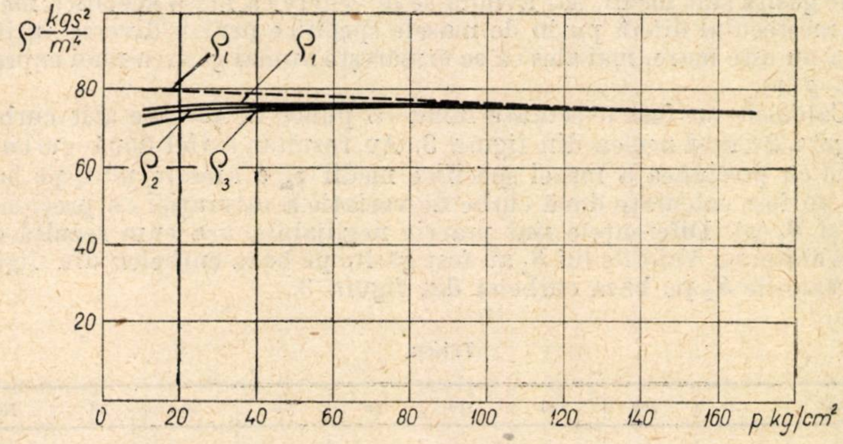


Fig. 3

mici ar permite chiar ca într-o primă aproximație amestecul să fie considerat incompresibil, ecuația simplificîndu-se în consecință. În orice caz, trebuie reținut faptul că pentru o presiune diferențială dată, derivata $\frac{d\rho}{dp}$ poate fi considerată constantă și că variația rației de gaze-țiței în limite normale are o influență redusă, neglijabilă cel puțin în primă aproximație asupra valorii derivatei $\frac{d\rho}{}$.

Pentru o eventuală simplificare a ecuaţiei (16) mai este util să se examineze şi funcţia $g(p)$ dată de relaţia (17). În expresia acestei funcţii, masele specifice ρ_l şi ρ_g precum şi viscozităţile dinamice η_l şi η_g sînt funcţii cunoscute de presiune. În schimb permeabilităţile de fază k_l şi k_g sînt cunoscute numai în funcţie de saturaţie. Pentru a puteaz găsi totuşi funcţia $g(p)$, am considerat o masă specifică medie a amestecului $\rho_m(p)$ obţinută cu ajutorul curbelor trasate anterior. Prin urmare valorile medii ale masei specifice a amestecului s-au calculat admiţînd că raţia de gazeţităţei ar putea varia în limitele alese. Mai departe, am considerat ecuaţia de stare (18) în care am înlocuit pe μ cu expresia (20) şi pe ρ cu ρ_m. Rezultă

$$\left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\,\frac{1-S}{S}+1\right)\frac{p}{\rho_m}-\frac{p}{\rho_l}=\frac{\rho_g}{\rho_l}\,\frac{1-S}{S}\,\frac{Z}{Z_0}\,\frac{p_0}{\rho_{0l}}, \tag{23}$$

sau

$$\frac{1-S}{S}=\frac{\rho_l}{\rho_g}\,\frac{\dfrac{p}{\rho_m}-\dfrac{p}{\rho_l}}{\dfrac{Z}{Z_0}\,\dfrac{p_0}{\rho_{0l}}-\dfrac{p}{\rho_m}}, \tag{24}$$

de unde obţinem imediat saturaţia ca funcţie de presiune. Evident, valorile găsite sînt medii, dar avîndu-se în vedere că masa specifică medie ρ_m a amestecului diferă puţin de masele specifice pentru diverse raţii R eroarea nu este mare, mai ales că se urmăreşte numai găsirea unei expresii pentru $g(p)$.

Calculele au fost executate luînd ca punct de plecare atît curbele din figura 2 cît şi acelea din figura 3. Au rezultat astfel două curbe de variaţie cu presiunea a masei specifice medii ρ_m a amestecului, pe baza cărora au fost calculate două curbe de variaţie a saturaţiei cu presiunea, $S_1(p)$ şi $S_2(p)$. Diferenţele sînt practic neglijabile, aşa cum rezultă din tabloul alăturat. Valorile lui S_1 au fost găsite pe baza curbelor din figura 2, iar valorile S_2 pe baza curbelor din figura 3.

Tablou

P kg/cm^2	170	150	130	110	90	70	50	30	10
S_1	0,8295	0,8237	0,8189	0,8137	0,8075	0,7994	0,7903	0,7688	0,7074
S_2	0,8295	0,8234	0,8191	0,8138	0,8076	0,7982	0,7903	0,7686	0.7070

Cu ajutorul acestor rezultate, am calculat apoi funcţia $g(p)$, valorile permeabilităţilor de fază fiind date de relaţiile (19), în care am presupus permeabilitatea absolută a mediului egală cu unitatea. În figura 4, este reprezentată funcţia $g(p)$ şi se observă că pentru presiuni diferenţiale mici ea poate fi aproximată printr-o dreaptă, iar pentru presiuni diferenţiale mari eventual printr-o parabolă.

Calculele precedente au de sigur un caracter orientativ. Scopul urmărit a fost acela arătat şi mai înainte şi anume de-a se obţine o formă mai simplă pentru ecuaţia fundamentală (16).

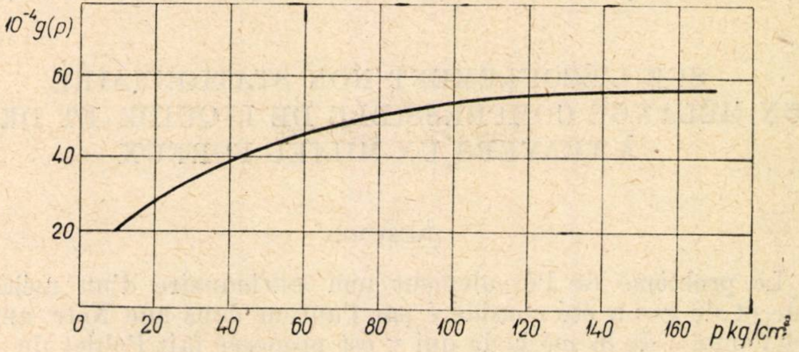


Fig. 4

Rezultatele sînt mulţumitoare în sensul că dau posibilitatea de-a se studia problemele filtrării nestaţionare a amestecurilor cu ajutorul ecuaţiei propuse. Aplicaţiile pentru zăcămintele fără cap iniţial de gaze şi fără o avansare apreciabilă a apei marginale vor fi considerate ulterior.

Primită la redacţie la 19 martie 1957.

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ СЖИМАЕМОЙ СМЕСИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА ЧЕРЕЗ ПОРИСТУЮ СРЕДУ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе возобновляется исследование вопроса нестационарного движения смеси жидкости и газа через пористую среду, причем применяются методы предложенные автором в одной из предшествующих работ [3]. При предположении, что движение изотермическое, уравнение состояния смеси, выведенное в указанной выше работе, принимает простую форму (6). Далее пишется уравнение движения смеси в предложении применимости закона Дарси и приводится к частному случаю плоско-радиального движения, причем получается уравнение (16). Остальная часть работы посвящена рассмотрению возможных упрощений этого уравнения. В первую очередь показывается, что производная $\frac{d\rho}{dp}$, где ρ является удельной массой смеси, а p — давлением, может быть приближена к постоянной, даже если отношение расхода газа к расходу жидкости, выраженных в стандартных условиях, изме-

няется в довольно широких пределах. Также показывается, что функция *g (p)*, появляющаяся в уравнении (16), может быть представлена приближенным выражением, линейным или параболическим, получаемым при учете среднего изменения с давлением насыщения жидкостью.

SUR L'ÉCOULEMENT NON STATIONNAIRE D'UN MÉLANGE COMPRESSIBLE DE LIQUIDE ET DE GAZ À TRAVERS UN MILIEU POREUX

(RÉSUMÉ)

Le problème de l'écoulement non stationnaire d'un mélange de liquide et de gaz a été considéré par l'auteur dans une Note antérieure [3] et l'emploi de la méthode qui y est proposée fait l'objet du présent travail. En partant de l'hypothèse que l'écoulement a lieu sans variations de température, l'équation d'état du mélange, établie dans la Note citée, prend une forme simple (6). Plus loin, on écrit l'équation du mouvement du mélange, la loi de Darcy étant considérée valable, et l'on donne la forme particulière (16) que prend cette équation dans le cas où le mouvement est plan-radial. Le reste du travail est consacré à l'étude des simplifications possibles de l'équation trouvée. On montre, en premier lieu, que la dérivée $\frac{d\rho}{dp}$, ρ étant la densité du mélange et p la pression, peut être approximée par une constante, même şi le rapport entre le débit du gaz et celui du liquide, tous deux exprimés dans des conditions normales de température et de pression, varie entre des limites assez larges. De même, on montre que la fonction $g\,(p)$ qui apparaît dans l'équation (16) peut avoir une expression approximative, linéaire ou parabolique, obtenue en considérant une variation moyenne avec la pression de la saturation en liquide.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Cristea, *Hidraulica subterană*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1956, vol. I, p. 27 şi p. 36.
2. M. Muskat, *Phisical Principles of Oil Production*. Mac Graw Hill, New York, 1949, p. 63 şi p. 302.
3. T. Oroveanu şi H. Pascal, *Scurgerea unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros*. Comunicările Acad. R.P.R., tom. V, nr. 9, septembrie 1955, p. 1311.
4. — *Scurgerea staţionară plan-radială a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, aprilie-iunie 1956, p. 387.
5. T. Oroveanu. *O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii staţionare plan-radiale a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, aprilie-iunie 1957.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

UNGERE – FRECARE – UZURĂ

CALCULUL LAGĂRELOR FĂRĂ JOC RADIAL SUPUSE LA FORŢE ŞI VITEZE VARIABILE

DE

V. N. CONSTANTINESCU

Într-o lucrare anterioară [1] s-a arătat că ecuaţia diferenţială a distribuţiei presiunilor în filmul de lubrifiant dintr-un lagăr fără joc radial, pentru regimuri nepermanente, este

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=6r^2\left[(\Omega+2\,\dot{\varphi})\frac{\partial\delta}{\partial\theta}+2\,\dot{\delta}\right], \qquad (1)$$

în care p este presiunea, δ grosimea stratului de lubrifiant,

$$\delta = e\cos\theta, \qquad (2)$$

μ viscozitatea (presupusă că variază invers proporţional cu grosimea δ : $\mu=\mu_1\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{\mu_1}{\cos\theta}$, δ_1 fiind grosimea maximă δ), r raza fusului, Ω viteza unghiulară a fusului, e excentricitatea, iar φ (fig. 1) este unghiul dintre linia centrelor şi o direcţie fixă OX.

Soluţia problemei se pune sub forma

$$p=\overline{p}+\overline{\overline{p}}. \qquad (3)$$

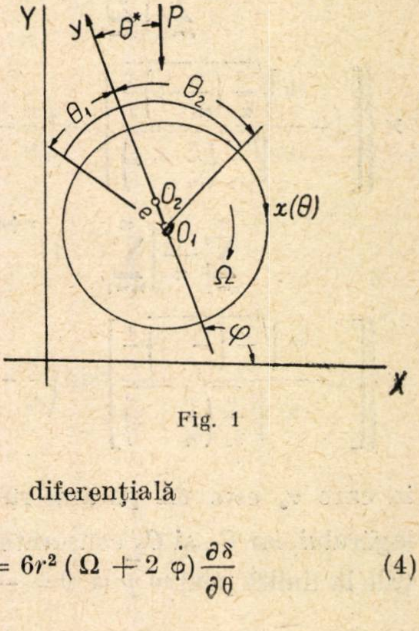


Fig. 1

Funcţia $\overline{p}$ va satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\right)=6r^2(\Omega+2\,\dot{\varphi})\frac{\partial\delta}{\partial\theta} \qquad (4)$$

și va avea aceeași expresie, ca și pentru cazul regimurilor permanente [2], dacă se consideră pentru $\bar{p}$ aceleași condiții la limită ca și pentru funcția p ($\bar{p} = p_0$, presiunea din mediul înconjurător, la frontierele lagărului).

Funcția $\bar{\bar{p}}$ va satisface atunci ecuația diferențială

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\bar{\bar{p}}}{\partial\theta}\right)+r^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\frac{\partial\bar{\bar{p}}}{\partial z}\right)=12\,r^2\,\dot{\delta} \tag{5}$$

și condițiile la limită $\bar{\bar{p}} = 0$ pe frontierele lagărului.

În cazul problemei bidimensionale, $\bar{\bar{p}}$ este

$$\bar{\bar{p}}_\infty=\frac{12r^2\mu_1\dot{e}}{e^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}+C_1\operatorname{tg}\theta+C_2\right). \tag{6}$$

În cazul problemei tridimensionale, considerînd soluția dezvoltată în serie trigonometrică în raport cu θ, se obține [1]

$$\begin{aligned}
\bar{\bar{p}} = {} & \frac{24\,\mu_1\,r^2\dot{e}}{e^3\cos\theta}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\pm\frac{4n}{4n^2-1}\left[C_2+\frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)\alpha_s}\right]\times\right.\\
& \times\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n^2-1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n^2-1}}\right]\sin 2n\theta - \\
& -\frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{2(2m-1)\alpha_s\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)^2\alpha_s^2-n^2}\right]\times \\
& \times\left\{\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}}\right]\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}}\right]\cos\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right\} - \\
& -\sum_{s=1}^{\infty}\frac{C_{1s}}{\pi}\left[\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+n}\frac{n\sin 2m\alpha_s\pi}{4m^2\alpha_s^2-n^2}\right]\times \\
& \left.\times\left\{\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}-2\right)}}\right]\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}-1\right)\theta+\left[1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s}+2\right)}}\right]\sin\left(\frac{n}{\alpha_s}+1\right)\theta\right\}\right\},
\end{aligned} \tag{7}$$

în care α_s este un parametru arbitrar $\frac{\theta_2}{\pi} \leqslant \alpha_s < 0{,}5$, $\lambda = \frac{b}{2r}$ alungirea lagărului, iar C_{1s} și C_2 constante arbitrare care se determină punînd condițiile la limită pentru $\bar{\bar{p}}$ la $\theta = -\theta_1, \theta_2$ (condițiile la limită pentru $z = \pm\frac{b}{2}$

sînt satisfăcute în mod automat). Semnul ($\pm$), afectat la unii din termeni, se ia ($+$) pentru $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ și ($-$) pentru $-\pi \leqslant \theta \leqslant 0$.

Relația (7), împreună cu expresia funcției $\overline{p}$ [3] reprezintă soluția riguroasă a problemei, dar sub o formă greu utilizabilă în aplicații. Se pot aduce însă relației (7) simplificări asemănătoare cu cele operate asupra funcției p din cazul regimurilor de funcționare permanente [3].

Astfel, parantezele care depind numai de z din relația (7) sînt practic egale între ele pentru n suficient de mare și riguros egale cînd $n \to \infty$. Într-adevăr, considerînd aceste paranteze egale, se comite o eroare ce nu depășește 5% la $n = 3$; 1,8% la $n = 4$; 0,6% la $n = 5$; 0,3% la $n = 6$ etc. În consecință, acești termeni pot fi considerați egali între ei pentru $n \geqslant n_1$, cu $n_1 \geqslant 3$.

Dacă se consideră acești termeni ca fiind egali între ei chiar de la $n = 1$, atunci, dînd factor comun pe unul dintre ei, se obține o expresie ce se poate însuma (reprezentînd dezvoltarea în serie a lui $\overline{\overline{p}}_\infty$). Corectînd apoi termenii cu $1 \leqslant n \leqslant n_1$ (scăzînd valorile admise și adăugînd pe cele reale) expresia (7) se poate scrie sub forma

$$\begin{gathered}\overline{\overline{p}} = \frac{12\mu_1 r^2 \dot{e}}{e^3} a(z) \left[\frac{1}{\cos\theta} + C_1 \operatorname{tg}\theta + C_2 \right] + \\ + \frac{24\mu_1 r^2 \dot{e}}{e^3 \cos\theta} \sum_{s=1}^{1=\sigma} \sum_{n=1}^{n=n_1} \left\{ \gamma_n a_n(z) \sin 2n\theta - \frac{S_n'}{\pi} \left[b_n(z) \cos\left(\frac{n}{\alpha_s} - 1\right)\theta + \right.\right. \qquad (8) \\ \left.\left. + c_n(z) \cos\left(\frac{n}{\alpha_s} + 1\right)\theta \right] - \frac{C_{1s} S_n}{\pi} \left[b_n(z) \sin\left(\frac{n}{\alpha_s} - 1\right)\theta + c_n(z) \sin\left(\frac{n}{\alpha_s} + 1\right)\theta \right] \right\},\end{gathered}$$

în care $a(z)$, $a_n(z)$, $b_n(z)$, $c_n(z)$ sînt egale cu

$$\left.\begin{aligned} a(z) &= 1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n_1^2 - 1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2 - 1}}, \quad a_n(z) = \frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n_1^2 - 1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2 - 1}} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n^2 - 1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n^2 - 1}}, \\ b_n(z) &= \frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n_1^2 - 1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2 - 1}} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s} - 2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s} - 2\right)}}, \\ c_n(z) &= \frac{\operatorname{ch}\sqrt{4n_1^2 - 1}\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{4n_1^2 - 1}} - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s} + 2\right)}\frac{z}{r}}{\operatorname{ch}\lambda\sqrt{\frac{n}{\alpha_s}\left(\frac{n}{\alpha_s} + 2\right)}}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

iar

$$\gamma_n = \pm \frac{4n}{4n^2 - 1} \left[C_2 + \frac{2}{\pi} S'' \right]. \qquad (10)$$

În aceste expresii sumele S_n, S'_n, S'' sînt respectiv egale cu

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{n \sin 2m\,\alpha_s \pi}{4m^2 \alpha_s^2 - n^2}, \\ S'_n &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{2(2m-1)\alpha_s \sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)^2 \alpha_s^2 - n^2}, \\ S'' &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{\sin(2m-1)\alpha_s\pi}{(2m-1)\,\alpha_s} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

şi care au respectiv valorile

$$\left.\begin{matrix} S_1 = -1, & S'_1 = +0{,}16 & \text{pentru } n = 1 \\ S_2 = 0{,}75, & S'_2 = -0{,}175 & \text{pentru } n = 2 \\ S_3 = -0{,}4, & S'_3 = -0{,}34 & \text{pentru } n = 3 \text{ etc.} \\ & \text{şi } S'' = 3{,}35 & \end{matrix}\right\} \tag{12}$$

pentru

$$\alpha_1 = \alpha_\sigma = \alpha_s = 0{,}45, \tag{13}$$

lucru posibil întotdeauna, deoarece $\alpha'_s = 0{,}45$ corespunde unui maxim de 81°, limită care în general nu trebuie depăşită pentru asigurarea unei funcţionări în regim hidrodinamic [3].

Prin limitarea parametrilor α_s la unul singur, rămîn ca nedeterminate numai două constante arbitrare C_2 şi $C_{1s} = C_{11} = C_1$. În consecinţă, ca şi pentru cazul regimurilor permanente, condiţiile la limită pe frontierele $\theta = -\theta_1$ şi $\theta = \theta_2$ nu vor fi riguros îndeplinite, ci numai aproximativ. Rezultate bune se vor obţine impunînd aceste condiţii nu la mijlocul lagărului ci pentru

$$\theta = -\theta_1,\ \theta = \theta_2 \text{ şi } z = 0{,}2\ b,\ \overline{\overline{p}} = 0. \tag{14}$$

În condiţiile arătate mai sus, distribuţia presiunilor $\overline{\overline{p}}$ (8) se scrie în mod explicit sub următoarea formă :

$$\begin{aligned} \overline{\overline{p}} = {} & \frac{12\mu_1 r^2 \dot{e}}{e^3}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} 5{,}916 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta} + C_1 \operatorname{tg}\theta + C_2\right) + \\ & + \frac{24\mu_1 r^2 \dot{e}}{e^3 \cos\theta}\Bigg\{ \pm \left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 1{,}732 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 1{,}732\,\lambda}\right) \frac{4}{3} C'_2 \sin 2\theta \pm \\ & \pm \left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 3{,}873 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3{,}873\,\lambda}\right) \frac{8}{15} C'_2 \sin 4\theta + \\ & + \frac{C_1}{\pi}\Bigg[\left(\frac{\operatorname{ch} 5{,}916 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{ch} 0{,}703 \frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 0{,}703\,\lambda}\right) \sin 1{,}222\,\theta + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3,063\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3,063\,\lambda}\right)\sin 3,222\,\theta\Bigg]-\\
&-0,75\,\frac{C_1}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3,296\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3,296\,\lambda}\right)\sin 3,444\,\theta+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 5,352\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,352\,\lambda}\right)\sin 5,444\,\theta\right]-\\
&-\frac{0,16}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 0,703\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 0,703\,\lambda}\right)\cos 1,222\,\theta+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3,063\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3,063\,\lambda}\right)\cos 3,222\,\theta\right]+\\
&+\frac{0,175}{\pi}\left[\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 3,296\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 3,296\,\lambda}\right)\cos 3,444\,\theta+\right.\\
&\left.+\left(\frac{\operatorname{ch} 5,916\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,916\,\lambda}-\frac{\operatorname{ch} 5,352\,\frac{z}{r}}{\operatorname{ch} 5,352\,\lambda}\right)\cos 5,444\,\theta\right]\Bigg\},
\end{aligned}
\tag{15}
$$

în care s-a considerat $n_1 = 3$ și $C_2 + S'' = C_2'$, iar constantele C_1 și C_2' se determină cu ajutorul condițiilor la limită (14).

★

Cunoscînd repartiția presiunilor se poate calcula și rezultanta presiunilor ca și momentele de frecare pe fus și pe cuzinet, debitul de lubrifiant etc.

Astfel, alegînd două axe t și n după linia centrelor și normala la aceasta (fig. 2) și notînd cu P rezultanta presiunilor, atunci

$$
\begin{aligned}
\overline{\overline{P}}_n &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \overline{\overline{p}}\,\sin\theta\, r\, d\theta\, dz,\\
\overline{\overline{P}}_t &= \int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \overline{\overline{p}}\,\cos\theta\, r\, d\theta\, dz.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

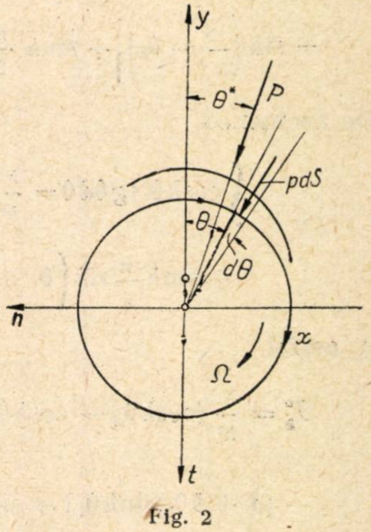


Fig. 2

Pentru calculul expresiilor (16) intervin integrale de forma

$$
I_h = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \sin h\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta,\quad I_h^* = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \cos h\theta \operatorname{tg}\theta\, d\theta. \tag{17}
$$

Prima din aceste integrale intervine şi în calculul rezultantei presiunilor pentru regimurile permanente (cu forţe şi viteze constante) [2]. Astfel, pentru $\operatorname{tg}\theta$ se poate întrebuinţa dezvoltarea aproximativă

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= a + b\theta - \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg}\theta &= -a + b\theta - \frac{1}{\theta - \frac{\pi}{2}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

cu

$$a = \frac{1}{2}\left(1 + \pi\frac{B_2}{2\,!}\right) - \frac{1}{1 - e^{-\pi/2}}, \quad b = \frac{1}{2} - \frac{B_2}{2\,!}, \quad B_2 = \frac{1}{6} \tag{19}$$

În acest mod [2]

$$\begin{aligned} I_h &= 2\frac{a}{h} + \frac{b}{h^2}(\sin h\theta_2 + \sin h\theta_1) - \frac{1}{h}[(a + b\theta_2)\cos h\theta_2 + \\ &+ (a + b\theta_1)\cos h\theta_1] + \cos h\frac{\pi}{2}\left[-2\operatorname{si}h\frac{\pi}{2} - \operatorname{si}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \operatorname{si}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] + \sin h\frac{\pi}{2}\left[2\operatorname{ci}h\frac{\pi}{2} - \operatorname{ci}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{ci}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} \int \cos h\theta\, \operatorname{tg}\theta\, d\theta &= \frac{b}{h^2}\cos h\theta + \frac{1}{h}(a + b\theta)\sin h\theta + \\ &+ \sin h\frac{\pi}{2}\operatorname{si}h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos h\frac{\pi}{2}\operatorname{ci}h\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

şi astfel

$$\begin{aligned} I_h^* &= \frac{b}{h^2}(\cos h\theta_2 - \cos h\theta_1) + \frac{1}{h}[(a + b\theta_2)\sin h\theta_2 - \\ &- (a + b\theta_1)\sin h\theta_1] + \sin h\frac{\pi}{2}\left[-2\operatorname{si}h\frac{\pi}{2} + \operatorname{si}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) - \right. \\ &\left. - \operatorname{si}\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right] - \cos h\frac{\pi}{2}\left[2\operatorname{ci}h\frac{\pi}{2} + \operatorname{ci}h\left(\theta_2 - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{ci}h\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)\right], \end{aligned} \tag{22}$$

în care h are succesiv valorile $h = 1{,}222$; $3{,}222$, $3{,}444$; $5{,}444$, Dacă se mai notează

$$\left.\begin{aligned} \overline{\overline{C}}_n &= \frac{e^3 \overline{\overline{P}}_n}{12\mu_1 r^3 \dot{e} b}, \\ \overline{\overline{C}}_t &= \frac{e^3 \overline{\overline{P}}_t}{12\mu_1 r^3 \dot{e} b}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

coeficientul $\overline{\overline{C}}_n$ rezultă egal cu

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C}}_n = &\left(1 - \frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda}\right)\Big\{\ln\cos\theta_1 - \ln\cos\theta_2 + C_1\Big[\ln \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_1}{2}\right) - \ln\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_1}{2}\right) - \\ &- (\sin\theta_2 + \sin\theta_1)\Big] - C_2(\cos\theta_2 - \cos\theta_2)\Big\} + \frac{8}{3} C_2'\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 1{,}732\,\lambda}{1{,}732\,\lambda}\right)\Big(\theta_2 - \theta_1 + \\ &+ \frac{\sin 2\theta_1}{2} - \frac{\sin 2\theta_2}{2}\Big) + \frac{16}{5} C_2'\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 3{,}873\,\lambda}{3{,}873\,\lambda}\right)\Big(\theta_2 - \sin 2\theta_2 + \frac{\sin 4\theta_2}{4} - \\ &- \theta_1 + \sin 2\theta_1 - \frac{\sin 4\theta_1}{4}\Big) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 0{,}703\,\lambda}{0{,}703\,\lambda}\right)(2C_1 I_{1.222} - 0{,}32 I^*_{1.222}) + \\ &+ \frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 3{,}063\,\lambda}{3{,}063\,\lambda}\right)(2C_1 I_{3.222} - 0{,}32\, I^*_{3.222}) - \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \\ &- \frac{\text{th}\, 3{,}296\,\lambda}{3{,}296\,\lambda}\Big)(1{,}5\, C_1 I_{3.444} - 0{,}35\, I^*_{3.444}) - \\ &- \frac{1}{\pi}\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 5{,}352\,\lambda}{5{,}352\,\lambda}\right)(1{,}5 C_1 I_{5.444} - 0{,}35 I^*_{5.444}), \end{aligned} \tag{24}$$

iar coeficientul C_t

$$\begin{aligned} \overline{\overline{C}}_t = &\left(1 - \frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda}\right)[\theta_2 + \theta_1 - C_1(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) + C_2(\sin\theta_2 + \sin\theta_1)] + \\ &+ \frac{8}{3} C_2'\left(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\text{th}\, 1{,}732\,\lambda}{1{,}732\,\lambda}\right)(\sin\theta_2 + \sin\theta_1) + \frac{8}{30} C_2'\Big(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \\ &- \frac{\text{th}\, 3{,}873\,\lambda}{3{,}873\,\lambda}\Big)(2 - \cos 4\theta_1 - \cos 4\theta_2) + \frac{1}{1{,}222\,\pi}\Big(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \\ &- \frac{\text{th}\, 0{,}703\,\lambda}{0{,}703\,\lambda}\Big)[2C_1(\cos 1{,}222\,\theta_1 - \\ &- \cos 1{,}222\,\theta_2) - 0{,}32(\sin 1{,}222\,\theta_1 + \sin 1{,}222\,\theta_2)] + \frac{1}{3{,}222\,\pi}\Big(\frac{\text{th}\, 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \\ &- \frac{\text{th}\, 3{,}063\,\lambda}{3{,}063\,\lambda}\Big)[2\, C_1(\cos 3{,}222\,\theta_1 - \cos 3{,}222\,\theta_2) - 0{,}32(\sin 3{,}222\,\theta_1 + \end{aligned}$$

$$+ \sin 3{,}222\,\theta_2)] - \frac{1}{3{,}444\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} - \frac{\operatorname{th} 3{,}296\,\lambda}{3{,}296\,\lambda}\right)[1{,}5\,C_1 (\cos 3{,}444\,\theta_1 -$$

$$- \cos 3{,}444\,\theta_2) - 0{,}35 (\sin 3{,}444\,\theta_2 + \sin 3{,}444\,\theta_1)] - \frac{1}{5{,}444\pi}\left(\frac{\operatorname{th} 5{,}916\,\lambda}{5{,}916\,\lambda} -\right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{th} 5{,}352\,\lambda}{5{.}352\,\lambda}\right)[1{,}5\,C_1 (\cos 5{,}444\,\theta_1 - \cos 5{,}444\,\theta_2) - 0{,}35 (\sin 5{,}444\,\theta_1 +$$

$$+ \sin 5{,}444\,\theta_2)]. \tag{25}$$

Pentru rezultanta presiunilor $\overline{p}$, notînd

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_n &= \frac{\overline{P}_n\, e^2}{2\,\mu_1 (\Omega + 2\dot{\varphi})\, br^3}, \\ \overline{C}_t &= \frac{\overline{P}_t\, e^2}{2\,\mu_1 (\Omega + 2\,\dot{\varphi})\, br^3}, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

coeficienţii $\overline{C}_n$ şi $\overline{C}_t$ au aceleaşi expresii ca şi coeficienţii C_n şi C_t corespunzători regimului de lucru permanent, a căror expresie analitică este dată în lucrarea citată [2], unde au fost calculaţi în diferite cazuri, rezultatele fiind reprezentate sud formă de diagrame.

Astfel cele două proiecţii ale rezultantei presiunilor vor fi

$$\left.\begin{aligned} P_n &= \overline{P}_n + \overline{\overline{P}}_n = \frac{2\,\mu_1 (\Omega + 2\dot{\varphi})\, br^3}{e^2}\overline{C}_n + \frac{12\,\mu_1\, r^3\, b\dot{e}}{e^3}\overline{\overline{C}}_n, \\ P_t &= \overline{P}_t + \overline{\overline{P}}_t = \frac{2\,\mu_1 (\Omega + 2\dot{\varphi})\, br^3}{e^2}\overline{C}_t + \frac{12\,\mu_1\, r^3\, b\dot{e}}{e^3}\overline{C}_t. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Momentul forţelor de frecare pe fus şi pe cuzinet [2]

$$M\,(M_e) = -\int_{-\theta_1}^{\theta_2}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} r^2\,\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0,\delta} d\theta\, dz, \tag{28}$$

cu

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial r}{\partial x}\, y\,(y - \delta) + V_{11}\left(1 - \frac{y}{\delta}\right) + V_{21}\,\frac{y}{\delta}, \tag{29}$$

în care [1]

$$\left.\begin{aligned} V_{11} &= r\,\Omega, \\ V_{21} &= -\,\dot{e}\sin\theta - e\,\dot{\varphi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Deoarece $p = \overline{p} + \overline{\overline{p}}$, vom pune

$$u = \overline{u} + \overline{\overline{u}}. \tag{31}$$

în care

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}\, y\,(y-\delta) + V_{11}\left(1-\frac{y}{\delta}\right), \\ \bar{\bar{u}} &= \frac{1}{2\mu}\frac{\partial \bar{\bar{p}}}{\partial x}\, y\,(y-\delta) + V_{21}\frac{y}{\delta}, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

iar momentele de frecare corespunzătoare le vom nota cu $\bar{M}$ $(\bar{M}_e)$, respectiv cu $\bar{\bar{M}}$ $(\bar{M}_e)$.

Astfel, integrînd prin părți și ținînd seama că $\mu = \mu_1 \frac{\delta}{e}$,

$$\bar{M}\,(\bar{M}_e) = \frac{\mu_1 \Omega b r^3}{e}(\theta_1+\theta_2) \pm \frac{e}{2}\bar{P}_n \tag{33}$$

și

$$\bar{\bar{M}}\,(\bar{\bar{M}}_e) = \frac{\mu_1 b r^2}{e}[\dot{e}\,(\cos\theta_1-\cos\theta_2) + e\dot{\varphi}\,(\sin\theta_2+\sin\theta_1)] \pm \frac{e}{2}\,\bar{\bar{P}}_n. \tag{34}$$

Momentul total al forțelor de frecare va fi dat de suma momentelor $\bar{M}$ și $\bar{\bar{M}}$, adică

$$\begin{aligned} M = \frac{\mu_1 b r^2}{e}[r\Omega\,(\theta_1+\theta_2) + \dot{e}\,(\cos\theta_1-\cos\theta_2) + e\,\dot{\varphi}\,(\sin\theta_2 + \\ +\sin\theta_1)] \pm \frac{e}{2}\,P_n. \end{aligned} \tag{35}$$

În sfîrșit, debitul de lubrifiant care trece prin lagăr este

$$Q = \int_0^\delta\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (u)_{\theta=-\theta_1}\, dy dz \tag{36}$$

sau, ținînd seama de relația (28),

$$Q = (V_{11}+V_{21})_{\theta=-\theta_1}\frac{eb}{2}\cos\theta_1 - \frac{e^3}{12\,\mu_1}\cos^3\theta_1\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{\theta=-\theta_1} dz, \tag{37}$$

ultima integrală efectuîndu-se fără dificultăți, dacă se ține seama de expresiile funcțiilor $\bar{p}$ [2] și $\bar{\bar{p}}$ (15) a căror sumă este egală cu presiunea p.

Dacă notăm acum cu e_0, Ω_0, valori de referință, constante pentru excentricitatea și viteza unghiulară de rotație și cu

$$\left.\zeta = \frac{P\,e_0^2}{2\,\mu_1\Omega_0 b r^3} \qquad \begin{aligned} C_n &= \frac{P_n\,e_0^2}{2\,\mu_1\Omega_0 b r^3}, \\ C_t &= \frac{P_t\,e_0^2}{2\,\mu_1\Omega_0 b r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

atunci

$$\zeta = \sqrt{C_n^2 + C_t^2}, \tag{39}$$

iar coeficienţii C_n şi C_t, în funcţie de coeficienţii calculaţi $\overline{C}_n$, $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{C}_t$, $\overline{\overline{C}}_t$ sînt ţinînd seama de relaţiile (27),

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_n + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot{e}}{e\Omega_0}\,\overline{\overline{C}}_n, \\ C_t &= \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\dot{\varphi}}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_t + 6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot{e}}{e\Omega_0}\,\overline{\overline{C}}_t. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

În mod analog, dacă se notează

$$C_m\,(C_{mc}) = \frac{M\,(M_c)\,e_0}{\pi\,\mu_1\,\Omega_0\,br^3}, \tag{41}$$

atunci

$$\left.\begin{aligned} C_m = {} & \frac{e_0}{\pi e}\,\frac{\Omega}{\Omega_0}\,(\theta_1 + \theta_2) + \frac{e_0}{\pi r}\left[\frac{\dot{e}}{e\Omega_0}\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \right. \\ & \left. + \frac{\dot{\varphi}}{\Omega_0}\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)]\right] + \frac{e}{e_0}\,C_n, \\ C_{mc} = {} & \frac{e_0}{\pi e}\,\frac{\Omega}{\Omega_0}\,(\theta_1 + \theta_2) + \frac{e_0}{\pi r}\left|\frac{\dot{e}}{e\Omega_0}\,(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \right. \\ & + \frac{\dot{\varphi}}{\Omega_0}\,(\sin\theta_1 + \sin\theta_2)] - \frac{e}{e_0}\,C_n. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Unghiul făcut de direcţia sarcinii cu linia centrelor este egal cu

$$\operatorname{tg}\theta^* = \frac{C_n}{C_t}. \tag{43}$$

★

În acest mod, toate elementele care interesează sînt determinate, dacă se cunosc :

— caracteristicile geometrice ale lagărului adică raza r a fusului, lăţimea b şi unghiul de înfăşurare al cuzinetului

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2 \tag{44}$$

şi

— caracteristicile lui funcţionale, adică variaţia vitezei unghiulare de rotaţie a fusului în funcţie de timp $\Omega = \Omega\,(t)$, a excentricităţii $e = e\,(t)$ şi a parametrului

$$\frac{\theta_2}{\Theta} = \nu = \nu\,(t). \tag{45}$$

Mărimile Θ și ν înlocuiesc variabilele θ_1 și θ_2, iar

$$\dot{\nu} = \frac{\dot{\varphi}}{\Theta}. \tag{46}$$

În cazurile reale se întîlnește de cele mai multe ori problema inversă și anume : se cunoaște sarcina $P\,(t)$ și direcția ei, și variația vitezei unghiulare $\Omega\,(t)$ în raport cu timpul. În schimb sînt necunoscute excentricitatea e și poziția liniei centrelor ν.

Pentru determinarea necunoscutelor problemei e și ν se pot scrie două condiții de echilibru și anume ca lagărul să suporte sarcina dată, adică rezultanta presiunilor să fie egală în fiecare moment cu sarcina dată și să aibă aceeași direcție cu a sarcinii. Aceste condiții se scriu ținînd seama de relațiile (38), (40) și (46), sub forma

$$\left.\begin{aligned} \frac{2\,\mu_1\,\Omega_0\,br^3}{e_0^2}\left\{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}+\frac{2\,\Theta\dot{\nu}}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_n+6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot{e}}{e\,\Omega}\,\overline{\overline{C}}_n\right\} &= P\sin\,\theta^\star, \\ \frac{2\,\mu_1\,\Omega_0\,br^3}{e_0^2}\left\{\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}+\frac{2\,\Theta\dot{\nu}}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,\overline{C}_t+6\,\frac{e_0^2}{e^2}\,\frac{\dot{e}}{e\,\Omega}\,\overline{\overline{C}}_t\right\} &= P\cos\,\theta^\star. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

În același timp, notînd de exemplu cu $\gamma\,(t)$ unghiul făcut de direcția sarcinii cu marginea de intrare a cuzinetului ($\theta = -\,\theta_1$), atunci

$$\gamma = \theta_1 + \theta^\star, \tag{48}$$

sau, ținînd seama de relațiile (44) și (45),

$$\theta^\star = \gamma - \Theta\,(1-\nu). \tag{49}$$

Introducînd această expresie pentru $\theta^\star$ în relațiile (47) și ținînd seama că

$$\left.\begin{aligned} \overline{C}_n &= \overline{C}_n\,[\Theta,\lambda,\nu(t)], & \overline{\overline{C}}_n &= \overline{\overline{C}}_n[\Theta,\lambda,\nu\,(t)], \\ \overline{C}_t &= \overline{C}_t\,[\Theta,\lambda,\nu\,(t)], & \overline{\overline{C}}_t &= \overline{\overline{C}}_t\,[\Theta,\lambda,\nu\,(t)], \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

sistemul (47) rezultă ca fiind compus din două ecuații diferențiale ordinare de ordinul I în raport cu necunoscutele e și ν.

Acest sistem este neliniar și în general greu de rezolvat în mod riguros. Înmulțind prima ecuație cu $\overline{\overline{C}}_t$, a doua cu $\overline{\overline{C}}_n$ și scăzîndu-le, se obține ecuația

$$\begin{aligned} &\frac{2\,\mu_1\,\Omega_0\,br^3}{e_0^2}\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}+\frac{2\,\Theta\dot{\nu}}{\Omega_0}\right)\frac{e_0^2}{e^2}\,(\overline{C}_n\,\overline{\overline{C}}_t-\overline{C}_t\,\overline{\overline{C}}_n)= \\ &= P\left\{\overline{\overline{C}}_t\sin\,[\gamma-\Theta\,(1-\nu)]-\overline{\overline{C}}_n\cos\,[\gamma-\Theta\,(1-\nu)]\right\}, \end{aligned} \tag{51}$$

sau

$$\dot{\nu} = \frac{e^2P\left\{\overline{\overline{C}}_t\sin\,[\gamma-\Theta\,(1-\nu)]-\overline{\overline{C}}_n\cos\,[\gamma-\Theta\,(1-\nu)]\right\}}{4\,\mu_1\,\Omega_0\,br^3\,\Theta\left(\overline{C}_n\,\overline{\overline{C}}_t-\overline{C}_t\,\overline{\overline{C}}_n\right)}-\frac{\Omega}{2\,\Theta}=f_\nu\,(\nu,e,t). \tag{52}$$

Sistemul format din ecuația (52) și una din ecuațiile (47) poate fi rezolvat prin aproximații succesive, în felul următor. În ecuația (52) se consideră o anumită valoare particulară pentru e, de exemplu $e = e_0$ (excentricitatea corespunzătoare sarcinii medii P_m). Atunci ecuația (52) este o ecuație diferențială în ν, $\dot{\nu} = f_\nu(\nu, e_0, t)$. Fie soluția acestei ecuații $\nu = \nu_1(t)$. Introducînd această valoare de exemplu în prima ecuație (47), se obține o ecuație diferențială în e :

$$\dot{e} = \frac{e^3 P \sin[\gamma - \Theta(1-\nu)]}{12\mu_1 b r^3 \overline{\overline{C}}_n(\nu_1)} - \left(\frac{\Omega}{\Omega_0} + \frac{2\Theta\dot{\nu}_1}{\Omega_0}\right)\frac{e\Omega_0}{6}\frac{\overline{C}_n(\nu_1)}{\overline{\overline{C}}_n(\nu_1)} = f_e(e, t) \tag{53}$$

a cărei soluție fie $e = e_1(t)$. Cu această valoare, introdusă în ecuația (52), vom obține o nouă expresie $\nu = \nu_2(t)$, ș. a. m. d. Procedeul conduce însă la calcule laborioase.

★

Dat fiind că rezolvarea sistemului (47) conduce la calcule laborioase, pentru a găsi o metodă mai simplă de determinare a caracteristicilor mișcării să tratăm un exemplu pentru a ne da seama de ordinul de mărime și de influența diferiților factori care intervin în ecuațiile (47).

Astfel, fie pentru simplificare un lagăr cu $\lambda = \infty$ și $\Theta = 120°$ și să considerăm

$$\left.\begin{aligned} &\nu = 0{,}65 \ (\theta_1 = 42°,\ \theta_2 = 78°), \\ &\Omega = \Omega_0 = \text{const.}, \\ &e = e_0(1 + \varepsilon \sin\Omega_1 t),\ \varepsilon = 0{,}25,\ \Omega_1 = \frac{\Omega_0}{5}, \\ &\dot{\varphi} = \dot{\nu} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Aceste date presupun deci viteza unghiulară a fusului și direcția liniei centrelor constante în timp. Variația excentricității sub forma de mai sus, corespunde în primă aproximație unei sarcini pulsatorii periodice, cu o frecvență de același ordin de mărime, cu cea a șocurilor la lagărele de vagoane, datorită trecerii roților peste rosturile de la șinele de cale ferată.

În aceste condiții, din relația (6) rezultă constantele care determină soluția $\overline{\overline{p}}_\infty$, $C_1 = 0{,}618$, $C_2 = -1{,}902$. Formulele (24) și (25) dau astfel $\overline{\overline{C}}_n = -0{,}00623$, $\overline{\overline{C}}_t = -0{,}70902$. Pentru coeficienții corespunzători soluției $\overline{p}_\infty$ rezultă în mod analog [2], $\overline{C}_n = 1{,}26$, $\overline{C}_t = 1{,}80$.

Coeficienții C_n și C_t (40) sînt astfel egali cu

$$\left.\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{(1 + \varepsilon\sin\Omega_1 t)^2}\left(\overline{C}_n + 6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\frac{\cos\Omega_1 t}{1 + \varepsilon\sin\Omega_1 t}\overline{\overline{C}}_n\right), \\ C_t &= \frac{1}{(1 + \varepsilon\sin\Omega_1 t)^2}\left(\overline{C}_t + 6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0}\frac{\cos\Omega_1 t}{1 + \varepsilon\sin\Omega_1 t}\overline{\overline{C}}_t\right). \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Deoarece $6\varepsilon\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = 0{,}3$ pentru cazul considerat, iar de obicei $\left|\frac{\cos\Omega_1 t}{1+\varepsilon\sin\Omega_1 t}\right| \leqslant 1$, rezultă că influenţa coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$ este redusă.

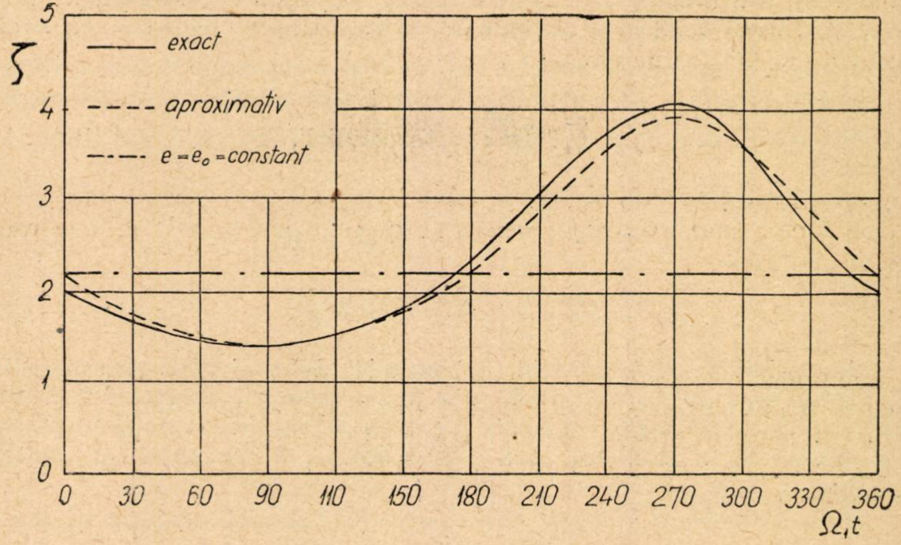


Fig. 3

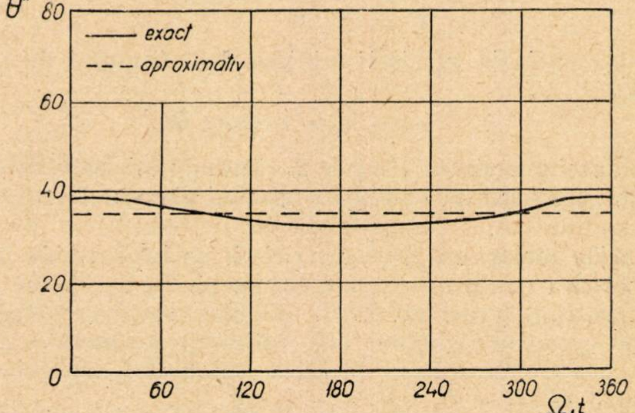


Fig. 4

Astfel în figura 3 şi figura 4 s-au reprezentat variaţia coeficientului de încărcare $\zeta = \sqrt{C_n^2 + C_t^2}$ (39) şi a unghiului θ^* în funcţie de $\Omega_1 t$ pentru un ciclu în două ipoteze : calculînd în mod exact cu ajutorul relaţiilor (55) sau neglijînd contribuţia coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_t$ şi $\overline{\overline{C}}_n$. Se vede că diferenţele sînt mici şi, mai mult, dacă se urmăreşte problema inversă expusă anterior (cînd se cunoaşte sarcina şi trebuie să se determine excentricitatea), eroarea făcută este acoperitoare. Într-adevăr, din figura 3 se constată că, neglijînd aportul termenilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$, se obţine o sarcină maximă mai redusă, adică soluţia $\overline{\overline{p}}$, contribuie la creşterea capacităţii portante atunci cînd fusul tinde să se apropie de cuzinet. Este evident deci că neglijarea soluţiei $\overline{\overline{p}}$ introduce astfel o aproximaţie în calcule acoperitoare.

Rezultă deci că, cel puţin într-o primă aproximaţie, se poate neglija influenţa termenilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$. În aceste condiţii, calculele se simplifică apreciabil.

Astfel relaţiile (49) şi (47) se scriu

$$\gamma(t) = \theta^{\star}(\nu) + \Theta(1 - \nu) \tag{56}$$

şi

$$\frac{2\mu_1 br^3(\Omega + 2\Theta\dot{\nu})}{e^2}\overline{\zeta} = P(t). \tag{57}$$

Cunoscînd pe $\gamma(t)$, ecuaţia (56) permite determinarea parametrului $\nu(t)$. Rezolvarea acestei ecuaţii în ν se poate face prin încercări fără dificultăţi, cu ajutorul diagramei 10 din lucrarea [2] care dă variaţia unghiului $\theta^{\star}$ în funcţie de ν. Evident, dacă $\gamma(t) = \text{const.}$, $\theta^{\star} = \text{const.}$, şi rezultă $\nu = \text{const.}$, $\dot{\nu} = 0$.

O dată cunoscut $\nu = \nu(t)$, din relaţia (57) rezultă variaţia excentricităţii :

$$e = \sqrt{\frac{2\mu_1 br^3(\Omega + 2\Theta\dot{\nu})}{P}}\,\zeta \tag{58}$$

şi se poate trasa variaţia grosimii minime δ_2 a filmului de lubrifiant în funcţie de timp,

$$\delta_2 = e\cos\theta_2 = e\cos(\nu\Theta), \tag{59}$$

putînd verifica astfel dacă tot timpul δ_2 rămîne mai mare decît o valoare minimă pînă la care regimul de ungere îşi mai păstrează caracterul hidrodinamic.

Dacă sarcina suportată de lagăr suferă variaţii rapide în mărime şi direcţie, este posibil ca aproximaţiile făcute să fie destul de mari. Acest lucru poate fi verificat, plecînd de la valorile calculate pentru ν şi e, şi determinînd cu ajutorul relaţiilor (47) influenţa termenilor neglijaţi. În acest mod se poate îmbunătăţi precizia calculului, efectuînd o a doua aproximaţie, considerînd în calculul termenilor care conţin soluţia $\overline{\overline{p}}$, variaţiile parametrilor e şi ν, determinaţi în modul simplu arătat mai sus.

Pentru o apreciere rapidă, ţinînd seama de expresia (58) rezultă că termenul $6\frac{\dot{e}}{e\Omega}$, de care depinde influenţa coeficienţilor $\overline{\overline{C}}_n$ şi $\overline{\overline{C}}_t$, este egal în prima aproximaţie cu

$$\frac{6\dot{e}}{e\Omega} \cong \frac{3}{\Omega}\left\{\frac{\dot{\Omega} + 2\Theta\ddot{\nu}}{\Omega + 2\Theta\dot{\nu}} + \frac{\dot{\zeta}}{\zeta} - \frac{\dot{P}}{P}\right\}, \tag{60}$$

iar dacă direcția sarcinii rămîne constantă ($\dot{\nu} = \ddot{\nu} = \dot{\zeta} \cong 0$), termenul (60) poate fi calculat cu datele inițiale ale problemei,

$$\frac{6\dot{e}}{e\Omega} \cong \frac{3}{\Omega}\left(\frac{\dot{\Omega}}{\Omega} - \frac{\dot{P}}{P}\right). \qquad (61)$$

Dacă acest termen are valori relativ reduse, de exemplu dacă sub 80 % din ciclu $\frac{6\dot{e}}{e\Omega} < 0{,}5$, metoda simplificată propusă este aplicabilă, obținîndu-se aproximații comparabile cu cele din exemplul prezentat $\left(\text{în care } \frac{6\dot{e}}{e\Omega} \leqslant 0{,}3\right)$.

Primită la redacție la 24 aprilie 1957.

РАСЧЕТ ПОДШИПНИКОВ БЕЗ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ И СКОРОСТЯХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Определяется распределение давлений на подшипниках без радиального зазора, подвергающихся действию переменных сил и скоростей, сначала в точной форме, а затем с некоторыми допущениями, в форме, применимой на практике. Рассчитывается равнодействующая давлений и моменты трения на шейке и на вкладыше, а затем при помощи этих результатов дается метод для расчета подшипника, когда известны относительные скорости поверхностей и их относительное положение, в зависимости от времени или нагрузки на подшипники в зависимости от времени.

LE CALCUL DES PALIERS SANS JEU RADIAL, SOUMIS À DES CHARGES ET VITESSES VARIABLES

(RÉSUMÉ)

On obtient la distribution des pressions pour les paliers sans jeu radial soumis à des charges et vitesses variables, d'abord sous une forme rigoureuse, ensuite, sous une forme utilisable dans les applications pratiques. On détermine la résultante des pressions ainsi que les moments de frottement du tourillon et du coussinet et, à l'aide de ces résultats, on donne une méthode de calcul des paliers, quand on connaît les vitesses relatives des surfaces et leurs positions relatives, en fonction du temps, ou bien la charge supportée par le palier, en fonction du temps.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu. *Lagăre fără joc radial supuse la sarcini și viteze variabile.* Comunicările Acad. R.P.R., t. VI, nr. 11, noiembrie 1956, p. 1299.
2. — *Considerații asupra calculului lagărelor fără joc radial.* Studii si cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3—4, iulie-decembrie 1954, p. 425.
3. N. Tipei, *Repartiția presiunilor în lagărele fără joc radial.* Bul. ştiinţ. Acad. R.P.R., Secţia de ştiinţe tehnice şi chimice, t. V, 1953, p. 13.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE

EFECTUL FORŢEI CENTRIFUGE ASUPRA REZISTENŢEI PRĂJINILOR DE FORAJ *)

DE

N. S. PÎRVULESCU

I. INSTABILITATEA DE ROTAŢIE A GARNITURII DE FORAJ

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1. Dacă se neglijează greutatea proprie a prăjinilor

a. *Fără sarcină axială*

Să luăm în considerare acţiunea forţei centrifuge în rotaţia prăjinilor. Redăm condiţia de instabilitate, stabilită anterior – relaţia (15) din [2] – în cazul $C_{1,3}^{2,0}$ (ambele capete în lagăre articulate şi fără deplasare laterală)

$$\Psi_1 \, \Psi_3^{(2)} = \Psi_1^{(2)} \, \Psi_3 , \tag{1}$$

în care

$$\Psi_1 = \frac{1}{1\,!} + \frac{z}{4\,!} + z^2\left[\frac{\alpha'}{6\,!} + \frac{4}{7\,!}\right] + z^3\left[\frac{\alpha'^2}{8\,!} + \frac{10\,\alpha'}{9\,!} + \frac{28}{10\,!}\right] + \dots$$
$$+ \beta\left\{\frac{1}{5\,!} + z\left[\frac{\alpha'}{7\,!} + \frac{6}{8\,!}\right] + \dots\right\} + \beta^2\left\{\frac{1}{9\,!} + \dots\right\} + \dots \tag{2}$$

---

*) Se dezvoltă o temă tratată anterior – teza autorului. *Flambajul şi vibraţiile rotative ale tijelor verticale, grele şi zvelte*, susţinută la 23 iunie 1949 pentru obţinerea titlului de doctor inginer. şi comunicată într o notă preliminară [1] – în lumina rezultatelor obţinute şi publicate ulterior.

$$
\begin{aligned}
\Psi'^{(2)}_{1} &= \frac{z}{2\,!} + z^2\Big[\frac{\alpha'}{4\,!} + \frac{4}{5\,!}\Big] + \ldots + \beta\Big\{\frac{1}{3\,!} + z\Big[\frac{\alpha'}{5\,!} + \frac{6}{6\,!} + \ldots\Big\} + \ldots \\
\Psi_3 &= \frac{1}{3\,!} + z\Big[\frac{\alpha'}{5\,!} + \frac{3}{6\,!}\Big] + z^2\Big[\frac{\alpha'^2}{7\,!} + \frac{8\alpha'}{8\,!} + \frac{18}{9\,!}\Big] + \ldots \\
&\quad + \beta\Big\{\frac{1}{7\,!} + z\Big[\frac{2\alpha'}{9\,!} + \frac{10}{10\,!}\Big] + \ldots\Big\} + \beta^2\Big\{\frac{1}{11\,!} + \ldots\Big\} + \ldots \\
\Psi'^{(2)}_{3} &= \frac{1}{1\,!} + z\Big[\frac{\alpha'}{3\,!} + \frac{3}{4\,!}\Big] + \ldots + \beta\Big\{\frac{1}{5\,!} + z\Big[\frac{2\alpha'}{7\,!} + \frac{10}{8\,!}\Big] + \ldots\Big\} + \ldots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Redăm notațiile și relațiile corespunzătoare

$$\alpha' = -\,h/L, \tag{3}$$

unde

L = lungimea coloanei de prăjini,
h = lungimea porțiunii comprimate;

$$z = L^3/A \;\; ; \;\; A = EI/q, \tag{4}$$

unde

E = modulul de elasticitate longitudinal,
I = momentul de inerție al secțiunii,
q = greutatea aparentă a prăjinii pe unitatea de lungime;

$$\beta = wL^4 \;\; ; \;\; w = \omega^2/gA \tag{5}$$

unde

ω = viteza de rotație a prăjinii,
g = accelerația gravitații.

Pentru început să considerăm garnitura de prăjini suspendată în capătul de sus, fără ca sapa să ajungă în talpă ($h = 0$). Să neglijăm greutatea proprie ($q \approx 0$) și conform relațiilor (4), $z \approx 0$; să nu neglijăm însă masa prăjinilor, μ, dată de relația

$$\mu = q/g \tag{6}$$

și deci conform relației (5), $w \neq 0$.

În aceste condiții ecuația fibrei medii deformate — relația (6) din [2] — se scrie

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x}{A} - N_0\right)\frac{dy}{dx}\right] + wy, \tag{7}$$

în care y este săgeata liniei medii deformate la depărtarea x de origine; N_0 apăsarea pe sapă dată de relația

$$N_0 = qh \tag{8}$$

devine

$$d^4y/dx^4 = wy, \tag{9}$$

iar expresiile (2) devin

$$\begin{aligned} \beta^{\frac{1}{4}}\Psi_1 &= \frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{1!} + \frac{\beta^{\frac{5}{4}}}{5!} + \frac{\beta^{\frac{9}{4}}}{9!} + \ldots = \beta^{\frac{1}{4}}\Psi_3^{(2)}, \\ \beta^{\frac{1}{4}}\Psi_1^{(2)} &= \frac{\beta^{\frac{3}{4}}}{3!} + \frac{\beta^{\frac{7}{4}}}{7!} + \frac{\beta^{\frac{11}{4}}}{11!} + \ldots = \beta^{\frac{3}{4}}\Psi_3. \end{aligned} \tag{10}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (10), condiţia de instabilitate (1) devine

$$\Psi_1\Psi_3^{(2)} - \Psi_1^{(2)}\Psi_3 = \beta^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\beta^{\frac{1}{4}}}{1!} - \frac{\beta^{\frac{3}{4}}}{3!} + \frac{\beta^{\frac{5}{4}}}{5!} - \ldots\right] = 0$$

şi deci

$$\beta^{-\frac{1}{2}}\sin\beta^{\frac{1}{4}} = 0. \tag{11}$$

Soluţia banală corespunde la $\beta = 0$, cînd nu apare instabilitatea, fie că $\omega = 0$ sau $\mu = 0$.

Soluţia căutată este

$$\beta^{\frac{1}{4}} = K\pi, \tag{12}$$

în care $K = 0; 1; 2; 3; \ldots$, şi ţinînd seama de relaţiile (4) şi (5)

$$\omega = \frac{K^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{gEI}{q}}. \tag{13}$$

Se obţine tocmai cunoscuta formulă a turaţiilor critice — relaţia (2_{11}) din [3] obţinută în alt fel — ceea ce constituie o verificare.

b. *Cu sarcină axială*

Gaura de sondă este, în general, deviată în toate direcţiile, astfel încît garnitura de prăjini atinge, chiar în repaus, pereţii găurii în diferite puncte, mai ales la adîncime, unde devierile sînt accentuate. Prin urmare, garnitura de foraj poate fi considerată încastrată pe parcurs, la diferite adîncimi, însă extremitatea inferioară, cel puţin pentru sape cu tăiş, poate fi considerată articulată.

Să considerăm o porţiune liberă, de lungime L, între două poziţii de rezemare, şi să calculăm turaţia critică respectivă. Dacă porţiunea de prăjini considerată nu este prea aproape de fund, greutatea care atîrnă de această porțiune este mare în comparație cu greutatea proprie a porțiunii considerate. Prin urmare, putem neglija greutatea proprie a porțiunii, considerate, însă nu și aceea a porțiunii care atîrnă de aceasta.

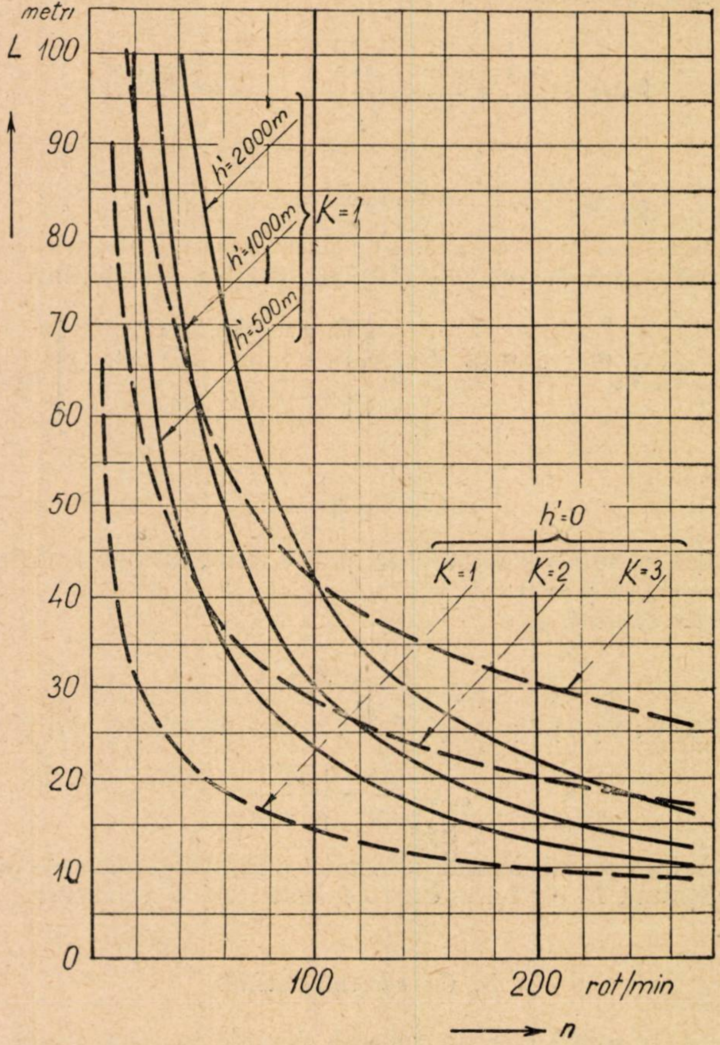


Fig. 1

În aceste condiții și dacă, pentru simplificare, admitem reazemele ca lagăre articulate, ceea ce este acoperitor, ne putem folosi de relația (2_9) din [3] și anume

$$\omega = \frac{K^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{g}{q}\left[EI - \frac{N_0 L^2}{K^2\pi^2}\right]}. \tag{14}$$

Să scriem viteza unghiulară în funcţie de turaţia

$$\omega = \pi n/30 \tag{15}$$

şi relaţia precedentă devine

$$\frac{n}{30} = \frac{K}{L}\sqrt{g\left[\left(\frac{K\pi}{L}\right)^2 A + h'\right]}, \tag{16}$$

în care h' este lungimea care atîrnă de secţiunea considerată şi deci

$$h' = -h = -N_0/q. \tag{17}$$

În diagrama din figura 1 s-a trasat variaţia turaţiilor critice, aplicînd formula (16) la prăjinile obişnuite de foraj $4''\,{}^1/_2$ pentru cazurile $h' = 0$, $K = 1, 2, 3$ şi $K = 1$, $h' = 500, 1000, 2000$ m.

Se observă că pentru turaţiile obişnuite de foraj (50—200 rot/min), instabilitatea are loc formînd un mare număr de bucle pe o distanţă relativ scurtă, în comparaţie cu lungimile de mii de metri ale garniturilor de foraj; iar dacă se atîrnă de prăjini o greutate considerabilă, aceasta nu reuşeşte să împiedice buclarea prăjinilor, ci numai să crească lungimea buclelor.

Dacă pentru sarcini de mii de metri, curbele sînt atît de puţin modificate, după cum se arată în această diagramă, rezultă că greutatea proprie a prăjinilor din buclă este neglijabilă şi nu numai pentru buclele de la partea superioară, care au ca sarcină restul garniturii de foraj.

2. Firul perfect flexibil

Să considerăm în locul tijelor elastice un fir perfect flexibil. În acest caz momentul rezistent M este nul prin definiţie şi deci

$$M = -EI\frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{18}$$

Deoarece $d^2y/dx^2 \neq 0$, urmează că $EI = 0$, ceea ce putea fi considerat de la început ca definiţia firului perfect flexibil, firul fără rigiditate

În această condiţie relaţiile (7) şi (16) devin

$$\frac{d}{dx}\left[(x + h')\frac{dy}{dx}\right] + \frac{\omega^2}{g} = 0, \tag{19}$$

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = K^2\frac{g\alpha'}{L} = K^2\frac{gh'}{L^2}. \tag{20}$$

Relaţiile (19) şi (20) reprezintă ecuaţia diferenţială şi turaţia critică a firului perfect flexibil, neglijînd greutatea proprie, nu însă masa firului ($\mu \neq 0$) şi forţa axială ($h' \neq 0$).

3. Dacă nu se neglijează greutatea proprie

În acest caz ne folosim de condiția de instabilitate (1), în care funcțiile Ψ date de expresiile (2) sînt exprimate prin serii infinite de puteri întregi. Limitîndu-se la un număr n de termeni, calculul devine aproximativ și soluția capătă aproximația, acceptată prin convenție, de gradul $n-1$. Am arătat anterior — tabloul nr. 6 din [2] — că în cazul flambajului fără rotație, valorile în aproximație 5° diferă neglijabil față de aproximația 3° și, prin urmare, nu este necesar de a împinge aproximația la un grad mai mare de 3°.

Valorile β corespunzînd condiției de instabilitate (1) au fost calculate, prezentate în tabloul nr. 5 și figura 1 din [2] și redate în prezenta lucrare în tabloul nr. 1 și în diagrama din figura 4 pentru $\alpha' = 0$ și $\alpha' = 1$, în aproximația 1° și 3°.

Verificarea experimentală a acestor valori este expusă mai departe (B, 3).

Tabloul nr. 1

Valorile β calculate în funcție de z

z	$z^{\frac{1}{3}}$	$\alpha' = 0$		$\alpha' = 1$	
		1°	3°	1°	3°
0,1	0,464	907	980	931	989
0,5	0,794	187,5	199,9	211	210
1	1	97,5	102,4	121,5	112,3
5	1,71	24,5	24,4	48,5	34,3
10	2,15	16,5	14,5		

Examinînd tablourile și diagramele menționate, se observă că diferențele între aproximațiile 1° și 3° scad o dată cu z, ceea ce corespunde cu creșterea turațiilor. În aceste cazuri și pentru simplificare putem să ne mărginim uneori chiar la prima aproximație.

S-a arătat — relațiile $(6_2) \ldots (6_5)$ din [3] — că viteza critică de rotație în primă aproximație și pentru cazurile fără deplasare laterală este dată de formulele

— cazul $C_{1,3}^{2,0}$ (ambele extremități în lagăre articulate)

$$\omega^2 = \frac{15\,g}{L}\left[\frac{6A}{L^3} + \frac{1}{2} - \frac{h}{L}\right]; \tag{21}$$

— cazul $C_{1,3}^{1,0}$ (extremitatea inferioară în lagăr articulat, cealaltă în lagăr încastrat)

$$\omega^2 = \frac{21\,g}{L}\left[\frac{10\,A}{L^3} + \frac{5}{12} - \frac{h}{L}\right]; \tag{22}$$

— cazul $C_{2,3}^{1,0}$ (ambele extremități în lagăre încastrate)

$$\omega^2 = \frac{28g}{L}\left[\frac{6A}{L^2} + \frac{1}{2} - \frac{h}{L}\right]. \tag{23}$$

Ținînd seama de expresiile (4) și (15), relațiile (21), (22) și (23) devin respectiv

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{15g}{\pi^2 L}\left[\frac{6}{z} + \frac{1}{2} - \frac{h}{L}\right], \tag{24}$$

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{21g}{\pi^2 L}\left[\frac{10}{z} + \frac{5}{12} - \frac{h}{L}\right], \tag{25}$$

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{28g}{\pi^2 L}\left[\frac{15}{z} + \frac{1}{2} - \frac{h}{L}\right]. \tag{26}$$

Aceste formule de primă aproximație sînt valabile pentru o convergență pronunțată a seriilor. Examinînd expresiile (2) se observă o convergență mai rapidă cu cît valorile z și β scad. În aceste considerații, avînd în vedere relațiile (4) și (5), pentru rigidități EI mici, sau pentru lungimi L mari, adică pentru z mare, termenii desconsiderați ai seriilor nu mai sînt neglijabili.

Făcînd aproximația pentru unitățile metru și secundă

$$g = 9{,}81 \approx \pi^2 = 9{,}87, \tag{27}$$

expresiile (24), (25) și (26) se pot pune sub forma generală

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 L = b\left[\frac{a}{z} + h + \alpha'\right], \tag{28}$$

în care $k = {}^1/_2$ pentru același fel de legături la ambele capete.

Pentru ca formula (28) să rămînă valabilă și pentru valorile mari ale lui z, coeficienții a și b devin funcții de z și variază cu diferitele feluri ale legăturilor de la capete.

Valorile acestor coeficienți s-au determinat experimental, după cum se arată mai departe (B, 4) (fig. 5).

B. ÎNCERCĂRI EXPERIMENTALE

1. Modelele și aparatul de încercat

Am folosit la încercările instabilității de rotație, modelele din resort elicoidal de oțel nr. 5 și 7, a căror descriere și valabilitate s-a făcut anterior [4] și ale căror caracteristici sînt trecute în tabloul nr. 2.

Rigiditățile modelelor au fost determinate teoretic și verificate experimental. Am reținut valorile determinate experimental.

Tabloul nr. 2

Caracteristicile modelelor

Caracteristicile \ Model nr.	5	7
Diametrul sîrmei δ, în mm	1,17	1,72
Diametrul mediu al resortului Δ, în mm	7,87	8,14
Numărul de spire pe unitate de lungime, n_s	17	16
Lungimea de rigiditate față de gravitație determinată experimental $A^{1/3}$, în mm	221,5	277,0

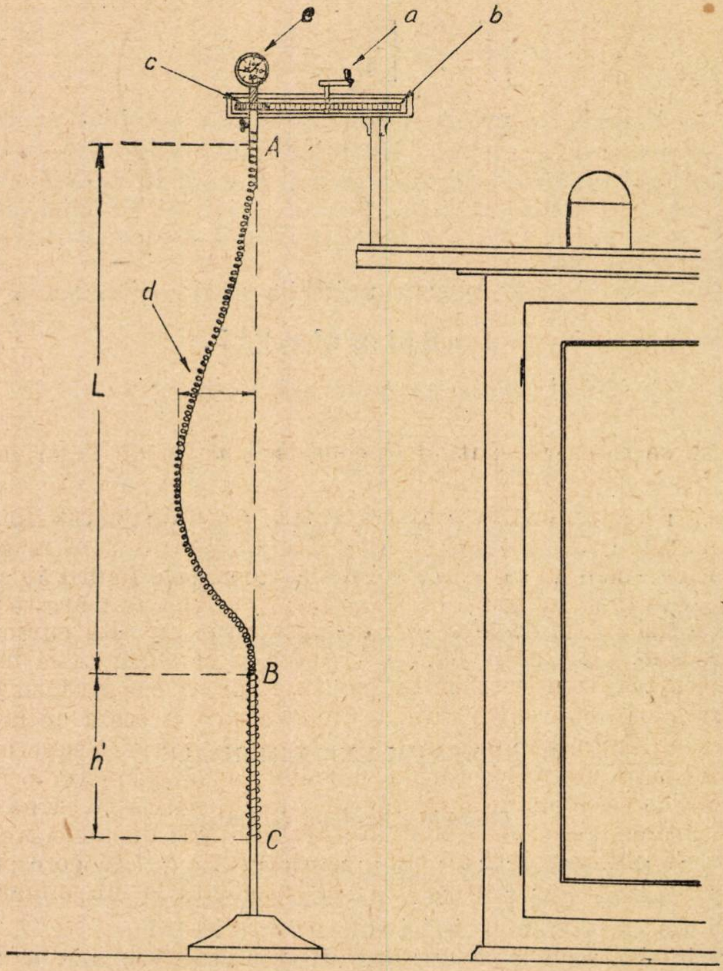


Fig. 2

Ne-am folosit de aparatul schițat în figura 2. Rotația este transmisă de la manivela *a* prin angrenajul *bc* la capătul de sus *A* al modelului, unde-l considerăm încastrat. Turele sînt numerotate de contorul *e*, însă cu ajutorul unui cronometru am măsurat timpul, ceea ce a permis deducerea turației. Capătul de jos al modelului trece pe o vergea, care-i permite să se rotească, putîndu-l considera astfel un lagăr încastrat în punctul *B*.

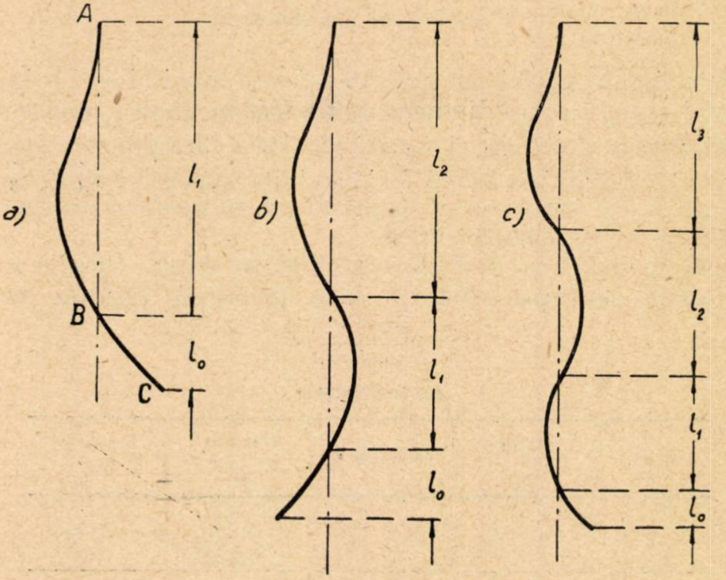


Fig. 3

Pentru a elimina frecările, am fi putut folosi dispoziția din figura 3 *a*, în care extremitatea inferioară este liberă. Mărind turația la anumite valori critice, modelul ia aspectele de la variantele figurii 3*b* și *c* cu $2^1/_2$ bucle, $3^1/_2$ sau mai multe bucle. Lungimea buclelor se mărește pe măsură ce crește forța axială dată de greutatea proprie. Cu alte cuvinte, buclele superioare sînt mai lungi decît cele inferioare. Mărindu-se numărul de bucle se scurtează intervalele dintre turațiile critice, iar forma buclată a modelului devine mai puțin stabilă. Cînd vrem să trecem de la o turație critică, cu un anumit număr de bucle, la o turație critică superioară, cu un număr mai mare de bucle, rotind modelul cu mîna simțim o rezistență; modelul în rotație se opune de a ieși din turația critică pe care a căpătat-o. Pentru a obține o deformare cu un număr mai mare de bucle, trebuie, cînd demarăm, să obținem într-un timp scurt turația critică corespunzătoare, fără a da răgaz ca modelul să intre în rezonanță la un număr inferior de bucle.

Am renunțat de a folosi dispozițiile din figura 3, din cauza dificultății de a măsura cu precizie lungimile buclelor și mai ales pentru că aceste dispoziții ar fi condus la calcule prea laborioase. Ne-am mărginit la folosirea dispoziției din figura 2, unde lungimea pe verticală a buclei rămîne constantă, distanță ce se poate măsura cînd modelul se găsește în repaus.

2. Determinări experimentale

Pentru fiecare model am luat 10 diferite lungimi de buclă L măsurate pe verticală și fiecare din acestea au fost încărcate cu cîte două sarcini de lungime diferită h'_A și h'_B, cărora le-a corespuns turațiile critice n_Ași n_B. Cele 10 lungimi de buclă L și sarcinile respective h'_A și h'_B, trecute în tabloul nr. 3, au fost aceleași pentru ambele modele, pentru ca rezultatele obținute să fie comparabile.

Rotind modelul ca în figura 2, cînd se atinge turația critică, se obține o buclă, care are tendința să-și mărească săgeata maximă d

Tabloul nr. 3

Datele încercărilor

Nr. crt.	Lungimea buclei L m	Încărcarea *)	Lungimea sarcinii h' m	Raportul L/h'
1	1,660	A	0,135	12,30
		B	0,630	2,63
2	1,540	A	0,250	6,16
		B	0,760	2,03
3	1,415	A	0,070	20,21
		B	0,375	3,77
4	1,355	A	0,435	3,11
		B	0,930	1,46
5	1,270	A	0,210	6,05
		B	0,510	2,49
6	1,205	A	0,030	40,17
		B	0,280	4,30
7	1,095	A	0,140	7,82
		B	0,390	2,81
8	1,025	A	0,210	4,88
		B	0,460	2,23
9	0,700	A	0,280	2,5
		B	0,530	1,32
10	0,630	A	0,100	6,30
		B	0,350	1,80

*) A = redusă; B = majorată.

necontenit. Prin creşterea săgeţii se ridică modelul pe vergeaua reazemului inferior, iar frecarea, care se naşte în direcţia vergelei, se adaugă la greutatea qh' a sarcinii.

Forţa de frecare se opune mişcării şi are direcţia mişcării rezultante, dată de rotaţie şi translaţie. Deoarece turaţia este foarte mare faţă de deplasarea modelului în lungul vergelei, componenta forţei de frecare pe direcţia vergelei este foarte mică şi poate fi neglijată.

Rezultatul încercărilor au fost trecute în tablourile nr. 4 şi 5.

3. Verificarea modulului centrifugal

Ţinînd seama de relaţiile (4) şi (15), expresia (5) a modulului centrifugal devine

$$\beta = \frac{\pi^2}{g}\left(\frac{n}{30}\right)^2 zL \tag{29}$$

Tabloul nr. 4

Rezultatele încercărilor cu modelul nr. 5

Nr. crt.	Supleţea $z^1/_3$ m	Încărcarea	Turaţia n rot/min	Modul centrifugal β	Coeficienţii	
					a	b
1	7,44	A B	59,0 72,3	2 646 3 973	10,30	10,60
2	6,90	A B	66,5 80.5	1 503 2 170	10,20	10,90
3	6,35	A B	63,8 74,5	1 634 2 227	10,50	10,80
4	6,07	A B	80,5 96,0	2 187 3 109	10,50	11,25
5	5,87	A B	76,0 87,5	1 504 1 994	10,35	11,80
6	5,40	A B	72,8 84,5	1 224 1 507	10,85	11,90
7	4,91	A B	83,5 95,6	1 003 1 315	11,12	11,60
8	4,59	A B	96,0 109,3	1 018 1 320	11,85	12,60
9	3,14	A B	155 180	577 779	13,65	18,00
10	2,82	A B	170 196	457 607	12,15	16,75

şi făcînd aproximaţia (27) pentru unităţile metru şi secundă se obţine

$$\beta \approx \left(\frac{n}{30}\right)^2 zL. \qquad (30)$$

Pentru valorile L din tabloul nr. 3 s-au determinat valorile z trecute în tablourile nr. 4 şi 5, cu ajutorul relaţiei (4), în care A este dat în tabloul nr. 2.

Dacă se introduc în relaţia (30) turaţiile critice din tablourile nr. 4 şi 5, obţinute prin încercări, pentru lungimile de buclă L şi supleţea la gravitaţie $z^{1/3}$, se obţin valorile β, pe care le considerăm astfel determinate experimental.

Pe aceeaşi diagramă (fig. 4) pe care s-au trasat variaţiile β determinate teoretic în cazul tijei cu lagăre articulate la ambele capete s-au trecut şi încercările în condiţiile experimentale cu lagăre încastrate la ambele capete ale modelului.

Valorile β în funcţie de $z^{1/3}$ obţinute din încercările asupra modelelor nr. 5 şi 7, cu încărcările A şi B, au fost trecute în figura 4.

Tabloul nr. 5

Rezultatele încercărilor cu modelul nr. 7

Nr. crt.	Supleţea $z^{1/3}$ m	Încărcarea	Turaţia n rot/min	Modul centrifugal β	Coeficienţii	
					a	b
1	5,99	A B	62,0 75,3	1 523 2 303	10,90	11,20
2	5,55	A B	71,5 86,0	1 502 2 170	10,95	12,00
3	5,10	A B	70,5 81,5	1 039 1 389	10,70	12,15
4	4,88	A B	87,0 102,8	1 331 1 858	11,50	12,35
5	4,62	A B	85,0 97,0	980 1 277	10,18	13,95
6	4,35	A B	81,5 93,0	709 951	11,50	13,27
7	3,95	A B	97,0 110,0	706 907	10,35	14,35
8	3,75	A B	109,0 122,7	684 867	12,07	14,68
9	2,57	A B	183,0 207,0	466 537	11,50	20,55
10	2,27	A B	212,0 234,0	369 450	13,40	17,40

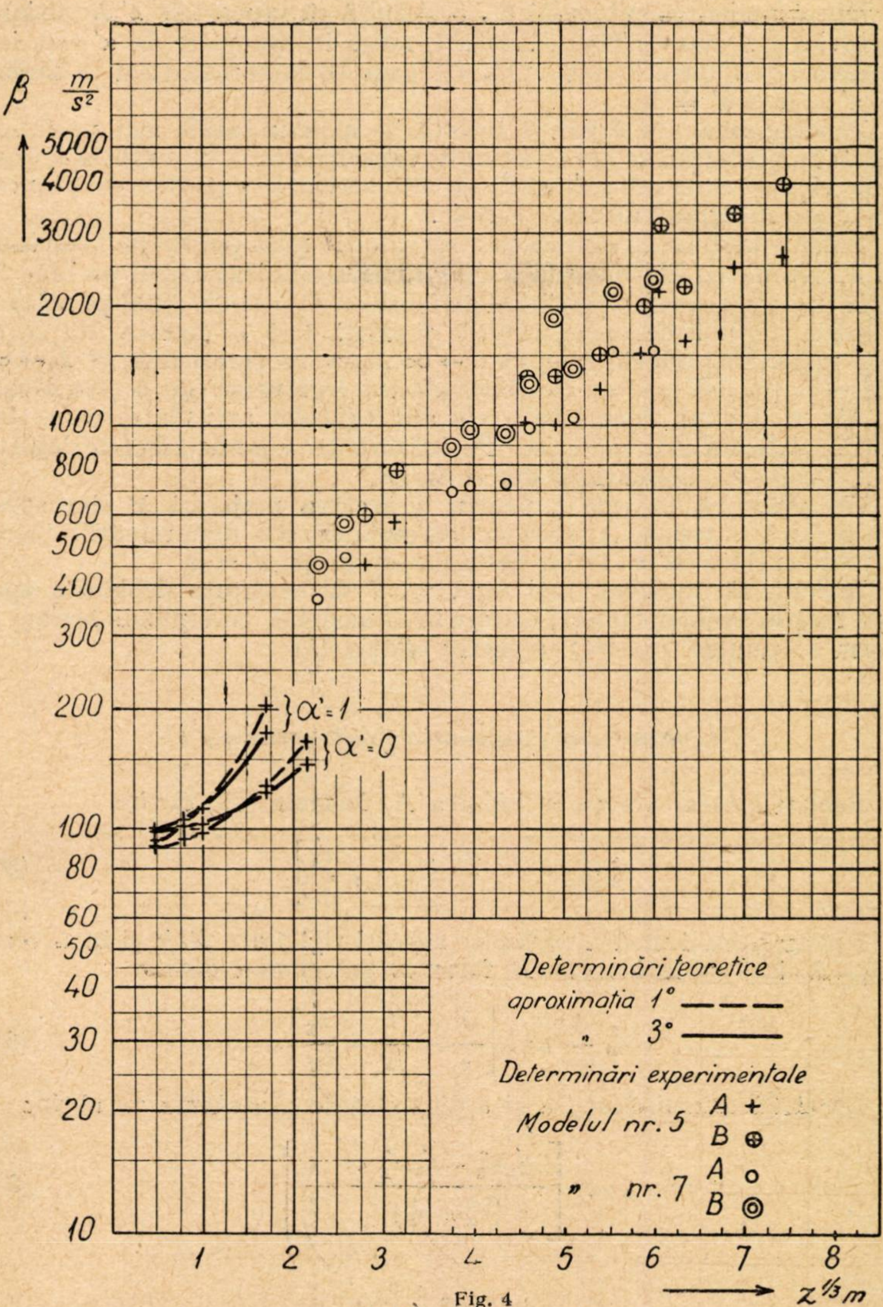


Fig. 4

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI

Din examinarea tabloului nr. 3, rezultă că rapoartele h'/L variază la încărcările A între 1/20,21...1/3,11, adică în apropiere de $\alpha' = 0$, iar la încărcările B între 1/1,46...1/2,49, ceea ce înseamnă cam la mijloc între $\alpha' = 0$ și $\alpha' = 1$.

Pe diagrama din figura 4 încercările experimentale sînt pe intervalul $z^{1/3} > 2$ determinat de condițiile de experimentare, iar curbele deduse teoretic sînt pe intervalul $z^{1/3} \leqslant 2$; cu alte cuvinte, experiențele pornesc de unde am mărginit calculul teoretic.

Extrapolînd, observăm că pentru valorile mari ale lui z, încercările de la extremitatea din dreapta a diagramei, se aliniază destul de bine în direcția curbelor teoretice, verificînd astfel calculul teoretic; însă pe măsură ce z scade, încercările experimentale prezintă însă o deviere din ce în ce mai mare. Într-adevăr, pentru $z \to \infty$, ceea ce corespunde la $L \to \infty$ sau $A \to 0$ (model perfect flexibil), efectul legăturilor de lagăre încastrate ale modelului tinde către cele ale lagărelor articulate, care sînt condițiile determinării teoretice. Pe măsură ce z scade efectele legăturilor deosebite se diferențiază din ce în ce.

Observăm că valorile β pentru încărcarea majorată B sînt superioare încărcării reduse A, ceea ce corespunde și la determinările teoretice, unde curbele $\alpha' = 1$ sînt deasupra curbelor $\alpha' = 0$.

Rezultă că modelul mai rigid nr. 7 dă rezultate deplasate spre stînga, însă la aceeași suplețe, oricare ar fi modelul, corespunde același β, conform calculului teoretic, respectiv relația (5).

4. Determinarea experimentală a coeficienților *a* și *b*

Pentru o încercare cu încărcarea A, formula (28) devine

$$n_{\mathrm{A}}^2 \frac{L}{900} = b\left[\frac{a}{z} + \frac{1}{2} + \frac{h'_{\mathrm{A}}}{L}\right]. \tag{31}$$

Pentru același model, respectiv aceeași rigiditate EI/q și în aceeași condiție L, însă cu încărcarea B, formula precedentă devine

$$n_{\mathrm{B}}^2 \frac{L}{900} = b\left[\frac{a}{z} + \frac{1}{2} + \frac{h'_{\mathrm{B}}}{L}\right]. \tag{32}$$

Explicitînd coeficienții a și b din relațiile precedente se obține

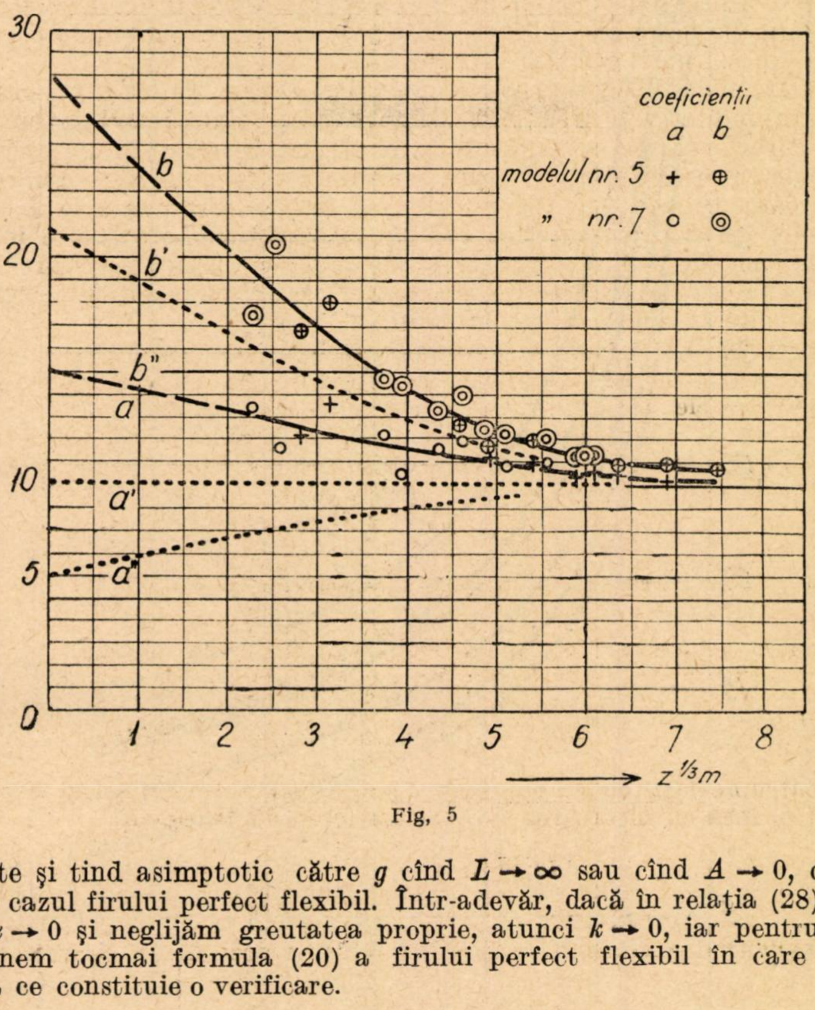
$$a = z\left[\frac{h'_{\mathrm{A}} n_{\mathrm{B}}^2 - h'_{\mathrm{B}} n_{\mathrm{A}}^2}{L\left(n_{\mathrm{A}}^2 - n_{\mathrm{B}}^2\right)} - \frac{1}{2}\right] \tag{33}$$

și

$$b = \frac{n_{\mathrm{A}}^2 - n_{\mathrm{B}}^2}{h'_{\mathrm{A}} - h'_{\mathrm{B}}}\left(\frac{L}{30}\right)^2. \tag{34}$$

Cu aceste formule şi cu ajutorul datelor din tablourile nr. 4 şi 5 s-au calculat coeficienţii *a* şi *b* trecuţi în aceleaşi tablouri şi însemnaţi pe diagrama din figura 5, în funcţie de supleţea $z^{1/3}$.

Observăm că rezultatele experimentale se înscriu pe două curbe reprezentînd variaţia coeficienţilor *a* şi *b* ale căror valori scad cu cît *z* creşte şi tind asimptotic către *g* cînd $L \to \infty$ sau cînd $A \to 0$, ceea ce este cazul firului perfect flexibil. Într-adevăr, dacă în relaţia (28) facem ca $z \to 0$ şi neglijăm greutatea proprie, atunci $k \to 0$, iar pentru $b = g$ obţinem tocmai formula (20) a firului perfect flexibil în care $K = 1$ ceea ce constituie o verificare.



Fig, 5

5. Aplicaţii

Deşi formula (28) a fost dedusă iniţial în primă aproximaţie, dacă se înlocuiesc coeficienţii *a* şi *b* cu valorile lor deduse experimental, urmărind curbele respective din figura 5, această formulă rămîne valabilă pe tot intervalul $0 < z < +\infty$ pentru cazul $C_{2,3}^{1,0}$ al lagărelor încastrate la ambele capete.

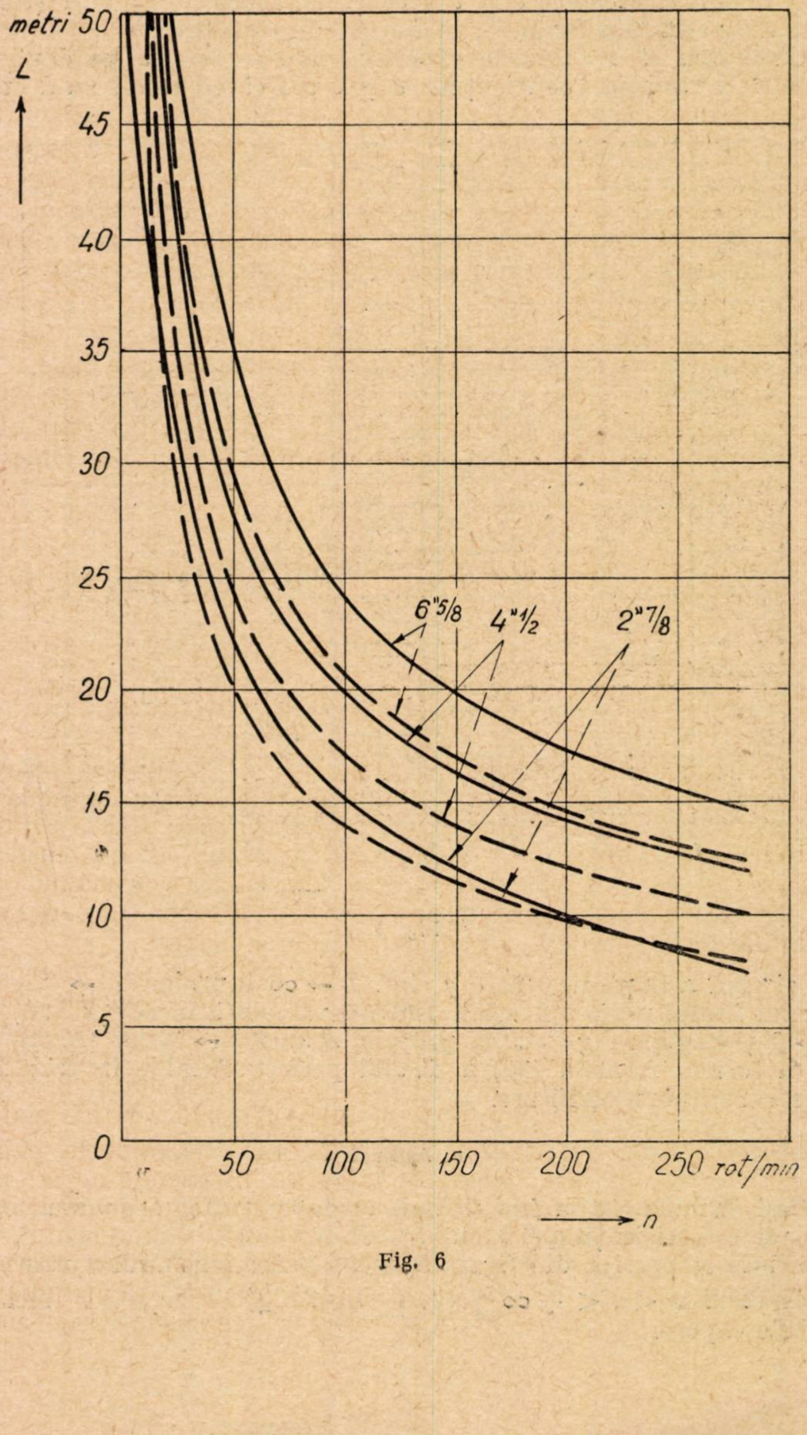

metri
L
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
50
100
150
200
250 rot/min
n
6"5/8
4"1/2
2"7/8

Fig. 6

Comparînd formula (28) cu formulele de primă aproximaţie (24), (25) şi (26) şi avînd în vedere că pentru z foarte mare ne apropiem de cazul firului perfect flexibil, observăm că în cazul unei articulaţii în loc de încastrarea lagărului, curbele a şi b coboară, tinzînd asimptotic către 9,81 cînd $z \to \infty$. Putem deci trasa aproximativ curbele a', b', a'', b'', respectiv pentru cazurile $C_{1.3}^{1,0}$ (extremitatea inferioară în lagăr articulat, cealaltă în lagăr încastrat) şi $C_{1.3}^{2,0}$ (ambele extremităţi în lagăre articulate). Aceste curbe s-au trasat punctat pe diagramă (fig. 5).

În diagrama din figura 6 s-au trasat variaţiile turaţiilor critice pentru prăjinile uzuale, folosindu-se formula (28), în care coeficienţii a şi b sînt luaţi după curbele menţionate. Astfel, s-au trasat prin linie plină variaţiile turaţiilor în cazul $C_{2.3}^{1,0}$, folosind curbele a şi b şi s-au trasat prin linie întreruptă în cazul $C_{1.3}^{1,0}$, folosind curbele a', b'. Pentru $C_{2.3}^{1,0}$ s-a luat $k = 1/2$, iar pentru $C_{1.3}^{1,0}$, $k = 5/12$ şi în ambele cazuri $\alpha' = 0$.

Observăm că pentru turaţiile obişnuite în practică, garnitura de foraj se buclează fără ca sapa să fi atins măcar talpa (fără flambaj) şi că lungimile acestor bucle sînt relativ mici faţă de adîncimea considerabilă a sondelor.

II. REZISTENŢA PRĂJINILOR DE FORAJ SOLICITATE LA INSTABILITATEA DE ROTAŢIE

A. CONSIDERAŢII TEORETICE

1) Tensiunile din prăjini

Reamintim consideraţia că garnitura de prăjini se roteşte sub propria sa greutate fără ca sapa să atingă talpa găurii de sondă.

Prin încovoierea (buclarea) garniturii de foraj (fig. 3), din cauza instabilităţii de rotaţie, se nasc tensiuni în prăjini. Aceste tensiuni cresc pe măsură ce săgeata buclei creşte şi ajung la valorile maxime în momentul cînd bucla atinge peretele găurii de sondă, moment care limitează instabilitatea de rotaţie şi garnitura iese din rezonanţă.

Avînd în vedere observaţiile relative la diagrama din figura 1 şi considerînd diametrul găurii de sondă constant, deşi buclele din partea de jos a garniturii fiind mai scurte au încovoieri mai mari, compunînd solicitarea cu tracţiunea dată de greutatea proprie, partea superioară a garniturii poate fi considerată ca fiind cea mai solicitată. Prin urmare, putem neglija greutatea proprie a prăjinilor folosind relaţiile mai simple stabilite [3] în această consideraţie. Fie cazul $C_{1.3}^{2,0}$ (ambele capete în lagăre articulate şi fără deplasare laterală). Referindu-ne la o buclă, lungimea L devine lungimea buclei, iar capetele devin punctele de inflexiune de la extremităţile buclei.

Procedăm în mod analog ca şi în cazul tensiunilor provocate de flambaj, cînd se ţine seama de greutatea proprie, caz studiat anterior [5] şi care în prima parte se referă la fenomenul mai general de instabilitate, incluzînd instabilitatea de rotație. În cazul de față, neglijînd greutatea proprie, ecuația diferențială a fibrei medie deformată devine cu coeficienți constanți. Soluția folosește funcții trigonometrice și hiperbolice, astfel încît tema capătă în tratare un aspect mai simplu.

Ecuația fibrei medii deformate în cazul lagărului inferior articulat și fără deplasare laterală, dat de relația (2_6) din [3], devine

$$y = c_2 \operatorname{sh} \alpha x + c_4 \sin \beta x\,, \tag{35}$$

în care α și β, să nu se confunde cu expresiile (3) și (5), sînt date de relațiile

$$\alpha = \sqrt{\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + w}}\,, \quad (36) \qquad \beta = \sqrt{-\frac{v}{2} + \sqrt{\frac{v^2}{4} + w}}\,, \quad (37)$$

în care $v = h'/A$, iar w este dat de relația (5).

În starea buclată a tijei (fig. 3) trebuie să avem îndeplinită condiția de instabilitate, dată de (2_8) din [3]

$$\beta L = K\pi. \tag{38}$$

Deoarece capătul de sus este fără deplasare laterală, $y = 0$ pentru $x = L$ și relația (35) devine

$$c_2 \operatorname{sh} \alpha L + c_4 \sin \beta L = 0. \tag{39}$$

Întrucît $\operatorname{sh} \alpha L \neq 0$ și ținînd seama de (38), rezultă că $c_2 = 0$ și relația (35) devine

$$y = c_4 \sin K\pi \frac{x}{L}, \tag{40}$$

Să însemnăm cu f_m săgeata la mijlocul tijei (fig. 7), adică pentru $x = L/2$, relația (40) devine

$$f_m = c_4\ ; \tag{41}$$

și înlocuind din nou în relația (40), se obține

$$y = f_m\, \beta \sin \beta x, \tag{42}$$

în care β este dat de expresia (38).

Derivînd de trei ori succesiv, expresia (42) devine

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_m\, \beta \cos \beta x, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= -\, f_m\, \beta^2 \sin \beta x, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= -\, f_m \beta^3 \cos \beta x. \end{aligned} \tag{43}$$

Pentru $x = L/2$ şi ţinînd seama de (38) relaţiile precedente devin

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{şi} \quad \frac{d^3y}{dx^3} = 0. \tag{44}$$

Redăm expresiile cunoscute din [3]

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \theta ; \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} ; \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{T}{EI}, \tag{45}$$

în care

θ = unghiul fibrei medii deformate faţă de poziţia iniţială,
M = momentul de încovoiere,
T = forţa tăietoare.

Deci la mijlocul grinzii săgeata este maximă, forţa tăietoare este nulă şi în consecinţă momentul este maxim.

Din relaţiile (43) şi (45) se obţine

$$M = EI f_m \beta^2 \sin \beta x. \tag{46}$$

Tensiunea maximă va apare la mijlocul buclei, pentru $x = L/2$, unde expresiile (46) devin

$$M = EI f_m \beta^2. \tag{47}$$

Ţinînd seamă de relaţiile (15) şi (36), expresia (47), devine

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{g M}{\pi^2 EI f_m} \left[\frac{M}{q f_m} + h'\right]. \tag{48}$$

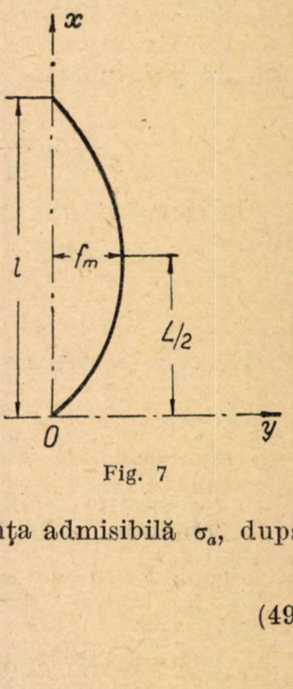


Fig. 7

Tensiunea din fibra cea mai depărtată de cea neutră nu trebuie să depăşească rezistenţa admisibilă σ_a, după cum se ştie, şi deci la limită

$$\sigma_a = M/W = Me_m/I \tag{49}$$

în care

W = modulul de rezistenţă la încovoiere,
e_m = depărtarea maximă de fibra neutră.

Ţinînd seama de relaţia (49) şi de (4), relaţia (48) devine

$$\left(\frac{n}{30}\right)^2 = \frac{g W \sigma_a}{\pi^2 EI f_m} \left[\frac{W \sigma_a}{EI f_m} A + h'\right]. \tag{50}$$

Dacă mărim turaţia peste valoarea n dată de această expresie, înseamnă că şi efortul unitar σ depăşeşte limita admisibilă σ_a, ceea ce constituie un pericol în privinţa rezistenţei prăjinilor. Pentru aceste motive, valoarea dată de formula (50) am denumit-o turație periculoasă.

Să presupunem că inițial axa garniturii de foraj coincide cu axa găurii de sondă.

Dacă păstrăm notațiile din lucrarea citată [5] și anume

$$\eta = \Delta / D \tag{51}$$

în care

Δ = diametrul găurii de sondă,

D = diametrul exterior al prăjinii;

atunci săgeata maximă f_m, în momentul cînd bucla atinge peretele găurii, devine

$$f_m = \frac{\Delta - D}{2} = (\eta - 1)\frac{D}{2}. \tag{52}$$

Ținînd seama de relațiile (49), (52) și de egalitatea

$$e_m = D/2 \tag{53}$$

expresia (50) devine

$$\frac{n}{30} = \frac{4\sigma_a}{(\eta - 1) E D^2} \sqrt{\frac{g}{\pi^2}\left[A + h' \frac{(\eta - 1) E D^2}{4\sigma_a}\right]}. \tag{54}$$

Pentru $h' = 0$ și ținînd seama de aproximația (27), relația (54) devine

$$n = \frac{120\sigma_a}{(\eta - 1) E D^2}\sqrt{A} \tag{55}$$

în care A este exprimat în metri.

2) Solicitarea îmbinării filetate

Ne referim la filetul special al racordărilor.

Admitem, ca în [5], o eficacitate a îmbinării la încovoiere λ, dată de expresia

$$\lambda = \sigma / \bar{\sigma}, \tag{56}$$

în care

σ = efortul unitar din fibra cea mai îndepărtată a prăjinii de axa neutră,

$\bar{\sigma}$ = efortul unitar din fibra cea mai îndepărtată a cepului îmbinării de axa neutră.

Relația (55) devine

$$n = \frac{120\, \lambda\, \sigma_{ci}}{K (\eta - 1) E D^2}\sqrt{A}, \tag{57}$$

în care

σ_{ci} = rezistența de curgere la încovoiere,

K = coeficientul de siguranță.

Folosind metoda lui Penkov [6], coeficientul de siguranță la solicitarea statică K_s este dat de relația

$$K_s = K_1 K_2 K_5 \tag{58}$$

în care

K_1 este coeficientul ce depinde de particularitățile materialului și influența proceselor tehnologice;

K_2 este coeficientul de siguranță propriu-zis care se referă la necunoașterea exactă a forțelor și a formulelor;

K_5 este coeficientul ce reprezintă efectul de concentrare propriu-zis.

Spre deosebire de solicitarea la flambaj studiată anterior [5], apreciem că nu este cazul să luăm în considerație și oboseala la solicitări variabile, deoarece fenomenul de instabilitate la rotație și deci influența forței centrifuge intervine atît timp cît bucla se poate roti.

B. APLICAŢII

Deși prăjinile grele au rigiditatea la gravitație (A) ceva mai mare decît prăjinile de foraj, după cum se poate vedea din tablourile nr. 3 și 4 din [4], și conform relației (55), turații periculoase mai ridicate pentru corpul prăjinii, totuși, în exemplele următoare ne vom referi la acestea, deoarece eficacitatea îmbinării este mai coborîtă și prin urmare și turațiile periculoase pentru îmbinare.

1) Garnitura de prăjină $4''{}^1/_2$ ($D = 0{,}1397$ m) în gaură obișnuită, adică $\eta^* = 1{,}35$, ceea ce înseamnă că $\Delta = \eta^* D = 0{,}189$ m. Datele corespunzătoare se găsesc în tablourile lucrării [5] și anume pentru oțel cu rezistența de rupere la tracțiune $\sigma_{rt} = 90$ kg/mm^2, $\sigma_{ci} = 75$ kg/mm^2, $A = 4\,554$ m^3, $E = 21\,500$ kg/mm^2.

Pentru eficacitatea îmbinării λ, vom considera cazul cel mai defavorabil, cum am procedat și anterior *) [5], ceea ce în realitate nu poate să se întîmple decît cu totul accidental. În acest caz $\lambda = 0{,}43$.

Spre deosebire de lucrarea citată [5], de această dată ne vom mărgini la coeficientul de siguranță mai redus $K_s = 2$, de altfel tot numai ca orientare.

Neluînd în considerare tracțiunea din prăjini datorită greutății proprii și aplicînd formula (57) se obține $n = 1\,105$ rot/min. În acest caz, unde spațiul inclus dintre prăjină și gaură este foarte redus, turațiile obișnuite în foraj rămîn inferioare turației periculoase.

2) Dacă gaura are un diametru mare sau prezintă caverne, fie că se sapă într-o formație, care se surpă, fie că se sapă în sare, care se poate ocni, mai ales prin dizolvarea sării în apa noroiului de foraj, grosimea

---

*) În aceste condiții λ are expresia dată de relația

$$\lambda = (\overline{D}/D)^3 (1 - \bar{\zeta}^4)/(1 - \zeta^4)$$

și nu cum prin omisie a apărut în formula (52) din lucrarea [5]. Valorile λ din tablourile următoare ale lucrării citate sînt calculate corect.

spaţiului inelar devine considerabilă, ceea ce agravează efectul forţei centrifuge.

În acest exemplu ne referim la datele sondei nr. 1 S.R. Floreşti (Prahova), la care săpîndu-se în sare cu sapă de diametru mare ($\Delta = 0{,}55$ m) pentru coloana de suprafaţă, s-au întîmplat o serie de ruperi ale prăjinilor de 5″9/16 cu care se săpa.

Cauza acestor accidente am atribuit-o fenomenului de instabilitate de rotaţie studiat aici, şi chiar cazul acestei sonde a constituit îndemnul iniţial al acestei lucrări.

Chiar dacă prăjinile la care ne referim, ar fi fost mai groase şi anume de 6″5/8, efectul dăunător al forţei centrifuge nu putea fi înlăturat.

În acest caz datele exemplului sînt : $D = 0{,}1969$ m, $A = 9\,820$ m^3, $\eta = 2{,}79$, faţă de $\eta^* = 1{,}40$ al condiţiilor obişnuite, $\lambda = 0{,}33$, celelalte date fiind tot cele din exemplul precedent. Aplicînd formula (57) se obţine turaţia periculoasă $n = 100$ rot/min, pentru diametrul neocnit al găurii. Se vede că în cazul găurii ocnite situaţia este mai defavorabilă. În formula (57) nu s-a ţinut seama de greutatea proprie şi de torsiunea prăjinilor. Adîncimea sondei fiind mică, greutatea garniturii poate fi neglijată, însă efectul torsiunii se combină şi rezultatul devine şi mai defavorabil.

În această împrejurare pentru a evita ruperile s-a redus apăsarea pe sapă şi turaţia, respectiv aburul admis în maşină (momentul de torsiune).

Tabloul nr. 6

Turaţiile periculoase n

η	2″7/8	4″1/2	6″ 5/8
1,25	1 328	1 545	705
1,35	—	1 105	—
1,40	830	965	440
1,50	665	773	353
2	332	400	176
2,79	—	—	98
3	166	193	88
6	67	77	35
11	33	39	18

3) În tabloul nr. 6 şi diagrama din figura 8 s-au trecut variaţia turaţiilor periculoase n în funcţie de raportul η pentru prăjinile 6″5/2, 4″1/2, 2″7/8 şi în condiţiile din exemplele precedente. Pentru prăjinile 2″7/8 s-a avut în vedere $D = 0{,}0953$, $A = 2\,022$ m^3, $\lambda = 0{,}43$, $\eta^* = 1{,}25$. Punctele corespunzătoare la η^* (condiţiile obişnuite de foraj) s-au figurat pe diagramă încercuit. Observăm că în condiţiile obişnuite, turaţiile periculoase sînt mai ridicate decît turaţiile obişnuite în foraj (150 rot/min) mai ales pentru prăjinile subţiri (4″1/2, 2″7/8). Turaţiile periculoase

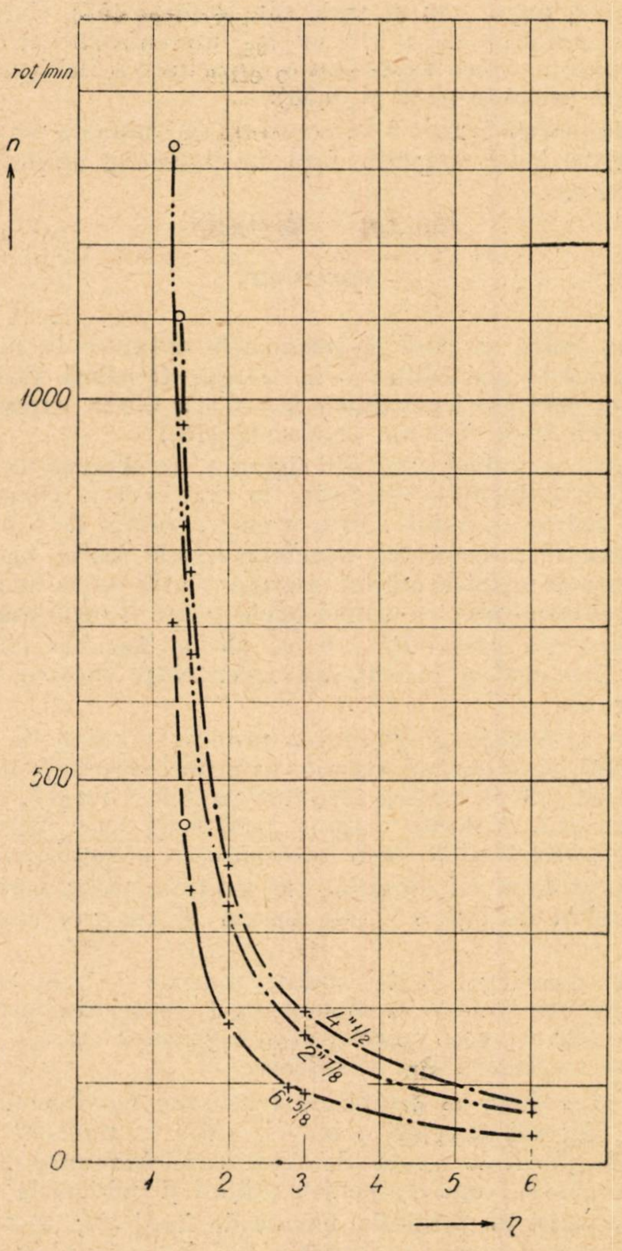


Fig. 8

ale prăjinilor 6"5/8 sînt coborîte datorită rigidității relativ reduse față de diametrul lor, după cum se vede din formula (57). Curba turațiilor critice pentru prăjinile de 4"1/2 nu se intercalează între cele învecinate ca grosime, deoarece acestea au o eficacitate a îmbinării ($\lambda = 0,43$) mai bună decît celelalte (0,32 și 0,33).

Din examinarea figurii 8 se constată că turațiile periculoase apar în găuri de dimensiuni exagerate față de diametrul prăjinii și mai ales în găurile ocnite.

CONCLUZII

În prima parte se verifică rezultatele obținute în lucrările anterioare, referitoare la instabilitatea de rotație. O primă verificare teoretică s-a obținut prin particularizările $h = 0$ și $q = 0$ în expresiile generale (1) și (2), obținîndu-se formula cunoscută (13).

Din examinarea diagramei din figura 1, se observă un număr mare de bucle pentru adîncimile obișnuite la foraj, ceea ce corespunde la turații critice foarte apropiate. Prin urmare, soluția de a evita turațiile critice este practic inoperabilă. Sarcinile axiale foarte mari, cum este greutatea a sute de metri de prăjini, măresc relativ puțin lungimea buclei, astfel încît greutatea proprie a unei bucle poate fi neglijată.

Prin particularizarea $EI = 0$ se obține formula (20) a turației critice pentru firul perfect flexibil, caz extrem către care se tinde cînd z crește nemărginit.

Dacă nu se neglijează greutatea proprie, pornind de la formulele (24), (25) și (26), care ne dau valorile în primă aproximație, se exprimă formula generală (28) în care se introduc coeficienții a și b, care se determină experimental. Valorile acestor coeficienți tind asimptotic către cazul firului perfect flexibil, ceea ce constituie o verificare.

Cu ajutorul formulei empirice (28) s-a trasat diagrama din figura 6, care spre deosebire de figura 1, ține seama și de greutatea proprie a prăjinilor.

Modulul centrifugal β determinat teoretic [2], în cazul general, ale cărui valori sînt trecute în tabloul nr. 1, se verifică prin încercările experimentale (fig. 4), ceea ce constituie o garanție cu atît mai necesară cu cît calculele respective sînt laborioase.

În partea a doua se determină tensiunile maxime din prăjini, în momentul de săgeată maximă a buclei, adică în momentul cînd bucla atinge peretele găurii de sondă. Se obțin astfel formulele (54) și (57) ale turațiilor periculoase respectiv pentru prăjini și îmbinările filetate.

Din aplicațiile la prăjinile uzuale de foraj (fig. 8) se deduc condițiile în care aceste turații periculoase pot fi depășite, în consecință și mijloacele pentru a le evita.

Primită la redacție la 25 februarie 1957.

ЭФФЕКТ ЦЕНТРОБЕЖНОЙ СИЛЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ БУРОВЫХ ШТАНГ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа является продолжением исследований, приведенных в литературе.

В первой части анализируются результаты, полученные при исследовании неустойчивости вращения. Теоретически проверяются результаты, полученные путем исследования частных случаев, приводящие к известным формулам.

Далее анализируется действие осевой нагрузки применительно к обычным комплектам бурения (рис. 1).

Переходя к общему случаю, когда не пренебрегается собственным весом, выявляются результаты предшествующих работ, проверенные опытными испытаниями.

Описываются модели, изготовленные из проволочных пружин, аппарат и опытные определения.

Во второй части определяются напряжения, вызванные неустойчивостью вращения штанг и резьбовых соединений и излагаются применения к обычным буровым штангам.

L'EFFET DE LA FORCE CENTRIFUGE SUR LA RÉSISTANCE DES TIGES DE FORAGE

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie de ce travail, on analyse les résultats obtenus antérieurement au sujet de l'instabilité de rotation. Les résultats théoriques sont vérifiés par des particularisations qui conduisent aux formules déjà connues. On analyse les effets des charges axiales sur les trains de tiges de forage usuelles (fig. 1).

Pour le cas général, où l'on ne néglige pas le poids propre, on applique les résultats des études antérieures, en les vérifiant par des expériences.

On décrit les modèles, confectionnés avec des ressorts en fil d'acier, les appareils et les essais.

On détermine ainsi une formule empirique pour le cas général.

Dans la deuxième partie, on établit les tensions provoquées dans les tiges et les raccords par l'instabilité de rotation et l'on fait des applications aux tiges de forage usuelles.

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, *Sur les contributions aux flambage et vibrations rotatives des tiges verticales lourdes et sveltes.* L'Académie de la R.P.R., Bull. de la Section Scientifique, 1948, t. XXX, nr. 9, p. 527.
2. — *Instabilitatea prăjinilor grele în rotație.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 4, 1956, p. 901.
3. — *Asupra instabilității tijelor verticale grele, svelte și în rotație. Ecuația diferențială a liniei elastice.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 157.
4. — *Despre flambajul tijelor sub acțiunea unei compresiuni date de o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. III, nr. 3—4, 1952, p. 205.
5. — *Rezistența la încovoiere a prăjinilor grele încărcate axial cu o parte din greutatea proprie.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, 1956, p. 697.
6. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistență la solicitări variabile.* Ed. tehnică, București, 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR – ELASTICITATE

ASUPRA CALCULULUI SEMISPAŢIULUI ELASTIC SUB ACŢIUNEA UNOR SARCINI PERIODICE

DE

PETRE P. TEODORESCU

1. Urmărind o rezolvare în eforturi a problemelor spaţiale ale teoriei elasticităţii, am arătat recent [2] cum se poate reprezenta starea de tensiune şi starea de formaţie cu ajutorul a trei funcţii biarmonice.

Eforturile unitare sînt date de relaţiile *)

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + \frac{3\mu}{2(2+\mu)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint \Delta F\,dy\,dz + \\ + \frac{1}{2}\Delta\left(\int\frac{\partial F_y}{\partial z}dy + \int\frac{\partial F_z}{\partial y}dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[F_{xy}(x,y) - F_{zx}(z,x)\right], \tag{1'}$$

iar deplasările, de relaţiile

$$\frac{E}{1+\mu}u = \Delta\int\left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu}F\right)dx - \frac{3}{2+\mu}\frac{\partial F}{\partial x} + 2\overline{F}_{yz}(y,z) + f_{yz}(y,z) + \\ + \frac{E}{1+\mu}\left(-y\,\omega^0_{xy} + z\,\omega^0_{zx} + u_0\right), \tag{2}$$

unde funcţiile F_x, F_y, F_z sînt biarmonice,

$$\Delta\Delta F_x = \Delta\Delta F_y = \Delta\Delta F_z = 0, \tag{3}$$

funcţiile F_{xy}, F_{yz}, F_{zx} sînt armonice,

$$\Delta F_{xy}(x,y) = \Delta F_{yz}(y,z) = \Delta F_{zx}(z,x) = 0, \tag{4}$$

---

*) Celelalte relaţii se obţin prin permutări circulare.

funcțiile $f_{xy}(x, y)$, $f_{yz}(y, z)$, $f_{zx}(z, x)$ sînt integrale particulare ale sistemului

$$\frac{\partial f_{zx}(z, x)}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}(x, y)}{\partial y} =$$

$$= \frac{3\mu}{2+\mu}\,\Delta\left(\int \frac{\partial F}{\partial z}\,dy + \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dz + \iint \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy\,dz\right), \tag{5}$$

funcțiile $\overline{F}_{xy}(x, y)$, $\overline{F}_{yz}(y, z)$, $\overline{F}_{zx}(z, x)$ sînt conjugate armonice ale funcțiilor $F_{xy}(x, y)$, $F_{yz}(y, z)$, $F_{zx}(z, x)$ și am introdus notația

$$3F = F_x + F_y + F_z. \tag{6}$$

Constantele u_0, v_0, w_0, ω^0_{xy}, ω^0_{yz}, ω^0_{zx} sînt deplasările, respectiv rotirile corpului, considerat ca un rigid, și se determină prin condiții de rezemare.

2. Folosind aceste rezultate vom studia problema semispațiului elastic, acționat pe planul de separație de sarcini periodice pe două direcții. Luăm axele de coordonate Ox și Oy în planul de separație și axa Oz înspre interiorul semispațiului. Alegem axele Ox și Oy astfel încît încărcarea să fie simetrică în raport cu aceste axe*); reprezentăm această încărcare sub forma unei serii duble Fourier,

$$p(x, y) = b_0 + \sum_{n,m} b_{nm} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y, \tag{7}$$

unde

$$\alpha_n = \frac{2n\pi}{L_x} = \frac{n\pi}{a}, \qquad \beta_m = \frac{2m\pi}{L_y} = \frac{m\pi}{b} \qquad (n, m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

și am inclus sub semnul sumă toți termenii seriei, inclusiv cei pentru care unul din indici este nul, iar b_0 este încărcarea medie pe un interval dreptunghiular ; $L_x = 2a$ și $L_y = 2b$ sînt lungimile perioadelor pe cele două direcții.

Condițiile pe contur se vor pune sub forma

$$z = 0: \quad \sigma_z = p(x, y), \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0 \tag{9}$$

și vom alege funcții de eforturi care să ne dea eforturi unitare finite pentru $z \to \infty$.

3. Alegem următoarele funcții ale eforturilor, care îndeplinesc condițiile de mai sus :

$$\begin{aligned} F_x &= K_1 x^2 + \sum_{n,m} (A'_{nm} + B'_{nm}\,\gamma_{nm} z) \cos\alpha_n\, x \cos\beta_m y e^{-\gamma_{nm} z}, \\ F_y &= K_2 y^2 + \sum_{n,m} (A''_{nm} + B''_{nm}\,\gamma_{nm}{}^{z}) \cos\alpha_n\, x \cos\beta_m\, y e^{-\gamma_{nm} z}, \\ F_z &= K_3 z^2 + \sum_{n,m} (A'''_{nm} + B'''_{nm}\,\gamma_{nm} z) \cos\alpha_n\, x \cos\beta_m\, y e^{-\gamma_{nm} z}, \end{aligned} \tag{10}$$

---

* Analog putem studia și cazurile de încărcare care au alte proprietăți de simetrie sau antisimetrie.

unde

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_m^2}, \tag{11}$$

precum şi

$$F_{xy}(x, y) = F_{yz}(y, z) = F_{zx}(z, x) = 0. \tag{12}$$

Cu ajutorul formulelor (1) şi (1′) calculăm eforturile unitare

$$\begin{aligned} {}_z &= \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} K_3 - \frac{1}{2+\mu} \sum_{n, m} \gamma_{nm}^2 \{ C_{nm} - 2 [B'_{nm} + B''_{nm} - (1+\mu) B'''_{nm}] + \\ &\quad + (B'_{nm} + B''_{nm} + B'''_{nm}) \gamma_{nm} z\} \cos\alpha_n x \cos\beta_m y e^{-\gamma_{nm} z}, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= - \frac{1}{2+\mu} \sum_{n, m} \frac{\gamma_{nm}}{\alpha_n} \{ \alpha_n^2 C_{nm} - [(3+\mu) \alpha_n^2 + \beta_m^2] B'_{nm} + \\ &\quad + (\mu\beta_m^2 - \alpha_n^2) B''_{nm} + [(1+\mu) \alpha_n^2 + \mu\beta_m^2] B'''_{nm} + \\ &\quad + \alpha_n^2 (B'_{nm} + B''_{nm} + B'''_{nm}) \gamma_{nm} z\} \sin\alpha_n x \cos\beta_m y e^{-\gamma_{nm} z}, \end{aligned} \tag{13'}$$

unde am notat

$$C_{nm} = A'_{nm} + A''_{nm} + A'''_{nm} \tag{14}$$

şi analog pentru τ_{zy}.

Punînd condițiile (9), găsim sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} & C_{nm} - 2(B'_{nm} + B''_{nm}) + 2(1+\mu) B'''_{nm} = -(2+\mu) \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2}, \\ & \alpha_n^2 C_{nm} - [(3+\mu) \alpha_n^2 + 2\beta_m^2] B'_{nm} + (\mu\beta_m^2 - \alpha_n^2) B''_{nm} + \\ & \qquad + [(1+\mu) \alpha_n^2 + \mu\beta_m^2] B'''_{nm} = 0, \\ & \beta_m^2 C_{nm} + (\mu\alpha_n^2 - \beta_m^2) B'_{nm} - [2\alpha_n^2 + (3+\mu) \beta_m^2] B''_{nm} + \\ & \qquad + [\mu\alpha_n^2 + (1+\mu) \beta_m^2] B'''_{nm} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

care ne dă şirurile de coeficienți de determinat. Observăm că, folosind trei funcții biarmonice, obținem mai multe ecuații decît avem nevoie pentru determinarea acestor constante (ceea ce considerăm că este un avantaj al metodei de calcul). Alegem aceste constante astfel ca soluția problemei să fie cît mai simplă. Luăm

$$\begin{aligned} & A'_{nm} = A''_{nm} = 0, \qquad C_{nm} = A'''_{nm} = (1+2\mu)(2+\mu) \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2}, \\ & B'_{nm} = -B''_{nm} = \frac{\mu(\alpha_n^2 - \beta_m^2)}{\gamma_{nm}^4} b_{nm}, \qquad B'''_{nm} = -(2+\mu) \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

De asemenea,

$$K_3 = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)} b_0 . \tag{17}$$

Datorită termenilor care nu intră sub semnul sumă în expresiile funcțiilor de eforturi, găsim deplasarea

$$Eu = \frac{2(1+\mu)}{2+\mu} [K_1 - \mu (K_2 + K_3)], \tag{18}$$

celelalte obținîndu-se prin permutări circulare. Punînd condiția ca deplasările u și v să nu crească indefinit odată cu variabilele x și y (deformația laterală este împiedicată datorită mediului) și ținînd seama de (17), găsim

$$K_1 = K_2 = \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0 . \tag{19}$$

4. Obținem deci funcțiile eforturilor de forma

$$\begin{aligned} F_x - \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0 x^2 &= - F_y + \frac{\mu(2+\mu)}{2(1-\mu^2)} b_0 y^2 = \\ &= \mu z \sum_{n,m} \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\gamma_{n,m}^3} b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \\ F_z = (2+\mu) \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} &(1 + 2\mu - \gamma_{nm} z) b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \end{aligned} \tag{20}$$

ceea ce ne dă eforturile unitare

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} [\alpha_n^2 (1 - \gamma_{nm} z) + 2 \mu \beta_m^2] b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \\ \sigma_y &= \frac{\mu}{1-\mu} b_0 + \sum_{n,m} \frac{1}{\gamma_{nm}^2} [\beta_m^2 (1 - \gamma_{nm} z) + 2 \mu \alpha_n^2] b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \\ \sigma_z &= b_0 + \sum_{n,m} (1 + \gamma_{nm} z) b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= - \sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} (1 - 2\mu - \gamma_{nm} z) b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \\ \tau_{yz} &= \sum_{n,m} \beta_m z b_{nm} \cos \alpha_n x \sin \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z}, \\ \tau_{zx} &= \sum_{n,m} \alpha_n z b_{nm} \sin \alpha_n x \cos \beta_m y \, e^{-\gamma_{nm} z} . \end{aligned} \tag{21'}$$

Am scris relațiile de mai sus astfel ca să iasă în evidență modul în care aceste rezultate reprezintă generalizarea rezultatelor cunoscute din cazul semiplanului elastic [1].

5. Folosind rezultatele (2), putem calcula cu ușurință și componentele deplasărilor, sub forma

$$
\begin{aligned}
&\frac{E}{1+\mu}\left[u-\left(-y\,\omega_{xy}^{0}+z\,\omega_{zx}^{0}+u_{0}\right)\right]= \\
&\qquad=\sum_{n,m}\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^{2}}\left(1-2\,\mu-\gamma_{nm}z\right)b_{nm}\sin\alpha_n x\cos\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}, \\
&\frac{E}{1+\mu}\left[v-\left(-z\,\omega_{yz}^{0}+x\,\omega_{xy}^{0}+v_{0}\right)\right]= \\
&\qquad=\sum_{n,m}\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^{2}}\left(1-2\,\mu-\gamma_{nm}z\right)b_{nm}\cos\alpha_n x\sin\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}, \\
&\frac{E}{1+\mu}\left[w-\left(-x\,\omega_{zx}^{0}+y\,\omega_{yz}^{0}+w_{0}\right)\right]= \\
&\qquad=\frac{1-2\mu}{1-\mu}b_0 z-\sum_{n,m}\frac{1}{\gamma_{nm}}\left[2\left(1-\mu\right)+\gamma_{nm}z\right]b_{nm}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Observăm că din motive de simetrie a deplasărilor în raport cu axele *Ox* și *Oy*, avem

$$u_0=v_0=\omega_{xy}^{0}=\omega_{yz}^{0}=\omega_{zx}^{0}=0 \tag{23}$$

deplasarea w_0 neputînd fi determinată; deci deplasarea w nu poate fi dată decît ca o deplasare relativă față de un alt punct, considerat fix. În definitiv putem scrie

$$
\begin{aligned}
u&=\frac{1+\mu}{E}\sum_{n,m}\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}^{2}}\left(1-2\mu-\gamma_{nm}z\right)b_{nm}\sin\alpha_n x\cos\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}, \\
v&=\frac{1+\mu}{E}\sum_{n,m}\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}^{2}}\left(1-2\mu-\gamma_{nm}z\right)b_{nm}\cos\alpha_n x\sin\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}, \\
w&=w_0+\frac{1+\mu}{E}\left[\frac{1-2\mu}{1-\mu}b_0 z-\sum_{n,m}\frac{1}{\gamma_{nm}}\left[2\left(1-\mu\right)+\right.\right. \\
&\qquad\left.\left.+\gamma_{nm}z\right]b_{nm}\cos\alpha_n x\cos\beta_m y\,e^{-\gamma_{nm}z}\right].
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Observăm, de asemenea, că încărcarea medie b_0 ne dă o deplasare w care devine infinită pentru $z \to \infty$. Acest rezultat se datorește faptului că am efectuat calcule asupra unui corp infinit (ce poate fi considerat ca o prismă de lungime infinită supusă la o solicitare axială simplă). Putem însă admite expresia obținută ca valabilă pentru puncte situate la distanță finită.

6. Convergența seriilor care ne dau eforturile unitare depinde de factorul b_{nm}. Chiar și în cazul unor sarcini concentrate însă, suma seriei se poate aproxima cu un număr mic de termeni, datorită factorului exponențial.

Ținînd seama de (7), eforturile unitare se pot scrie pentru planul de separație sub forma

$$\begin{aligned}
\sigma_x(x, y, 0) &= p(x, y) - b_0 + \\
&+ \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\cdot\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\beta_m}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\,, \\
\sigma_y(x, y, 0) &= p(x, y) - b_0 + \\
&+ \frac{\mu}{1-\mu} b_0 - (1 - 2\mu) \sum_{n,m} \left(\frac{\alpha_n}{\gamma_{nm}}\right)^2 b_{nm} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y\,, \qquad (25) \\
\tau_{xy}(x, y, 0) &= -(1 - 2\mu) \sum_{n,m} \frac{\alpha_n \beta_m}{\gamma_{nm}^2} b_{nm} \sin \alpha_n x \sin \beta_m y\,,
\end{aligned}$$

unde am făcut să intervină diferența dintre încărcarea exterioară și cea medie. Seriile care ne dau deplasările sînt convergente după factorul b_{nm}/γ_{nm}; deci, se pot calcula cu un număr mai mic de termeni decît eforturile unitare.

De asemenea, forma deformată a planului de separație va fi dată de ecuația

$$w(x, y, 0) = w_0 - \frac{2(1-\mu^2)}{E} \sum_{n,m} \frac{b_{nm}}{\gamma_{nm}} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y. \qquad (26)$$

7. Aceste rezultate pot folosi pentru calculul presiunilor (efortul unitar σ_z) și tasărilor (deplasarea w) în interiorul pămîntului, în cazul unor fundații izolate, răspîndite aproximativ uniform, sau în cazul unei rețele de grinzi de fundație, pentru care raportul dintre deschiderile pe o direcție este aproximativ egal cu unitatea. Aproximația care se obține dacă încărcarea nu este riguros periodică se poate stabili de la caz la caz.

8. Pentru a ilustra rezultatele prezentate, vom calcula efortul unitar σ_z în interiorul pămîntului, în cazul unor fundații izolate, răspîndite uniform.

Alegem fundația izolată de formă patrată (latură a), astfel că între axele fundațiilor este distanța 2a pe cele două direcții; raportul dintre suprafața acoperită de fundație și suprafața totală este 1/4, deci se poate considera că avem fundații izolate. Fundațiile sînt încărcate cu o sarcină uniform distribuită p.

Luînd perioadele $L_x = L_y = 2a$, reprezentăm încărcarea sub forma

$$\begin{aligned}
p(x, y) &= -\frac{p}{4} - \frac{p}{\pi} \sum_n (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \cos \alpha_n x - \frac{p}{\pi} \sum_m (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{m} \cos \beta_m y + \\
&+ \frac{4p}{\pi^2} \sum_{n,m} (-1)^{\frac{n+m}{2}} \frac{1}{mn} \cos \alpha_n x \cos \beta_m y \quad (n, m = 1, 3, 5, \ldots). \qquad (27)
\end{aligned}$$

Calculăm pe σ_z la adîncimea a sub centrul unei fundații, deci pentru $x = y = 0$, $z = a$. Observînd că cele două serii simple au aceeași sumă, putem scrie

$$\sigma_z(0, 0, a) = -\frac{p}{4} - \frac{2p}{\pi}\sum_{n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1+n\pi}{n}e^{-n} +$$

$$+\frac{4p}{\pi^2}\sum_{n,m}(-1)^{\frac{m+n}{2}}\frac{1+\pi\sqrt{m^2+n^2}}{mn}e^{-\pi\sqrt{m^2+n^2}} \qquad (m, n = 1, 3, 5, \ldots). \qquad (28)$$

Putem scrie (luînd cîte un singur termen în dezvoltările în serie, cu o eroare mai mică decît $1^0/_{00}$)

$$\sigma_z\,(0, 0, a) = -\,0{,}250\,p - 0{,}114\,p - 0{,}026\,p = -\,0{,}390\,p. \qquad (29)$$

Ajungem la același rezultat dacă aplicăm, de pildă, metoda punctelor de colț — pe o cale mai lungă însă și mai complicată — folosind tabele de presiuni în pămînt sub colțul fundațiilor dreptunghiulare.

Dacă vrem să calculăm presiunea sub colțurile fundației ($x = y = \pm\, a/2$), găsim $\sigma_z = -\,0{,}250\ p$ pentru orice adîncime, ceea ce se poate verifica și prin metoda punctelor de colț.

Remarcăm astfel că presiunea σ_z se poate calcula cu multă ușurință. De asemenea, seria care ne dă tasarea w este și mai rapid convergentă, avînd un termen crescător în plus la numitor.

9. În cazul unor sarcini care acționează local pe planul de separație se poate face un studiu analog, înlocuind seriile Fourier cu integralele corespunzătoare Fourier.

Primită la redacție la 6 martie 1957.

О РАСЧЕТЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Пользуясь общими результатами для пространственной задачи теории упругости, данными раньше [2], автор приводит формулы для напряжений (21), (21′) и перемещений (24) в случае упругого полупространства, находящегося под действием периодических нагрузок.

Даются также результаты для плоскости раздела. Эти результаты имеют применение в задачах, относящихся к фундаментам.

Численный пример расчета показывает, что применяемые ряды являются рядами, быстро сходящимися (получается ошибка меньше $1\,^0/_{00}$ с одним только членом разложения в ряд).

Для местных нагрузок можно пользоваться интегралами Фурье вместо рядов Фурье.

SUR LE CALCUL DU DEMI-ESPACE ÉLASTIQUE SOUS L'ACTION DE CERTAINES CHARGES PÉRIODIQUES

(RÉSUMÉ)

A l'aide des résultats généraux du problème dans l'espace de la théorie de l'élasticité, présentés antérieurement [2], l'auteur donne les formules pour les tensions (21), (21′) et les déplacements (24), dans le cas du demi-espace élastique, actionné par des charges périodiques.

On donne aussi les résultats pour le plan de séparation. Ces résultats ont des applications dans les problèmes de fondation.

Un exemple numérique de calcul prouve que les séries employées ont une convergence rapide (on obtient une erreur inférieure à $1^{0}/_{00}$, avec un seul terme dans le développement en série).

Pour des charges locales, on peut employer des intégrales Fourier au lieu des séries Fourier.

BIBLIOGRAFIE

1. K. Girkmann, *Flächentragweke.* Wien, 1954.
2. P. P. Teodorescu, *Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité.* Comptes Rendus du IX^{-e} Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, 1956.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

REZISTENTA MATERIALELOR – ELASTICITATE

ASUPRA DEFORMĂRII TRANSVERSALE A BARELOR ELASTICE SOLICITATE DE O FORȚĂ AXIALĂ IMPULSIVĂ

DE

E. PROCOPOVICI

În această lucrare este examinată problema comportării dinamice, sub aspectul deformațiilor transversale, a unei bare de secțiune constantă supusă unui șoc de compresiune axială. Utilizîndu-se ipotezele uzuale în teoria încovoierii și în plus faptul că forța axială $P(t)$ se transmite cu viteză infinită în lungul barei se poate ajunge la ecuația diferențială (1), în care se ține seama de efectul inerției de rotație și al forțelor tăietoare *)

$$\left[EI - \frac{R'EI\,P(t)}{GA}\right]\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[\frac{R'EI\rho}{G} + I\rho\right]\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + P(t)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

în care am folosit următoarele notații :

y — deformația transversală a barei, (fig. 1) ;
x — abscisa în lungul barei de lungime ;
t — timpul ;
A — secțiunea transversală a barei ;
I — momentul de inerție al barei ;
ρ — densitatea materialului ;
R' — coeficientul de formă al secțiunii A ;
E, G — modulele de elasticitate ale materialului barei. Vom rezolva ecuația (1) în cazul unei bare dublu articulate (fig. 1) pentru care condițiile la limită au forma

$$\left.\begin{aligned} y(0,t) &= 0, \qquad y''_{xx}(0,t) = 0, \\ y(L,t) &= 0, \qquad y''_{xx}(L,t) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

---

*) Pentru deducerea ecuației, vezi [1].

iar condițiile inițiale le alegem astfel ca

$$y\,(x,\,0) = y_0, \qquad (3)$$

$$y'_t\,(x,\,0) = 0.$$

Deformația inițială a barei y_0 o presupunem cunoscută și exprimată sub forma unei serii Fourier

$$y_0 = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \sin\frac{m\,\pi\,x}{L}\cdot \qquad (4)$$

Operîndu-se o transformare Fourier între limite finite *)

$$\overline{y} = \int_0^L y\,(x,\,t)\sin\frac{n\,\pi\,x}{L}\,dx$$

atît asupra ecuației (1), cît și asupra condițiilor (3), se obține ecuația diferențială a funcției transformate

$$\overline{y}'' + \gamma_n^2\,(P_n - P\,(t))\,\overline{y} = 0 \qquad (5)$$

cu condițiile

$$\overline{y}\,(0) = f_n, \qquad (6)$$

$$\overline{y}'(0) = 0,$$

în care am notat

$$P_n = \frac{P_n^\star}{\beta/\lambda_n^2 + 1}\,;$$

$$\gamma_n^2 = \frac{\beta/\lambda_n^2 + 1}{(\beta+1)/\lambda_n^2 + 1}\,\gamma_n^{\star 2}, \qquad (7)$$

unde

$$\gamma_n^\star = \frac{\pi^2\,n^2}{\rho\,A\,L^2}\,;\quad P_n^\star = E\,I\,\frac{\pi^2\,n^2}{L^2}\,;$$

$$\beta = R'E/G\,;\ \lambda_n = \frac{L^2\,A^2}{n^2\,\pi^2 I^2}\cdot \qquad (8)$$

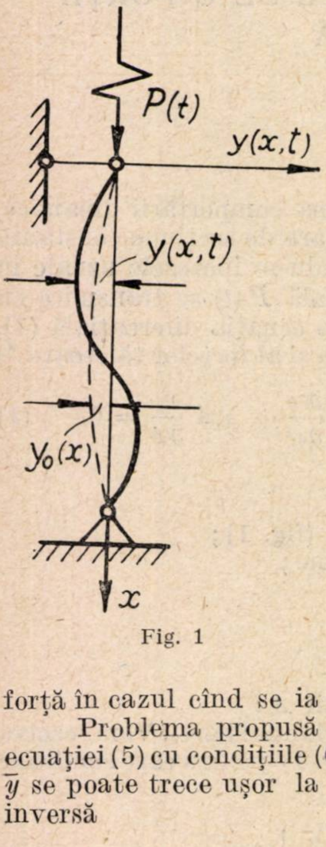


Fig. 1

În notațiile (5) și (8) se recunoaște ușor P_n^* ca fiind forța critică a lui Euler, iar P_n aceeași forță în cazul cînd se ia în considerare efectul forțelor tăietoare.

Problema propusă spre rezolvare se reduce așadar la soluționarea ecuației (5) cu condițiile (6) pentru $P\,(t)$ cunoscut. O dată cunoscută soluția $\overline{y}$ se poate trece ușor la soluția ecuației (1) folosindu-se transformarea inversă

$$y = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty} \overline{y}\sin\frac{\pi\,n\,x}{L}\cdot \qquad (9)$$

---

*) Vezi pentru detalii [2].

Într-o altă lucrare s-a obținut soluția exactă a problemei pentru cîteva cazuri simple ale funcției $P(t)$ *). Vom încerca în cele ce urmează să obținem soluții aproximative pentru cazuri mai complicate ale funcției $P(t)$ **). Examinîndu-se ecuația (5), se vede că această ecuație schimbă natura soluțiilor în jurul valorii $t = t_1$ care anulează coeficientul ecuației. Se poate arăta că în domeniul în care $P(t) > P_n$ soluția ecuației (5) crește rapid cu timpul, iar acolo unde $P(t) < P_n$ aceasta rămîne mărginită cînd $t \to \infty$.

Despre funcția $P(t)$ vom presupune deocamdată că satisface condițiile lui Dirichlet. Alte condiții restrictive vor fi introduse mai tîrziu. Fie deci o funcție $P(t)$ care descrie șocul, ca în figura 2. Este evident faptul că pentru $t \to \infty$ și $P(t) \to 0$ soluția ecuației (5) trebuie să tindă către soluția asimptotică.

$$\overline{y}^{\infty} = C_{+} e^{i\gamma_n P_n^{\frac{1}{2}} t} + C_{-} e^{i\gamma_n P_n^{\frac{1}{2}} t},$$

care reprezintă o vibrație. Este vibrația ce o capătă bara după acțiunea șocului. Amplitudinea acestei vibrații poate constitui o indicație asupra comportării barei din punctul de vedere al rezistenței la șoc.

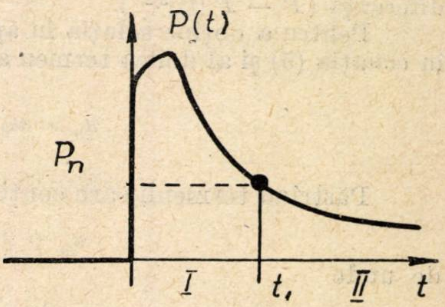


Fig. 2

Vom căuta deci soluția ecuației (5) sub forma

$$\overline{y} = e^{i\gamma_n u_n}, \tag{10}$$

în care u_n este o funcție de t. Introducînd (10) în (5), se obține condiția care va determina pe u_n sub forma

$$i\,\gamma_n u_n'' - \gamma_n^2 (u_n')^2 + \gamma_n^2 (P_n - P(t)) = 0. \tag{11}$$

Soluția acestei ecuații o vom căuta sub forma unei dezvoltări după puterile lui i/γ_n care este considerat ca parametru mic în ecuația (11)

$$u_n = u_0 + \frac{i}{\gamma_n} u_1 + \left(\frac{i}{\gamma_n}\right)^2 u_2 + \left(\frac{i}{\gamma_n}\right)^3 u_3 + \ldots \tag{12}$$

În aproximația de nul din (11) și (12) se obține

$$i\,\gamma_n u_0'' - \gamma_n u_0'^2 + \gamma_n^2 \delta_n^2 = 0, \text{ în care } \delta_n = (P_n - P(t))^{\frac{1}{2}}.$$

Neglijînd $i\,\gamma_n u_0''$ față de $\gamma_n^2 u_0'^2$, se găsește

$$u_0' = \delta_n. \tag{13}$$

---

*) Vezi [1].

**) O soluție bazată pe dezvoltarea în serii de puteri a fost dată în lucrarea [3].

Neglijarea termenului $i\gamma_n u_0''$ presupune ca $\frac{i}{\gamma_n}\frac{u_0''}{u_0'^2} \ll 1$, adică

$$\frac{i}{2\gamma_n}\frac{P'(t)}{[P_n - P(t)]^{3/2}} \ll 1. \tag{13'}$$

Condiția (13′) cere ca γ_n să fie cît mai mare, diferența $(P_n - P(t))$ de asemenea, iar panta curbei $P(t)$ pentru $t = t_1$ să nu fie prea mare în raport cu diferența $(P - P(t))^{3/2}$*).

Pentru a obține soluția în aproximația de ordinul întîi se introduce în ecuația (5) și al doilea termen al seriei (12).

$$u_n = u_0 + \frac{i}{\gamma_n} u_1 .$$

Păstrînd termenii care conțin pe γ_n la puterea întîia se obține

$$u_0'' + 2u_0' u_1' = 0,$$

de unde

$$u_1 = \ln u_0'^{-\frac{1}{2}} = \ln \delta_n^{-\frac{1}{2}} .$$

Soluția ecuației (5) se poate scrie în acest caz sub forma

$$\bar{y} = \frac{1}{\sqrt{\delta_n}}\left\{ C_+ e^{i\gamma_n\int\delta_n dt} + C_- e^{-i\gamma_n\int\delta_n dt} \right\}. \tag{14}$$

Procedînd în mod analog se pot calcula și ceilalți termeni ai seriei (12) și se poate obține soluția ecuației (5) în aproximații de ordin superior**). În cele ce urmează ne vom opri la aproximația de ordinul întîi adică la soluția (14). Domeniul de variație al funcției $P(t)$ poate fi împărțit în două.

Domeniul I, în care $P(t) > P_n$ și în care notăm

$$\delta_{nI} = (P(t) - P_n)^{\frac{1}{2}}$$

și domeniul II, în care $P(t) < P_n$ și în care notăm

$$\delta_{nII} = (P_n - P(t))^{\frac{1}{2}} .$$

Deoarece $\delta_{nI} = i\delta_{nII}$, soluțiile în cele două domenii vor fi respectiv

$$\bar{y}_I = (\delta_{nI})^{-\frac{1}{2}}\left\{ C_+ e^{\gamma_n\int_{t_0}^{t_1}\delta_{nI}\,dt} + C_- e^{-\gamma_n\int_{t_0}^{t_1}\delta_{nI}\,dt} \right\}, \tag{15}$$

$$\bar{y}_{II} = (\delta_{nII})^{-\frac{1}{2}}\left\{ C_+' e^{i\gamma_n\int_{t_1}^{t}\delta_{nII}\,dt} + C_-' e^{-i\gamma_n\int_{t_1}^{t}\delta_{nII}\,dt} \right\} \tag{16}$$

---

*) Amănunte asupra erorii vezi [4].

**) Vezi [5].

Aceste două soluții trebuie racordate în punctul $t = t_1$. Constantele C'_+, C'_- se determină în funcție de constantele $C_+ \, C_-$.

Punîndu-se condiția ca funcțiile $\overline{y}_{\mathrm{I}}$ și $\overline{y}_{\mathrm{II}}$ să se egaleze prin valorile lor asimptotice *), în punctul $t = t_1$, vom avea

$$\frac{C_+}{\delta_{n\mathrm{I}}^{1/2}} e^{\gamma_n \int_t^{t_1} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt} \longrightarrow \frac{C_+}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} \cos\left[\gamma_n \int_t^{t_1} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\frac{C_-}{\delta_{n\mathrm{I}}^{1/2}} e^{-\gamma_n \int_t^{t_1} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt} \longrightarrow \frac{2C_-}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} \cos\left[\gamma_n \int_t^{t_1} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt - \frac{\pi}{4}\right].$$

Așadar

$$\frac{C_+}{\delta_{n\mathrm{I}}^{1/2}} e^{-\gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \delta_{nI} dt - \gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt} = \frac{C_+}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} e^{-\gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt} \cdot \cos\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt + \frac{\pi}{4}\right],$$

$$\frac{C_-}{\delta_{n\mathrm{I}}^{1/2}} e^{\gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt + \gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt} = \frac{2\,C_-}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} e^{\gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt} \cdot \cos\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt - \frac{\pi}{4}\right].$$

Soluția în domeniul II poate fi scrisă deci sub forma

$$\overline{y}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} \left\{ C_+ e^{-\sigma_n} \cos\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt + \frac{\pi}{4}\right] + 2C e^{\sigma_n} \cos\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt - \frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

sau

$$\overline{y}_{\mathrm{II}} = \frac{1}{\delta_{n\mathrm{II}}^{1/2}} \left\{ C_+ e^{-\sigma_n} \cos\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}} dt + \frac{\pi}{4}\right] + 2C e^{\sigma_n} \sin\left[\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\mathrm{II}}\, dt + \frac{\pi}{4}\right]\right\}, \quad (17)$$

în care am notat cu σ_n expresia

$$\sigma_n = \gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \delta_{n\mathrm{I}}\, dt = \gamma_n \int_{t_0}^{t_1} (P(t) - P_n))^{\frac{1}{2}}\, dt,$$

care poate fi destul de ușor evaluată.

Soluția (17) descrie vibrațiile ce se stabilesc după aplicarea șocului. Constantele C_+ și C_- se pot ușor determina din condițiile (6). Astfel pentru $t_0 = 0$, soluția $\overline{y}_{\mathrm{I}}$ furnizează

$$\delta_{n\mathrm{I}}(0)\, f_n = C_+ + C_-,$$

$$0 = C_+ - C_-,$$

de unde

$$C_- = C_+ = \frac{1}{2}\, \delta_{n\mathrm{I}}^{1/2}(0)\, f_n .$$

---

*) Aceasta este necesar deoarece soluțiile (15) și (16) prezintă singularități pentru $t = t_1$. Pentru amănunte vezi [5].

Introducînd C_+ și C_- se găsește

$$\overline{y}_{\text{II}} = \frac{\sqrt{2}}{2} f_n \sqrt{\frac{\delta_{n\text{I}}(0)}{\delta_{n\text{II}}(t)}} \left\{ \left(\frac{1}{2} e^{-\sigma_n} + e^{\sigma_n} \right) \cos \gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\text{II}}\, dt - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{2} e^{-\sigma_n} - e^{\sigma_n} \right) \sin \gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\text{II}}\, dt \right\} \qquad (18)$$

sau, punîndu-se în evidență faza și amplitudinea oscilațiilor,

$$\overline{y}_{\text{II}} = \underbrace{f_n \sqrt{\frac{5\ \delta_{n\text{I}}(0)}{4\ \delta_{n\text{II}}(t)} \operatorname{ch} 2\, \sigma_n}}_{\text{amplitudinea}} \cdot \cos \left\{ \underbrace{\gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\text{II}}\, dt + \operatorname{arc\,tg} 2\, e^{2\sigma_n}}_{\text{faza}} \right\}. \qquad (19)$$

Pe baza rezultatului (19) și a relației (9) se poate scrie, bineînțeles ținîndu-se din nou seama de indicii n, soluția problemei propuse

$$y\,(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{8} f_n \sqrt{\frac{5\ \delta_{n\text{I}}\ (0)}{4\ \delta_{n\text{II}}\ (t)} \operatorname{ch} 2\, \sigma_n} \cdot \cos \left\{ \gamma_n \int_{t_1}^{t} \delta_{n\text{II}}\, dt + \operatorname{arc\,tg} 2\, e^{2\sigma_n} \right\} \sin \frac{\pi\, n x}{L} \cdot \qquad (20)$$

Din cele de mai sus se vede că atît amplitudinea cît și faza diferitelor forme depinde în mod esențial de mărimea σ_n

$$\sigma_n = \gamma_n \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{P\,(t) - P_n}\, dt,$$

care de asemenea caracterizează distribuția energiei căpătate de bară pe diferitele forme de vibrație.

Primită la redacție la 29 aprilie 1957.

О ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ОСЕВОЙ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В этой работе использован приближенный метод для нахождения закона движения стержня, подвергнутого осевой импульсной нагрузке.

SUR LA DÉFORMATOIN TRANSVERSALE DES BARRES ÉLASTIQUES, SOLLICITÉES PAR UNE FORCE AXIALE IMPULSIVE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on utilise une méthode approximative pour trouver la loi du mouvement d'une barre ayant subi une sollicitation axiale impulsive.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Procopovici, *Asupra deformării transversale a barelor solicitate prin șoc axial.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, 1957, p. 141.
2. I. Snedon, *Preobrazovanie Furie.* Moscova, 1955.
3. S. Răutu și Fl. Dincă, *Comportarea barelor drepte supuse la șoc axial.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, 1957, p. 135.
4. Morse Ph. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics.* New York, 1956, vol. I și II.
5. L. Landau i E. Lifșiț, *Kvantovaia Mehanika.* Moscova, 1948.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

REZISTENŢA MATERIALELOR — ELASTICITATE

MASE PLASTICE PE BAZĂ DE FURFUROL ŞI DERIVAŢI

V. INFLUENŢA TRATAMENTULUI TERMIC ASUPRA COMPORTĂRII FAŢĂ DE APĂ ŞI ULEI A TEXTOLITULUI CU RĂŞINĂ FURFUROL-FENOLICĂ

DE

V. CALCAN, I. IONESCU şi N. GOLDENBERG

1. UNELE CONSIDERAŢII TEORETICE

Comportarea materialelor plastice faţă de apă şi ulei a constituit pînă astăzi obiectul mai multor lucrări de specialitate, care aveau ca scop fie cunoaşterea şi generalizarea fenomenelor, fie numai un interes practic aplicativ. Aceste lucrări au identificat ca principali determinanţi ai comportării materialelor plastice faţă de apă şi ulei următorii factori [1], [2], [3], [4], [5];

— polaritatea răşinii şi a mediului de absorbţie,
— porozitatea răşinii (forţele capilare),
— caracterul adsorbant şi absorbant al materialului de umplutură,
— mărimea suprafeţei de contact material plastic-mediu,
— caracterul suprafeţei de absorbţie (prelucrată sau neprelucrată),
— proporţia răşină-umplutură.

Aceste lucrări au studiat acest proces în diferite condiţii şi pe diferite materiale, astfel că este foarte greu de apreciat în mod unitar rezultatele lor.

Factorii mai sus-amintiţi sînt valabili pentru explicarea comportării faţă de apă şi ulei a majorităţii maselor plastice, dar mai sînt şi alţi factori particulari materialelor stratificate şi anume :

— discontinuitatea umpluturii într-un sistem avînd axe de simetrie ordonate.

— existenţa unor tensiuni interne de asemenea dirijate după axe de simetrie.

Cercetarea comportării materialelor plastice față de apă și ulei se poate face fie prin determinarea curbei de saturație [6], [7], fie prin compararea mărimii absorbției în timpi determinați.

Lucrarea de față se ocupă cu identificarea condițiilor de tratament termic, care determină o cît mai mare stabilitate față de apă și ulei a materialelor plastice tip textolit cu rășină furfurol-fenolică.

Alegerea stratificatelor cu rășină furfurol-fenolică ca obiect de cercetare, a rezultat în primul rînd dintr-un interes practic — cunoașterea condițiilor de utilizare a acestora [9] — cît și dintr-un interes teoretic, legat de particularitățile acestei rășini. Astfel, hidrofilitatea formaldehidei utilizată la rășinele fenolice comune este mult mai mare decît a furfurolului. Furfurolul, spre deosebire de formaldehidă, este în oarecare măsură lipofil. În plus, în timp ce structura rășinii formaldehid-fenolică cuprinde un singur fel de inele (cele benzenice), cea furfurol-fenolică cuprinde și inelul furanic.

Pentru identifisarea condițiilor de tratament termic a fost menținută constantă durata pentru trei temperaturi de absorbție.

În cele ce urmează se va defini prin *capacitate de absorbție* totalitatea modificărilor produse asupra dimensiunilor și greutății materialului plastic sub acțiunea mediului de absorbție, indiferent dacă valorile modificărilor sînt pozitive sau negative, comparativ cu valorile inițiale.

Alegerea tratamentului termic, ca mijloc posibil de reducere a capacității de absorbție, s-a bazat pe *următoarea ipoteză*:

Sub acțiunea tratamentului termic, policondensarea rășinii continuă, ceea ce are ca efect reducerea numărului de grupe polare și deci a hidrofilității [1]. Sub aceeași acțiune se produce și diminuarea apei și a volatilelor capabile să atragă și să rețină apa [8]. În general, aceste volatile sînt componentele rășinii neintrate în reacție.

O a doua ipoteză folosită este legată de anizotropia materialului, care depinde de țesătura folosită. Ea constă în aceea că acționînd asupra țesăturii folosite, sau alegînd diferite țesături, se poate modifica anizotropia.

În sfîrșit, *o a treia ipoteză* a fost comportarea diferită a materialului la diferite temperaturi ale mediului de absorbție care influențează simultan asupra absorbției materialului si a modului de comportare a mediului.

După I. F. Kanaveț și V. A. Șelion [8] și A. Kovacs [1], mărimea capacității de absorbție este o valoare relativă, în funcție de echilibrul dinamic de vapori între apa conținută de material și mediu. Acest echilibru este la rîndul său o variabilă, funcție de temperatură. Unele indicații de literatură [1], [4], [5], [7] arată că există și o oarecare solubilitate a rășinii.

2. PARTEA EXPERIMENTALĂ

Materialul stratificat, în grosime de aproximativ 10 mm, a fost tăiat în epruvete de 50 × 50 mm, notîndu-se direcția urzelii și a bătelii.

Epruvetele cîntărite cu o precizie de 0,002 g au fost măsurate cu o toleranță de 0,01 mm, fiecare latură fiind măsurată în trei puncte și făcîndu-se media lor.

După cîntărire și măsurare, epruvetele (probele), așezate pe suporți din același material, au fost supuse tratamentului termic în termostate, fiind apoi lăsate să se răcească 24 de ore în exsicator. După răcire au fost din nou măsurate și cîntărite și introduse în mediul de absorbție pe o durată de 24 de ore. După aceea au fost scoase, șterse, cîntărite și măsurate. Pe baza lucrării noastre anterioare [9], cît și a unor date din literatură, prin care a fost stabilit domeniul tratamentului termic care prezenta un interes practic, s-au ales următoarele condiții experimentale :

Temperaturi : 60, 90, 110, 130 °C
Intervale : 12 24 48 72 ore

Pentru fiecare caz s-au folosit trei probe.

Comportarea față de apă și ulei s-a determinat la următoarele temperaturi : 23—25 °C, 50 ± 2 °C și 100 °C, la presiunea atmosferică.

Deoarece compoziția chimică a apei influențează procesul de absorbție [6], s-a folosit apă distilată nefiartă și un ulei mineral grupa 2004, cu următoarele caracteristici (STAS 811—54) :

Caracteristici	Valori
Densitate relativă la 20°C, $\left(d_4^{20}\right)$, maximum	0,910
Viscozitate la 20°C, °E, maximum	155
Aciditate minerală	lipsă
Alcalinitate	lipsă
Aciditate organică, mg KOH/g ulei, maximum	0,03

Rezultatele au fost exprimate procentual față de valorile materialului netratat termic, folosind următoarele notații :

U = lungimea urzelii înainte de tratamentul termic, în mm ;
B = lungimea bătelii înainte de tratamentul termic, în mm ;
H = grosimea probei înainte de tratamentul termic, în mm ;
G = greutatea probei înainte de tratamentul termic, în g ;
U' = lungimea urzelii după tratamentul termic, în mm ;
B' = lungimea bătelii după tratamentul termic, în mm ;
H' = grosimea probei după tratamentul termic, în mm ;
G' = greutatea probei după tratamentul termic, în g ;
U'' = lungimea urzelii după absorbție, în mm ;
B'' = lungimea bătelii după absorbție, în mm ;
H'' = grosimea probei după absorbție, în mm ;
G'' = greutatea probei după absorbție, în g.

Modificările produse de tratamentul termic sînt exprimate de relațiile

$$u' = \frac{U' - U}{U} 100 ; \quad b = \frac{B' - B}{B} 100 ; \quad h' = \frac{H' - H}{H} 100 ; \quad g' = \frac{G' - G}{G} 100,$$

iar efectul absorbției prin relațiile

$$u'' = \frac{U'' - U}{U} 100 \, ; \quad b'' = \frac{B'' - B}{B} 100 \, ; \quad h'' = \frac{H'' - H}{H} 100 \, ; \quad g'' = \frac{G'' - G}{G} 100.$$

Procentele au fost exprimate astfel, indiferent dacă ele reprezentau valori negative sau pozitive față de valorile inițiale ale materialului netratat termic.

3. MATERIALUL EXPERIMENTAT

Studiul a fost efectuat pe materiale stratificate, fabricate din aceeași rășină furfurol-fenolică, în condiții identice, folosindu-se însă trei sortimente de pînză deosebite și anume:

1) pînză albită normală,
2) pînză albită neîntinsă la ramă,
3) pînză albită cu urzeala și băteala din același fir.

Caracteristicile acestor țesături sînt redate în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

Caracteristica	Sortiment pînză	Valori
Sarcina la rupere pe urzeală, kg	1	33,8
	2	35,6
	3	36,0
Sarcina la rupere pe băteală, kg	1	30,0
	2	33,5
	3	48,0
Alungirea la rupere pe urzeală, %	1	12,0
	2	13,0
	3	11,5
Alungire la rupere pe băteală, %	1	16,8
	2	20,7
	3	20,6
Greutatea pînzei pe m² (pînză condiționată la 22–23°C și 65 % umiditate relativă), g/m²	1	136,0
	2	154,6
	3	162,3
Rezistenta la rupere (K. O.), kg/cm	1	6,13
	2	6,10
	3	6,40
Deformația, %	1	10,67
	2	11,37
	3	9,72
Rezistența la frecare, nr. de cicluri	1	67,3
	2	119,0
	3	143,5
Permeabilitatea la 100 l aer, s	1	67,9
	2	82,9
	3	228,0

Unele caracteristici şi rezistenţe mecanice ale materialului stratificat obţinut din ele sînt prezentate în tabloul nr. 2.

Tabloul nr. 2 *)

Sortiment pînză	Rezistenţă la compresiune kg/cm²		Rezistenţă la încovoiere statică kg/cm²		Rezistenţă la încovoiere dinamică kg cm/cm²		Indice de despicare kg
	⊥	ll	⊥	ll	⊥	ll	
1	3 350	1 610	1 565	1 610	50	45,5	342
	3 420 – 3 320	1 660 – 1 565	1 633 – 1 510	1 685 – 1 475	58,4 – 44,5	48,7 – 42,8	
2	3 380	1 430	1 525	1 508	47	45	352
	3 420 – 3 310	1 525 – 1 380	1 625 – 1 450	1 530 – 1 470	54 – 41,1	47,8 – 41,4	
3	3 240	1 580	1 430	1 470	45	41	350
	3 260 – 3 160	1 610 – 1 555	1 487 – 1 385	1 483 – 1 460	48,1 – 43	45,4 – 35,2	

*) Toate probele au fost tăiate numai după direcţia urzelii. Valorile de deasupra liniei reprezintă media determinărilor.

De remarcat este faptul că materialul textil 2 s-a întins la presare foarte mult (circa 10 %), ceea ce cu siguranţă a influenţat asupra comportării sale ulterioare.

4. PIERDEREA ÎN GREUTATE A MATERIALULUI SUB ACŢIUNEA TRATAMENTULUI TERMIC

Sub influenţa tratamentului termic, greutatea materialului scade (fig. 1). Deoarece cele 3 sorturi de materiale au valori foarte apropiate, a fost trasată curba medie pentru fiecare interval de timp. Analizînd diagramele se constată că :

Pierderea în greutate se accentuează pe măsură ce creşte temperatura şi durata tratamentului termic. Alura curbelor (asemănătoare între ele), este în prima parte asemănătoare unei parabole, iar în a doua parte are tendinţe asimptotice. Alura parabolică din prima parte ne face să presupunem că s-a petrecut o distilare în care materialul plastic a eliminat un amestec de apă şi alte

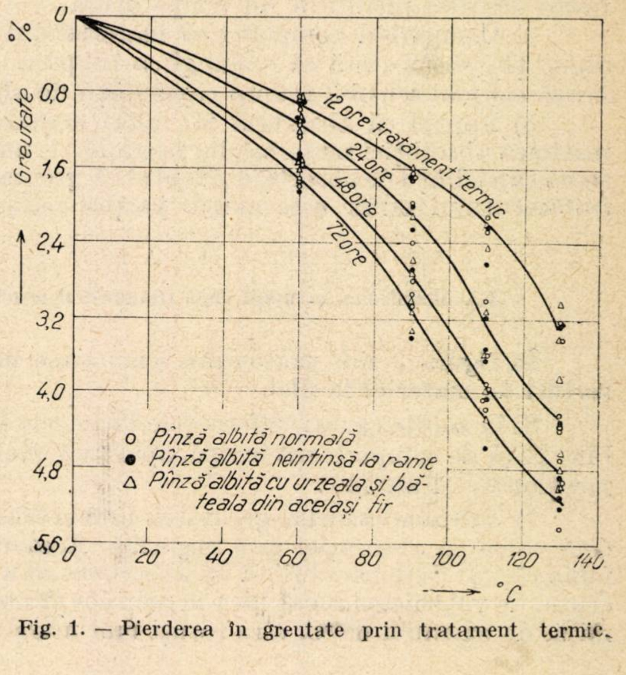


Fig. 1. — Pierderea în greutate prin tratament termic.

produse volatile, probabil mici cantităţi din componentele răşinii neintrate în reacţie.

Acest fapt ar permite o prevedere şi anume aceea că tratamentul termic ar putea reduce capacitatea de absorbţie şi anume progresiv, deoarece eliminarea unor părţi nereacţionate înseamnă reducerea numărului de grupe polare hidrofile şi lipofile.

4.1. Modificarea greutăţii materialului după tratamentul termic sub acţiunea apei

Prin menţinerea probelor în apă, aceasta se colorează uşor în galben şi intensitatea culorii creşte o dată cu creşterea temperaturii.

Modificarea greutăţii după tratamentul termic a fost exprimată în procente, comparativ cu materialul netratat, pus în aceleaşi condiţii de absorbţie. Rezultatele prezentate în figura 2, dau unele indicaţii asupra comportării materialului.

1) Între cele trei sorturi de material experimentat, diferenţele sînt neglijabile şi se datoresc probabil variaţiei în conţinutul de răşină şi erorilor experimentale.

2) Prelungirea timpului şi ridicarea temperaturii tratamentului termic aduc după sine reducerea capacităţii de absorbţie, ceea ce era de prevăzut.

3) Faptul că diferenţele între variaţia greutăţii sub influenţa temperaturii este mai pronunţată decît cea sub acţiunea variaţiei timpului de tratament termic s-ar putea explica prin aceea că principalele modificări se produc în intervale de timp mai mici decît 12 ore şi că echilibrul este foarte sensibil modificat de temperatură.

4) Comparînd comportarea materialului la diferite temperaturi de absorbţie, se constată că prelungirea timpului de tratament termic acţionează cel mai sensibil asupra capacităţii de absorbţie la 100 °C.

5) Faptul că absorbţia ia valori negative, respectiv rămîne sub mărimea absorbţiei materialului netratat termic, exprimă probabil reducerea capacităţii de absorbţie şi faptul că greutatea pierdută sub acţiunea tratamentului termic este numai parţial recîştigată în apă.

4.2. Modificarea greutăţii după tratamentul termic sub acţiunea uleiului

În figura 3 sînt prezentate rezultatele încercărilor făcute cu cele 3 sorturi de material în ulei.

Şi în aceste cazuri, diferenţele între cele trei sortimente sînt neglijabile. Faţă de comportarea în apă, apar aici unele deosebiri care merită a fi menţionate şi anume :

1) În toate cazurile, greutatea probei scade după menţinerea în ulei, deci valoarea absorbţiei este negativă. Aceasta nu exprimă numai lipofobia răşinii (bumbacul fiind un absorbant al uleiului), ci şi faptul că procentul de volatile eliminat încă în primele 12 ore, chiar la temperatură mai mică, de exemplu 60 °C, este totuşi mai mare decît absorbţia de ulei.

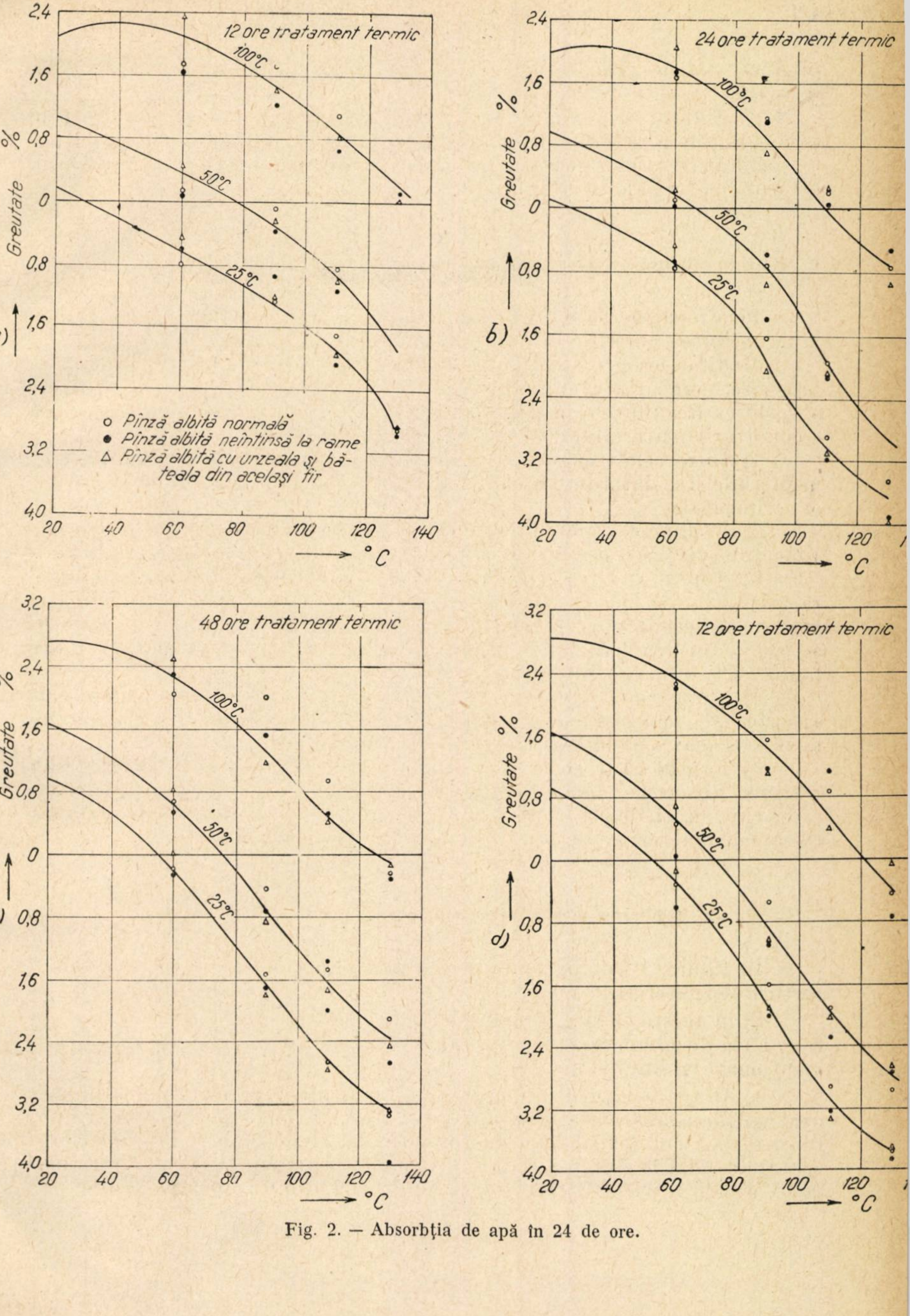


Fig. 2. — Absorbția de apă în 24 de ore.

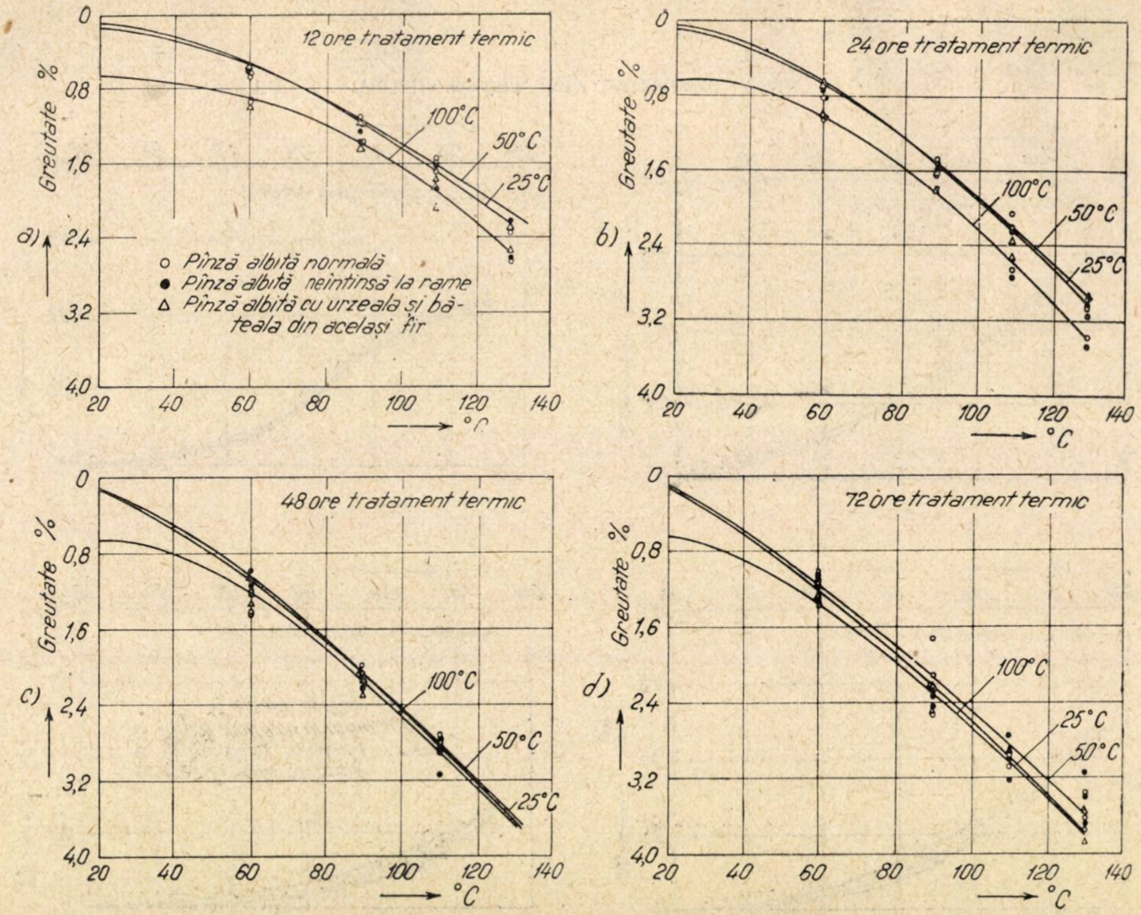


Fig. 3. — Absorbția de ulei în 24 de ore.

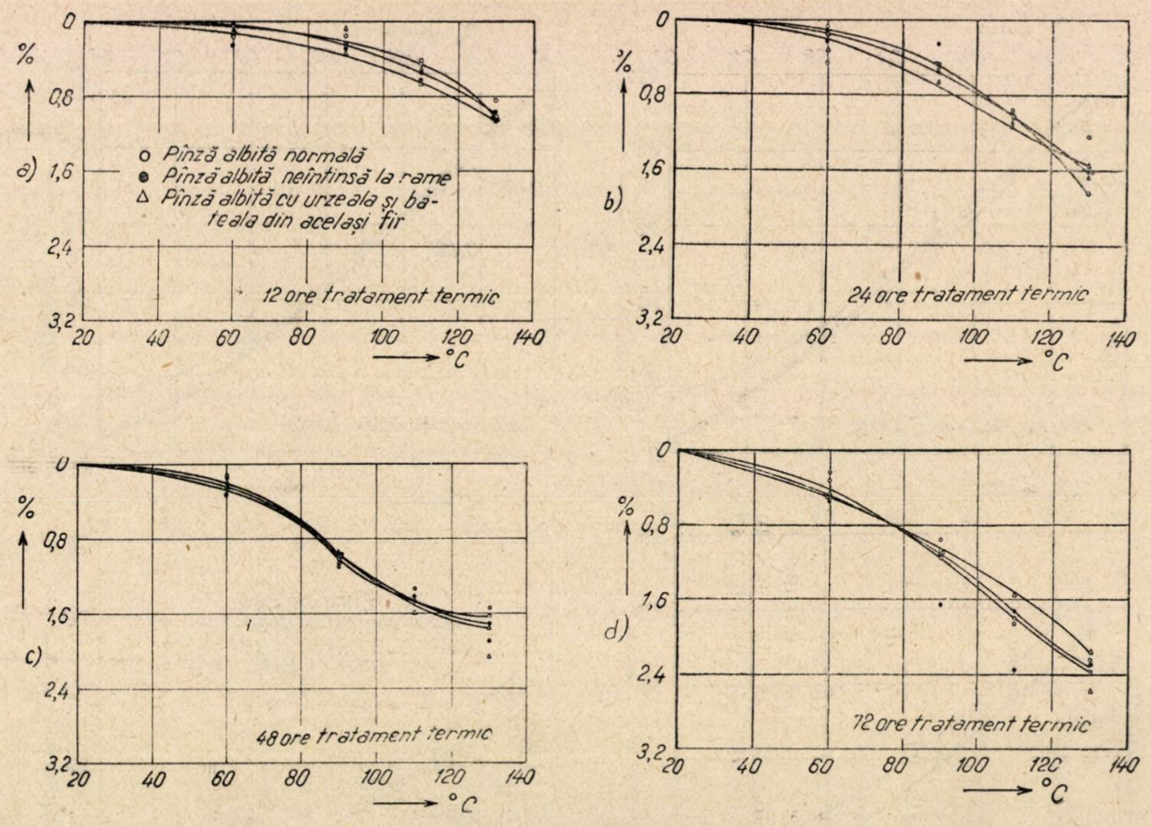


Fig. 4. — Variația grosimii după tratamentul termic.

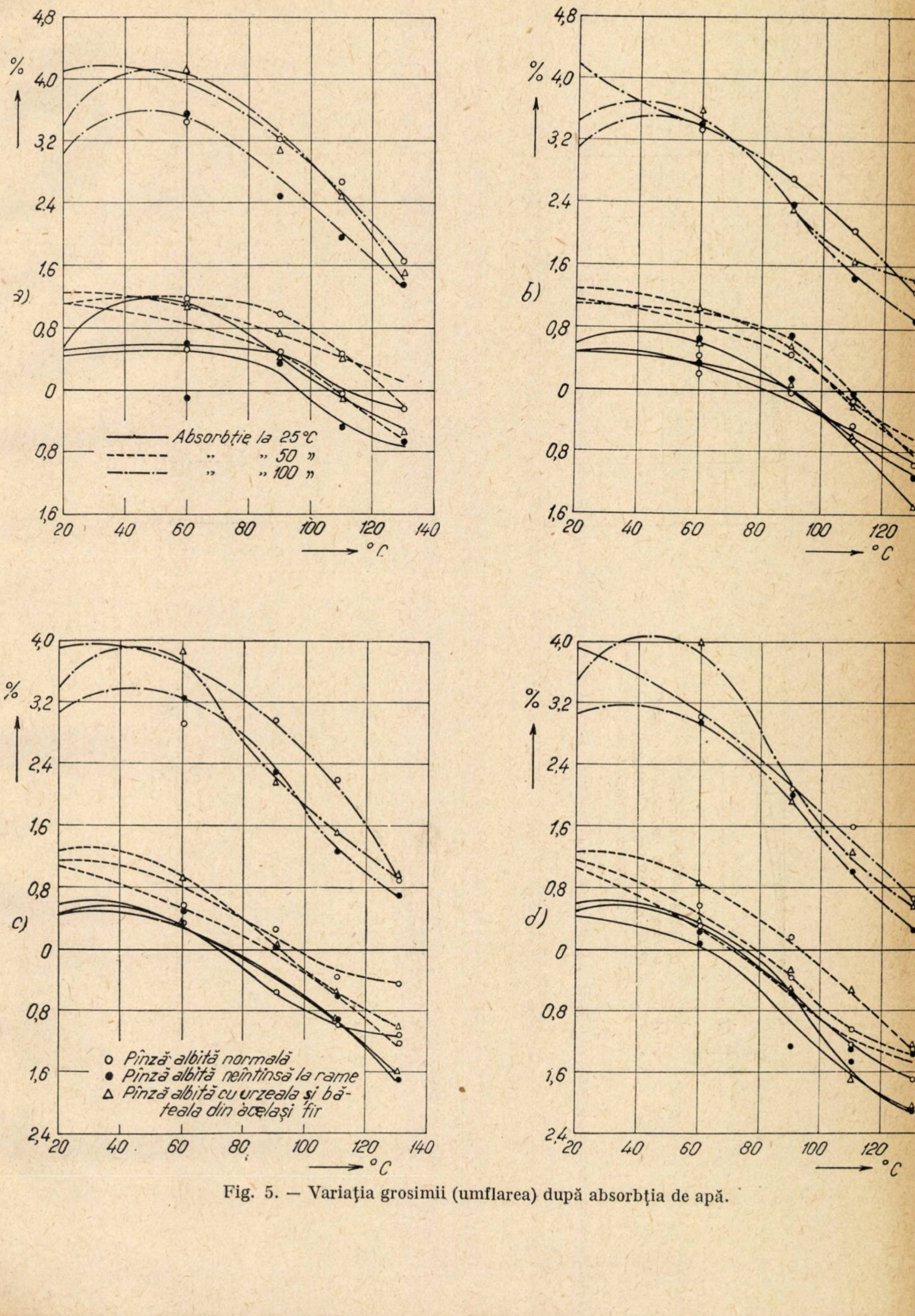


Fig. 5. — Variația grosimii (umflarea) după absorbția de apă.

2) Diferențele între comportarea materialului la diferite temperaturi ale mediului de absorbție nu mai apar la ulei, curbele pentru 25°, 50° și 100°C fiind apropiate. S-ar putea chiar ca diferența prezentată de curba de 100 °C să exprime în fond continuarea distilării începută la tratamentul termic.

Această comportare prezintă un real interes practic, deoarece arată o bună stabilitate a materialului față de ulei.

5. VARIAȚIA GROSIMII SUB ACȚIUNEA TRATAMENTULUI TERMIC

Tratamentul termic produce o scădere a grosimii probelor, scădere care se accentuează o dată cu creșterea temperaturii și duratei tratamentului termic (fig. 4).

Scăderea în grosime nu diferă de la un sort la altul.

Aceasta ar arăta că contracția în grosime nu este determinată de contracția diferită a țesăturii pe cele două direcții (urzeală și băteală), deoarece în acest caz, diferența ar fi pusă în evidență.

5.1. Variația grosimii după tratamentul termic sub acțiunea apei

Experiențele noastre, ale căror rezultate sînt prezentate în figura 5, au confirmat datele din literatură [10], după care grosimea materialului stratificat este dimensiunea care își modifică cel mai mult mărimea.

Rezultatele din diagrame arată următoarele caracteristici:

1) Umflarea probelor scade o dată cu creșterea temperaturii și a duratei tratamentului termic. Se constată însă o mai sensibilă variație în funcție de temperatură, decît în funcție de durata tratamentului termic.

2) Comportarea în apă la cele trei temperaturi este foarte diferită. În timp ce valorile în cazul apei de 25°și 50 °C sînt în parte negative, curbele pentru 100 °C sînt totdeauna pozitive. Mai mult, se constată că datorită unor cauze pe care nu le-am sezisat, curbele pentru 100 °C sînt foarte apropiate la timpi diferiți.

3) Practic este imposibil de stabilit o diferențiere a comportării după sortimentele de țesătură utilizate. Se constată însă o mare dispersie a rezultatelor, care se datorește probabil imperfecțiunilor experimentale. Se știe de altfel că este foarte greu a executa măsurătorile în condiții de temperatură și umiditate constantă, ceea ce provoacă modificarea rezultatelor (mai ales la probele care au fost ținute în apă la 100 °C).

4) Și în aceste experiențe se constată o modificare accentuată în comportarea probelor la tratamentul termic la 90 °C, precum și tendițe asimptotice după temperatura de 110 °C.

5) Se mai poate remarca diferența care există între scăderea grosimii după tratament termic (fig. 4) și creșterea ei prin absorbție. În cazul temperaturii de absorbție 25° și 50 °C, diferența este foarte mică și comparînd

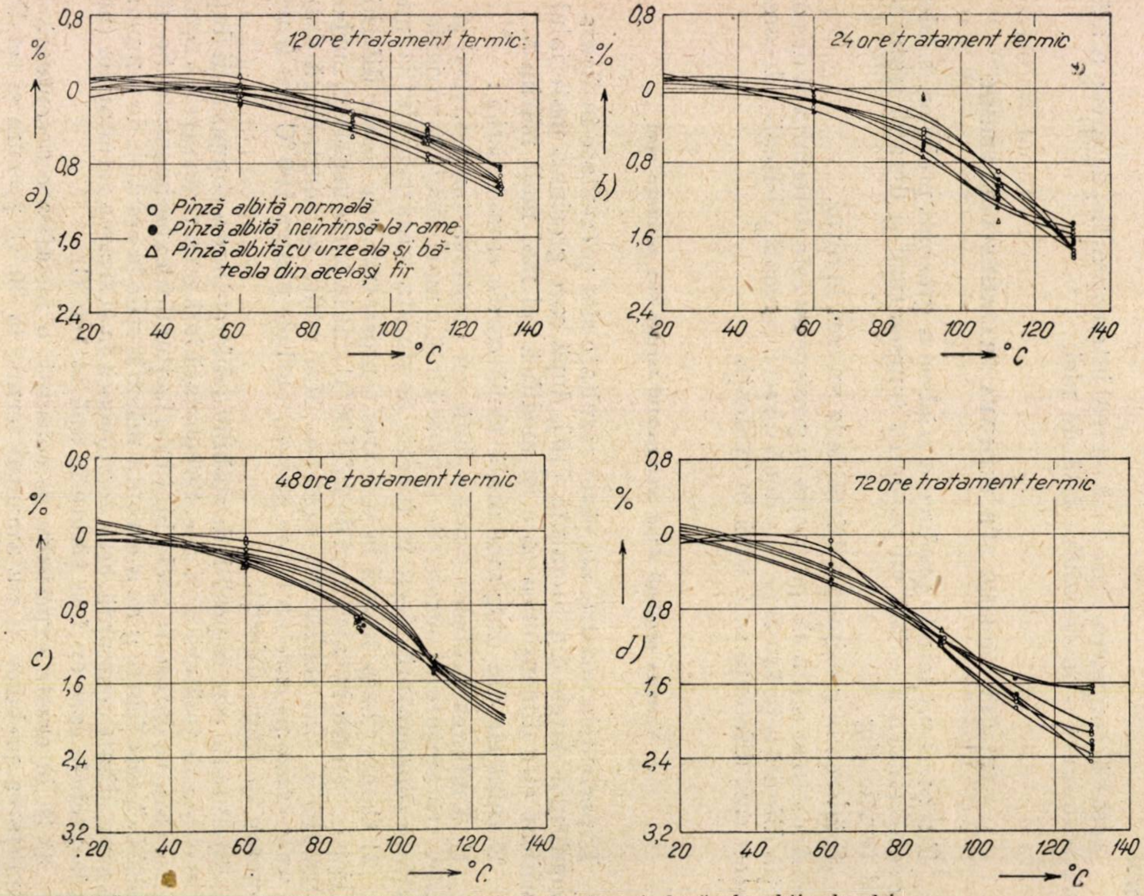


Fig. 6. — Variația grosimii (umflarea) după absorbția de ulei.

absorbția după tratamentul termic la 130 °C, se pare chiar că nu există absorbție față de materialul netratat.

În apă, la 100 °C, absorbția produce o umflare accentuată, care întrece valorile contracției și este totdeauna pozitivă.

5.2. Variația grosimii după tratamentul termic, sub acțiunea uleiului

Spre deosebire de apă, uleiul acționează asupra materialului invers, producînd întotdeauna scăderea grosimii. În comparație cu apa, în comportarea față de ulei se mai constată și alte particularități prezentate în figura 6 și anume :

1) Între cele trei temperaturi de absorbție, diferențele sînt practic neglijabile, ceea ce este asemănător cu rezultatele constatate la modificarea greutății în același caz.

2) Grosimea probei scade odată cu prelungirea duratei tratamentului termic și cu ridicarea temperaturii.

6. VARIAȚIA LUNGIMII URZELII ȘI BĂTELII SUB ACȚIUNEA TRATAMENTULUI TERMIC

Atît urzeala cît și băteala se scurtează sub acțiunea tratamentului termic și scurtarea aceasta este progresivă în funcție de temperatură și de durata tratamentului termic. Comparînd rezultatele obținute (fig. 7), se constată că influența temperaturii este sensibil mai mare decît a timpului. Diagramele mai arată și alte caracteristici :

1) Scurtarea urzelii și bătelii este aproximativ egală pentru un sortiment și o temperatură dată. Dispersia rezultatelor demonstrează însă că în ansamblul procesului, sortimentul țesăturii influențează rezultatul.

2) Creșterea temperaturii aduce după sine o diferențiere progresivă a comportării materialelor sub aspectul celor trei sorturi de pînză, cît și în raportul urzeală-bătealā, care se abate în mod treptat de la valoarea unitară. În intervalul 110—130 °C se constată și în acest caz tendințe asimptotice.

Dacă se iau în considerație valorile modificărilor suferite de material pe cele trei direcții, se constată că variația în grosime exprimată procentual este aproximativ dublă față de variația pe urzeală și băteală și că în intervalul de timp și pe scara temperaturilor studiate, acest raport se menține aproape constant.

6.1. Variația lungimii urzelii și bătelii după tratamentul termic sub acțiunea apei

Ținînd seama că rășina este un material omogen, este lesne de presupus că ea se comportă în toate cazurile la fel pe cele trei direcții. Excepție face cazul cînd din cauza sistemului de turnare sau presare, apar tensiuni interne.

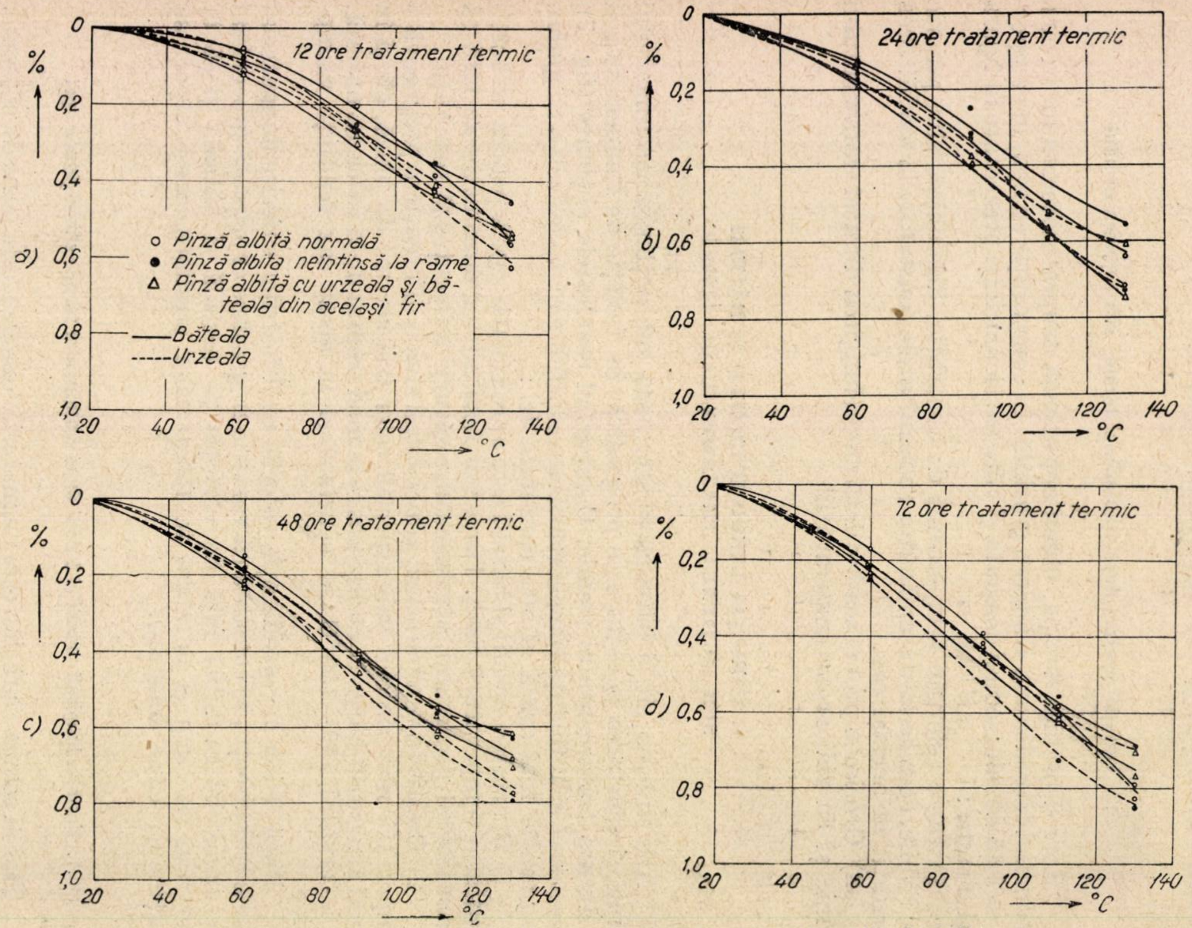


Fig. 7. — Contracţia după tratament termic (de la absorbţia de apă).

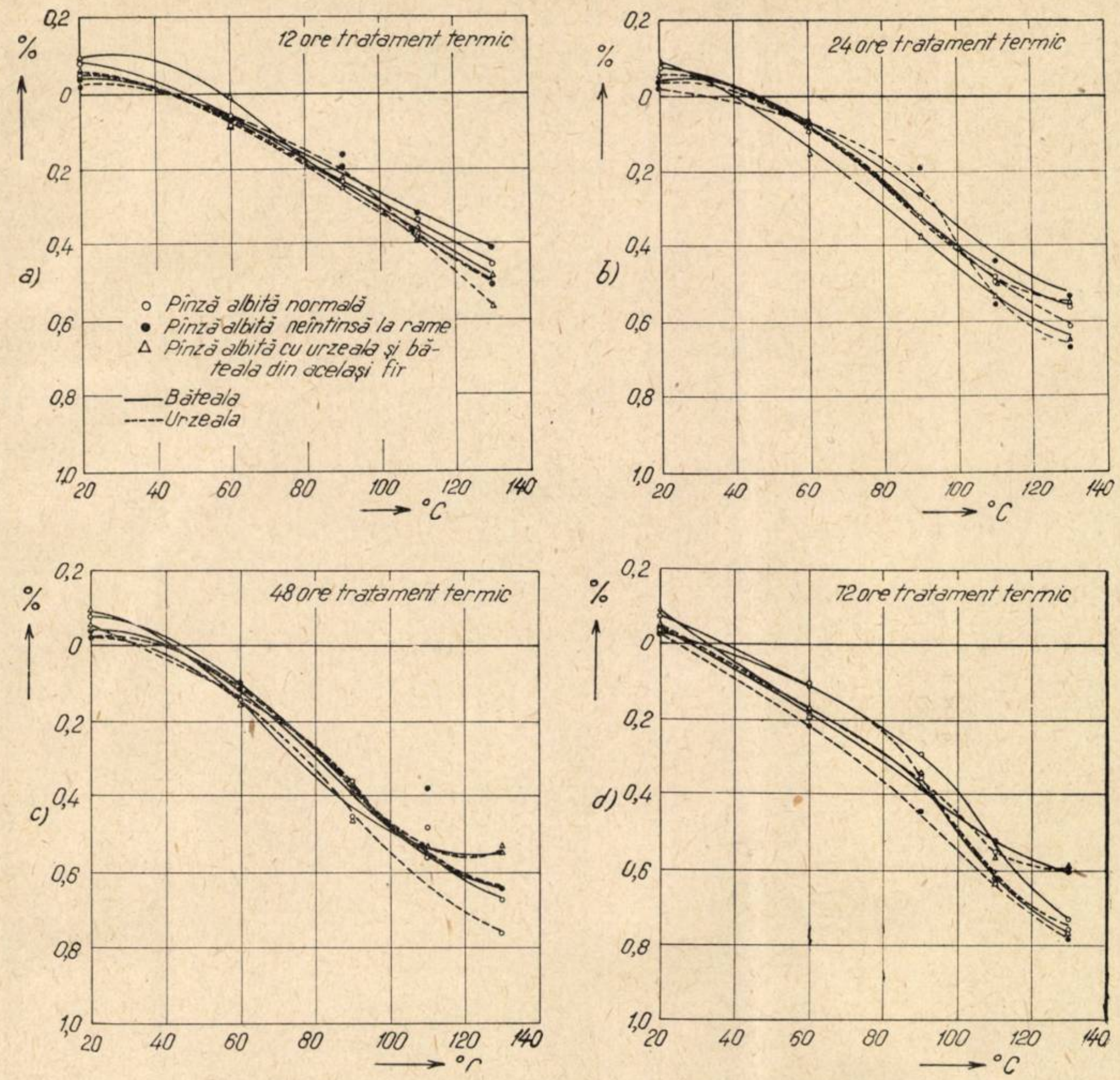


Fig. 8. — Variaţia dimensiunilor pe băteală şi urzeală la absorbţia de apă la 25°C.

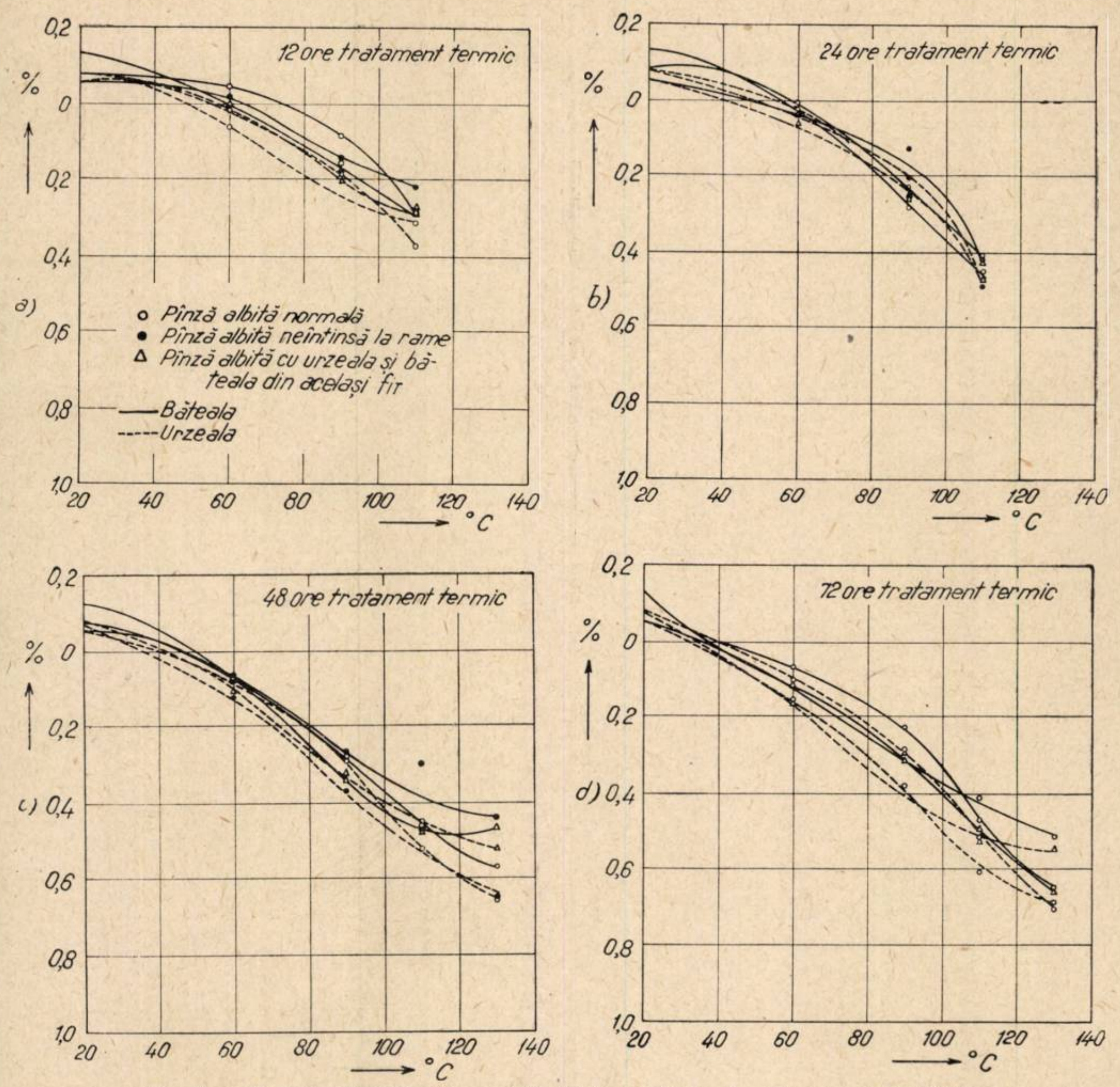


Fig. 9. — Variaţia dimensiunilor pe băteală şi urzeală la absorbţia de apă la 50 °C.

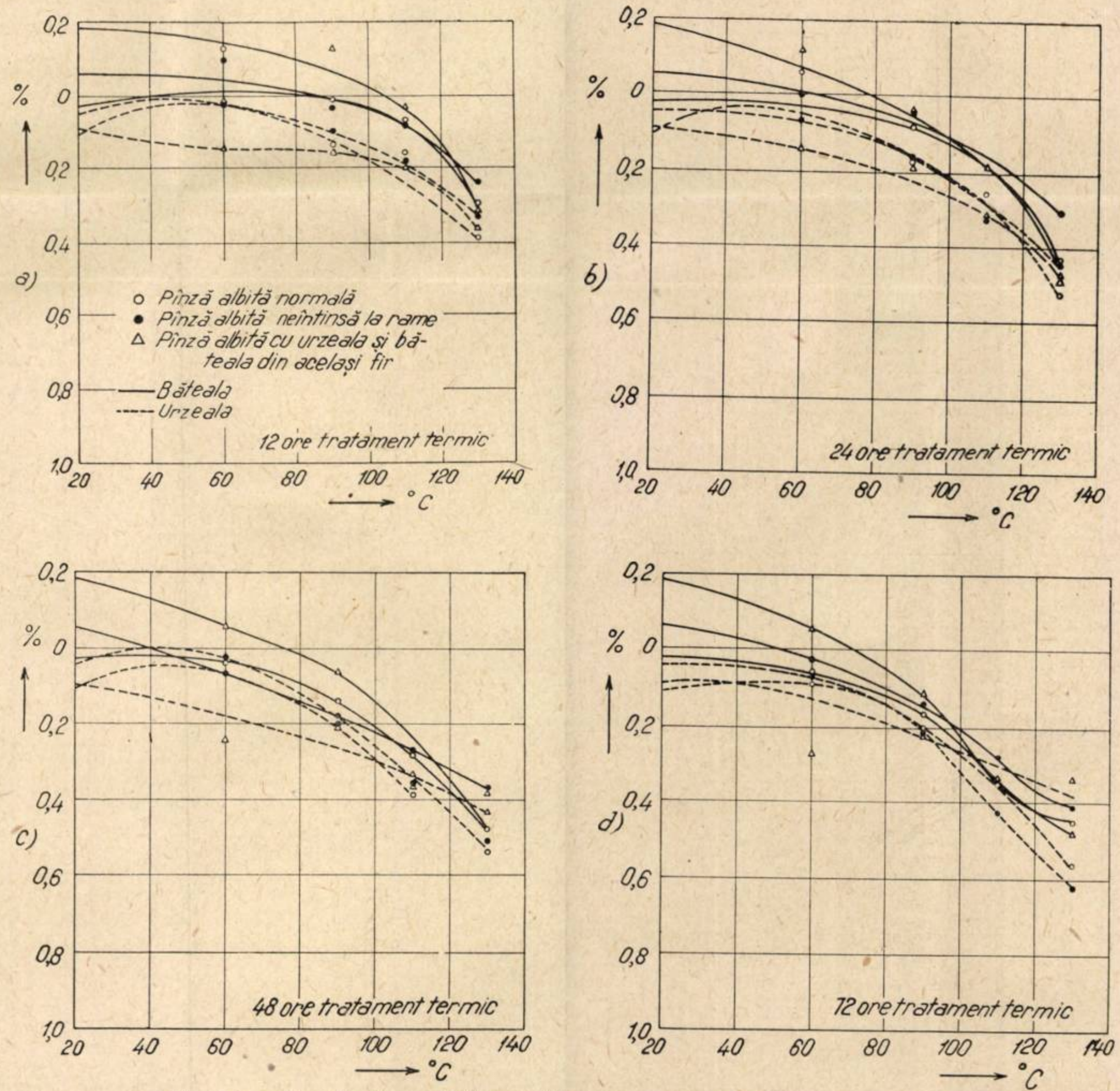


Fig. 10. — Variaţia dimensiunilor pe băteală şi urzeală la absorbţia de apă la 100 °C.

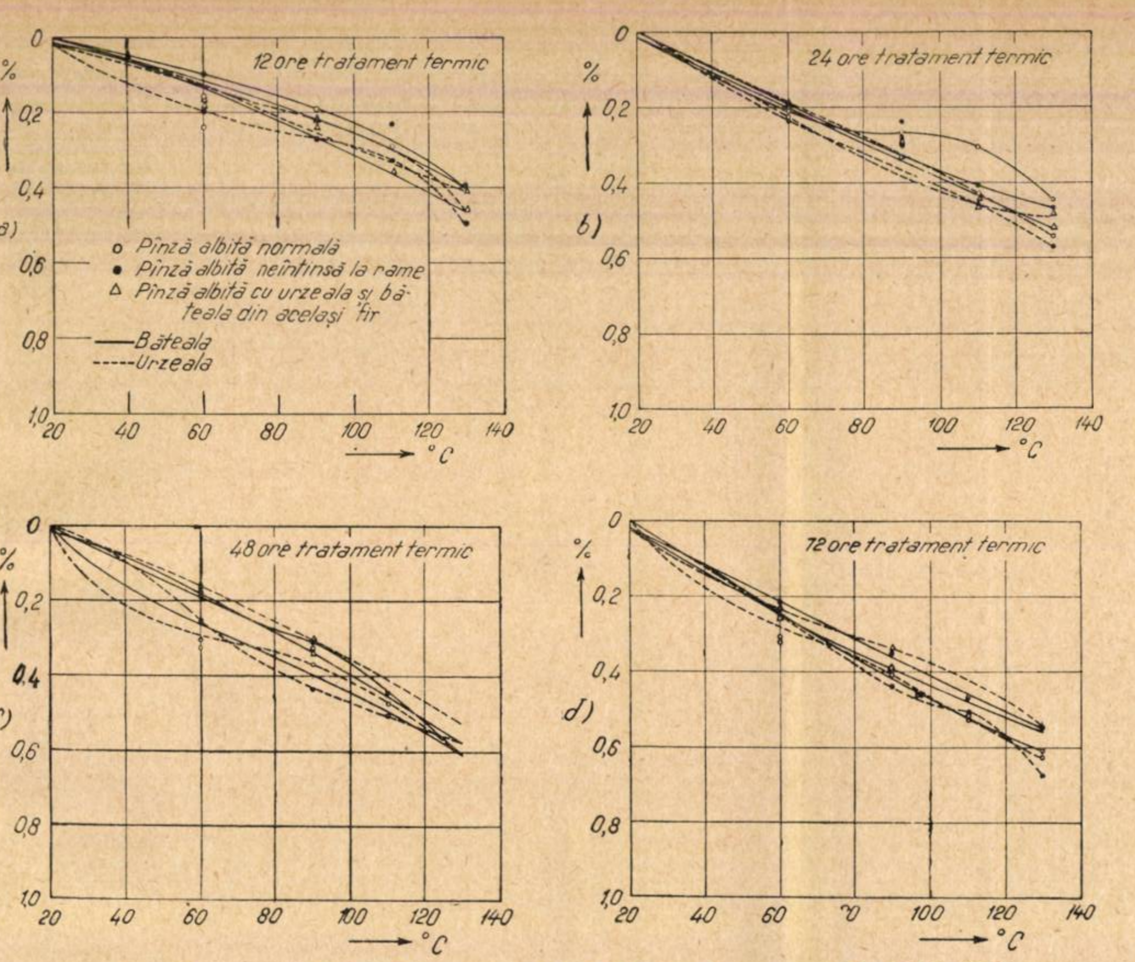


Fig. 11. — Variaţia dimensiunilor pe bătealä şi urzealä la absorbţia de ulei la 25°C.

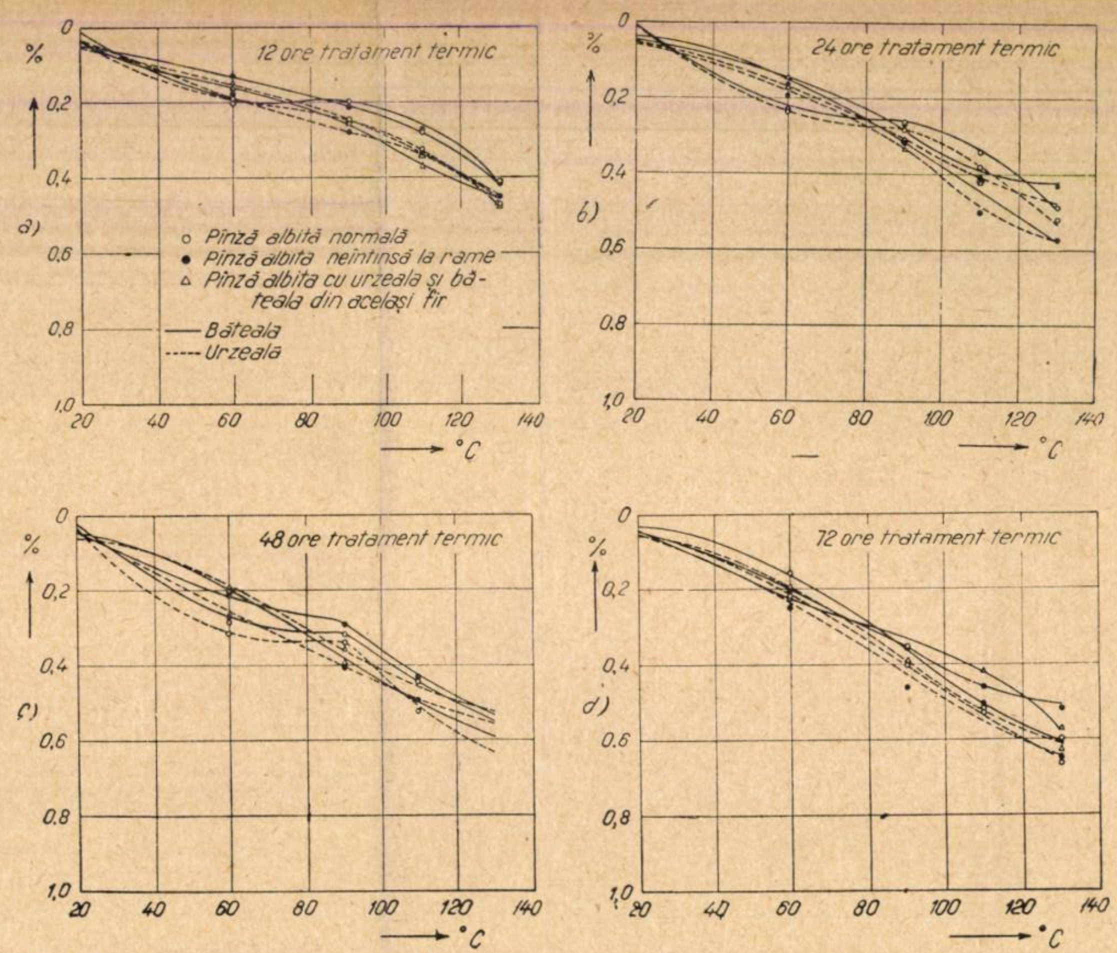


Fig. 12. — Variaţia dimensiunilor pe bătealä şi urzealä la absorbţia de ulei la 50°C.

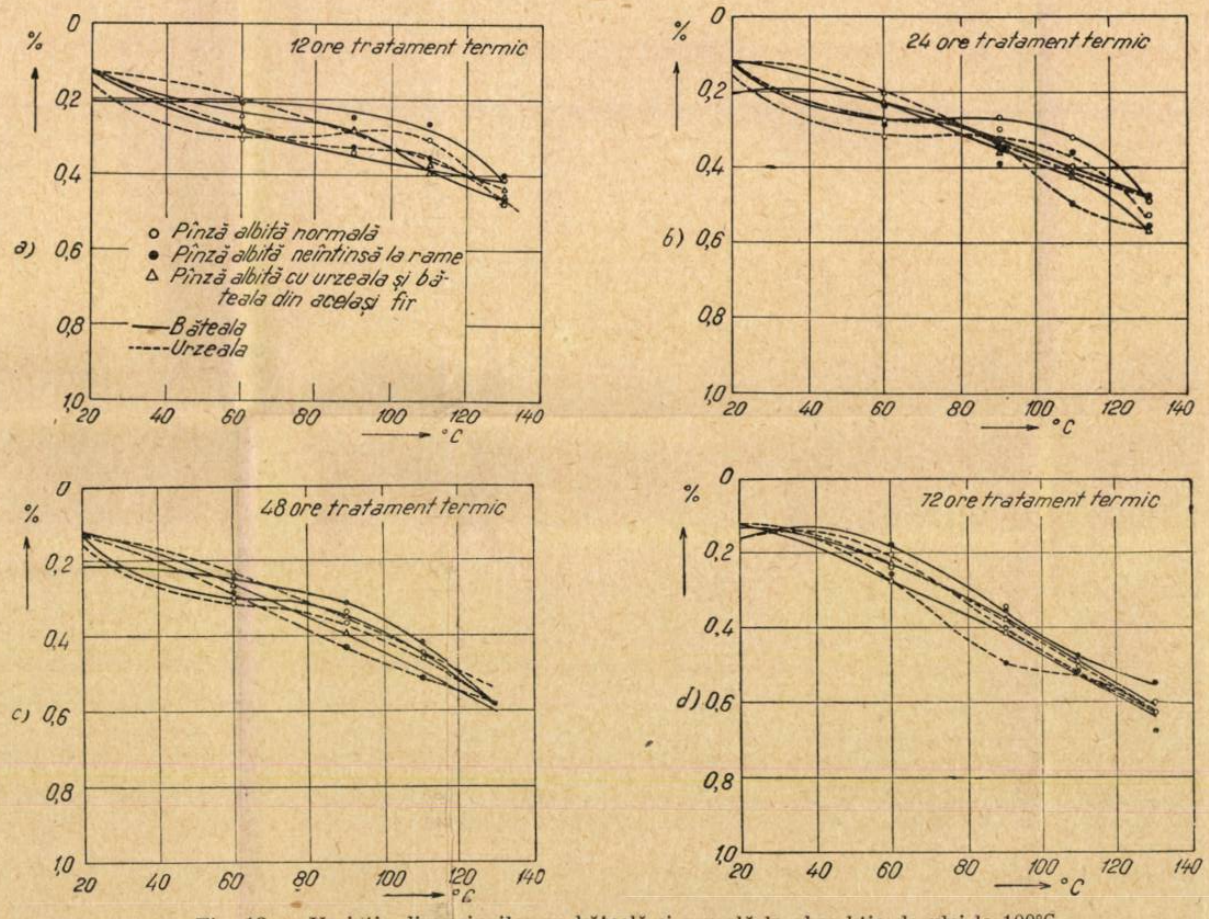


Fig. 13. — Variaţia dimensiunilor pe bătealä şi urzealä la absorbţia de ulei la 100°C.

În materialul stratificat, ca urmare a caracteristicilor țesăturii, rezistențele plăcilor sînt deosebite după direcția urzelii și bătelii.

Deosebite sînt și comportările la apă după aceste direcții.

Experiențele noastre de sondaj au condus la încercarea de a modifica anizotropia, prin alegerea unor sorturi de pînze corespunzătoare. Această soluție pentru obținerea ortotropiei ar fi foarte avantajoasă, deoarece curent se efectuează o operație manuală—încrucișarea foilor aplicată cînd se urmărește acest scop.

Rezultatele, care sînt prezentate în diagramele din figurile 8, 9 și 10, au arătat următoarele :

1) În toate cazurile, creșterea temperaturii și prelungirea duratei tratamentului termic duc la reducerea umflării față de materialul netratat termic.

2) Prelungirea duratei tratamentului termic accentuează diferențierea între comportarea celor două axe.

3) Creșterea temperaturii tratamentului termic tinde să reducă diferențierea între variația urzelii și a bătelii.

4) Creșterea temperaturii apei în care se execută absorbția, aduce după sine o sensibilă creștere a umflării materialului și o accentuare a diferențierii după cele două axe.

5) Comparînd comportarea materialului în funcție de sortimentul de pînză folosit, constatăm că :

— ordinul de mărime al umflării celor trei sorturi rămîne aproximativ egal ;

— țesătura cu urzeala și băteala din același fir, se diferențiază cel mai mult, iar cea normală cel mai puțin.

Aceste fapte pun în evidență că principalul factor care influențează comportarea țesăturii este firul. Deoarece însă este foarte greu de-a face o țesătură care să se comporte la fel pe direcția urzelii și bătelii prin alegerea firelor, ni se pare mai ușor de realizat aceasta prin alegerea unei armuri corespunzătoare a țesăturii.

6) Comportarea diferită pe cele două direcții și diferențele între valorile umflării pe aceste direcții și în grosime, dovedesc că exprimarea umflării prin creșterea totală în volum [11], [12], este nejustă, deoarece ea nu marchează modificarea dimensiunilor.

6.2. Variația lungimii urzelii și bătelii după tratamentul termic sub acțiunea uleiului

Și sub această latură, influența uleiului diferă de influența apei. Aceste diferențe care rezultă din figurile 11, 12 și 13 arată că :

1) Indiferent de durata și temperatura tratamentului termic, uleiul provoacă o micșorare a dimensiunilor, care se accentuează o dată cu creșterea temperaturii și prelungirea timpului.

2) Comparînd curbele din figurile 11, 12 și 13, cu curbele din figura 7, care reprezintă contracția, se constată că în ulei se produce o continuare a contracției și ținînd seama că și greutatea continuă să scadă (fig. 1) s-ar părea că materialul respinge uleiul în cazurile examinate.

3) În sfîrșit, o particularitate dintre cele mai importante, este faptul că materialul se comportă practic la fel, indiferent de temperatura uleiului. Se remarcă însă că ridicarea temperaturii duce la o ușoară dispersie a rezultatelor în raportul urzeală-bătealā.

CONCLUZII

1) Studiul a stabilit care sînt condițiile de tratament termic care determină o cît mai mare stabilitate față de apă și ulei a materialului plastic tip textolit cu rășină furfurol-fenolică.

2) Cele 3 sortimente de pînză utilizate la fabricarea textolitului nu conduc la diferențieri apreciabile ale capacității de absorbție a apei și uleiului.

3) Atît în cazul absorbției de apă, cît și în cazul absorbției de ulei, creșterea temperaturii și a duratei tratamentului termic determină o accentuare a modificărilor în greutate și în dimensiuni a materialului

4) Capacitatea de absorbție a apei, pentru același timp și aceeași temperatură de tratament termic, scade o dată cu micșorarea temperaturii mediului de absorbție de la 100 °C la 25 °C. Acest lucru este important pentru cunoașterea comportării lagărelor din textolit în practică.

5) Dintre cele trei dimensiuni, grosimea materialului este aceea care suferă cele mai profunde modificări. Ele nu depind de sortimentul țesăturii.

6) În cazul absorbției de ulei, variațiile în comportarea materialului la diferite temperaturi de absorbție sînt foarte mici, astfel încît practic se poate spune că nu există diferențiere. Aceasta dovedește o bună stabilitate a materialului față de ulei.

7) Exprimarea umflării sau a contracției prin creșterea—respectiv scăderea — totală în volum nu este justă, pentru că nu marchează modificările suferite de fiecare dimensiune în parte.

Laboratorul de mase plastice
al
Centrului de cercetări chimice al Academiei R.P.R.

Primită la redacție la 25 iunie 1956.

Notă

Pentru realizarea acestei lucrări au fost sintetizate 50 kg rășină furfurol-fenolică de către tov. Ileana Petruș, sub conducerea prof. dr. D. Isăcescu, cărora le exprimăm pe această cale mulțumirile noastre.

ПЛАСТИЧЕСКИЕ МАССЫ НА ОСНОВЕ ФУРФУРОЛА И ЕГО ПРОИЗВОДНЫХ

V. ВЛИЯНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ НА ПОВЕДЕНИЕ В ВОДЕ И МАСЛЕ ТЕКСТОЛИТА С ФУРФУРОЛО-ФЕНОЛЬНОЙ СМОЛОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе устанавливаются условия термической обработки, определяющие наибольшую водо- и маслоустойчивость пластических материалов типа текстолита с фурфуроло-фенольной смолой.

Выбор термической обработки, как возможное средство снижения абсорбционной способности, основан на предположении, что под действием теплоты поликонденсация смолы продолжается, что приводит к уменьшению количества полярных групп, а следовательно, и гидрофильности. При этом также происходит выделение летучих веществ, способных притягивать и удерживать воду.

Опыты были произведены с образцами 50×50×10 мм при температурах термической обработки 60, 90, 110 и 130° в промежутках времени 12, 24, 48 и 72 часов, причем в каждом случае испытывалось по три образца.

Поведение в воде и масле определялось при температурах 23—25°, 50±2° и 100°, при атмосферном давлении в течение 24 часов.

Абсорбционная способность различна для воды и для масла.

В то время как для воды, при той же продолжительности и температуре термической обработки абсорбционная способность (по весу) понижается с понижением температуры абсорбции от 100 до 25°, для масла изменения абсорбции практически не ощутимы.

Из всех размеров толщина материала изменяется больше всего.

Настоящая работа помогает определить поведение подшипников из текстолита на практике и сделать выбор наилучшей технологии и эксплуатации.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Потеря в весе при термической обработке.

Рис. 2. — Поглощение воды за сутки.

Рис. 3. — Поглощение масла за сутки.

Рис. 4. — Изменение толщины после термической обработки.

Рис. 5. — Изменение толщины (набухание) после поглощения воды.

Рис. 6. — Изменение толщины (набухание) после поглощения масла.

Рис. 7. — Усадка после термической обработки вследствие поглощения воды.

Рис. 8. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения воды при 25°.

Рис. 9. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения воды при 50°.

Рис. 10. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения воды при 100°.

Рис. 11. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения масла при 25°.

Рис. 12. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения масла при 50°.

Рис. 13. — Изменение размеров по основе и утку вследствие поглощения масла при 100°.

MASSES PLASTIQUES À BASE DE FURFUROL ET DÉRIVÉS

V. INFLUENCE DU TRAITEMENT THERMIQUE SUR LE COMPORTEMENT DANS L'EAU ET DANS L'HUILE DU TEXTOLITE À RÉSINE FURFUROL-PHÉNOLIQUE

(RÉSUMÉ)

Le présent travail a pour objet l'identification des conditions de traitement thermique, qui déterminent la plus grade stabilité possible à l'eau et à l'huile des matériaux plastiques du type textolite, à résine furfurol-phénolique.

Le choix du traitement thermique comme moyen possible de réduire la capacité d'absorption est basé sur l'hypothèse que, sous l'action de la température, la polycondensation de la résine se continue, ayant pour effet de réduire le nombre de groupes polaires et, partant, de l'hydrophilie. C'est sous l'effet de la même action que se produit l'élimination des éléments volatiles ayant la propriété d'attirer et de retenir l'eau.

Les expériences ont été réalisées sur des éprouvettes de 50 × 50 × 10 mm, le traitement thermique ayant lieu aux températures de 60, 90, 110 et 130 °C avec des durées de 12, 24, 48 et 72 heures, utilisant 3 éprouvettes pour chaque cas.

Le comportement à l'eau et à l'huile a été déterminé aux températures de 23 à 25 °C, 50 ± 2 °C et 100 °C, à la pression atmosphérique, pendant 24 heures.

La capacité d'absorption est différente pour l'eau et pour l'huile. Alors que pour l'eau, pour la même durée et température du traitement thermique, la capacité d'absorption (pondérale) décroît en même temps que décroît la température d'absorption de 100° à 25° ; pour l'huile, les variations sont pratiquement négligeables.

En ce qui concerne l'influence des modifications sur les dimensions des éprouvettes, c'est l'épaisseur qui subit les plus profondes.

La présente étude permet de connaître le comportement des coussinets de textolite dans la pratique et de faire le choix de la technologie et de l'exploitation optimes.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Perte de poids par traitement thermique.
Fig. 2. — Absorption d'eau en 24 heures.
Fig. 3. — Absorption d'huile en 24 heures.
Fig. 4. — Variation de l'épaisseur après le traitement thermique.
Fig. 5. — Variation de l'épaisseur (gonflement) après absorption d'eau.
Fig. 6. — Variation de l'épaisseur (gonflement) après absorption d'huile.
Fig. 7. — Contraction après traitement thermique (due à l'absorption d'eau).
Fig. 8. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'eau à 25 °C.

Fig. 9. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'eau à 50°C.

Fig. 10. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'eau à 100°C.

Fig. 11. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'huile à 25°C.

Fig. 12. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'huile à 50°C.

Fig. 13. — Variation des dimensions sur trame et chaîne, due à l'absorption d'huile a 100°C.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Kovacs, Ind. Plast. Mod., 1950, nr. 6, p. 31; 1951, nr. 1.
2. H. K. Hanck, Kunststoffe, 1941, t. 31, nr. 2, p. 55—56.
3. *** *Water Absorption of Plastics.* A.S.T.M., D. 570—42.
4. R. Houwink, *Elastomers and Plastomers.* Elsevier Publishing Co. Inc., New York, 1949, p. 56—58 și 60—61.
5. P. Pinten, Kunststoffe, 1938, t. 28, nr. 9, p. 233—235.
6. S. I. Gallai i A. M. Rudic, Zavodskaia Laboratoria, 1948, t. IV, nr. 8.
7. P. Werner, Kunststoffe, 1939, t. 29, nr. 6, p. 161—164.
8. I. F. Kanaveți V. A. Șelion, Industria chimică, 1954, nr. 3, p. 19—35.
9. I. Ionescu, V. Calcan și N. Goldenberg, *Influența tratamentului termic asupra unor rezistențe la eforturi progresive la rupere ale textolitului cu rășină furfurol-fenolică.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 1, 1957, p. 171.
10. B. Warburton, *Handbook of Engineering Plastics.* George Newnes Limited, Londra, 1946, p. 276—279.
11. G. M. Kline u. V. A. Martin, Kunststoffe, 1941, t. 31, nr. 10, p. 364—365.
12. A. Rohrs u. V. Morhard, Kunststoffe, 1941, t. 31, nr. 3, p. 118.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

DEFORMAŢIILE ELEMENTELOR DE BETON ARMAT ŞI PRECOMPRIMAT SUPUSE LA ÎNCOVOIERE CU ARMĂTURA NEADERENTĂ

DE

M. WEISSENBERG şi S. CIUNGU

I

1. Influenţa aderenţei dintre beton şi armătură asupra modului de deformare, asupra fisurării şi ruperii elementelor de beton armat, a fost luată în considerare în diferite studii teoretice şi experimentale. Teoria generală a prof. V. I. Muraşev asupra deformării, fisurării şi ruperii betonului armat [3] pune în evidenţă influenţa aderenţei dintre beton şi armătură, respectiv contribuţia betonului întins dintre fisuri la preluarea eforturilor, prin introducerea coeficientului $\psi = \frac{\varepsilon_{am}}{\varepsilon_a}$, în care

ε_{am} — alungirea specifică medie a armăturii pe distanţa dintre fisuri şi

ε_a — alungirea specifică a armăturii în dreptul fisurii.

Introducerea elementelor de beton precomprimat cu armături postîntinse a făcut să apară problema comportării elementelor la care armătura nu are aderenţă cu betonul sau la care aderenţa este foarte redusă.

După datele existente în prezent în literatură, calculul elementelor de beton armat fără aderenţă pe o porţiune mijlocie se poate face, în ceea ce priveşte deformaţiile din stadiul II (după apariţia fisurilor), prin metoda prof. V. I. Muraşev, introducînd $\psi = 1$; în ceea ce priveşte ruperea, nu există recomandări deosebite faţă de calculul obişnuit, standardizat, pentru orice fel de elemente de beton armat sau precomprimat. Se menţionează doar că, datorită concentrării deformaţiilor betonului comprimat într-un număr mai redus de secţiuni fisurate, elementele de beton armat fără aderenţă au o zonă comprimată de înălţime mai redusă, ceea ce poate atrage după sine ruperi premature, la sarcini mai mici decît cele calculate.

2. În prezentul studiu se caută să se stabilească unele ipoteze generale asupra deformării elementelor de beton armat sau precomprimat fără aderență în zona mediană, să se analizeze unele consecințe ale aplicării acestor ipoteze asupra comportării statice a elementelor și să se arate unele verificări experimentale.

Se consideră că egalizarea eforturilor din armături pe porțiunea fără aderență se face atît în stadiul I, cît și în stadiul II, pe baza unei deformații medii rezultate prin sumarea deformațiilor elementare în diferite puncte (fig. 1) și nu pe baza deformației maxime din secțiunea cea mai solicitată, așa cum rezultă dacă se aplică și în acest caz formulele generale pentru calculul la rupere, sau formulele prof. V. I. Murașev cu $\psi = 1$ *).

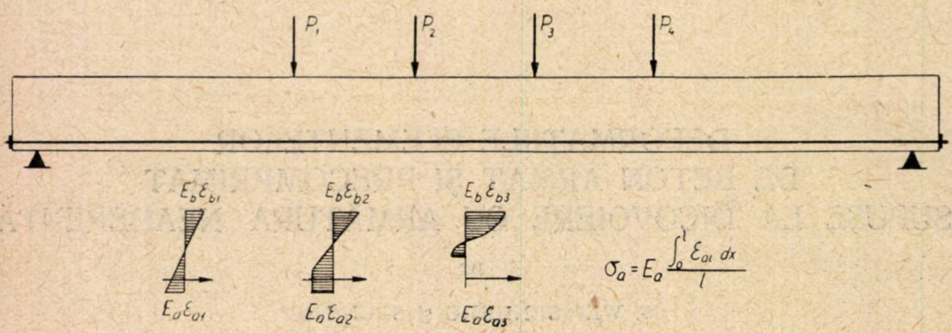


Fig. 1. — Egalizarea eforturilor unitare din armătură pe baza deformației specifice medii.

Aplicarea acestei ipoteze presupune renunțarea la ipoteza secțiunilor plane pentru secțiunea de beton armat în ansamblu. Ea poate fi menținută, în măsura necesară și în limitele corespunzătoare cu experiențele, numai pentru secțiunea de beton. Aportul armăturii la preluarea efortului poate fi luat în considerare ca acțiunea unei forțe exterioare, variind cu încărcarea și putînd fi determinată tocmai prin egalizarea deformației armăturii în tot lungul elementului cu suma deformațiilor elementare din diferite secțiuni.

II

Pentru a analiza modul cum lipsa aderenței influențează variația deformațiilor specifice ale betonului și armăturii în lungul grinzii, se studiază în continuare, comparativ (cu aderență și fără aderență), cazul secțiunii dreptunghiulare (fig. 2) în cadrul unor ipoteze valabile pentru încărcări relativ mici.

---

*) O ipoteză apropiată și anume egalizarea deformației totale a armăturii, în tot lungul barei, cu deformația totală a betonului la nivelul armăturii, a fost utilizată pentru calculul surplusului de efort dat de încărcarea elementelor de beton precomprimat, numai în stadiul elastic (pentru un caz particular, de ing. A. P. Korovkin și pentru un caz mai general de un colectiv al Institutului de mecanică aplicată al Academiei R.P.R. [4].

Se consideră că betonul lucrează elastic. Se admite (în elementele fără aderenţă numai pentru beton) ipoteza secţiunilor plane. Se neglijează aportul betonului din stratul de acoperire al armăturii.

Pentru *elementele fără aderenţă* se admite, aşa cum s-a arătat, egalizarea deformaţiilor specifice şi respectiv a eforturilor unitare din armătură pe baza alungirii medii. Echilibrul secţiunilor rezultă prin egalarea acţiunii eforturilor unitare din beton cu acţiunea momentului exterior sumată algebric cu acţiunea eforturilor din armătură asupra betonului.

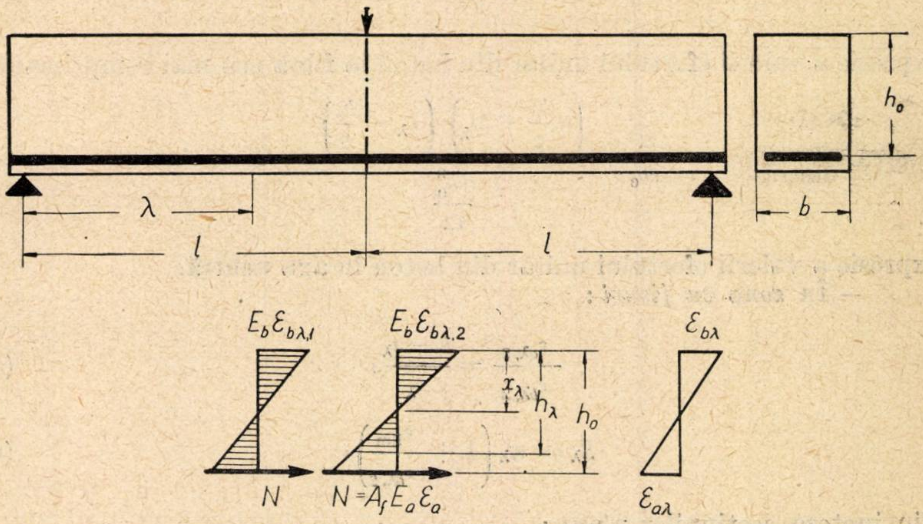


Fig. 2. — Elemente de calcul pentru secţiunea dreptunghiulară.

Separînd o zonă în care nu există fisuri (de la $\lambda = 0$ la $\lambda = \lambda_1$) şi o zonă în care există fisuri, respectiv în care este depăşită alungirea limită la întindere a betonului $\varepsilon_{\lim}$ (de la $\lambda = \lambda_1$ la $\lambda = l$), se poate scrie, pentru o încărcare simetrică

$$N = A_f\, E_a \frac{1}{l}\left[\int_0^{\lambda_1} \varepsilon_{a\lambda,1}\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{l} \varepsilon_{a\lambda,2}\, d\lambda\right], \tag{1}$$

în care

N este efortul din armături;

A_f, secţiunea armăturilor;

E_a, modulul de elasticitate al armăturii;

$\varepsilon_{a\lambda,1}$ şi $\varepsilon_{a\lambda,2}$ alungirile specifice ale armăturii într-o secţiune oarecare (de abscisă λ) socotită izolat, respectiv independent de egalizarea eforturilor unitare ($\varepsilon_{a\lambda,1}$ în zona fără fisuri, $\varepsilon_{a\lambda,2}$ în zona cu fisuri).

În continuare, se poate scrie:

— În *zona fără fisuri*:

$$\frac{\varepsilon_{a\lambda,1}}{\varepsilon_{b\lambda,1}} = \frac{h_0 - x_\lambda}{x_\lambda}, \tag{2}$$

din ipoteza secţiunilor plane;

$$\frac{N}{bh_0} - \frac{N\frac{h_0}{2} - M_\lambda}{\frac{bh_0^2}{6}} = E_b\,\varepsilon_{b\lambda,1} \tag{3}$$

expresie a valorii efortului unitar din beton la fibra cea mai comprimată;

$$\frac{N}{bh_0} + \frac{\left(N\frac{h_0}{2} - M_\lambda\right)\left(x_\lambda - \frac{h_0}{2}\right)}{\frac{bh_0^3}{12}} = 0 \tag{4}$$

expresie a valorii efortului unitar din beton în axa neutră.

— În *zona cu fisuri*:

$$\frac{\varepsilon_{a\lambda,2}}{\varepsilon_{b\lambda,2}} = \frac{h_0 - x_\lambda}{x_\lambda}, \tag{5}$$

$$h_\lambda = x_\lambda\left(1 + \frac{\varepsilon_{\lim}}{\varepsilon_{b\lambda,2}}\right), \tag{6}$$

din ipoteza secţiunilor plane;

$$\frac{N}{bh_\lambda} - \frac{N\left(h_0 - \frac{h_\lambda}{2}\right) - M_\lambda}{\frac{bh_\lambda^2}{6}} = E_b\,\varepsilon_{b\lambda,2}, \tag{7}$$

valoarea efortului unitar din beton la fibra cea mai comprimată;

$$\frac{N}{bh_\lambda} + \frac{\left[N\left(h_0 - \frac{h_\lambda}{2}\right) - M_\lambda\right]\left(x_\lambda - \frac{h_\lambda}{2}\right)}{\frac{bh_\lambda^3}{12}} = 0, \tag{8}$$

valoarea efortului unitar din beton în axa neutră.

În formulele de mai sus:

$\varepsilon_{b\lambda,1}$ şi $\varepsilon_{b\lambda,2}$ sînt deformaţiile specifice ale betonului într-o secţiune de abscisă λ ($\varepsilon_{b\lambda,1}$ în zona fără fisuri, $\varepsilon_{b\lambda,2}$ în zona cu fisuri);

M_λ — momentul exterior (în secţiunea de abscisă λ);

h_λ — înălţimea nefisurată (în secţiunea de abscisă λ);

E_b — modulul de elasticitate al betonului.

Valoarea lui N se determină prin înlocuirea lui $\varepsilon_{a\lambda,1}$ şi $\varepsilon_{a\lambda,2}$ în ecuaţia (1) şi integrarea pe cele două porţiuni. Pentru o grindă simplu rezemată de lungime 2 l și încărcată cu o sarcină concentrată 2 P la mijlocul deschiderii, utilizînd următoarele notații adimensionale :

$$\alpha = \frac{E_a}{E_b}\cdot\frac{A_f}{bh_0};\quad \beta = \frac{bh_0^2 E_b\cdot\varepsilon_{\lim}}{Pl};\quad \gamma = \frac{Pl}{Nh_0};\quad \bar{\varepsilon}_{b\lambda,1} = \frac{\varepsilon_{b\lambda,1}}{\varepsilon_{\lim}};$$

$$\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2} = \frac{\varepsilon_{b\lambda,2}}{\varepsilon_{\lim}};\quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{l};$$

se obține

$$\frac{1}{\alpha} = 3\gamma\bar{\lambda}_1(2-\bar{\lambda}_1) - 4 \tag{9}$$

și

$$1 = \frac{2(3\gamma\bar{\lambda}_1 - 2)}{\beta\gamma}. \tag{10}$$

Din relațiile (9) și (10) se scot valorile lui γ și $\bar{\lambda}_1$ (respectiv valoarea efortului egalizat din armătură și lungimea zonei nefisurate), cînd se dau α și β. Mai departe, valorile deformațiilor specifice din armătură și beton se obțin după cum urmează :

$$\bar{\varepsilon}_a = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}, \tag{11}$$

$$\bar{\varepsilon}_{b\lambda,1} = \frac{6\gamma\bar{\lambda} - 2}{\beta\gamma}, \tag{12}$$

$$3(1-\gamma\bar{\lambda}) = \frac{2}{\beta\gamma}\cdot\frac{\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2} - 2}{(\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2} - 1)^2}. \tag{13}$$

Aici $\bar{\varepsilon}_a = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_{\lim}}$.

Pentru *elementele cu aderență*, în cadrul acelorași ipoteze, se obține

— În *zona fără fisuri* :

$$\xi = \frac{1 + 2\alpha}{2(1+\alpha)}; \tag{14}$$

$$\xi(3-\xi) - \frac{(1-\xi)^2}{1+2\alpha} = \frac{6\bar{\lambda}}{\beta\bar{\varepsilon}_{b\lambda,1}}; \tag{15}$$

$$\bar{\varepsilon}_{a\lambda,1} = \frac{\bar{\varepsilon}_{b\lambda,1}}{1+2\alpha}. \tag{16}$$

— În *zona cu fisuri*:

$$\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 2\alpha(1-\xi)}}; \tag{17}$$

$$(3-\xi)\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2} - \left(3 - 3\xi - \frac{2\xi}{\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2}}\right)\frac{1}{\bar{\varepsilon}_{b\lambda,2}} = \frac{6\bar{\lambda}}{\beta\xi} \tag{18}$$

$$\bar{\varepsilon}_{a\lambda,2} = \bar{\varepsilon}_{b\lambda,2}\frac{1-\xi}{\xi}. \tag{19}$$

În formulele (14) — (19), $\xi = \frac{x}{h_0}$ determină poziția axei neutre.

În figura 3 este arătată, atît pentru elemente cu aderență cît și pentru elemente fără aderență, variația deformațiilor specifice din armătură și de la fața superioară a betonului, pentru $\alpha = 0{,}15$, în momentul apariției fisurilor în elementul fără aderență ($\bar{\gamma}_1 = 1$, respectiv $\beta = 5{,}625$). În figura 4 este arătată variația acelorași deformații specifice, tot pentru $\alpha = 0{,}15$, momentul încovoietor fiind cu aproximativ 25% mai mare ($\beta = 4{,}5$).

Se vede că în ambele cazuri deformațiile liniare totale (pe întreaga lungime a grinzii) sînt aproximativ aceleași atît pentru beton cît și pentru armătură, indiferent dacă există sau nu aderență. Pentru armătură însă, alungirea specifică maximă în cazul lipsei aderenței este redusă față de elementele cu aderență, aproximativ în raportul dintre suprafața momentelor exterioare și suprafața de momente $M_{\max} \cdot 2l$; în timp ce pentru fața superioară a betonului scurtarea specifică maximă este mai mare chiar decît în cazul elementelor cu aderență.

III

1. Pentru verificările experimentale au fost alese tipuri de elemente avînd o zonă comprimată puternică, în scopul de a evita ruperi premature prin distrugerea betonului comprimat. S-au făcut încercări cu elemente avînd secțiunea ca în figura 5, echivalente cu grinzile în T, secțiune ce apare curent la planșeele cu nervuri, la grinzile principale de poduri etc.

A fost încercat un tip de grindă din beton armat obișnuit (tip A, fig. 6) și o grindă din beton precomprimat (tip B, fig. 7), la care precomprimarea a fost realizată prin intermediul unei bare filetate la capete, postîntinsă cu presa pentru traverse, realizată de I.M.A. (efort de întindere circa 5 000 kg/cm²).

În figurile 8 și 9 sînt arătate grinzi experimentale înainte de încercare.

Poziția relativă a armăturii față de beton a fost menținută pe verticală cu ajutorul unor dispozitive, ca în figura 10.

Din fiecare tip au fost confecționate cîte 6 elemente care au fost încercate după cum se arată în tablourile nr. 1 și 2.

Măsurarea deformațiilor axiale s-a făcut cu tensometre electrice, pe fiecare element lipindu-se cîte 30—40 mărci (fig. 11).

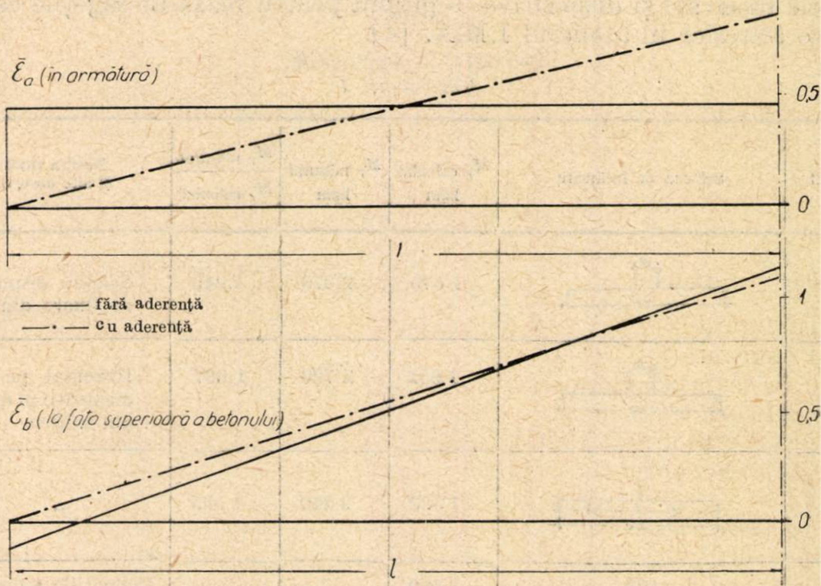


Fig. 3. — Variația deformațiilor specifice în armătură și la fața superioară a betonului pentru $\alpha = 0{,}15$ și $\beta = 5.625$.

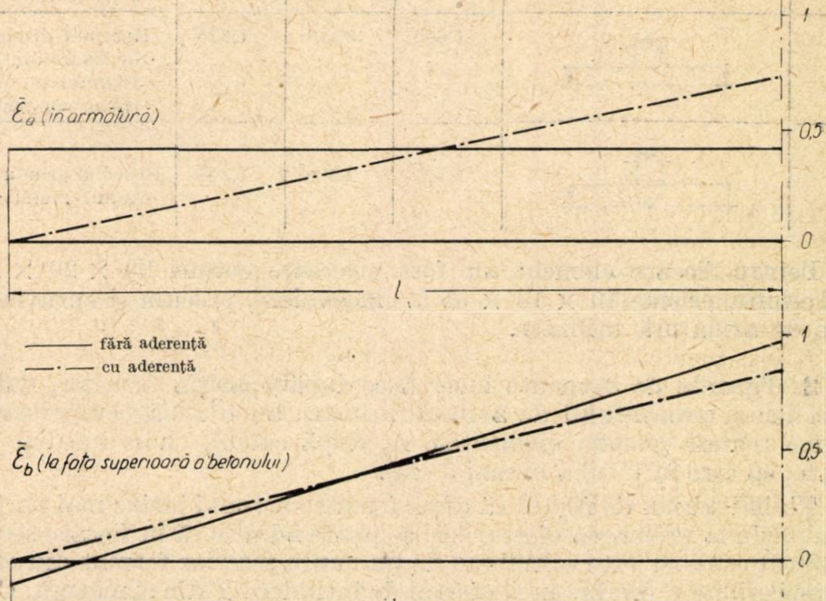
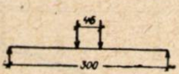
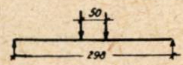
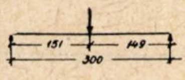
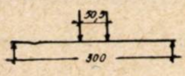
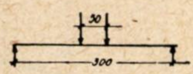
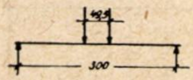


Fig. 4. — Variația deformațiilor specifice în armătură și la fața superioară a betonului, pentru $\alpha = 0{,}15$ și $\beta = 4{,}5$.

Pentru măsurarea săgeţilor au fost utilizate microcomparatoare, iar la unele încercări şi dispozitive — pîrghii pentru măsurat săgeţile confecţionate anterior în atelierul I.M.A. [4].

Tabloul nr. 1

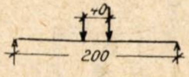
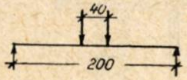
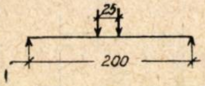
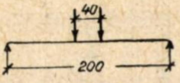
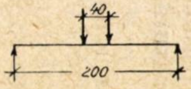
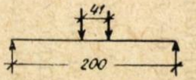
Element	Schema de încărcare	M_r calculat kgm	M_r măsurat kgm	$\frac{M_r \text{ măsurat}}{M_r \text{ calculat}}$	Natura ruperii şi alte observaţii
A_1		1 675	2 078	1,240	Scăpat dispozitivul de fixare din mijloc
A_2		1 652	2 790	1,687	Rezemat pe leagăn dispozitivul de fixare din mijloc
A_3		1 522	2 340	1,505	,,
A_4		1 500			Indicaţiile valorice nu au putut fi folosite presa funcţionînd nesatisfăcător
A_5		1 606	3 010	1,875	Rezemat dispozitivul de fixare din mijloc. Betonul nu s-a sfărîmat complet
A_6		1 577	2 200	1,395	Rezemat grinda pe leagănul metalic

Pentru fiecare element au fost încercate cuburi 20 × 20 × 20 la compresiune, prisme 10 × 10 × 55 la încovoiere, precum şi epruvete din barele de armătură utilizate.

2. Tipurile de elemente încercate, după apariţia fisurilor, datorită formei lor şi procentului de armare utilizat, au o zonă comprimată de înălţime redusă (pentru elementele A, după calcul, chiar imediat după fisurare, ea este în jurul a numai 5 cm).

Ţinînd seama de faptul că după fisurare betonul întins mai participă foarte puţin la preluarea eforturilor, se poate admite că în fiecare secţiune momentul exterior este echilibrat de un cuplu interior format din efortul de compresiune *C* din beton şi efortul de întindere *T* din armătură. Caracteristicile secţiunilor alese fac ca braţul de pîrghie între *C* şi *T* să varieze destul de puţin atît în lungul grinzii cît şi în timpul creşterii sarcinilor : pentru elementul A, braţul de pîrghie, din momentul apariţiei fisurilor şi

Tabloul nr. 2

Element	Schema de încărcare	M_f calculat în cazul armăturii aderente kgm	M_f măsurat kgm	$\frac{M_f \text{ măsurat}}{M_f \text{ calculat}}$	M_r calculat kgm	M_r măsurat kgm	$\frac{M_r \text{ măsurat}}{M_r \text{ calculat}}$	Natura ruperii și alte observații
B_1		4 005	4 140	1,031	6 200	6 600	1,073	Distrus o șaibă. Început formarea unei „coji” în zona comprimată
B_2		4 005	3 010	0,751	6 200	7 700	1,241	Forfecat filetul unei piulițe. Betonul comprimat distrus
B_3		3 953	3 640	0,921	6 200	6 750	1,090	Rezemat dispozitivul de fixare. Betonul comprimat nu s-a distrus
B_4		3 950	4 140	1,048	6 200	8 000	1,290	Distrus betonul comprimat
B_5		6 051	6 300	1,040	12 080			Întrerupt încercarea; cedat standul. S-a încercat pînă la 9 870 kgm
B_6		5 360	5 050	0,942	6 200	7 300	1,179	Rupt bara la capătul filetat

pînă la rupere variază între 20,5 şi 21,5 cm ; pentru elementul B aceste limite sînt 23,4 şi 24,4 cm.

Drept consecinţă rezultă că efortul care ar trebui să se dezvolte în armături, în dreptul diferitelor porţiuni de lungime infinitezimală socotite izolat, este direct proporţional cu momentul încovoietor respectiv. Admiţînd ipoteza egalizării eforturilor din armături, pe baza egalării alungirii totale a armăturii pe porţiunea liberă, cu suma alungirilor pe diferitele porţiuni, aşa cum s-a arătat mai sus, rezultă reduceri simţitoare ale efor-

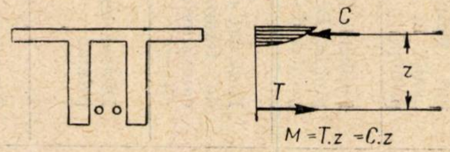


Fig. 5. — Tipul de secţiune utilizat pentru elementele experimentale.

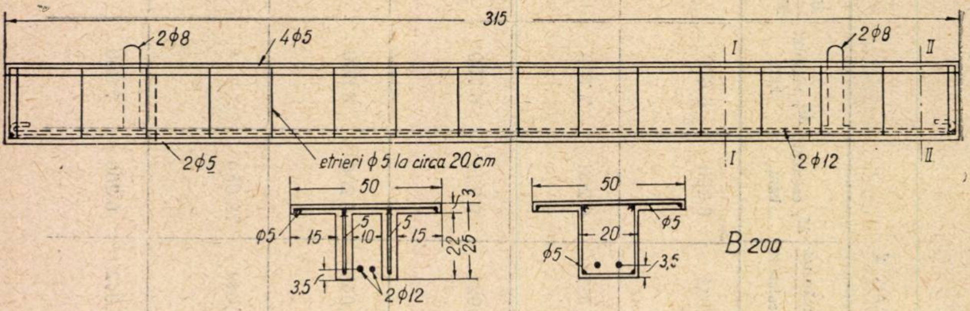

315
2φ8
4φ5
I
2φ8
II
2φ5
etrieri φ 5 la circa 20 cm
I
2φ12
II
50
3
φ5
15
5
10
5
15
22
25
3,5
2φ12
50
φ5
20
φ5
3,5
B 200

Fig. 6. — Element experimental tip A.

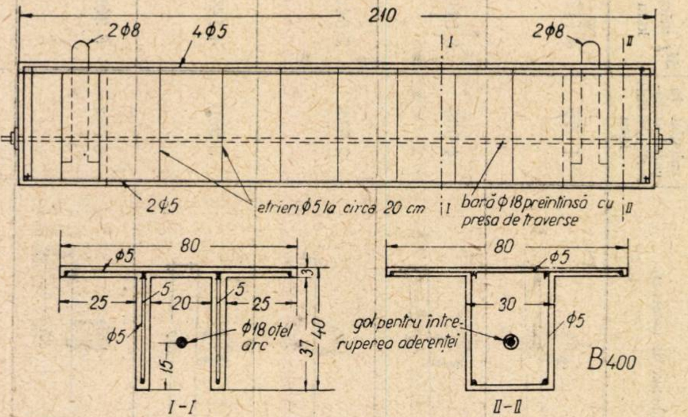

210
2φ8
4φ5
I
2φ8
II
2φ5
etrieri φ5 la circa 20 cm
I
bară φ18 preîntinsă cu presa de traverse
II
80
φ5
3
25
5
20
5
25
φ5
φ18 oţel arc
40
37
15
I-I
80
φ5
30
gol pentru întreruperea aderenţei
φ5
B 400
II-II

Fig. 7. — Element experimental tip B.

tului mediu din armături. Făcînd raportul suprafețelor de moment (fig. 12), se obține :

— pentru elementul A cu două sarcini simetrice, la distanța de 50 cm între ele (fig. 12, *a*), efortul rezultat în armătură este numai 0,745 din cel maxim în porțiune izolată ;

— pentru elementul B cu două sarcini simetrice, la distanță de 40 cm între ele (fig. 12, *b*), efortul rezultat este de 0,75 din cel maxim.

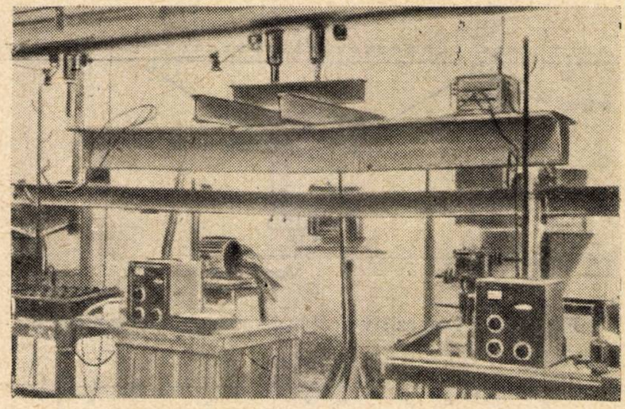


Fig. 8. — Element experimental tip A înainte de încercare.

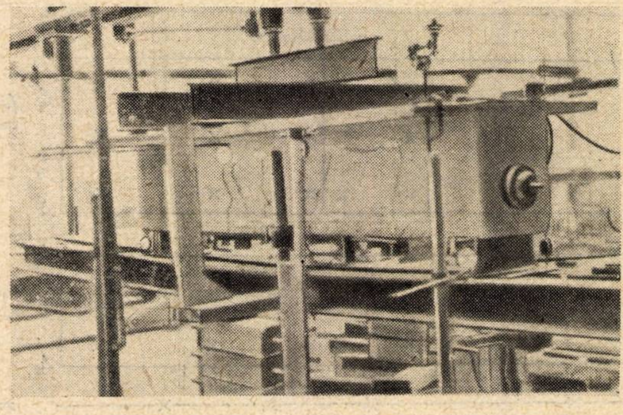


Fig. 9. — Element experimental tip B înainte de încercare.

Se menționează că s-a neglijat atît frecarea armăturii de dispozitivele de fixare, cît și lunecarea armăturii în zonele de ancorare de la capete, care dau efecte limitate și contrarii.

3. Indicațiile mărcilor tensometrice puse pe armături au dat uneori rezultate variate în lungul barelor sau între cele două bare. Aceste variații se datoresc în mare parte imposibilităţii de a se obţine o încărcare perfect simetrică, precum şi efectului de frecare la dispozitivele de fixare, iar la elementele A şi faptului că la începerea încercării barele nu erau perfect drepte şi orizontale.

Totuşi, exceptînd valorile reduse ale variaţiei eforturilor unitare din barele elementelor B înainte de apariţia fisurilor, la care este mai greu să se interpreteze cantitativ rezultatele obţinute, în rest se pot trage şi concluzii cantitative prin comparaţie cu calculele.

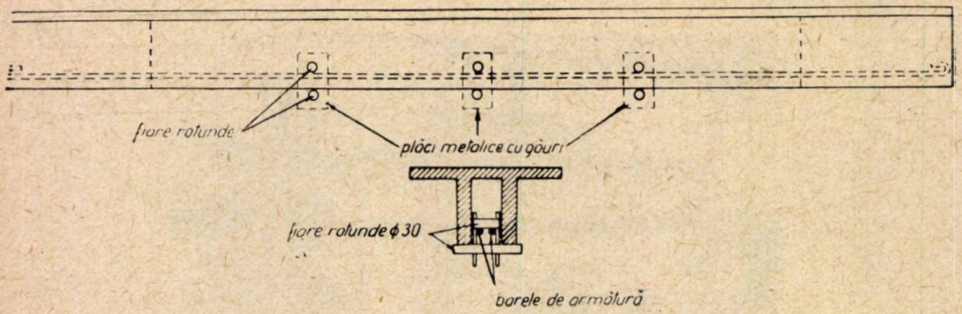

fiare rotunde
plăci metalice cu găuri
fiare rotunde ϕ 30
barele de armătură

Fig. 10. — Dispozitiv pentru fixarea poziţiei armăturii.

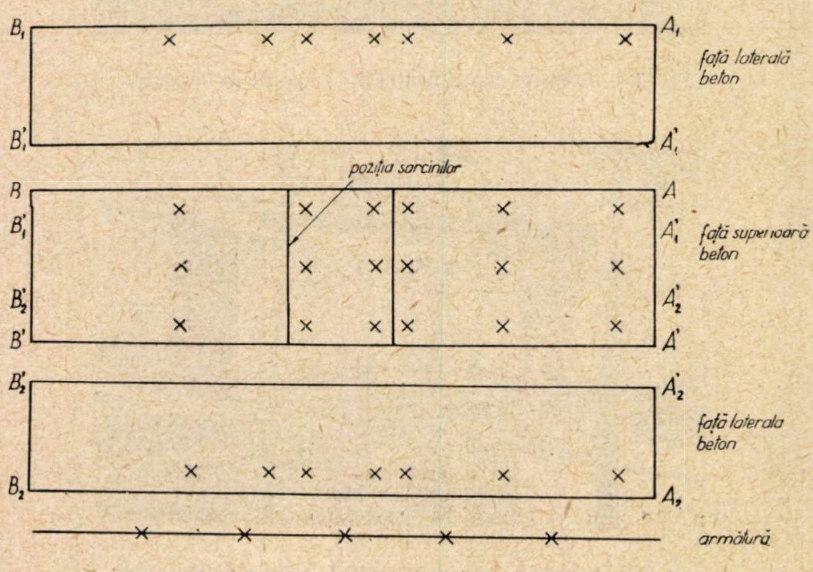

B_1
A_1
faţă laterală beton
B_1'
A_1'
poziţia sarcinilor
B
A
B_1'
A_1'
faţă superioară beton
B_2'
A_2'
B'
A'
B_2'
A_2'
faţă laterala beton
B_2
A_2
armătură

Fig. 11. — Poziţiile mărcilor tensometrice.

Pentru exemplificarea regularităţii citirilor, în figura 13 sînt arătate rezultatele obţinute pe un interval destul de extins pentru barele elementului A_4.

În figurile 14 și 15 sînt arătate comparații între alungiri măsurate și valori calculate, atît prin egalizarea pe baza alungirii maxime, cît și prin egalizarea pe baza alungirii medii. Se observă buna corespondență dintre valorile măsurate și calculul făcut în a doua ipoteză.

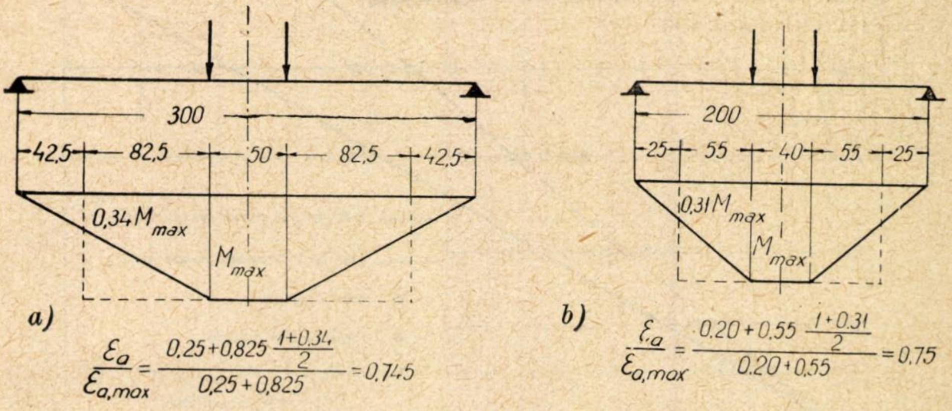

300
42.5
82.5
50
82.5
42.5
0.34 M max
M max
a)
εa / εa,max = (0.25 + 0.825 · (1+0.34)/2) / (0.25 + 0.825) = 0.745
200
25
55
40
55
25
0.31 M max
M max
b)
εa / εa,max = (0.20 + 0.55 · (1+0.31)/2) / (0.20 + 0.55) = 0.75

Fig. 12. — Reducerea efortului unitar maxim din armătură :
a) pentru element tip A, *b)* pentru element tip B.

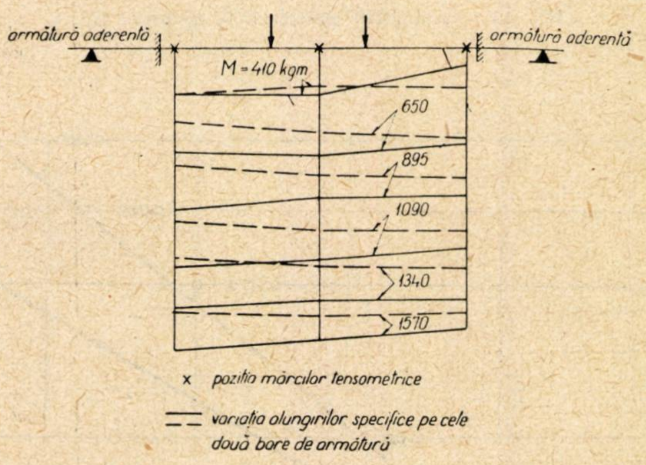

armătură aderentă
armătură aderentă
M = 410 kgm
650
895
1090
1340
1570
× poziția mărcilor tensometrice
variația alungirilor specifice pe cele două bare de armătură

Fig. 13. — Citiri tensometrice pe barele de armătură ale elementului A_4.

În ceea ce privește deformațiile liniare măsurate pe beton, indicațiile tensometrelor sînt mai puțin sigure din punct de vedere cantitativ. În afara cauzelor de perturbare a rezultatelor arătate anterior, mai intervin aici și neomogenitatea materialului precum și complexitatea stării de solicitare a plăcii.

Totuși și aici se pot trage concluzii calitative, verificîndu-se în mod convingător concentrarea deformațiilor betonului comprimat pe o porțiune

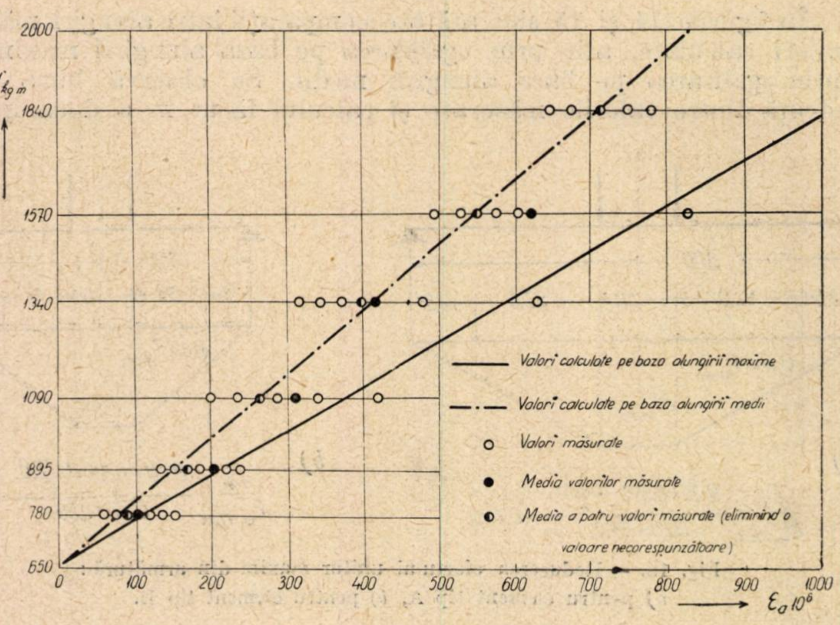


Fig. 14. — Alungirile armăturii la elemente tip A.

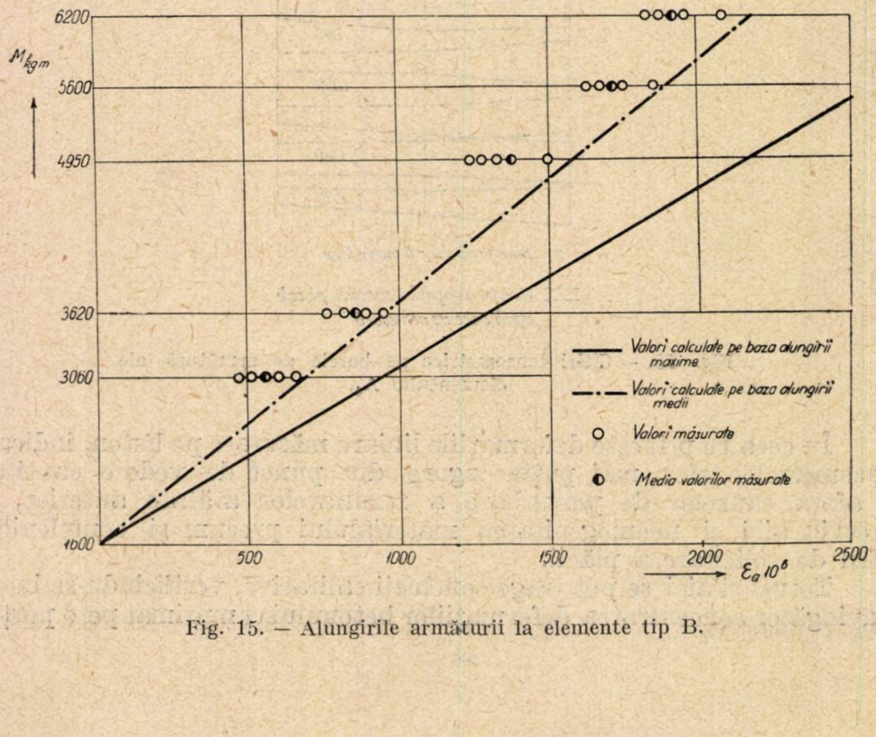


Fig. 15. — Alungirile armăturii la elemente tip B.

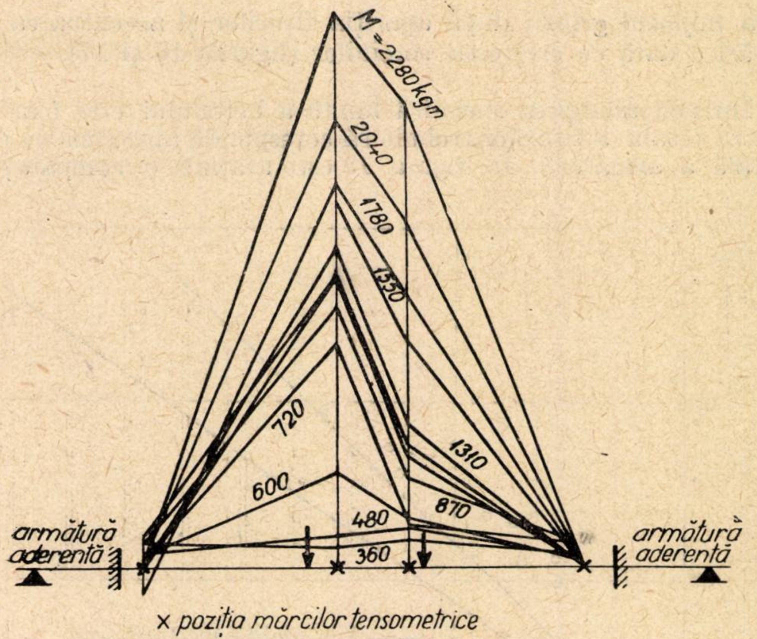


Fig. 16. — Deformaţii specifice ale betonului comprimat la un element tip A (citiri tensometrice).

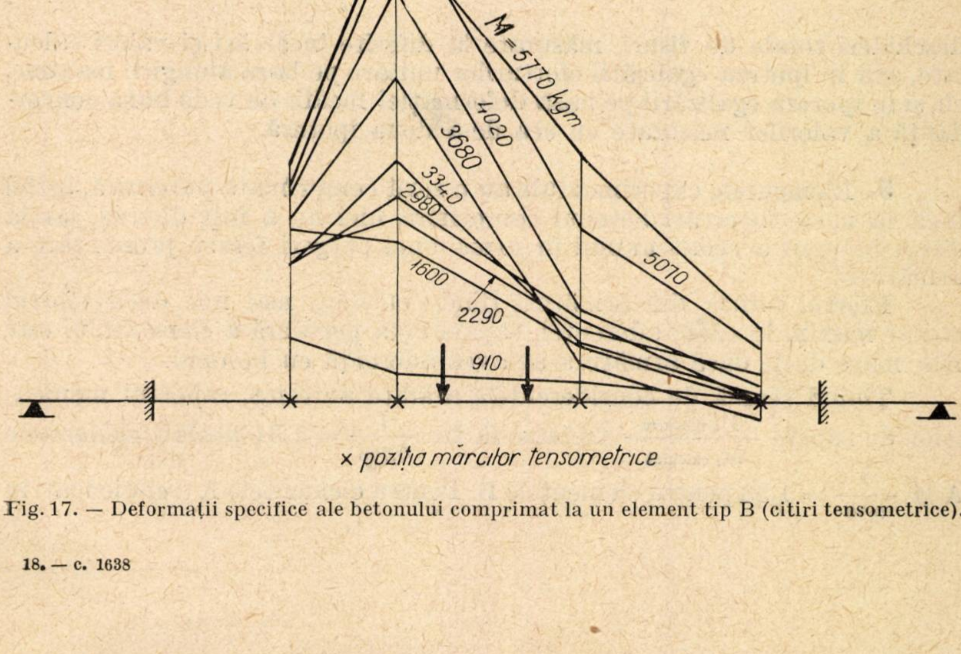


Fig. 17. — Deformaţii specifice ale betonului comprimat la un element tip B (citiri tensometrice).

redusă la mijlocul grinzii după apariţia fisurilor şi accentuarea acestei concentrări o dată cu creşterea sarcinilor (figurile 16 şi 17).

4. Întrucît alungirea specifică limită a betonului este foarte mică, deschiderea totală a fisurilor trebuie să corespundă aproximativ cu alungirea totală a armăturii. În figura 18 este arătată o comparaţie între deschideri totale de fisuri măsurate la diferite încărcări şi valori calculate, atît în ipoteza egalizării eforturilor unitare pe baza alungirii maxime, cît şi în ipoteza egalizării pe baza deformaţiei medii. Se vede buna concordanţă a valorilor măsurate cu cea de-a doua ipoteză.

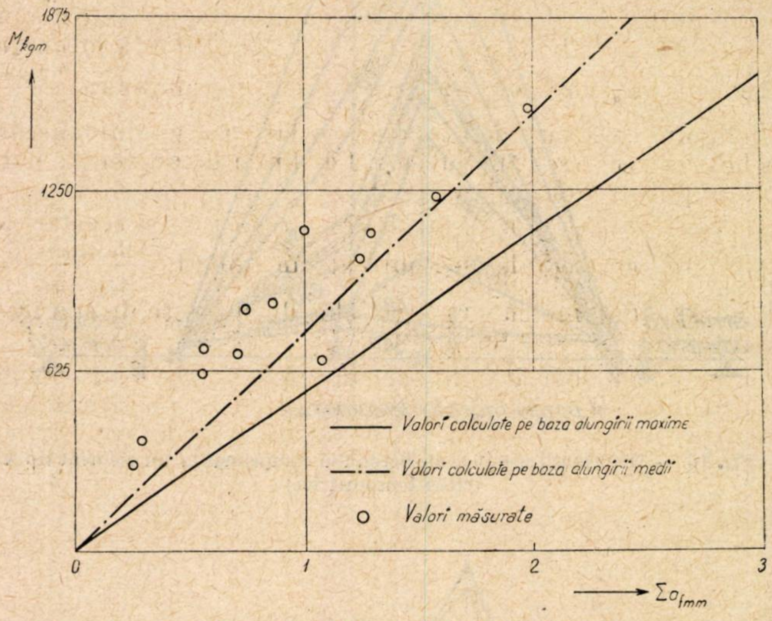


Fig. 18. — Deschiderea totală a fisurilor.

5. Elementele experimentale au o zonă comprimată puternică, astfel încît la unele încercări betonul comprimat nici nu a fost distrus, iar la altele betonul a cedat numai în urma unei curgeri foarte pronunţate a armăturii.

Efortul unitar din armături fiind continuu mai mic decît efortul unitar maxim în cazul aderenţei, capacitatea portantă a elementului este mai mare decît dacă armătura ar avea aderenţă cu betonul.

Ţinînd seamă de considerentele arătate anterior, raportul momentelor de rupere $\frac{M_{r\ \text{măsurat}}}{M_{r\ \text{calculat}}}$ trebuie să fie $\frac{1}{0{,}745} = 1{,}34$ pentru elementele A şi $\frac{1}{0{,}75} = 1{,}33$ pentru elementele B. Pentru elementele A trebuie luat în considerare și sporul de capacitate portantă datorit ecruisării oțelului moale după curgere, așa cum s-a arătat și anterior în literatură [2] pentru elemente de beton armat cu procent de armare redus.

Estimarea alungirii specifice a armăturii în momentul atingerii săgeții maxime posibile pentru modul de încercare utilizat (rezemarea mijlocului grinzii pe leagănul mecanic al standului de încercare) indică o valoare de aproximativ 2%. Încercările ajutătoare făcute asupra unor epruvete din barele întrebuințate arată că la o asemenea alungire efortul unitar din oțel este cu aproximativ 30...35% mai mare decît limita de curgere.

Elementul A_6, element cu aderență, a indicat un raport $\frac{M_{r\ \text{măsurat}}}{M_{r\ \text{calculat}}} = 1{,}395$. Sporul ceva mai ridicat se poate datora efectului lunecării armăturii în beton, efect asemănător cu cel al lipsei de aderență, dar desigur de importanță limitată.

La elementul A_5, la care de altfel s-au efectuat și repetări ale sarcinilor pe anumite intervale, s-a obținut un raport $\frac{M_{r\ \text{măsurat}}}{M_{r\ \text{calculat}}} = 1{,}875$, ceea ce corespunde bine cu sumarea celor două efecte de sporire a capacității portante : $1{,}34 \times 1{,}35 = 1{,}81$.

Pentru unele elemente (de exemplu A_1, B_1, B_3) s-au obținut valori sensibil mai mici decît cele estimate, datorită unor defecțiuni locale (scăparea sau rezemarea dispozitivelor de fixare a armăturii, strivirea unei șaibe subdimensionate). Întotdeauna însă raportul $\frac{M_{r\ \text{măsurat}}}{M_{r\ \text{calculat}}}$ a fost supraunitar.

IV

Încercările făcute au constituit o verificare multiplă a ipotezei egalizării deformațiilor în lungul barelor de armătură pe baza unei deformații medii : verificarea s-a făcut prin măsurarea directă a deformațiilor armăturii în timpul încărcării, prin analizarea capacității portante a elementelor și prin confruntarea deschiderii totale a fisurilor măsurate cu cea calculată.

Prin comparație cu elementele de beton armat sau precomprimat la care există aderență între beton și armătură pe toată lungimea barei, elementele fără aderență pe porțiunea mijlocie au un moment de apariție a fisurilor mai mic. La beton precomprimat însă, la care rezistența la fisurare constă în cea mai mare parte în efectul precomprimării, reducerea capacității de rezistență la fisurare datorită lipsei aderenței este puțin importantă și din tabloul nr. 2 se vede că practic raportul momentelor de fisurare $\frac{M_f\ \text{măsurat}}{M_f\ \text{calculat}}$ a fost aproximativ 1 pentru toate grinzile B încercate, cu excepția grinzii B_2, la care s-a produs o importantă reducere a precomprimării în timpul încercării datorită strivirii unei șaibe.

Deschiderea fisurilor și săgețile în stadiul II sînt mai mari la elementele fără aderență decît la cele cu aderență. În figura 19 sînt arătate unele valori experimentale de săgeţi (*f*), comparate cu valorile de calcul. Numai unele rezultate experimentale depăşesc cu 10...20% valorile calculate.

Pentru elementele fără aderenţă, $\xi_{crit.}$ (raportul $\frac{x}{h_0}$ de la care ruperea se produce prin sfărîmarea zonei comprimate înainte de curgerea armăturii) are o valoare mai mică decît la elementele cu aderenţă, dar dacă prin forma şi caracteristicile secţiunii (calitatea betonului, procentul şi calitatea armăturilor), se obţine ruperea prin curgerea sau ruperea armăturii, atunci capacitatea portantă a elementului fără aderenţă este mai mare decît a unui element corespunzător cu aderenţă. Pe lîngă alţi parametrii creşterea este dependentă şi de modul de încărcare. Pentru tipurile încercate, sporul de capacitate portantă, datorit numai egalizării alungirilor specifice din armătură pe baza alungirii medii, a rezultat de aproximativ 30%.

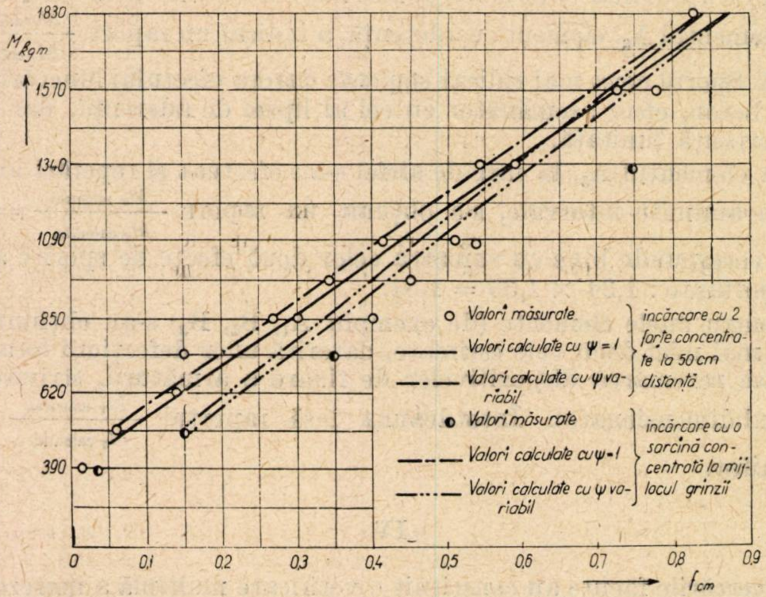


Fig. 19. — Săgeţi la mijlocul elementului.

De sigur că nu se poate recomanda o reducere intenţionată a aderenţei pentru elementele de beton armat, folosite în mod curent în construcţii.

Se utilizează însă elemente de construcţii de secţiune *T* sau *I* cu zonă comprimată de lăţime mare, cu armături neaderente (beton precomprimat cu armături postîntinse, la care nu se restabileşte aderenţa după punerea sub tensiune), sau cu aderenţa redusă (armături postîntinse cu restabilirea aderenţei prin injectare de mortar sau elemente din beton armat obişnuit la care armăturile lunecă în beton din cauza eforturilor

mari existente în armături înainte de rupere). Pentru asemenea elemente, sporul de capacitate portantă pus în evidență prin prezentul studiu reprezintă rezerve de rezistență de care este bine să se țină seama.

Primită la redacție la 18 aprilie 1957.

ДЕФОРМАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ ОБЫЧНОГО ИЛИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОНА ПРИ ИЗГИБЕ ПРИ ОТСУТСТВИИ СЦЕПЛЕНИЯ БЕТОНА С АРМАТУРОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследование основано на предположении, что в изгибаемых элементах из обычного или предварительно напряженного железобетона, в которых в срединной их части отсутствует сцепление между бетоном и арматурой, выравнивание напряжений вдоль стержней арматуры происходит на основе средней удельной деформации, а не на основе максимального удлинения.

При небольших усилиях, при которых можно допустить упругое поведение бетона, путем расчетов получается изменение удельных деформаций в арматуре и в наиболее сжатом слое бетона, как указано на рис. 3 и 4 (прямоугольная свободно лежащая балка с нагрузкой, сосредоточенной посередине пролета).

Были произведены опыты, которые подтвердили предположения, лежащие в основе работы, как путем измерений удлинений арматуры (электрическими датчиками, рис. 14 и 15), так и при помощи опытных данных в связи с раскрытием трещин (рис. 18) и с несущей способностью элементов (таблицы 1 и 2).

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Выравнивание напряжений в арматуре на основе средней удельной деформации.

Рис. 2. — Расчетные элементы для прямоугольного сечения.

Рис. 3. — Изменение удельных деформаций в арматуре и на верхней поверхности бетона при $\alpha=0,15$ и $\beta=5,625$.

Рис. 4. — Изменение удельных деформаций в арматуре и на верхней поверхности бетона при $\alpha=0,15$ и $\beta=4,5$.

Рис. 5. — Тип сечения, примененный для испытываемых элементов.

Рис. 6. — Испытываемый элемент типа А.

Рис. 7. — Испытываемый элемент типа В.

Рис. 8. — Испытываемый элементы типа А до испытания.

Рис. 9. — Испытываемый элемент типа В до испытания.

Рис. 10. — Устройство для фиксирования положения арматуры.

Рис. 11. — Положение тензометрических датчиков.

Рис. 12. — Уменьшение наибольшего напряжения в арматуре: *a)* для элемента типа А; *b)* для элемента типа В.

Рис. 13. — Тензометрические отсчеты на стержнях арматуры элемента A_4.
Рис. 14. — Удлинения арматуры в элементах типа А.
Рис. 15. — Удлинения арматуры в элементах типа В.
Рис. 16. — Удельные деформации сжатого бетона в элементе типа А (тензометрические отсчеты).
Рис. 17. — Удельные деформации сжатого бетона в элементе типа В (тензометрические отсчеты).
Рис. 18. — Полное раскрытие трещин.
Рис. 19. — Стрела прогиба посередине элемента.

DÉFORMATIONS DES ÉLÉMENTS DE BÉTON ARMÉ ET PRÉCONTRAINT, À ARMATURE NON ADHÉRENTE, SOUMIS À LA FLEXION

(RÉSUMÉ)

Cette étude repose sur l'hypothèse que, pour les éléments de béton armé ou précontraint, soumis à la flexion, dans lesquels l'adhérence entre le béton et l'armature est interrompue sur une portion médiane, l'égalisation des efforts unitaires le long des barres d'armature a lieu en vertu d'une déformation spécifique moyenne et non pas en raison de l'allongement maximum.

Pour des efforts réduits, pour lesquels on peut admettre un comportement élastique du béton, on obtient par le calcul une variation des déformations spécifiques dans l'armature et dans la fibre la plus comprimée du béton, ainsi qu'il ressort des figures 3 et 4 (poutre rectangulaire, simplement appuyée, soumise à l'action d'une charge concentrée au milieu de la portée).

On a fait des essais, qui ont confirmé l'hypothèse de l'étude, tant par des mesures faites sur les allongements de l'armature (on a utilisé des tensiomètres électriques ; fig. 14 et 15) que par les données expérimentales se rapportant à l'ouverture des fissures (fig. 18) et à la capacité portante des éléments (tableaux 1 et 2).

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Egalisation des efforts unitaires dans l'armature en raison de la déformation spécifique moyenne.
Fig. 2. — Eléments de calcul pour la section rectangulaire.
Fig. 3. — Variation des déformations spécifiques dans l'armature et à la face supérieure du béton, pour $\alpha = 0{,}15$ et $\beta = 5{,}625$.
Fig. 4. — Variation des déformations spécifiques dans l'armature et à la face supérieure du béton, pour $\alpha = 0{,}15$ et $\beta = 4{,}5$.
Fig. 5. — Type de section utilisé pour les éléments expérimentaux.
Fig. 6. — Elément expérimental du type A.
Fig. 7. — Elément expérimental du type B.
Fig. 8. — Elément expérimental du type A, avant l'épreuve.
Fig. 9. — Elément expérimental du type B, avant l'épreuve.
Fig. 10. — Dispositif pour fixer la position de l'armature.
Fig. 11. — Positions des jauges tensiométriques.

Fig. 12. — Réduction de l'effort unitaire maximum dans l'armature : *a*) pour l'élément du type A ; *b*) pour l'élément du type B.

Fig. 13. — Lectures tensiométriques sur les barres d'armature de l'élément A_4.

Fig. 14. — Allongements de l'armature des éléments du tipe A.

Fig. 15. — Allongements de l'armature des éléments du type B.

Fig. 16. — Déformations spécifiques du béton comprimé d'un élément du type A (lectures tensiométriques).

Fig. 17. — Déformations spécifiques du béton comprimé d'un élément du type B (lectures tensiométriques).

Fig. 18. — Ouverture totale des fissures.

Fig. 19. — Flèches au milieu de l'élément.

BIBLIOGRAFIE

1. Chambaud R., *Le calcul à la rupture par flexion des poutres en béton armé à faible pourcentage d'armature tendue*. Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, iunie 1954.
2. Guyon Y., *Le béton précontraint*, Eyrolles, Paris, 1951.
3. Murașev V. I., *Trescinoustoicivost, jestkosti i procinosti jelezobetona*, Mașstroizdat, Moscova, 1950.
4. * * * *Element de planșeu de deschidere mare din beton precomprimat*, Ed. Ministerului Construcțiilor, București, 1953.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

MECANICA CONSTRUCŢIILOR

O METODĂ DE DETERMINARE A DISTRIBUŢIEI PRESIUNII HIDROSTATICE ÎN SECŢIUNEA MAESTRĂ A BARAJELOR ARCUITE

DE

R. PRIŞCU şi M. CONSTANTINESCU

1. Introducere

Majoritatea barajelor arcuite realizate pînă acum, sau în curs de realizare, sînt constituite din membrane groase, de grosime variabilă, dublu curbate în spaţiu. Aceste membrane sînt încastrate elastic pe contur, în roca de fundaţie. În stadiul actual, problema determinării eforturilor care acţionează în asemenea structuri nu este rezolvată riguros şi ea întîmpină încă serioase dificultăţi. Acestea sînt create în special de forma în spaţiu a acestor baraje şi de condiţiile de margine, legate de modul de rezemare.

În calculele practice, un baraj arcuit se consideră a fi constituit dintr-o reţea de arce orizontale, încastrate în versanţi, şi de console verticale, încastrate la bază. Problema care se pune este aceea de a determina modul în care se repartizează diferitele solicitări după orizontală şi după verticală. Principial această problemă se rezolvă pe două căi :

— fie direct, punînd condiţia ca deplasările arcelor şi consolelor să fie identice în nodurile reţelei (metoda egalării deplasărilor, preconizată de S. H. Woodgard, H. Ritter şi A. Stucky);

— fie indirect, admiţînd o anumită repartiţie şi verificînd egalitatea deplasărilor, prin mai multe încercări (metoda sarcinilor de probă, preconizată de F. A. Noetzli şi dezvoltată de inginerii americani).

La barajele simetrice faţă de secţiunea centrală, denumită şi secţiune maestră, precum şi la cele asimetrice, într-o primă fază, cele două procedee se pot aplica cu suficientă exactitate numai în această secţiune. În acest caz, dacă ne referim la presiunea hidrostatică, se admite că arcele componente sînt încărcate respectiv cu o sarcină constantă, normală pe extrados.

În lucrarea de față se expune o metodă directă de determinare a repartizării presiunii hidrostatice în secțiunea maestră. Se iau în considerare numai deplasările radiale și se neglijează efectul forțelor tăietoare.

2. Expunerea metodei

Se pornește de la ecuația diferențială a fibrei medii deformate a secțiunii maestre, fibră medie considerată verticală în starea inițială :

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{sau} \quad M = EI\frac{d^2w}{dz^2},$$

în care

w = deplasarea radială orizontală,
z = ordonata curentă,
M = momentul încovoietor într-o secțiune oarecare,
I = momentul de inerție al secțiunii,
E = modulul de elasticitate al materialului.

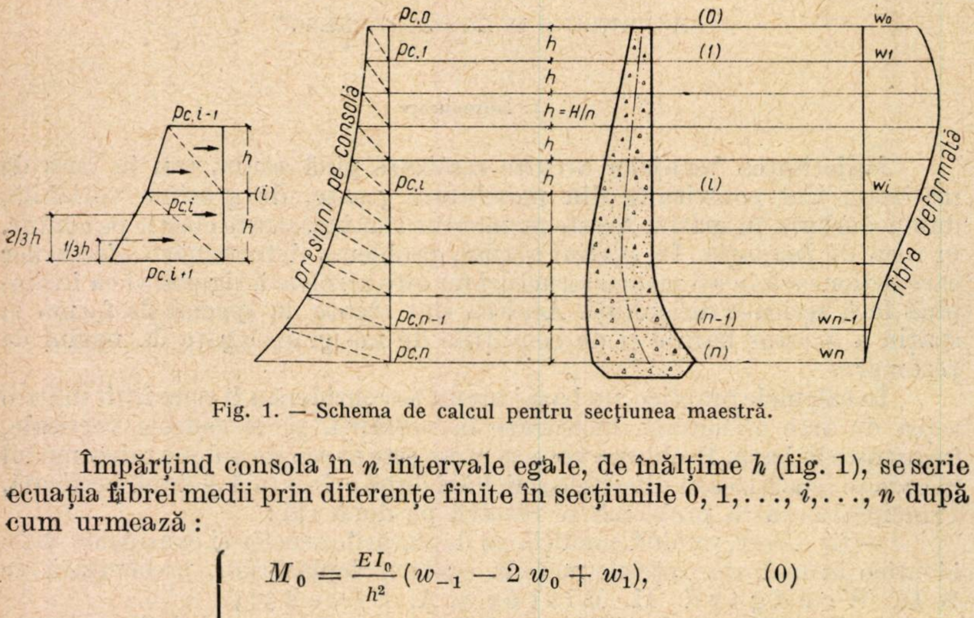


Fig. 1. — Schema de calcul pentru secțiunea maestră.

Împărțind consola în n intervale egale, de înălțime h (fig. 1), se scrie ecuația fibrei medii prin diferențe finite în secțiunile $0, 1, \ldots, i, \ldots, n$ după cum urmează :

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} M_0 &= \frac{EI_0}{h^2}(w_{-1} - 2\,w_0 + w_1), && (0)\\ M_1 &= \frac{EI_1}{h^2}(w_0 - 2\,w_1 + w_2), && (1)\\ &\vdots\\ M_i &= \frac{EI_i}{h^2}(w_{i-1} - 2\,w_i + w_{i+1}), && (i)\\ &\vdots\\ M_n &= \frac{EI_n}{h^2}(w_{n-1} - 2\,w_n + w_{n+1}), && (n) \end{aligned}\right.$$

Un al doilea grup de ecuaţii se obţine scriind expresiile momentelor funcţie de sarcinile necunoscute ce revin consolei: $p_{c.0}, p_{c.1}, \ldots, p_{c.i}, \ldots, p_{c.n}$. În acest scop, se face aproximaţia că aceste sarcini variază linear pe un interval de înălţime h. Pentru uşurinţă, trapezele respective se împart în cîte două triunghiuri componente, cum apare în schema din figura 1. Rezultă

$$
\text{(II)}\left\{
\begin{array}{ll}
M_0 = 0, & (0)\\[2ex]
M_1 = \dfrac{h^2}{6}(2\,p_{c.0} + p_{c.1}), & (1)\\[2ex]
M_2 = \dfrac{h^2}{6}(5\,p_{c.0} + 6\,p_{c.1} + p_{c.2}), & (2)\\[2ex]
M_i = \dfrac{h^2}{6}[(3i-1)\,p_{c.0} + 6\,(i-1)\,p_{c.1} + 6\,(i-2)\,p_{c.2} + \ldots + & \\
\qquad\qquad + 6\,p_{c.i-1} + p_{c.i}], & (i)\\[2ex]
M_n = \dfrac{h^2}{6}[(3n-1)\,p_{c.0} + 6\,(n-1)\,p_{c.1} + 6\,(n-2)\,p_{c.2} + \ldots + & \\
\qquad\qquad + 6\,p_{c.n-1} + p_{c.n}]\,. & (n)
\end{array}
\right.
$$

Cunoscînd că deplasarea radială (w_i) în secţiunea de la cheie a unui arc (i) încărcat uniform la extrados cu presiunea $p_{a.i}$ se poate exprima sub forma

$$w_i = p_{a.i}\,\frac{a_i}{E} \quad \text{şi deci} \quad p_{a.i} = \frac{Ew_i}{a_i},$$

se poate scrie al treilea grup de ecuaţii, în care se arată că presiunea $p_{c.i}$ ce revine consolei într-o secţiune oarecare (i) este egală cu diferenţa dintre presiunea hidrostatică totală p_i şi presiunea ce revine arcului $p_{a.i}$:

$$
\text{(III)}\left\{
\begin{array}{ll}
p_{c.0} = p_0 - E\dfrac{w_0}{a_0} & (0)\\[2ex]
p_{c.1} = p_1 - E\dfrac{w_1}{a_1} & (1)\\[2ex]
p_{c.i} = p_i - E\dfrac{w_i}{a_i} & (i)\\[2ex]
p_{c.n} = p_n - E\dfrac{w_n}{a_n} & (n)
\end{array}
\right.
$$

Deplasările radiale ale consolei din grupul (I) de ecuaţii trebuie să fie identice cu cele ale arcelor, care figurează în grupul (III) de ecuaţii. Se obţine astfel un sistem de $(3n + 3)$ ecuaţii cu $(3n + 5)$ necunoscute : $(n + 1)$ necunoscute M_i, $(n + 3)$ necunoscute w_i şi $(n + 1)$ necunoscute $p_{c.i}$.

Pentru a se limita la maximum 5 numărul necunoscutelor w care vor figura în ecuațiile sistemului final, se scrie în prealabil un sistem echivalent grupului (II), de forma

$$(\mathrm{II}, i + 1) - 2\,(\mathrm{II}, i) + (\mathrm{II}, i - 1),$$

și anume

$$(\mathrm{II}')\ \begin{cases} M_1 - 2\,M_0 = \dfrac{h^2}{6}\,(2\,p_{c.0} + p_{c.1}), & (0)\\[2ex] M_2 - 2\,M_1 + M_0 = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c.0} + 4\,p_{c.1} + p_{c.2}), & (1)\\ \vdots & \vdots\\ M_{i+1} - 2\,M_i + M_{i-1} = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c.i-1} + 4\,p_{c.i} + p_{c.i+1}), & (i)\\ \vdots & \vdots\\ M_n - 2\,M_{n-1} + M_{n-2} = \dfrac{h^2}{6}\,(p_{c.n-2} + 4\,p_{c.n-1} + p_{c.n}). & (n - 1) \end{cases}$$

În acest sistem de ecuații se înlocuiesc momentele cu expresiile lor funcție de deplasări, conform grupului (I), și presiunile pe consolă funcție de deplasări, conform grupului (III). Trecînd deplasările în membrul întîi și presiunile în al doilea, și notînd $h^4/6a_i = k_i$ se obține sistemul general de n ecuații cu $(n + 3)$ necunoscute :

$$(\mathrm{IV})\ \begin{cases} -2\,I_0\,w_{-1} + (4\,I_0 + I_1 + 2\,k_0)\,w_0 - (2\,I_0 + \\ \qquad + 2\,I_1 - k_1)\,w_1 + I_1\,w_2 = \\ \qquad\qquad = \dfrac{h^4}{6E}\,(2\,p_0 + p_1), & (0)\\[2ex] I_0 w_{-1} - (2\,I_0 + 2\,I_1 - k_0)\,w_0 + (I_0 + 4\,I_1 + I_2 + \\ \qquad + 4\,k_1)\,w_1 - (2I_1 + 2\,I_2 - k_2)\,w_2 + I_2 w_3 = \\ \qquad\qquad = \dfrac{h^4}{6E}\,(p_c + 4\,p_1 + p_2), & (1)\\ \vdots & \vdots\\ I_{i-1} w_{i-2} - (2\,I_{i-1} + 2\,I_i - k_{i-1})\,w_{i-1} + (I_{i-1} + 4\,I_i + \\ \qquad + I_{i+1} + 4\,k_i)\,w_i - (2\,I_i + 2\,I_{i+1} - k_{i+1})\,w_{i+1} + \\ \qquad + I_{i+1}\,w_{i+2} = \\ \qquad\qquad = \dfrac{h^4}{6E}\,(p_{i-1} + 4\,p_i + p_{i+1}), & (i)\\ \vdots & \vdots\\ I_{n-2}\,w_{n-3} - (2\,I_{n-2} + 2\,I_{n-1} - k_{n-2})\,w_{n-2} + (I_{n-2} + \\ \qquad + 4\,I_{n-1} + I_n + 4\,k_{n-1})\,w_{n-1} - (2\,I_{n-1} + 2\,I_n - \\ \qquad - k_n)\,w_n + I_n\,w_{n+1} = \\ \qquad\qquad = \dfrac{h^4}{6E}\,(p_{n-2} + 4\,p_{n-1} + p_n). & (n-1) \end{cases}$$

Pentru determinarea celor trei necunoscute suplimentare din grupul $w_{-1}, w_0, w_1, \ldots w_i, \ldots w_n, w_{n+1}$, trebuie puse trei condiții de margine, care sînt funcție de modul de rezemare. Încastrarea consolei în fundație fiind elastică, problema se poate rezolva în două moduri (după F. Vogt):

— fie exprimînd deplasarea radială w_n și rotația fibrei medii funcție de solicitările consolei din secțiunea de fundație (n);

— fie prelungind suprafața mediană a membranei cu 40—50 % din grosime în fundații și calculînd un baraj fictiv, perfect încastrat pe contur.

Admițînd cea de a doua cale, care prezintă același grad de aproximație ca restul ipotezelor din lucrarea de față, se pun condițiile unei încastrări perfecte în secțiunea (n), și anume

a) deplasarea radială să fie nulă:

$w_n = 0$, ceea ce conduce după (III, n) la $p_{c,n} = p_n$

b) rotația fibrei medii să fie nulă:

$\frac{dw_n}{dz} = 0$ ceea ce, prin diferențe finite, conduce la

$$\frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2h} = 0 \quad \text{sau} \quad w_{n+1} = w_{n-1},$$

la coronament, în secțiunea (0), momentul încovoietor M_0 este nul,

c) condiție care după (I, 0) conduce la

$$w_{-1} = 2\,w_0 - w_1.$$

Înlocuind condițiile de margine, formulate mai sus, în grupul (IV) de ecuații, se obține sistemul final de n ecuații cu n necunoscute (w_0, $w_1, \ldots, w_{n-1}$):

$$\text{(V)}\left\{\begin{aligned}
&(I_1 + 2\,k_0)\,w_0 - (2\,I_1 - k_1)\,w_1 + I_1\,w_2 = \\
&\qquad\qquad = \frac{h^4}{6E}(2\,p_0 + p_1), \qquad (0)\\
&-(2\,I_1 - k_0)\,w_0 + (4\,I_1 + I_2 + 4\,k_1)\,w_1 - (2\,I_1 + 2\,I_2 - \\
&\quad - k_2)\,w_2 + I_2\,w_3 = \\
&\qquad\qquad = \frac{h^4}{6E}(p_0 + 4\,p_1 + p_2), \qquad (1)\\
&I_{i-1}\,w_{i-2} - (2\,I_{i-1} + 2\,I_i - k_{i-1})\,w_{i-1} + (I_{i-1} + 4\,I_i + I_{i+1} + \\
&\quad + 4\,k_i)\,w_i - (2\,I_i + 2\,I_{i+1} - k_{i+1})\,w_{i+1} + I_{i+1}\,w_{i+2} = \\
&\qquad\qquad = \frac{h^4}{6E}(p_{i-1} + 4\,p_i + p_{i+1}), \qquad (i)\\
&I_{n-3}\,w_{n-4} - (2\,I_{n-3} + 2\,I_{n-2} - k_{n-3})\,w_{n-3} + (I_{n-3} + 4\,I_{n-2} + \\
&\quad + I_{n-1} + 4\,k_{n-2})\,w_{n-2} - (2\,I_{n-2} + 2\,I_{n-1} - k_{n-1})\,w_{n-1} = \\
&\qquad\qquad = \frac{h^4}{6E}(p_{n-3} + 4\,p_{n-2} + p_{n-1}), \qquad (n-2)\\
&I_{n-2}\,w_{n-3} - (2\,I_{n-2} + 2\,I_{n-1} - k_{n-2})\,w_{n-2} + (I_{n-2} + \\
&\quad 4\,I_{n-1} + 2\,I_n + 4\,k_{n-1})\,w_{n-1} = \\
&\qquad\qquad = \frac{h^4}{6E}(p_{n-2} + 4\,p_{n-1} + p_n). \qquad (n-1)
\end{aligned}\right.$$

Se observă că, o dată cunoscute deplasările radiale, se pot determina cu ușurință presiunile ce revin consolei prin intermediul grupului (III) de ecuații, respectiv însăși momentele încovoietoare care solicită consola, prin intermediul grupului (I) de ecuații.

Mai trebuie remarcat faptul că prin sistemul (V) de ecuații se poate determina repartiția presiunii hidrostatice și în cazul în care nivelul apei se găsește în dreptul unei alte secțiuni decît cea de la coronament (0). În acest caz, se modifică în mod corespunzător termenii liberi din membrul doi al ecuațiilor, iar coeficienții necunoscutelor, fiind funcție numai de elementele geometrice ale barajului, rămîn neschimbați.

3. Aplicație

Metoda expusă mai sus a fost aplicată la calculul preliminar al unui baraj arcuit în studiu din țara noastră. În secțiunea maestră (fig. 2), înălțimea lui este de circa 60 m, grosimea la coronament de 3,50 m, iar la bază de 19 m. La coronament raza medie este de 78 m și unghiul la centru de circa 106°. Arcele componente sînt de grosime constantă.

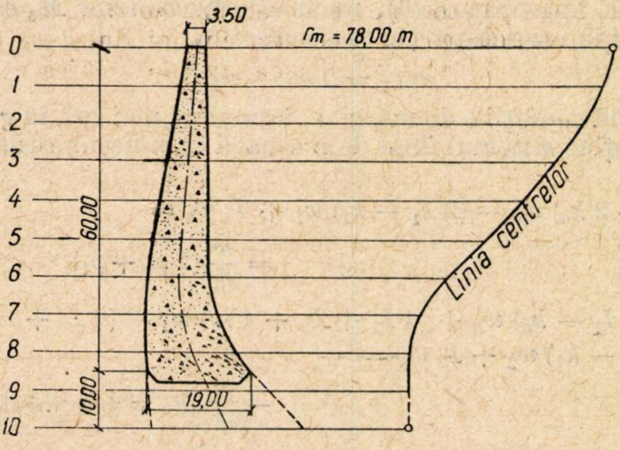


Fig. 2. — Secțiunea maestră a unui baraj arcuit, înalt de 60 m.

Pentru a se ține seama de efectul încastrării elastice, profilul barajului a fost prelungit în fundație cu 10 m, iar înălțimea rezultată de 70 m a fost împărțită în zece intervale egale ($h = 7$ m). Pentru calculul deplasărilor radiale ale arcelor în secțiunea de la cheie s-a folosit formula lui Cain

$$w = p_a \frac{r\, r_e}{Ed} \cdot \frac{(\alpha - \sin\alpha)\,(1 - \cos\alpha)}{\left(\alpha + \dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right) - \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha\left(1 + \dfrac{d^2}{12\, r^2}\right)}},$$

în care

p_a = presiunea uniformă pe extradosul arcului,
r și r_e = raza medie și exterioară a arcului,
d = grosimea arcului,
E = modulul de elasticitate,
α = semiunghiul la centru al arcului.

Calculînd apoi coeficienții sistemului de ecuații (V), s-a obținut matricea indicată mai jos. Termenii liberi din ultima coloană corespund situației în care nivelul apei se găsește în dreptul secțiunii de la coronament (0).

Rezolvarea sistemului se poate face pornind de la ultima ecuație către prima, prin eliminarea succesivă a necunoscutelor. Se grupează ultimele trei ecuații care conțin pe w_9, împărțind pe fiecare cu coeficientul lui w_9 și aranjînd semnul lui w_9 la două ecuații cu (+), iar la cea cu termeni mai puțini cu (—). Adunînd ecuațiile cu semnul (+), respectiv cu ecuația cu semnul (—), se obțin două ecuații echivalente care nu mai conțin pe w_9. Se asociază ecuația următoare care se termină cu w_8 și acestui nou grup de trei ecuații i se aplică același procedeu, eliminîndu-se w_8. În acest mod, se ajunge la valoarea lui w_0 și apoi, succesiv, la valoarea celorlalte necunoscute.

Procedînd în modul indicat, s-a ajuns la rezultatele trecute în tabloul alăturat (pentru modulul de elasticitate s-a admis valoarea $E = 1{,}6 . 10^6$ t/m^2), reprezentate grafic în figura 3*a*. În diagramele din figurile 3 *b*, *c*, *d* și *e* sînt indicate presiunile și deplasările corespunzătoare altor cote de reținere. Pentru calcul s-a folosit aceeași matrice, dată mai sus, în care s-au schimbat numai termenii liberi, care sînt funcție de încărcare.

Tablou

Secțiunea	a_i	Ew_i	$p_{a.i} = \frac{Ew_i}{a_i}$ (t/m^2)	p_i (t/m^2)	$pc,i = pi - pa,i$ (t/m^2)	w_i (mm)
0	3 342,73	22 322,811	6,68	0,00	−6,68	13,95
1	2 257,20	21 444,764	9,50	7,00	−2,50	13,40
2	1 592,73	19 869,543	12,48	14,00	1,52	12,42
3	1 141,83	17 283,021	15,14	21,00	5,86	10,80
4	790,01	13 872,436	17,56	28,00	10,44	8,67
5	507,08	10 032,907	19,83	35,00	15,17	6,28
6	306,33	6 342,566	20,71	42,00	21,29	3,96
7	135,69	3 299,516	24,32	49,00	24,68	2,06
8	38,96	1 288,188	33,06	56,00	22,94	0,81
9	7,50	277,254	36,95	63,00	26,05	0,17
10	—	0	0	70,00	70,00	0

În diagrama din figura 3*f* se reprezintă variația eforturilor de încovoiere provocate, în secțiunea maestră-aval, de presiunea apei, la diverse cote de reținere. Este de remarcat faptul că ipoteza nivelului maxim în lac nu este cea mai defavorabilă, din punctul de vedere al tensiunilor,

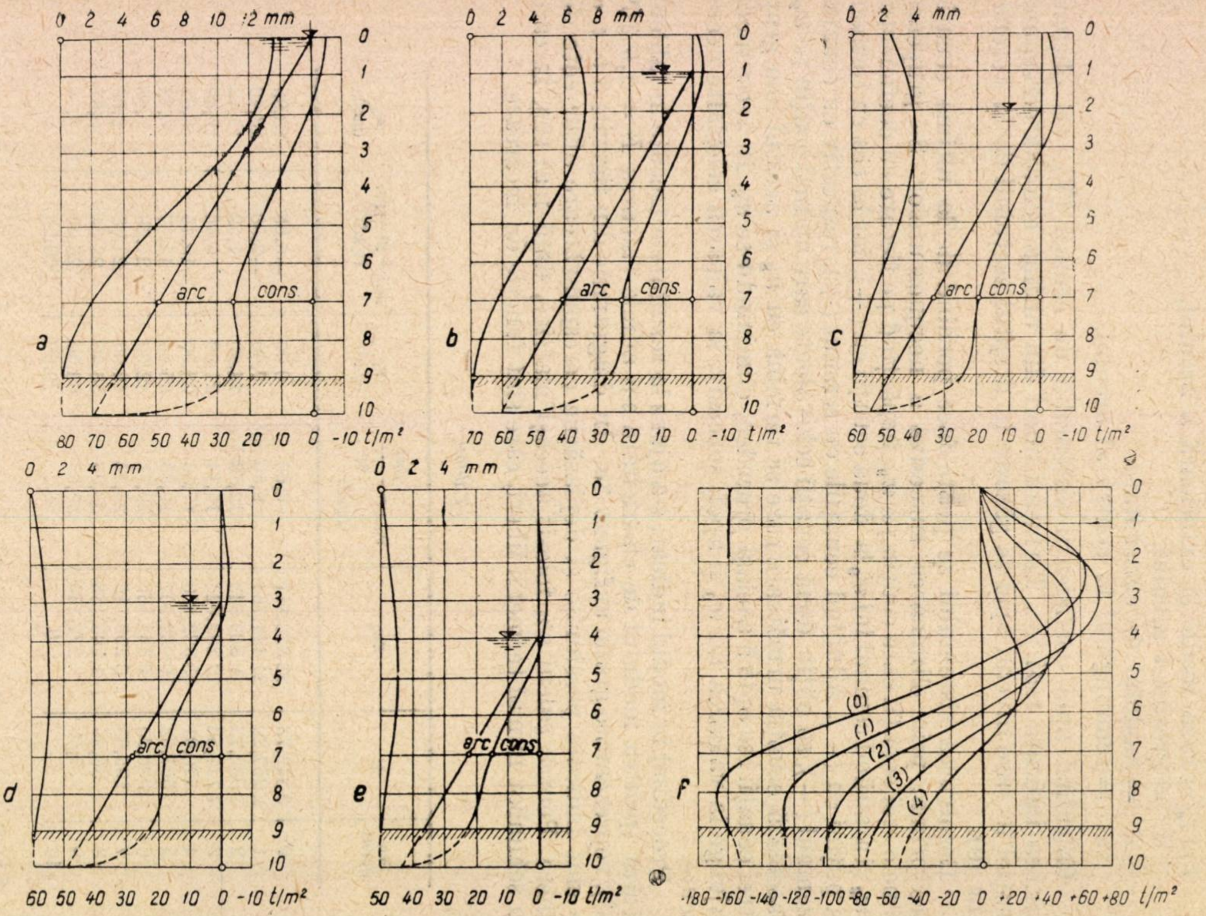


Fig. 3. — Repartiţia presiunilor, deplasările şi eforturile de încovoiere în secţiunea maestră (aval) pentru diverse cote de reţinere.

Matricea ecuaţiilor

Secţiunea	Ew_0	Ew_1	Ew_2	Ew_3	Ew_4	Ew_5	Ew_6	Ew_7	Ew_8	Ew_9	Termenul liber
0	9,34070	−18,02528	9,10128								2 801,1666
1	−18,08285	55,65966	−55.04216	18,54542							16 806,9997
2	9,10128	−55,11612	117,51194	−103,18842	33,22402						33 613,9994
3		18,54542	−103,28764	206,21867	−172,69217	53,37533					50 420,9992
4			33,22402	−172,84824	329,85498	−268,16855	81,10352				67 227,9989
5				53,37533	−268,45117	494,91526	−388,83922	113,96925			84 034,9986
6					81,10352	−389,35639	729,54671	−599,67113	187,34091		100 841,9983
7						113,96925	−601,31400	1 242,70751	−1 099,56792	367,57866	117 648,9980
8							187,34091	−1 106,89015	2 515,43576	−2 315,21092	134 455,9978
9								367,57866	−2 358,27676	7 128,20822	151 262,9975

pentru toate secţiunile din regiunea superioară a consolei. Cote de reţinere mai joase pot crea tensiuni mai mari în unele secţiuni, decît cota maximă, astfel încît, la verificări mai amănunţite ale eforturilor, este recomandabil să se traseze înfăşurătoarea acestor curbe, spre a se cunoaşte mai bine zonele tensionate.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1957.

МЕТОД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СЕЧЕНИИ АРОЧНЫХ ПЛОТИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе изложен непосредственный метод распределения гидростатического давления в центральном сечении арочных плотин. Учитываются только радиальные смещения и пренебрегается эффектом срезывающих сил. Разделив центральное сечение на n одинаковых отрезков (рис. 1), пишут три группы уравнений:

— первая группа (I), в которой выражено уравнение средней линии, деформированной конечными разностями;

— вторая группа (II), в которой выписаны выражения зависимости изгибающих моментов от неизвестных нагрузок, действующих на консоль;

— третья группа (III), в которой указано, что давление, приходящееся на консоль, в любом сечении, равно разнице между общим давлением и давлением, приходящимся на арку.

Комбинируя все эти группы уравнений, получают четвертую систему (IV) n уравнений с $(n+3)$ неизвестными. Поставив конечные условия, получают окончательно систему n уравнений с n неизвестными (V). Следует отметить, что коэффициенты неизвестных находятся в зависимости только от геометрических элементов плотины, а свободные члены — от нагрузок. Следовательно, можно легко производить распределение гидростатического давления для любого горизонта воды в водохранилище.

В конце работы, с помощью практического примера, показан спооб применения предложенного метода. Выявлена также идея самого еблагоприятного для данного сечения горизонта воды.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Расчетная схема для центрального сечения.

Рис. 2. — Центральное сечение арочной плотины высотой 60 м.

Рис. 3. — Распределение давлений, смещения и изгибающие моменты в центральном сечении (низовая часть) для различных отметок подпора.

MÉTHODE DE RÉPARTITION DE LA PRESSION HYDROSTATIQUE DANS LA SECTION CENTRALE DES BARRAGES-VOÛTES

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, on expose une méthode directe de répartition de la pression hydrostatique dans la section centrale des barrages-voûtes. Cette méthode ne considère que les déplacements radiaux et néglige l'effet des forces tranchantes. En divisant la section centrale en n intervalles égaux (fig. 1), on peut écrire trois groupes d'équations, soit :

— le premier groupe (I), dans lequel l'équation de la fibre moyenne déformée est exprimé par différences finies ;

— le second groupe (II), qui comprend les expressions des moments fléchissants, en fonction des charges inconnues qui reviennent à la console ;

— le troisième groupe (III), qui montre que la pression qui revient à la console, dans une section quelconque, est égale à la différence entre la pression totale et celle qui revient à l'arc.

En combinant les trois groupes d'équations, on obtient le système (IV) de n équations avec ($n + 3$) inconnues. En prenant ensuite les conditions extrêmes, on obtient le système final de n équations avec n inconnues (V). Il faut remarquer le fait que les coefficients des inconnues ne sont fonction que des éléments géométriques du barrage, pendant que les termes libres sont fonction des charges. La répartition de la pression hydrostatique peut être calculée facilement, pour tout niveau de l'eau du lac.

A la fin du travail, on montre, à l'aide d'un exemple pratique, le mode d'application de la méthode proposée, tout en faisant ressortir l'idée du niveau le plus défavorable pour une section donnée.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma de calcul pour la section centrale.

Fig. 2. — Section centrale d'un barrage-voûte, de 60 m de hauteur.

Fig. 3. — Répartition des pressions, déplacements et efforts de flexion dans la section centrale (aval), pour différentes cotes de rétention.

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. Southwell, *Relaxation Methods in Engineering Science*. Oxford, 1940.
2. F. Tölke, *Talsperren*. Berlin, 1938.
3. E. Bosshard, *Beiträge zur Theorie und Berechnung der Bogenstaumauern*. Zürich, 1949.
4. G. Gruner, W. Jauslin, *Die Staumauer Serra am Grosswasser im Zwischbergental*. Schweizerische Bauzeitung, März 1953.
5. A. Haegelen, *Détermination sur une console centrale de la répartition des charges de l'eau entre arcs et murs*. Travaux, Decembre 1954.
6. A. Bourgin, *Cours de calcul de barrages*. Paris, 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

VIBRAŢII

ASUPRA UNEI METODE GRAFICE PENTRU DETERMINAREA FRECVENŢELOR PROPRII ALE VIBRAŢIILOR FLEXIONALE LA GRINZI LIBERE CU DISTRIBUŢIE NEUNIFORMĂ A RIGIDITĂŢII ŞI A MASEI

DE

V. MANEA şi E. PROCOPOVICI

NOTAŢII

y = deplasarea transversală a barei;
x = abscisa;
$B = EJ(x)$ = rigiditatea la încovoiere a barei;
$\rho(x)$ = masa pe unitatea de lungime a barei;
$I(x)$ = momentul de inerţie mecanic pe unitatea de lungime a barei;
Q = forţa tăietoare;
M = momentul încovoietor;
$2L$ = lungimea grinzii.

1. Determinarea frecvenţelor proprii ale vibraţiilor flexionale pentru grinzi nu constituie întotdeauna o problemă uşoară. Astfel, în cazul grinzilor de rigiditate flexională variabilă, rezolvarea cu metode analitice este foarte anevoioasă cu atît mai mult cu cît este greu să găsim expresii analitice convenabile pentru funcţia $B(x)$ a rigidităţii şi $\rho(x)$ a încărcării. De cele mai multe ori, pentru calcule practice $B(x)$ şi $\rho(x)$ sînt cunoscuţi sub forma unor grafice, de aceea vom încerca în cele ce urmează să rezolvăm această problemă grafic. Calculul frecvenţelor proprii prin metoda grafică este cunoscut şi utilizat destul de mult în tehnică [1], [2]. În cele ce urmează vom insista asupra aspectului diferit pe care îl ia problema în cazul cînd grinda se consideră liberă (nerezemată), caz care poate avea importante aplicaţii la rezolvarea problemelor de vibraţie a avioanelor şi navelor.

2. Pentru calcularea frecvențelor proprii este necesară rezolvarea ecuației diferențiale a încovoierii barelor, pe care o luăm sub forma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(I(x)\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2}\right) + \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{gathered} y(x, 0) = y_0(x) \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0 \end{gathered} \tag{2}$$

și cu condițiile la limită corespunzătoare cazului barelor libere

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial M}{\partial x} - I\frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t} = 0 \quad \text{pentru} \begin{cases} x = -L \\ x = L \end{cases}, \\ M &= B(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pentru} \begin{cases} x = -L \\ x = L \end{cases}; \end{aligned} \tag{3}$$

ecuația (1) ține seama de efectul inerției de rotație, deosebit de important în cazul frecvențelor de ordin superior. În caz că se renunță la acest efect se obține ecuația diferențială

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{4}$$

cu condițiile (2) și condițiile la limită

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \quad \text{pentru} \begin{cases} x = -L \\ x = L \end{cases}, \\ M &= B\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pentru} \begin{cases} x = -L \\ x = L \end{cases}. \end{aligned} \tag{5}$$

Separînd variabilele în ecuația (1) $y(x, t) = Y(x)\,\theta(t)$ se obține

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B(x)\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right) + \omega^2\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(I(x)\frac{\partial Y}{\partial x}\right) - \rho(x)\,Y\right\} = 0, \tag*{(1')$_1$}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \omega^2\theta = 0. \tag*{(1')$_2$}$$

Integrînd o dată $(1')_1$ între limitele $-L$ și L și ținînd seama de condițiile (3) se obține

$$\int_{-L}^{L} \rho(x)\,Y\,dx = 0. \tag{6}$$

Înmulțind $(1')_1$ cu x și integrînd în mod similar se obține

$$\int_{-L}^{L}\left(\rho(x)\,x\,Y + I(x)\frac{dY}{dx}\right)dx = 0 \tag{6'}$$

și respectiv pentru cazul ecuației (4)

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-L}^{L}\rho(x)\,Y\,dx = 0,\\&\int_{-L}^{L}\rho(x)\,x\,Y\,dx = 0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Aplicînd principiul conservării energiei în sensul că echivalăm valorile maxime ale energiei cinetice cu cele ale energiei potențiale, rezultă relația

$$\omega_n^2\int_{-L}^{L}\rho(x)\,Y_n^2\,dx + \omega_n^2\int_{-L}^{L}I(x)\left(\frac{dY_n}{dx}\right)^2dx = \int_{-L}^{L}B(x)\left(\frac{d^2Y_n}{dx}\right)^2dx \tag{8}$$

de unde se obține valoarea proprie ω_n (frecvența circulară) corespunzătoare funcției proprii Y_n

$$\omega_n^2 = \frac{\displaystyle\int_{-L}^{L}B(x)\left(\frac{d^2Y_n}{dx^2}\right)^2dx}{\displaystyle\int_{-L}^{L}\left[\rho(x)\,Y_n^2 + I(x)\left(\frac{dY_n}{dx}\right)^2\right]dx}. \tag{9}$$

Pentru a calcula frecvența circulară ω_n pe baza relației (9) este necesară cunoașterea funcției proprii Y_n (linia elastică) care trebuie să satisfacă atît ecuația diferențială (1) sau (4) cît și condițiile (6), respectiv (7).

Ideea principală în metoda pe care o propunem constă în a folosi un procedeu grafic pentru a calcula integralele din (9), pornind de la o funcție simplă Y_n^* pe care o transformăm tot grafic, astfel ca să satisfacă condițiile (6), respectiv (7) (condiții de echilibru).

În acest scop se pornește de la funcția proprie $Y_{n_1}^*$ corespunzătoare barei cu $\rho(x)$, $J(x)$ și $I(x)$ distribuite uniform *). Trasînd apoi curba $\rho\,Y_{n_1}^*$ se constată, în general, că relațiile (6) nu sînt satisfăcute. Pentru a satisface aceste relații se dă funcției $Y_{n_1}^*$ o rototranslație obținîndu-se o nouă linie elastică $Y_{n_2}^*$ mai apropiată de linia elastică reală.

$$Y_{n_2}^* = Y_{n_1}^* - mx - n. \tag{10}$$

Introducînd în (6) și (6') se obține un sistem de două ecuații din care se determină m și n.

---

*) Ca linie elastică se poate alege oricare altă linie, eventual trasată direct.

În cazul cînd distribuția de mase este simetrică în raport cu mijlocul barei (cazul cel mai frecvent în problemele tehnice) m şi n ne sînt daţi direct de relaţiile

$$n = \frac{\int_{-L}^{L} \rho Y^*_{n_1}\, dx}{\int_{-L}^{L} \rho dx},$$

$$m = \frac{\int_{-L}^{L} \rho x Y^*_{n_1}\, dx + \int_{-L}^{L} I \frac{dY^*_n}{dx}\, dx}{\int_{-L}^{L} \rho x^2 dx + \int_{-L}^{L} I\, dx}. \tag{11}$$

Calculul lui n şi m, pe baza relaţiilor (11) se face de asemenea grafic, integralele ce intervin aici efectuîndu-se prin planimetrare.

Se consideră apoi curba $\rho Y^*_{n_2}$ ca o încărcare distribuită pe grindă şi cu procedeul grafic clasic se determină noua linie elastică $Y^*_{n_3}$ ţinînd seama de rigiditatea variabilă a grinzii $B(x)$. După ce facem, cu ajutorul formulelor (11), ca noua linie elastică să satisfacă condiţia (6) se pot calcula integralele (9) şi deci determina frecvenţa proprie. Întregul proces de calcul se poate urmări pe schema dată în anexă.

Autorii au folosit această metodă pentru calculul primelor două frecvenţe, la grinzi cu distribuţii parabolice a rigidităţii şi a încărcării. Metoda s-a dovedit a fi foarte practică şi rapidă. Ca o verificare s-a calculat cu această metodă cea de a doua frecvenţă proprie pentru o bară de secţiune constantă, pornindu-se de la o funcţie $Y^*_{2_1}$, foarte mult diferită de cea reală ($Y_2 = A$ (sh kx cos kL + sin kx ch kL)). S-a obţinut astfel valoarea frecvenţei cu o eroare de 2 % faţă de cea calculată analitic, procedeul fiind aplicat o singură dată. Cînd este nevoie de o precizie mai mare se poate recurge la o a doua iteraţie.

ANEXĂ

Schema de calcul

1) Se reprezintă grafic (fig. 1) la scări alese convenabil distribuţiile de masă $\rho(x)$, moment de inerţie $J(x)$ şi moment de inerţie mecanic $I(x)$.

2) Se trasează o linie elastică cu care se începe calculul. Pentru uşurinţă se adoptă o linie elastică corespunzătoare barei de secţiune uniforme la modul de vibraţie respectiv *) (fig. 2).

---

*) Se poate porni de la orice linie elastică care are o alură corespunzătoare modului de vibraţie a cărui frecvenţă dorim să o calculăm.

3) Se trasează curba $\rho Y^*_{1_1}$ ținînd seama de semne (fig. 3). Se deplasează axa Ox în (2) astfel ca curba $\rho Y^*_{1_1}$ să satisfacă condiția de echilibru (6), (7).

4) Deplasînd pe ordonată curba $Y^*_{1_1}$ cu valoarea n, se obține curba $Y^*_{1_2}$ care satisface condiția de echilibru (fig. 4).

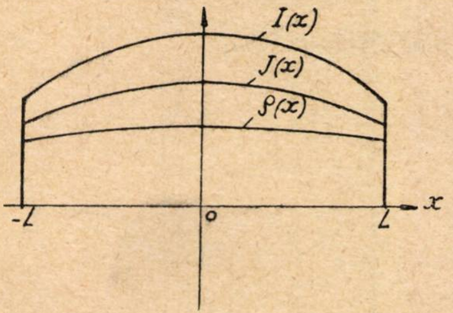


Fig. 1

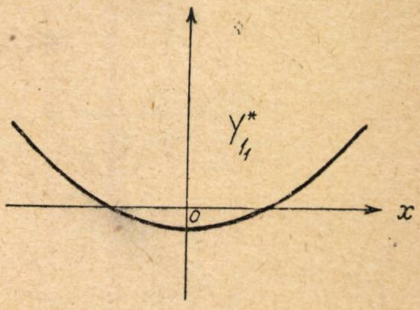


Fig. 2

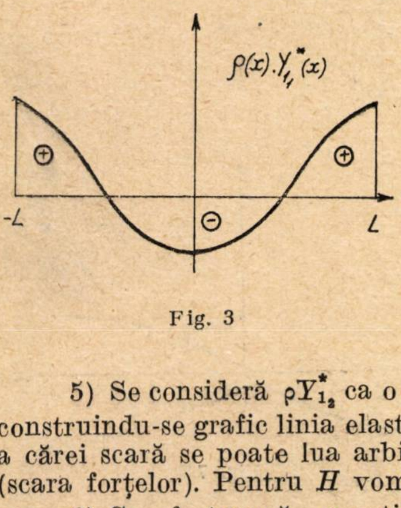


Fig. 3

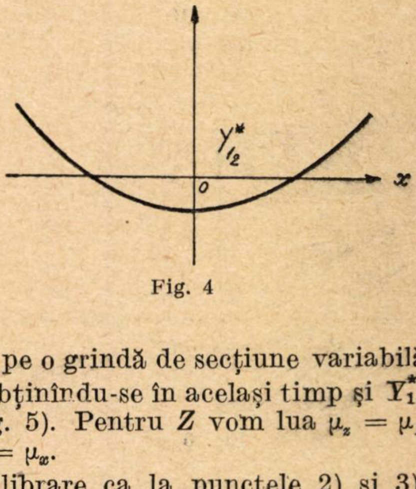


Fig. 4

5) Se consideră $\rho Y^*_{1_2}$ ca o încărcare pe o grindă de secțiune variabilă construindu-se grafic linia elastică $Y^*_{1_3}$, obținîndu-se în același timp și $Y^{*''}_{1_3}$ a cărei scară se poate lua arbitrară (fig. 5). Pentru Z vom lua $\mu_z = \mu_P$ (scara forțelor). Pentru H vom lua $\mu_H = \mu_x$.

6) Se efectuează operația de echilibrare ca la punctele 2) și 3), obținîndu-se linia elastică (fig. 6).

7) Se integrează grafic $Y^{*''}_{1_3}$ de la punctul 5), avînd scara $\mu_{\frac{dY_{1_3}}{dx}} =$ $= k_1 \mu_{Y^{*''}_{1_3}} \mu_x$ (fig. 7).

8) Se trasează curbele $\rho\,(x)\; Y^{*2}_{1_4}\; I\,(x) \left(\frac{dY^*_{1_4}}{dx}\right)^2$ și $B\,(x) \left(\frac{d^2 Y^*_{1_4}}{dx}\right)^2$ la scări convenabile care depind însă și de cele întrebuințate anterior (fig. 8).

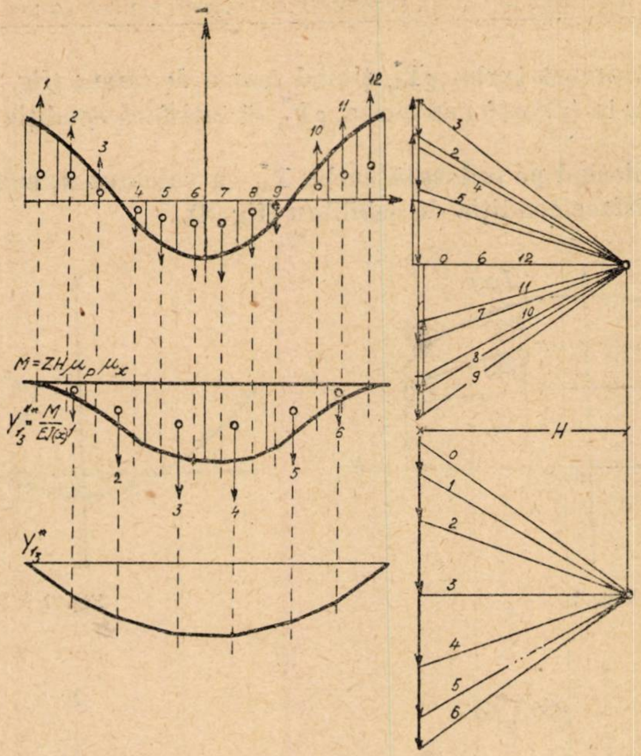

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
M = ZHμ_p μ_x
Y*''_13 = M/EI(x)
2
3
4
5
6
Y*_13
0
6
12
H
0
1
2
3
4
5
6

Fig. 5

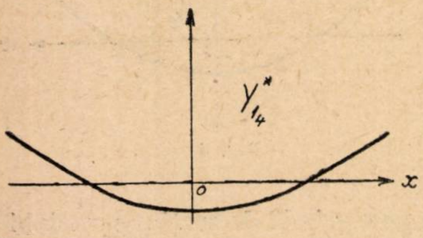


Fig. 6

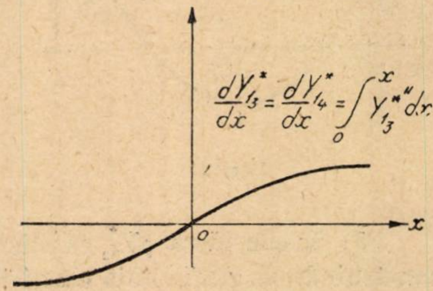


Fig. 7

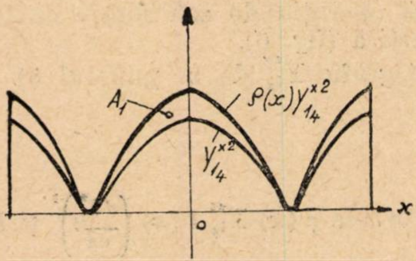


Fig. 8

9) Conform cu relaţia (9), prin planimetrare (fig. 9 şi 10), se obţine frecvenţa proprie :

$$\omega_1^2 = \frac{\int_{-L}^{L} B(x) \left(\frac{d^2 Y_{1_4}^{*}}{dx^2}\right)^2 dx}{\int_{-L}^{L} \left\{ \rho(x)\, Y_{1_4}^{*2} + I(x) \left(\frac{dY_{1_4}^{*}}{dx}\right)^2 \right\} dx} = \frac{A_3 \mu_{A_3}}{A_1 \mu_{A_1} + A_2 \mu_{A_2}} .$$

Se vede că μ_{A_1}, μ_{A_2} şi μ_{A_3} depind toate de $\mu_{Y_{1_3}^{*\prime\prime}}$ astfel că ω_1^2 nu depinde de această scară ce a fost aleasă la punctul (7) arbitrar.

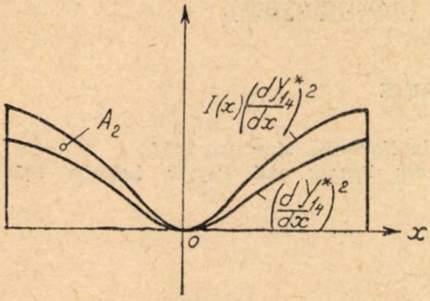


Fig. 9

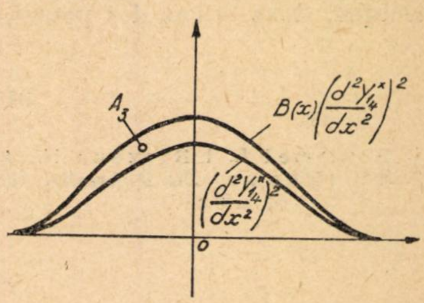


Fig. 10

Pentru frecvenţa a doua, calculul se conduce în mod similar ca pentru prima frecvenţă, cu excepţia operaţiei de echilibrare. În cazul distribuţiei simetrice de masă în raport cu mijlocul grinzii, echilibrul se referă numai la momentele forţelor dinamice şi se stabileşte conform cu (11).

Se alege curba iniţială corespunzătoare ; se trasează pe desen atît curba cît şi derivata ei şi se efectuează calculele grafice cerute de formula (11). După ce se stabileşte valoarea lui *m* şi se trasează curba ce satisface şi condiţia de echilibru a momentelor dinamice, calculul se conduce mai departe într-un mod asemănător ca pentru prima frecvenţă.

Primită la redacţie la 29 aprilie 1957.

О ГРАФИЧЕСКОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ СВОБОДНО ЛЕЖАЩИХ БАЛОК С НЕРАВНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ЖЕСТКОСТИ И МАССЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе описывается графический метод расчета собственных частот колебаний свободно лежащих балок с неравномерной жесткостью и при произвольной нагрузке.

SUR UNE MÉTHODE GRAPHIQUE POUR DÉTERMINER LES FRÉQUENCES PROPRES DES VIBRATIONS FLEXIONNELLES DES POUTRES LIBRES, À DISTRIBUTION NON UNIFORME DE LA RIGIDITÉ ET DE LA MASSE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on développe la méthode graphique pour le calcul des fréquences propres des poutres de rigidité non uniforme et de charge quelconque, dans le cas des poutres libres (nonappuyées).

BIBLIOGRAFIE

1. Grammel L. i Biezeno N., *Tehniceskaia dinamika.* Moscova, 1952.
2. Hort-Thoma, *Die Differential Gleihungen der Tehnik und Physik.* Leipzig, 1954, ed. a 6 a.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

CONSIDERAŢII ASUPRA UNEI ANALOGII HIDRODINAMICE A LAMINĂRII

DE

M. POPOV, E. DECIU şi I. MITRICĂ

O metodă pentru studiul repartiției presiunilor pe cilindri de laminor, în regiunea suprafeței de contact, o constituie şi analogia hidrodinamică. Trecerea materialului de laminat printre cei doi cilindri, ce are ca urmare reducerea secțiunii lui, este asemănată cu scurgerea unui fluid foarte vîscos printr-un ajutaj a cărui formă este dată de suprafața de contact. Este cunoscut că în timpul laminării straturile de material se mişcă între cei doi cilindri cu viteze diferite. Existînd deci o analogie între fenomenele fizice de laminare şi scurgerea unui fluid vîscos, s-a încercat a se utiliza în acest scop ecuațiile de mişcare deduse pentru fluide vîscoase.

În literatură se pot cita lucrările lui I. V. Meşcerskii*) şi S. M. Targ [1] şi [2], unde este atacată problema analogiei hidrodinamice a laminării.

În lucrarea de față se prezintă o soluție a acestei analogii, avîndu-se în vedere, dintre proprietățile materialului, doar vîscozitatea lui.

Se consideră mişcarea unui fluid vîscos printre cei doi cilindri de laminor de rază R, ce se rotesc cu viteza unghiulară ω. Înălțimea inițială a materialului este $2H_0$ şi cea finală $2H_1$. Vom nota valoarea variabilă a înălțimii $2h$. Se neglijează deformațiile laterale ale materialului, care aşa după cum se ştie din experiență, sînt mici în raport cu celelalte şi prin urmare vom considera o mişcare plană. Din motive de simetrie vom lua în considerare numai mişcarea jumătății superioare a stratului AA_1 B_1B (fig. 1), care defineşte unghiul de prindere α.

În cele ce urmează facem ipoteza că, datorită robusteței cilindrilor, deformațiile acestora sînt cu totul neglijabile, deci vom considera arcul AB ca un arc de cerc. Această ipoteză a stat şi la baza unei alte lucrări [3].

---

*) I. V. Meşcerskii, *Ghidrodinamiceskaia analoghia prokatki*. Izv. Pervovo Petrogr. politekhn. instituta, 1919, t. XXVIII. (lucrare pe care nu am găsit-o pentru a o consulta).

Dat fiind specificul problemei, vom utiliza ecuaţiile lui Navier-Stokes, simplificate la forma ecuaţiilor aproximative ale stratului de lubrifiant ale lui Reynolds şi ecuaţia continuităţii, scrise pentru o mişcare plană

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Facem ipoteza [1] că materialul are la periferie aceeaşi viteză ca şi cilindrul, că pentru $y = 0$ are loc o mişcare doar după axa x, viteza u

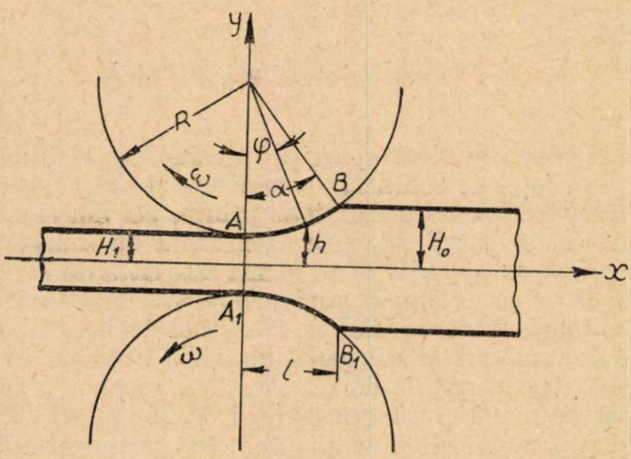


Fig. 1. — Schema laminării.

fiind maximă în acest caz şi că la intrare şi la ieşire presiunea este nulă. Vom pune adică următoarele condiţii la limită :

$$\left.\begin{array}{lll} y = h & u = -\omega(R + H_1 - h); & v = -\omega x \\ y = 0 & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad ; & v = 0 \\ x = 0 \text{ şi } x = l & \qquad p = 0 & \end{array}\right\} \tag{3}$$

Integrînd ecuaţiile (1) în raport cu y şi ţinînd seama de (3), se obţine legea de variaţie a vitezei u

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) - \omega(R + H_1 - h). \tag{4}$$

Integrînd ecuația (2) în raport cu y de la 0 la h, rezultă

$$\omega x = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}\, dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u dy + \omega\,(R + H_1 - h)\frac{dh}{dx}\,, \tag{5}$$

care este o ecuație diferențială de ordinul I cu variabile separabile și soluționînd-o se obține

$$2\int_0^h u\, dy - \omega\,[h^2 - 2\,(R + H_1)\,h + x^2] = \text{const.} \tag{6}$$

Înlocuind valoarea vitezei u dată de ecuația (4) și efectuînd integrarea relația (6) devine

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\mu}{2h^3}\,[\,\omega\,(h^2 - x^2) + \text{const.}]\,. \tag{7}$$

Avînd în vedere că valțurile laminorului sînt cilindri circulari, adică AB este un arc de cerc, legătura dintre h și x este dată de relația geometrică

$$h = R + H_1 - \sqrt{R^2 - x^2}\,. \tag{8}$$

Ținînd seama de (8) se obține din (7) legea de variație a presiunii

$$\left.\begin{aligned} p\,(x) &= 3\,\mu\,\omega\int_0^x \frac{h^2 - (R + H_1)\,h + C}{h^3}\,dx\,, \\ p\,(l) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Ultima expresie din (9) servește pentru determinarea constantei de integrare C.

Pentru rezolvarea relației (9) se face schimbarea de variabilă

$$x = R\sin\varphi\,, \tag{10}$$

de unde

$$h = H_1 + R\,(1 - \cos\varphi) \tag{11}$$

și astfel relațiile (9) devin

$$\left.\begin{aligned} p\,(\varphi) &= 3\,\mu\,\omega R\int_0^\varphi \frac{[H_1 + R(1-\cos\varphi)]^2 - (R + H_1)\,[H_1 + R\,(1 - \cos\varphi)] + C}{[H_1 + R\,(1 - \cos\varphi)]^3}\cos\varphi\, d\varphi, \\ p\,(\alpha) &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Efectuînd calculele și introducînd numărul adimensional [3] și [1]

$$\delta = \frac{H_1}{R} \tag{13}$$

se obține legea de repartiție a presiunii

$$p(\varphi) = 3\mu\omega\left\{ -\varphi + (\delta+1)\left[1 - \frac{1}{\delta(\delta+2)} + \frac{3C}{2R^2\delta^2(\delta+2)^2}\right]\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{C}{2R^2\delta(\delta+2)}\left[1 + \frac{3}{\delta(\delta+2)} + \frac{\delta+1}{\delta+1-\cos\varphi} - \frac{2R^2(\delta+1)^2}{C}\right]\zeta\right\}, \tag{14}$$

unde s-a notat

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\delta+2}{\delta}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right),$$
$$\zeta = \frac{\sin\varphi}{\delta+1-\cos\varphi} \tag{15}$$

Valoarea constantei de integrare este

$$C = 2R^2\delta(\delta+2)\frac{\alpha + (\delta+1)\left[\left(\frac{1}{\delta(\delta+2)} - 1\right)\xi_0 + \frac{\delta+1}{\delta(\delta+2)}\zeta_0\right]}{\frac{3(\delta+1)}{\delta(\delta+2)}\xi_0 + \left(1 + \frac{3}{\delta(\delta+2)} + \frac{\delta+1}{\delta+1-\cos\alpha}\right)\zeta_0}, \tag{16}$$

unde am notat cu ξ_0 şi ζ_0 valorile expresiilor ξ şi respectiv ζ din (15) pentru valoarea unghiului $\varphi = \alpha$ şi care de altfel se mai pot calcula şi cu relațiile (24).

Pentru reprezentarea grafică a rezultatelor ce se obțin cu formulele (14), (15) şi (16), am ales un exemplu numeric pentru o laminare la cald pe un laminor duo cu diametrul cilindrilor $D = 600$ mm, dimensiunile laminatului fiind $H_0 = 18$ mm şi $H_1 = 9$ mm, deci $\delta = 0{,}03$. Curba obținută a fost reprezentată în figura 2.

Pentru comparație am mai trecut în aceeaşi diagramă rezultatele ce se obțin şi cu alte formule din literatură. Astfel, am reprezentat la aceeaşi scară curba ce se obține cu formula din lucrarea lui Targ [1], [2], dedusă tot pe calea analogiei hidrodinamice şi care înlocuieşte la un moment dat arcul de cerc AB cu coarda respectivă. De asemenea, s-au mai trasat la altă scară şi curbele ce se obțin cu formule deduse pe baza legilor plasticității, admițîndu-se existența unei frecări uscate între material şi cilindri. Pe lîngă dimensiunile de mai sus s-au mai considerat : coeficientul de frecare $f = 0{,}6$, limita de curgere $k_0 = 8{,}63$ kgf/mm², tensiunile materialului la intrare, respectiv ieşire $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$. S-au reprezentat formulele lui A. I. Țelikov [4], formulele lui A. A. Korolev [5] cînd $\psi = 2$, şi formulele propuse de noi [3] cînd $\psi = 1$ şi $\psi = 2$, pentru zona de întîrziere :

$$p = \frac{1}{1 + f\,\mathrm{tg}\varphi}\left\{k_0\left(\psi - \frac{\psi-1}{\Delta h}2R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) + \right.$$
$$+ [\exp(-I)]\left[C - k_0\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{u_n}{n+1}\varphi^{n+1} + \right. \tag{17}$$
$$\left.\left. + 2R\,k_0\frac{\psi-1}{\Delta h}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left(u_n\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right)\right]\right\}$$

şi pentru zona de avans:

$$p = \frac{1}{1 - f\,\mathrm{tg}\,\varphi}\Bigg\{k_0\left(\psi - \frac{\psi - 1}{\Delta h}\,2\,R\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sin\varphi\right) + \\ + [\exp(-I^{*})]\left[C^{*} - k_0\,\psi\sum_{n=0}^{4}\frac{\overset{*}{u}_n}{n+1}\,\varphi^{n+1} + \right. \\ \left. + 2R\,k_0\frac{\psi - 1}{\Delta h}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\sum_{n=0}^{4}\left(u_n^{*}\sum_{i=0}^{n}\frac{d^i}{d\varphi^i}(\varphi^n)\frac{d^i}{d\varphi^i}(-\cos\varphi)\right)\right]\Bigg\}, \tag{18}$$

unde s-a notat

$$\Delta h = 2\,(H_0 - H_1); \qquad \psi = \frac{k_1}{k_0}.$$

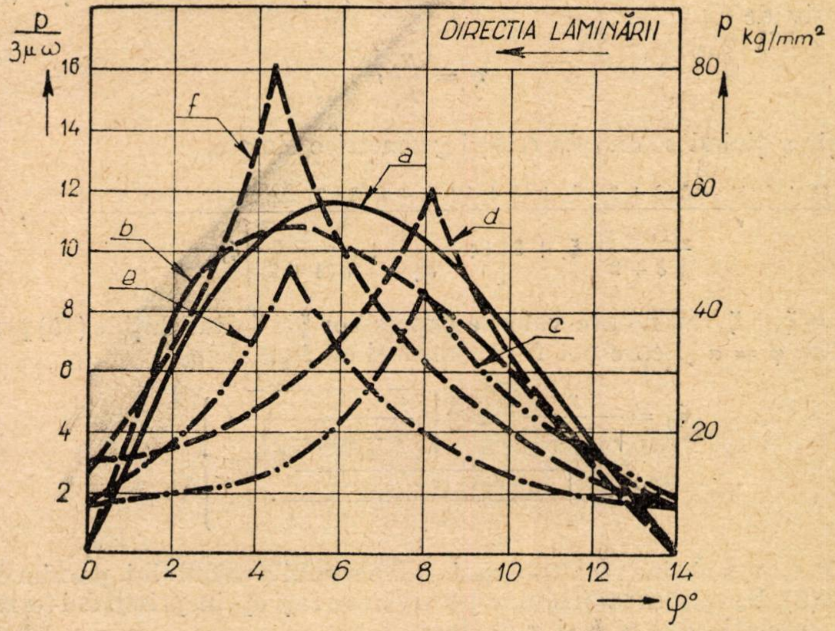


Fig. 2. — Curba *a* trasată cu ajutorul formulei (14); curba *b* trasată cu ajutorul formulei lui Targ; curba *c* trasată cu ajutorul formulelor lui Ţelikov; curba *d* trasată cu ajutorul formulelor lui Korolev cînd $\psi = 2$; curba *e* trasată cu ajutorul formulelor (17) şi (18) cînd $\psi = 1$; curba *f* trasată cu ajutorul formulelor (17) şi (18) cînd $\psi = 2$.

Pentru a avea încă un termen de comparaţie cu datele experimentale, se introduce noţiunea de coeficient al avansării materialului [1] definit de

$$k = \frac{Q - Q_1}{Q_1}, \tag{19}$$

unde Q este debitul de material ce trece prin secţiunea AA_1, iar Q_1 debitul ce ar trece prin aceeaşi secţiune, dacă toate particulele ar fi animate de o aceeaşi viteză, egală cu viteza periferică a cilindrului. Deci

$$\left.\begin{aligned} Q &= -2\int_0^{H_1} u_0 dy, \\ Q_1 &= 2\,\omega RH_1, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

unde s-a notat cu u_0 viteza u pentru $x = 0$.

Efctuînd înlocuirile şi calculele în relaţiile de mai sus, coeficientul de avansare al materialului ia forma generală

$$k = \frac{C}{RH_1} - 1 \tag{21}$$

sau, utilizînd numerele adimensionale δ şi η definite de relaţia (13) şi respectiv de

$$\eta = \frac{H_0}{H_1}, \tag{22}$$

se obţine, ţinînd seama de relaţii geometrice simple,

$$k = 2\frac{(\delta+1)\,[1-\delta(\delta+2)]\,\xi_0 + (\delta+1)^2\,\zeta_0 + \delta(\delta+2)\ \mathrm{arc\,cos}\,[1-\delta(\eta-1)]}{\dfrac{3(\delta+1)}{\delta+2}\,\xi_0 + \delta\left[1+\dfrac{\delta+1}{\delta\eta}+\dfrac{3}{\delta(\delta+2)}\right]\zeta_0} - 1, \tag{23}$$

unde cu ξ_0 şi ζ_0 sînt notate valorile expresiilor ξ şi ζ din relaţiile (15) pentru valoarea $\varphi = \alpha$ şi care pot fi calculate şi cu formulele

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{2}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{(\delta+2)(\eta-1)}{2-\delta(\eta-1)}}, \\ \zeta_0 &= \frac{\sqrt{\delta(\eta-1)\,[2-\delta(\eta-1)]}}{\delta\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Pentru a obţine rezultate mai uşor accesibile calculului, pornim de la relaţia (8), dezvoltăm radicalul respectiv în serie şi oprim primii doi termeni. Astfel corelaţia dintre h şi x devine

$$h = H_1 + \frac{x^2}{2R}\cdot \tag{25}$$

Aceasta reprezintă desigur o soluţie aproximativă şi corespunde înlocuirii arcului de cerc AB cu un arc de parabolă.

Legea de repartiţie a presiunii în acest caz este

$$\left.\begin{aligned} p(h) &= 3\,\mu\omega\int_{H_1}^{h} \frac{h^2-(R+H_1)\,h+C}{h^3}\,\frac{R}{\sqrt{2R(h-H_1)}}\,dh, \\ p(H_0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

sau efectuînd calculele

$$p(h) = 3\,\mu\omega\sqrt{\frac{R}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{H_1}}\left(1 + \frac{3C}{8H_1^2} - \frac{R+H_1}{2H_1}\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-H_1}{H_1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2H_1}\left[\frac{3C}{2H_1} - 2\,(R+H_1)\right]\frac{\sqrt{h-H_1}}{h} + \frac{C}{2H_1}\,\frac{\sqrt{h-H_1}}{h^2}\right\}, \tag{27}$$

unde constanta C are valoarea

$$C = \frac{(R+H_1)\left[\frac{1}{H_1}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{H_0-H_1}{H_1}}\right] + \frac{1}{H_0}\sqrt{\frac{H_0-H_1}{H_1}}\,\Big] - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{H_0-H_1}{H_1}}}{\frac{1}{2H_0}\left(\frac{1}{H_0} + \frac{3}{2H_1}\right)\sqrt{\frac{H_0-H_1}{H_1}} + \frac{3}{4H_1^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{H_0-H_1}{H_1}}}. \tag{28}$$

Coeficientul de avansare al materialului în acest caz este dat de expresia

$$k = \frac{(1+\delta)\frac{\sqrt{\eta-1}}{\eta} + (1-\delta)\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1}}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{\eta-1}}{\eta} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1}} - 1\,. \tag{29}$$

În tabloul nr. 1 sînt prezentate valorile ce se obțin pentru coeficientul de avansare al materialului, k, cu formula (23), în comparație cu datele experimentale ale lui I. M. Pavlov [1] pentru o laminare la cald în domeniul 700—900°C, cu formula (29), care este o soluție aproximativă și cu formula (30) a lui Targ [1], [2] obținută prin reținerea primilor termeni ai unei dezvoltări în serie

$$k \approx \frac{\eta-1}{\eta+1}\left[1 - 2\,\delta\eta\left(1 - \frac{5}{6}\eta + \frac{1}{3}\eta^2\right)\right]. \tag{30}$$

Tabloul nr. 1

Parametrii laminării		Coeficientul de avansare al materialului, k, în %			
$\delta = \frac{H_1}{R}$	$\eta = \frac{H_0}{H_1}$	Valori experimentale (I. M. Pavlov)	Valori teoretice		
			formula (23)	formula (29)	formula (30)
0,225	1,1	2—3	2,6	2,4	3,6
0,225	1,2	4—6	4,4	4,2	6,7

Colectivul nostru a executat o serie de măsurători pe un laminor duo. Din rezultatele ce le avem, putem efectua o verificare a coeficientului de avansare al materialului. Astfel, experiențele au fost executate pentru o succesiune de treceri pe un laminor ai cărui cilindri au $D = 610$ mm, regimul temperaturilor fiind 850–900°C. Am luat în considerație turația ca medie a turației reale, care din oscilograme reiese că variază în timpul laminării. Debitul Q, așa după cum este definit de relația (20), este debitul real și în consecință l-am determinat raportînd volumul final laminat la timpul cît a durat trecerea materialului prin secțiunea AA_1 (fig. 1). Acest timp l-am avut marcat în oscilograme.

Rezultatele experimentale obținute de noi le prezentăm în tabloul nr. 2, în comparație cu rezultatele teoretice obținute cu formulele (23), (29) și (30).

Tabloul nr. 2

Parametrii laminării				Coeficientul de avansare al materialului, k, în %			
					valori teoretice		
$\delta = \frac{H_1}{R}$	$\eta = \frac{H_0}{H_1}$	Q mm³/s	Q_1 mm³/s	valori experimentale	formula (23)	formula (29)	formula (30)
0,0287	2,01	18 800	16 400	14,6	17,3	17,3	31,0
0,0154	1,84	10 090	8 910	13,2	15,8	16,0	28,6
0,0098	1,566	6 410	5 830	10,0	12,4	12,6	21,7

Pentru exemplul numeric prezentat în figura 2, valoarea coeficientului de avansare al materialului, k, calculată cu formula (23), este cu aproximativ 40% mai mică decît cea calculată cu formula (30).

Am trecut în tablourile nr. 1 și 2 rezultatele ce se obțin și cu formula (29) și se constată că aproximația este satisfăcătoare. De asemenea, pentru exemplul numeric tratat anterior curbele trasate cu formulele (14) și (27) practic se suprapun, în special în zona de ieșire a materialului dintre cilindri laminorului.

Din figura 2 se constată că curba obținută cu formula (14) are o alură apropiată de cea a curbelor experimentale și comparabilă cu cea a celorlalte curbe, bineînțeles ținînd seama că formulele deduse pe baza legilor plasticității, admițînd frecarea uscată, nu prind fenomenul ce are loc în zonele de intrare și ieșire, cît și în zona de aderență (de presiune maximă). De asemenea, se mai observă că zona de presiune maximă este deplasată spre ieșirea materialului dintre cilindri, așa după cum se obține experimental, maximul găsindu-se plasat în aceeași regiune cu cel al formulelor (17) și (18) deduse de asemenea în ipoteza că se neglijează deformațiile cilindrilor laminorului.

Din formula (14) se vede că natura materialului cît și temperatura de laminare influențează presiunea de laminare prin coeficientul de viscozitate dinamică μ. Din acest punct de vedere formula (14) este comparabilă cu formulele deduse pe baza legilor plasticității, unde limita de curgere k_0 este caracteristică fiecărui material și depinde de temperatură. Coeficientul de viscozitate dinamică μ este o mărime ce se poate determina pe cale experimentală.

Facem observația că coeficientul de avansare al materialului, k, așa cum este el exprimat cu una din formulele (23), (29) sau (30), nu depinde de natura materialului și nici de temperatură. În realitate, acești factori au însă desigur importanță și numai așa se poate explica împrăștierea rezultatelor experimentale cum apar în tabloul nr. 1. Ca urmare, formulele (23), (29) și (30) se pot aplica ca un criteriu de orientare în cazul laminărilor la cald.

Prin natura ipotezelor ce stau la baza analogiei hidrodinamice a laminării, se obțin rezultate utile asupra alurii curbelor de presiune ce se aseamănă cu curbele experimentale și se constată o apreciabilă apropiere a rezultatelor teoretice de cele experimentale în ceea ce privește coeficientul de avansare al materialului.

Primită la redacție la 18 februarie 1957.

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ПРОКАТКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В статье рассматриваются явления, наблюдаемые при прокатке металлов.

Так как известно, что существует аналогия между движением слоев металла во время прокатки и вытеканием жидкостей через насадок той же формы, то для исследования давления при прокатке применяются уравнения для вязких жидкостей. Предполагается, что можно пренебречь деформациями валков прокатного стана. Полученный результат выражается уравнением (14).

Выводится также выражение (29) для коэффициента вытяжки (продвижения) материала, определяемого отношением (25).

Дается также приближенное решение для распределения давлений (34) и для коэффициента вытяжки материала (36).

Делается сравнение (рис. 2) с различными формулами из технической литературы и с результатами опытов (таблицы 1 и 2).

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема прокатки.

Рис. 2. — Кривая *a*, записанная при помощи формулы (14); кривая *b*, записанная при помощи формулы Тарга; кривая *c*, записанная при помощи формул Целикова: кривая *d*, записанная при помощи формул Королева при $\psi = 2$; кривая *e*, записанная при помощи формулы (17) и (18) при $\psi = 1$; кривая *f*, записанная при помощи формулы (17) и (18) при $\psi = 2$.

CONSIDÉRATIONS SUR UNE ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE DU LAMINAGE

(RÉSUMÉ)

L'article étudie les phénomènes dus au laminage des métaux.

Etant donné qu'il y a une analogie entre le mouvement des couches de métal pendant le laminage et l'écoulement d'un liquide dans un ajutage de même forme, on utilise, pour l'étude des pressions de laminage, les équations des fluides visqueux. On admet l'hypothèse qu'on peut négliger les déformations des cylindres du laminoir. Le résultat obtenu est donné par la relation (14).

On déduit l'expression (29) du coefficient d'avancement du matériel, défini par la relation (25).

On donne également une solution approximative pour la répartition de la pression (34) et pour le coefficient d'avancement du matéiiel (36).

On établit une comparaison (fig. 2) avec diverses formules indiquées par la littérature technique et avec des résultats expérimentaux (tableaux 1 et 2).

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma du laminage.

Fig. 2. — Courbe *a* tracée à l'aide de la formule (14); courbe *b* tracée à l'aide de la formule Targ; courbe *c* tracée à l'aide des formules de Tzelikov; courbe *d* tracée à l'aide des formules de Korolev pour $\psi = 2$; courbe *e* tracée à l'aide des formules (17) et (18) pour $\psi = 1$; courbe *f* tracée à l'aide des formules (17) et (18) pour $\psi = 2$.

BIBLIOGRAFIE

1. S. M. Targ, *Osnovnîe zadaci teorii laminarnîh tecenii*. Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moscova, Leningrad, 1951, p. 78 şi următoarele.
2. N. A. Sliozkin, *Dinamika viazkoi nesjimaemoi jidkosti*. Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî, Moscova, 1955, p. 218 şi următoarele.
3. M. Popov, I. Mitrică şi E. Deciu., *Studiul presiunilor specifice pe suprafaţa de contact în procesul de laminare*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 2, 1956, p. 557 şi următoarele.
4. A. I. Ţelikov, *Instalaţii de laminoare*. Ed. tehnică, Bucureşti, 1952, p. 45 şi următoarele.
5. A. A. Korolev, *Novîie issledovania deformaţii metalla pri prokatke*. Maşghiz, Moscova, 1953, p. 10 şi următoarele.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA
MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

DESPRE REGIMUL OPTIM DE AŞCHIERE CU CUŢITE DE STRUNG ARMATE CU PLĂCUŢE DIN CARBURI METALICE

DE

M. POPOV, D. PAVELESCU, I. MITRICĂ, E. DECIU, M. CALCIU şi N. PASCU

Într-o altă lucrare [1] am arătat cum pot fi clasificaţi parametrii aşchierii.

Studiul influenţei parametrilor geometrici asupra durabilităţii cuţitului de strung, tratat anterior, conduce la elucidarea primei grupe de parametri ai aşchierii şi dă posibilitatea determinării coeficienţilor de corecţie geometrici, pentru formula de bază (1).

Pentru viteza de aşchiere, în literatură se recomandă formula

$$v_T = \frac{C}{t^x\ s^y} K, \tag{1}$$

unde

v_T — viteza de aşchiere optimă, pentru o durabilitate T a cuţitului, m/min;
t — adîncime de tăiere, mm;
s — avansul sculei, mm/rot;
C — constantă funcţie de materialul de prelucrat;
K — $K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_T \cdot K_m \cdot K_\gamma \cdot K_\alpha \cdot K_{\alpha_1} \cdot K_\varkappa \cdot K_{\varkappa_1} \cdot K_\lambda$,

în care

K_γ, K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, K_λ reprezintă coeficienţii de corecţie funcţie de geometria sculei [1];
K_1 — coeficient de corecţie funcţie de caracteristicile mecanice ale materialului de aşchiat;
K_2 — coeficient de corecţie funcţie de sistemul de răcire adoptat;
K_3 — coeficient de corecţie funcţie de modul de ascuţire al plăcuţei;
K_4 — coeficient de corecţie funcţie de omogeneitatea straturilor ecruisate etc.;

K_T — coeficient de corecție, funcție de durabilitatea economică aleasă a cuțitului;
K_m — coeficient de corecție, funcție de materialul plăcuței;
x și y — exponenți funcție de materialul de prelucrat.

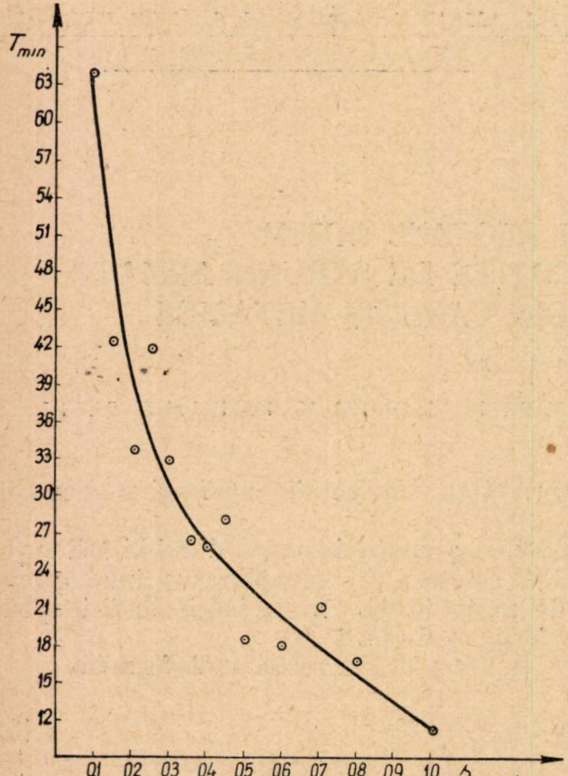


Fig. 1. — Influența avansului asupra durabilității cuțitului de strung armat cu plăcuță din carburi metalice S_1, la geometria optimă [1] pentru o viteză de așchiere $v = 248$ m/min și o adîncime de tăiere $t = 0{,}3$ mm.

Dependența funcțională (1) dintre viteza de așchiere, avansul sculei și adîncime, are o formă care îi dă posibilitatea de a fi utilizată numai pentru un anumit material și o anumită sculă pentru care constanta C și exponenții x și y sînt bine definiți.

În acest scop s-au ridicat curbele de uzură ale fețelor cuțitului ce vin în contact cu piesa sau cu așchia. Admițîndu-se drept criteriu uzura de pe fața de așezare secundară, care influențează într-o măsură mult mai mare decît celelalte uzuri, (de pe fețele de așezare principală și de degajare), asupra preciziei de lucru și de prelucrare a pieselor, s-a admis ca uzură plafon $\delta_{\alpha_1} = 1$ mm.

Relația (1), exprimată în coordonate logaritmice, arată că există o dependență liniară între viteza optimă de așchiere, avans și adîncimea de tăiere.

Relația cunoscută ce dă legătura dintre viteza de așchiere și durabilitatea plăcuței este

$$vT^n = C_1, \tag{2}$$

unde

T — durabilitatea plăcuței din carbură metalică, min;
n — exponent, funcție de materialul de prelucrat;
C_1 — constantă, funcție de materialul de prelucrat, de plăcuță, avans și adîncime de tăiere.

Relațiile (1) și (2) permit stabilirea unei legături între durabilitatea sculei, avans și adîncimea de tăiere, prin intermediul vitezei. Creșterea avansului sau a adîncimii de tăiere atrage după sine o micșorare a durabilității sculei la aceeași viteză de lucru, sau o micșorare a vitezei de așchiere pentru a menține aceeași durabilitate a cuțitului. Relația (1(este valabilă într-un anumit domeniu al durabilității în care se poate face liniarizarea în scară dublu logaritmică a relației (2).

Examinînd diagramele din figurile 1 și 2, se poate constata posibilitatea de utilizare a formulelor (1) și (2), pe zone de evoluție a fenomenului.

În aceste diagrame se constată o împrăștiere a punctelor experimentale. Acest aspect nu este cauzat de erorile de măsură. Analizînd îndeaproape fenomenul, constatăm că asupra rezultatelor experimentale o influență foarte mare o are omogeneitatea plăcuțelor din aceeași serie, care prin încercări de duritate, am constatat că au o variație apreciabilă. Astfel, repetîndu-se aceeași experiență cu diferite plăcuțe de tipul S_1, se constată o neconcordanță în ceea ce privește rezultatul experimental final, abaterea putînd să ajungă chiar pînă la 20%, cu toate că toți ceilalți parametri au fost păstrați riguros constanți. Apare astfel evidentă lipsa de omogeneitate a plăcuțelor din carburi metalice. Avînd în vedere acest aspect important, experiențele au fost făcute în așa fel încît să se cuprindă întreaga gamă de variație a omogeneității plăcuței, iar curbele și diagramele ridicate au fost trasate pe baza unor valori medii.

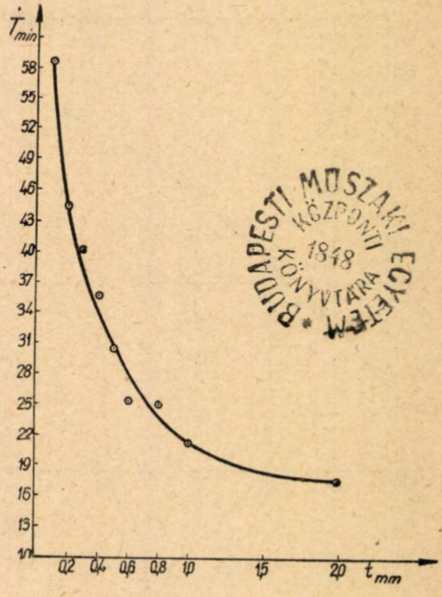


Fig. 2. — Influența adîncimii de tăiere asupra durabilității cuțitului de strung armat cu plăcuță din carburi metalice S_1, la geometria optimă [1] pentru o viteză de așchiere v = 252 m/min și avans s = 0,25 mm/rot

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Pentru a se putea determina constanta și exponenții formulei (1). a fost necesar să se determine în prealabil zona pentru care este valabilă relația (2), adică dependența vitezei de așchiere funcție de durabilitatea sculei. În figura 3, arătăm gama de experiențe destinate acestui scop, Menționăm că gama cuprinsă între durabilitățile $T = 50$ min și $T = 120$ min, prezintă interes pentru analiza științifică și pentru practică; de aceea, liniarizarea și deci valabilitatea expresiei (2) a fost admisă în acest domeniu al durabilităților.

Utilizînd aceste rezultate experimentale (fig. 1, 2 și 3) s-au putut determina constantele și exponenții formulelor indicate mai sus, pentru cazul așchierii oțelului OLC 45-STAS 880-49 cu cuțit armat cu plă-

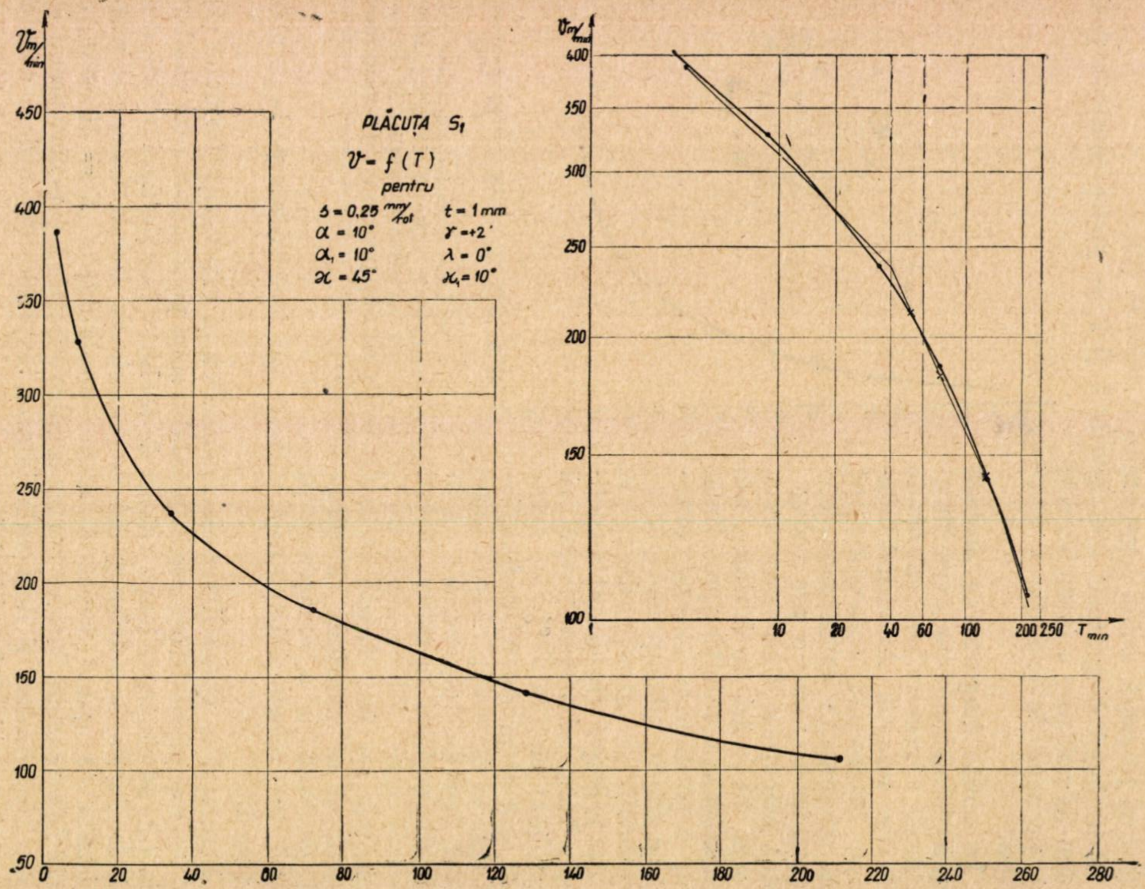


Fig. 3. — Variația durabilității cuțitului funcție de viteza de așchiere, pentru $s = 0{,}25$ mm/rot, $t = 1$ mm, la geometria optimă.

cuță S_1 din carburi metalice și s-au obținut relațiile

$$v_{60} = \frac{160,4}{s^{0.145}\, t^{0.0656}}, \tag{3}$$

și

$$vT^{0.4331} = 1163,32\,, \tag{4}$$

unde v_{60} este viteza optimă în m/min, pentru o durabilitate de 60 min a cuțitului.

Revenind asupra valorii constantei C, este necesar să determinăm coeficienții de corecție ai acesteia. Coeficientul de bază al parametrului de corecție global, K_1 este funcție de caracteristicile mecanice ale materialului de prelucrat. Valoarea acestui coeficient depinde astfel de diferitele mărci de oțeluri. În cazul oțelului de fabricație romînească OLC 45, admitem pentru acest coeficient valoarea $K_1 = 1$, deoarece considerăm această gamă de experiențe drept criteriu de comparație pentru alte experiențe. Coeficienții de corecție funcție de geometria sculei, K_γ, K_α, K_{α_1}, $K_\varkappa$, $K_{\varkappa_1}$, K_λ, au valori cunoscute în cazul oțelului studiat [1]. Admitem $K_2 = 1$, pentru așchierea fără răcire, procedeu de lucru des întîlnit în practică; $K_3 = 1$, pentru ascuțirea cuțitului de strung cu piatră de polizor din carbură de siliciu cu liant ceramic, cu granulația 60 și o duritate I b, fără o finisare ulterioară a plăcuței; $K_4 = 1$, pentru că s-a eliminat neomogeneitatea produsă de ecruisarea la suprafața materialului prelucrat, sau de existența zgurei etc.

Coeficientul de corecție K_T este definit de relația

$$K_T = \frac{v_T}{v_{60}} = \left(\frac{60}{T}\right)^{0.4331}, \tag{5}$$

în care s-au înlocuit valorile vitezelor din relația (4), v_T fiind viteza corespunzătoare unei durabilități $T \neq 60$ min. Deoarece zona de liniarizare aleasă este cea indicată mai sus dăm în tabloul nr. 1, valoarea acestui coeficient calculat din 10 în 10 min.

Tabloul nr. 1

Tmin	50	60	70	80	90	100	110	120
K_T	1,08	1	0,94	0,88	0,84	0,80	0,77	0,74

Așa cum s-a arătat mai sus, plăcuțele de carbură metalică diferă între ele din punct de vedere al calității lor, chiar în cazul în care ne referim la aceeași formulă de fabricație. În afară de această diferențiere, care a fost prinsă în experiențele executate, s-au analizat și plăcuțe din carburi metalice de diferite formule de fabricație, a căror calități generale le fac recomandabile pentru prelucrarea unui anumit material.

Din această cauză apare ca evidentă necesitatea de a se determina pentru fiecare oțel în parte, plăcuța din carburi metalice care permite prelucrarea în condiții de uzură avantajoase. În acest scop s-a executat o gamă de experiențe cu plăcuțe de fabricație sovietică și germană, ridicîndu-se curbele de uzură caracteristice fiecăreia (fig. 4).

Cu ajutorul acestor rezultate experimentale s-a putut determina coeficientul τ_m care reprezintă corecția durabilității sculei față de cea de 60 min luată drept comparație în cazul menținerii vitezei de așchiere constante.

Acest coeficient de corecție este dat de relația

$$\tau_m = \frac{T_m}{T_{opt\, s_1}}. \qquad (6)$$

Pentru determinarea coeficientului K_m, care permite corectarea vitezei optime, păstrîndu-se durabilitatea cuțitului de 60 min folosim relația (2). Final se obține următoarea expresie pentru coeficientul de corecție

$$K_m = \frac{v_m}{v_{60}} = \left(\frac{T_m}{60}\right)^{0.4331} = \tau_m^{0.4331}, \qquad (7)$$

în care

v_m — viteza optimă pentru plăcuța din carburi metalice aleasă;

T_m —durabilitatea corespunzătoare plăcuței alese cînd se lucrează cu viteza v_{60}.

Prezentăm în tabloul nr. 2 valorile coeficienților τ_m și K_m.

Tabloul nr. 2

Tip plăcuță	$T_{15}K_6$	S_1	S_2	$T_{30}K_4$	$T_{14}K_8$	S_3	T_5K_{10}
τ_m	1,17	1	0,68	0,67	0,51	0,29	0,23
K_m	1,07	1	0,85	0,84	0,75	0,58	0,53
Duritate medie HRC	78	75	76,4	79,2	75	74,1	74,6

Astfel, atît din figura 4, cît și din tabloul nr. 2, reiese că plăcuța cea mai indicată în cazul prelucrării oțelului de fabricație romînească OLC 45 este cea de fabricație sovietică $T_{15}K_6$, a cărei uzură are o evoluție mai lentă în comparație cu celelalte tipuri de plăcuțe. O durabilitate ceva mai redusă o prezintă plăcuța de fabricație germană S_1. Curbele de uzură ale plăcuțelor $T_{15}K_6$ și S_1, prezintă un palier mai pronunțat, zonă în care prelucrarea se efectuează în condiții optime de precizie.

Odată determinate condițiile optime de prelucrare ale oțelului respectiv, apare evidentă necesitatea studierii puterii de așchiere. Din această cauză s-a acordat atenție determinării puterii utile,

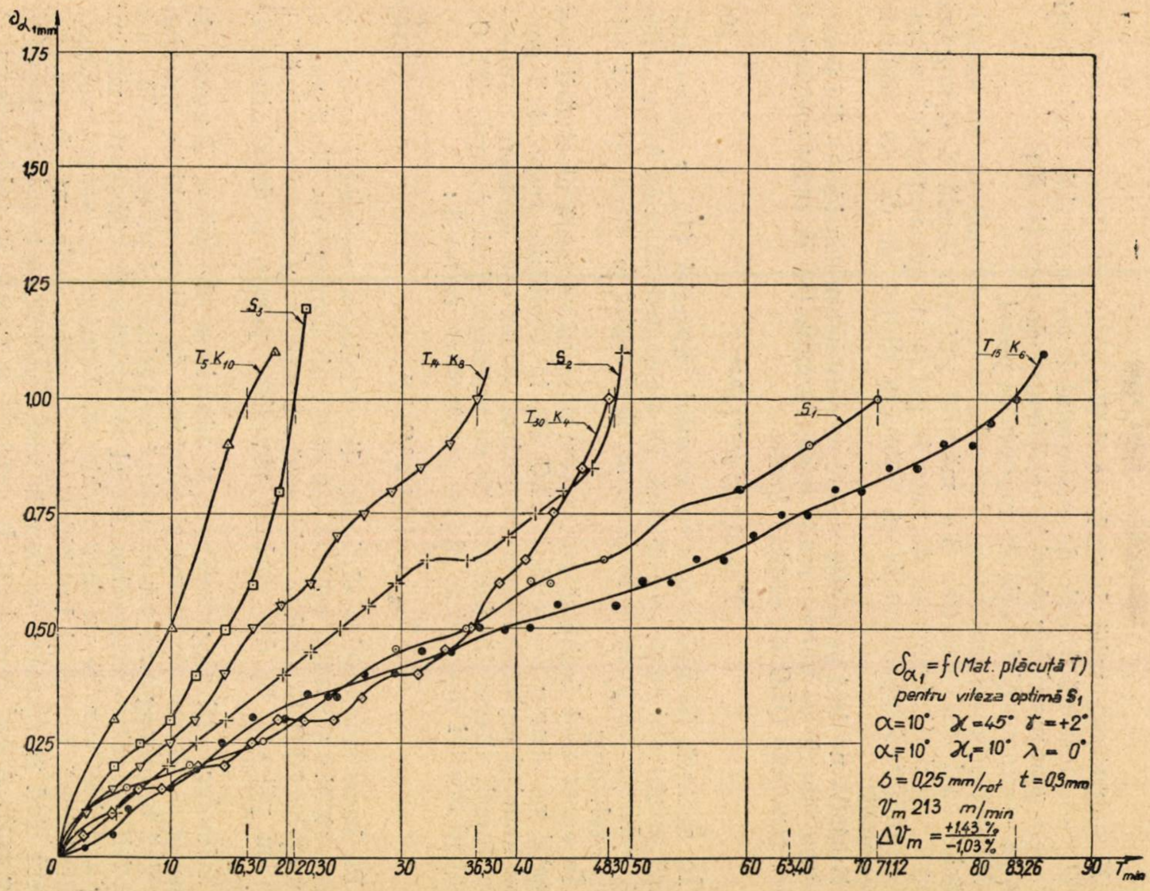


Fig. 4. — Variația uzurii funcție de durabilitatea cuțitului, pentru diferite tipuri de plăcuță din carburi metalice, la geometria optimă, pentru s = 0,25 mm/rot, t = 0,3 mm și v = 213 m/min.

Admitem, ca şi în cazul precedent, o formulă recomandată de literatura de specialitate, verificată pe cale experimentală

$$N = C_2\, s^{y_1}\, t^{x_1} v^{z}\,, \tag{8}$$

unde

N — puterea utilă de aşchiere, kW;

C_2 — constantă funcţie de materialul de prelucrat şi de toţi ceilalţi parametri înglobaţi în coeficientul de corecţie K;

x_1, y_1, z — exponenţi funcţie de materialul piesei.

Măsurătorile de putere au fost efectuate concomitent cu experimentările mai sus arătate. S-a măsurat puterea totală a strungului în timpul aşchierii şi puterea de mers în gol la turaţia respectivă, admiţîndu-se în primă aproximaţie că diferenţa dintre ele dă ca rezultat puterea utilă.

Bazîndu-ne deci pe aceste valori pe care le-am considerat din punct de vedere practic ca putere reală utilă, formula (8), în cazul prelucrării oţelului romînesc OLC 45, capătă forma

$$N = 0{,}163\, s^{0.77}\, t\, v^{0.75}\,. \tag{9}$$

În această formulă, contrar cazului expresiei (1), v reprezintă o viteză oarecare şi nu pe cea optimă. De aceea, calculînd cu formula (9), se poate determina puterea în cazul oricărui regim de lucru arbitrar ales de către tehnolog.

În cazul cînd dorim să cunoaştem puterea necesară efectuării unei prelucrări pe strung a oţelului OLC 45, în condiţiile respectării geometriei sculei şi regimului de lucru optime, atunci este necesară o substituţie a valorii vitezei din formula (9) cu valoarea ei din formula (3). Ca rezultat al acestei operaţii se obţine următoarea formulă:

$$N_{v_{60}} = 7{,}34\; s^{0.66}\, t^{0.95}\,. \tag{10}$$

Pe baza rezultatelor obţinute din studierea regimului optim de aşchiere, cît şi a puterilor optime, s-a construit nomograma din figura 5, pentru oţelul OLC 45, cînd se utilizează un cuţit cu geometria optimă [1], armat cu plăcuţă S_1 din carburi metalice, pentru o durabilitate de 60 min.

Tehnologul îşi alege avansul şi adîncimea de tăiere. Punctul de intersecţie al liniilor de avans şi adîncime de tăiere stabilite anterior, determină în nomogramă viteza optimă de aşchiere şi puterea utilă, care vor fi citite pe scările respective. Astfel se capătă indicaţii asupra maşinii şi regimului la care se va face aşchierea. Urmează ca asupra valorilor obţinute (viteză, putere şi durabilitate) să se aplice coeficienţii de corecţie, în cazul cînd prelucrarea se face în alte condiţii decît cele indicate în nomogramă. Aceşti coeficienţi de corecţie se găsesc în tablourile nr. 1 şi nr. 2, iar coeficienţii de corecţie legaţi de geometria sculei sînt daţi în lucrarea anterioară [1].

Aceste studii prezentate în lucrarea de faţă, cît şi în articolul precedent [1], dau posibilitatea să se cunoască influenţa diferiţilor para-

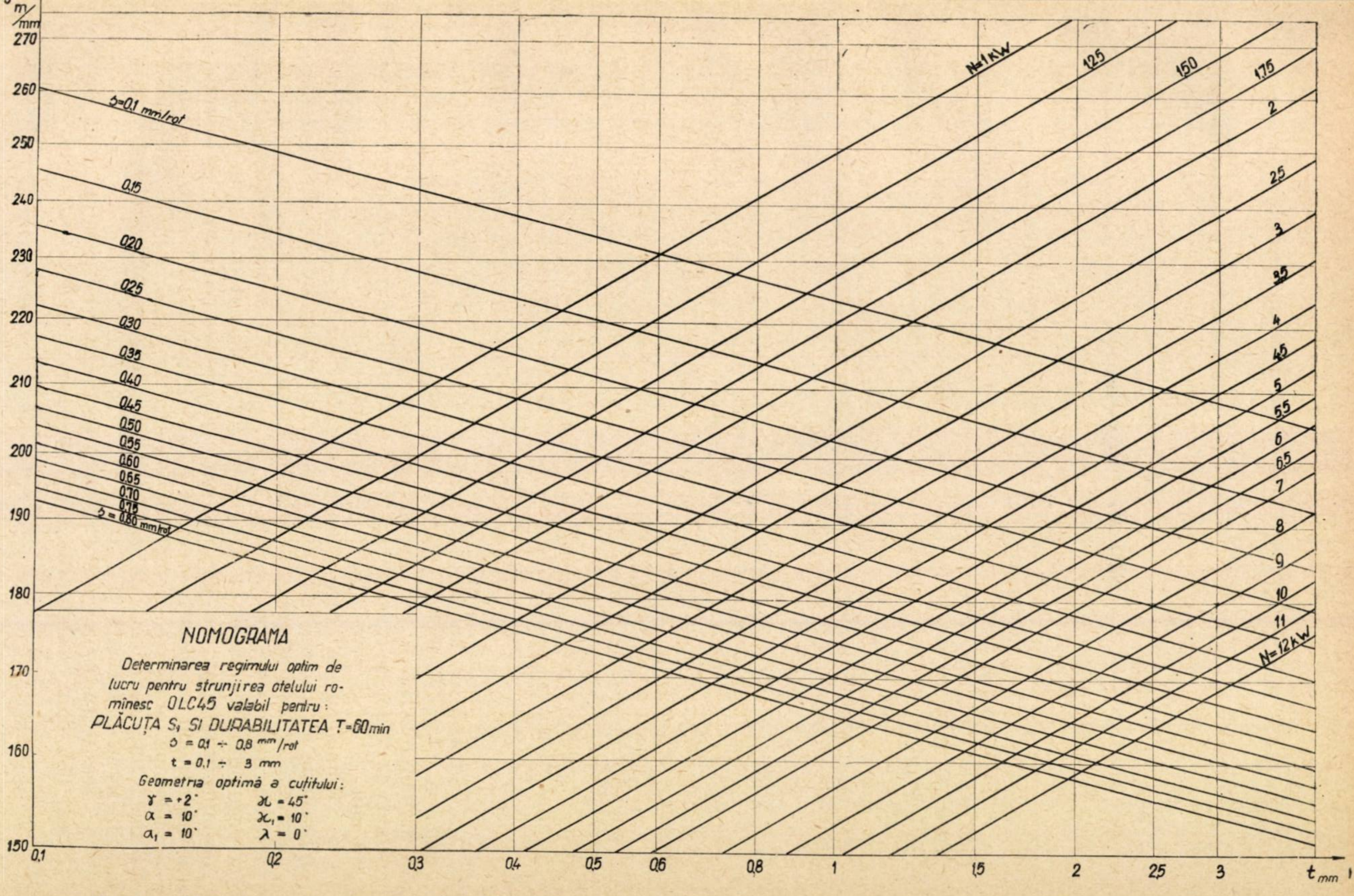


Fig. 5. — Nomograma de așchiere pentru determinarea regimului optim de lucru la strunjirea oțelului OLC 45, cu cuțit armat cu plăcuță din carburi metalice S_1.

metri asupra prelucrabilității oțelului romînesc OLC 45. Ele sînt rezultatul unei lucrări experimentale în care s-au efectuat peste 1 800 măsurători, ridicîndu-se mai mult de 120 diagrame.

Ca rezultat al primelor cercetări efectuate în domeniul așchierii oțelului romînesc OLC 45, se pot trage următoarele concluzii generale:

1) Se constată că dintre toate plăcuțele, plăcuța de fabricație sovietică $T_{15}K_6$ are cea mai mare durabilitate la geometria și regimul de lucru optime.

2) Viteza optimă este mai mult influențată de variația avansului decît de variația adîncimii de tăiere.

3) Puterea utilă este mai puternic influențată de creșterea adîncimii de tăiere decît de creșterea avansului și vitezei.

4) Prin utilizarea nomogramei, tehnologul stabilește regimurile optime de așchiere; se poate trece la normarea tehnico-științifică în întreprinderile prelucrătoare și pe baze raționale se poate alege strungul cu caracteristicile corespunzătoare.

Primită la redacție la 30 martie 1957.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕЖИМЕ РЕЗАНИЯ РЕЗЦАМИ С ПЛАСТИНКАМИ ИЗ ТВЕРДОГО УГЛЕРОДНОГО СПЛАВА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Работа является продолжением статьи «О геометрических параметрах напайного резца с пластинкой из твердых сплавов, опубликованной в предыдущем номере журнала. Рассматривается случай резания румынской стали марки OLC 45 на токарном станке, без охлаждения, резцами, снабженными пластинками S_1, S_2, S_3 (германского производства) и Т 15 К 6, Т 14 К 8, Т 5 К 10 и Т 30 К 4 (советского производства). Были определены оптимальные параметры резания, конкретизированные в конечной номограмме для резания с пластинкой S_1. Указаны также и поправочные коэффициенты для тех случаев, когда работа ведется при других режимах.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Влияние подачи на долговечность резца для токарного станка, снабженного пластинкой из твердого углеродного сплава S_1 ,при оптимальной геометрической форме [1], для скорости резания $v=248$ м/мин, и глубине $t=0,3$ мм.

Рис. 2. — Влияние глубины резания на долговечность резца, снабженного пластинкой из твердого углеродного сплава S_1, при оптимальной геометрической форме [1], для скорости резания $v=252$ м/мм и подаче $s=0,25$ мм/об.

Рис. 3. — Изменение долговечности резца в зависимости от скорости резания при $s=0,25$ мм/об, $t=1$ мм при оптимальной геометрической форме.

Рис. 4. — Изменение износа в зависимости от долговечности резца при различных типах пластинок из твердого углеродного сплава при оптимальной геометрической форме, при $s=0,25$ мм/об, $t=0,3$ мм и $v=213$ мм/мин.

Рис. 5. — Номограмма резания для определения оптимального режима работы при точении стали OLC 45 резцом, снабженным пластикой из твердого углеродного сплава S_1.

ÜBER DIE GÜNSTIGSTEN BEDINGUNGEN DES ZERSPANNUNG MIT DREHBANKWERKZEUGEN MIT HARTMETALLPLÄTTCHEN

(ZUSAMMENFASSUNG)

Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung des in No. 2/1957 dieser Zeitschrift erschienenen Abhandlung. Es werden der Fall der Zerspannung von rumänischen Stahl OLC 45 an der Drehbank ohne Kühlung, und zwar mit Hilfe von Werkzeugen mit Hartmetallplättchen der Typen S_1, S_2, S_3 (deutsche Fabrikate) und T_{15} K_6, T_{14} K_8, T_5 K_{10} und T_{30} K_4 (russische Fabrikate) behandelt und die günstigten Parameter für die Zerspannung mit Plättchen der Type S_1 ermittelt und in einem Nomogramm zusammengestellt. Ferner werden die Berichtungskoeffizienten für andere Arbeitsbedingungen angegeben.

ABBILDUNGEN

Abb. 1. — Einfluss des Vorschubes auf die Haltbarkeit des Drehbankwerkzeuges mit Hartmetallplättchen Type S_1 bei günstigstem Spannwinkel [1]. Zerspannungsgeschwindigkeit $v = 248$ m/Min., Schnittiefe $t = 0{,}3$ mm.

Abb. 2. — Einfluss der Schnittiefe auf die Haltbarkeit der Drehbankwerkzeuge mit Hartmetallplättchen Type S_1 bei günstigstem Spannwinkel [1]. Zerspannungsgeschwindigkeit $v = 252$ m/Min., Vorschub $s = 0{,}25$ mm/U.

Abb. 3. — Haltbarkeit des Werkzeuges in Abhängigkeit von der Zerspannungsgeschwindigkeit bei $s = 0{,}25$ mm/U., $t = 1$ mm, und günstigstem Spannwinkel.

Abb. 4. — Verschleiss in Abhängigkeit von der Haltbarkeit der Werkzeuges für verschiedene Typen von Hartmetallplättchen bei günstigsten Zerspannungswinkel, $s = 0{,}25$ mm/U′, $t = 0{,}3$ mm und $v = 213$ m/Min.

Abb. 5. — Zerspannungsnomogramm für die Bestimmung des günstigsten Arbeitsbedingungen beim Drehen von Stahl OLC 45 mit Hilfe von Werkzeugen mit Hartmetallplättchen Type S_1.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popov, D. Pavelescu, I. Mitrică, E. Deciu, M. Calciu şi N. Pascu, *Cu privire la parametrii geometrici ai cuţitului armat cu plăcuţă din carburi metalice.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, 1957, p.
2. D. Pavelescu, *Cu privire la studiul uzurii cutitelor de strung (iradiate), pentru determinarea parametrilor optimi de aşchiere.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, 1957, p.
3. M. E. Merchant, H. Ernest a. E. Krabacher, *Radioactive cutting tools for rapid tool life testing.* Transactions of the ASME, 1953, vol. 75, nr. 4.
4. M. N. Larin., *Optimalnie gheometriceskie parametrî rejuşcei ciasti instrumentov.* Oboronghiz, Moscova, 1953.
5. G. A. Alexeev, V. A. Arşinov şi E. A. Smolnikov, *Calculul şi construcţia sculelor aşchietoare.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
6. A. P. Sokolovski, *Precizia prelucrărilor mecanice şi metodele pentru mărirea ei.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
7. A. I. Caşirin, *Tehnologia construcţiei de maşini.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1953.
8. I. I. Semencenko, *Scorostnoe rezanie metalov i instrument,* Maşghiz, Moscova, 1951.

9. * * * *Enciklopedia Mşinostroenie.* Maşghiz, Moscova, 1947, vol. VII.

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

TRATAMENTE MECANICE ȘI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

CERCETĂRI ASUPRA REZISTENȚEI LA PENETRARE A SOLULUI

DE

C. FLORESCU și N. ZELINGHER

Cunoașterea condițiilor de funcționare a mașinilor agricole pentru lucrările solului are o deosebită importanță pentru construcția și exploatarea lor rațională.

Datele de proiectare și exploatare folosite pînă în prezent sînt obținute parțial prin dinamometrare și în cea mai mare parte empiric.

În privința rezistenței opusă de sol diverselor organe active ale acestor mașini sînt prea puține studii, problema avînd multe laturi complet nestudiate. Greutatea acestor studii constă în complexitatea factorilor naturali ce determină rezistența solului la diferite lucrări, în diversitatea formelor și a materialelor organelor active folosite în prezent și în multitudinea scopurilor urmărite prin lucrările solului. Aspectul economic al problemei contribuie de asemenea la mărirea complexității acestor studii.

Analizîndu-se procesele tehnologice de lucrarea solului executate de organele active ale acestor mașini se poate constata prezența următoarelor faze :

— tăiere în plan vertical,
— tăiere în plan orizontal,
— răsturnare și deplasare a brazdei.

Aceste faze se pot întîlni în diferite combinații, dintre care lucrările pentru metoda Maltev, subsolajul la adîncime, refacerea desfundărilor, drenaje închise, îngroparea adîncă a îngrășămintelor etc., folosesc primele două faze.

Se poate considera că asupra unui organ de forma prezentată în figura 1, ce execută numai primele două faze, acționează următoarele momente :

$$M_1 = R_1 . b,$$
$$M_2 = G . b,$$
$$M_3 = (R_1 . h) + (R_2 . d) \pm (G . a).$$

Deoarece în toate procesele de lucru ale solului este necesară prezenţa unui organ de tăiere în plan vertical, cercetările de faţă s-au axat, în primul rînd, pe studierea acestor rezistenţe (forţele R_2, fig. 1). Procesele de lucru ale solului trebuie să se execute la diverse adîncimi impuse de cerinţele agrotehnice, ceea ce necesită cunoaşterea variaţiilor rezistenţei solului pe verticală. Datele culese prin dinamometrare redau rezistenţa totală opusă de sol respectivelor organe active. Pentru analiza parţială a factorilor care influenţează rezistenţa solului, s-au întreprins puţine studii în care s-a căutat stabilirea unor relaţii între rezistenţa solului şi diferite caracteristici fizice ca : umiditatea, conţinutul în argilă etc. Majoritatea acestor studii au fost făcute în laborator, avînd o valoare redusă pentru condiţiile naturale de lucru.

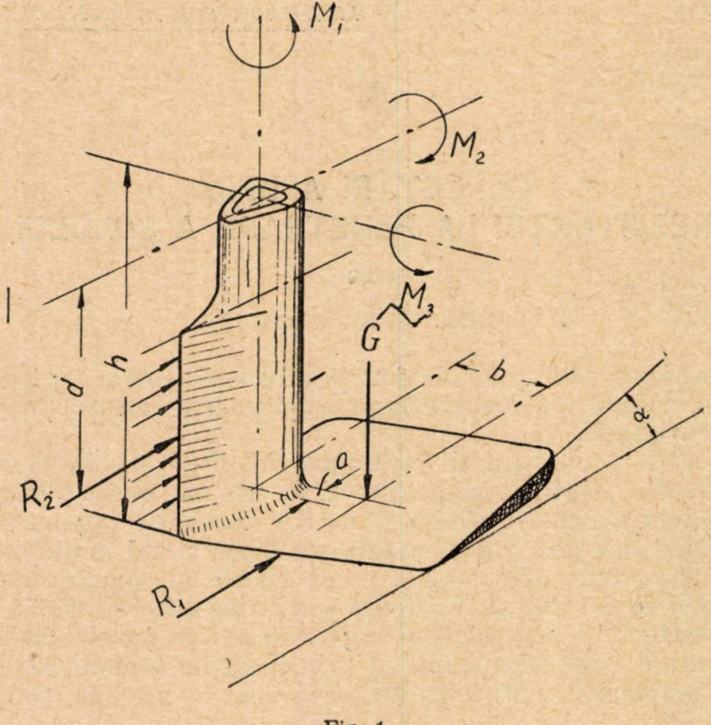


Fig. 1

Căutîndu-se o metodă care ar putea completa, sau înlocui metoda directă dinamometrică, puţin corespunzătoare pentru acest aspect al problemei, s-a început cercetarea rezistenţei la penetrare pe verticală a solului, admiţîndu-se ipoteza că variaţiile factorilor ce determină starea solului influenţează rezistenţa la tăiere în plan vertical — asemănător cu aceea opusă la penetrare pe verticală. Prin rezistenţa la penetrare a solului se înţelege rezistenţa opusă de sol la pătrunderea unui corp etalon.

În prezentul articol sînt expuse unele rezultate experimentale obținute de colectivul I.M.A. în urma cercetării rezistenței la penetrarea solului brun-roșcat de pădure.

Cercetările au fost executate cu un penetrometru de tip dinamic, de construcție proprie, cu următoarele caracteristici :

greutatea penetrometrului (fără berbec)	2 150 gf,
greutatea berbecului	3 200 gf,
cursa berbecului	313 mm

Vîrful de pătrundere în sol are formă prismatică cu unghi de tăiere de 45°, secțiunea 20 × 20 mm. Energia de pătrundere în sol a penetrometrului, pornindu-se de la energia dată de căderea berbecului este

$$E_1 = Qh$$

$$E_2 = \frac{m_1 + m_2}{2} V_2^2$$

$$V_2 = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2\,gh}$$

$$E = E_1 - E_2 = Qh - \frac{(m_1 + m_2)(m_1 - km_2)^2}{2\,(m_1 + m_2)^2}\, 2\,gh,$$

în care s-au utilizat următoarele notații :

E_1 = energia provocată de căderea berbecului,
h = înălțimea de cădere a berbecului,
Q = greutatea berbecului,
E_2 = energia sistemului după căderea berbecului,
m_1 = masa berbecului,
m_2 = masa penetratorului,
k = coeficient de restituție.

Pătrunderea făcîndu-se într-un mediu considerat plastic,

$$k = 0.$$

Utilizînd valorile penetrometrului folosit, pentru fiecare lovitură corespunde $E = 0{,}40$ kgm, valoare ce a fost luată în considerație la prelucrarea datelor experimentale.

Dintre experimentările preliminare redăm în figura 2 pe acelea executate pe un același tip de sol, în trei stări diferite :

(arat și înghețat superficial pe o adîncime de 10 cm (fig. 2 *a*) ; înțelenit (fig. 2 *b*) ; arat (fig. 2 *c*).

Din aceste diagrame rezultă :

— Pentru solul înțelenit rezistența variază puțin pe adîncimea de 500 mm luată în considerație.

— Rezistența solului arat și înghețat la suprafață a fost diferită pentru partea superficială înghețată (circa 10 cm adîncime), partea arată neînghețată (10—30 cm) și partea de sub brazdă (30—50 cm adîncime).

— Pentru solul arat, se delimitează o rezistență pentru partea arată și o alta pentru partea de sub brazdă. Rezultatele expuse permit să considerăm ca suficient de sensibil, pentru etapa actuală, penetrometrul folosit.

Trecîndu-se la lucrările pe terenuri mari, s-a căutat să se obțină o imagine a rezistenței la penetrarea solului utilizabilă pentru studii comparative, dinamometrice. Experimentările s-au făcut pe două terenuri alăturate, alese pe o parcelă uniformă după aspectul exterior, cu relief plan, cu aceleași culturi și lucrări anterioare, făcînd parte dintr-o solă luată în cultură de mulți ani. În momentul experimentării, întreaga solă era arată de toamnă. Delimitîndu-se terenurile de experimentare, s-au trasat cîte zece linii de penetrare, paralele cu direcția brazdelor, depărtate la 5 m între ele, pe care s-au executat măsurători din 5 în 5 m, obținîndu-se 100 de măsurători pe 2 500 m^2. Cu datele culese s-au construit curbele de variație a energiei în funcție de adîncime, pînă la 500 mm. Derivîndu-se grafic aceste curbe, s-a obținut variația rezistenței în punctele de penetrare. În figura 3 redăm graficele mediilor ponderate ale rezistențelor aflate, considerate în direcție paralelă și perpendiculară pe direcția brazdelor.

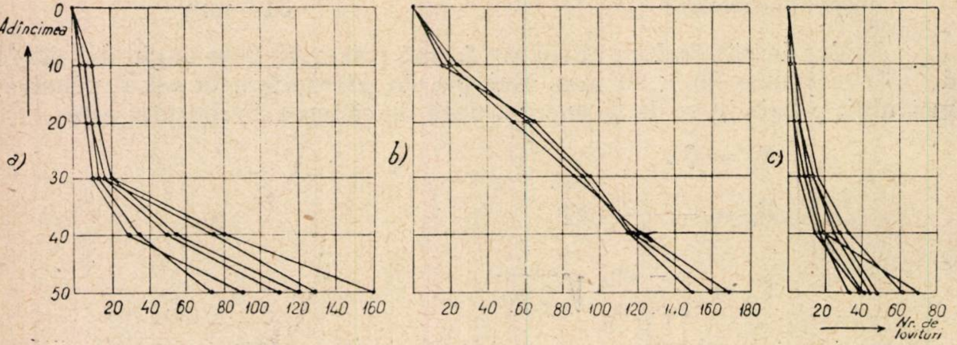


Fig. 2

Din graficele de mai sus se pot desprinde următoarele :

— Rezistența solului pe verticală este variabilă.

— Variația rezistenței solului în plan vertical prezintă un aspect periodic. Trecîndu-se la cercetarea rezistențelor la penetrare considerate în plan orizontal, s-au obținut rezultatele prezentate în figura 4, prin unirea punctelor de egală rezistență cu o linie continuă.

Prezența acestor linii de egală rezistență și variațiile lor permit elaborarea unor metode de diferențiere științifică a normelor de lucru, consumului de carburanți, construcția unor mașini corespunzătoare condițiilor de teren etc. În special, cercetările și omologările mașinilor agricole pentru lucrările solului trebuie să se desfășoare în cunoștința acestor linii de egală rezistență. În această direcție cercetările pot cuprinde probleme de cea mai mare importanță pentru producția agricolă actuală.

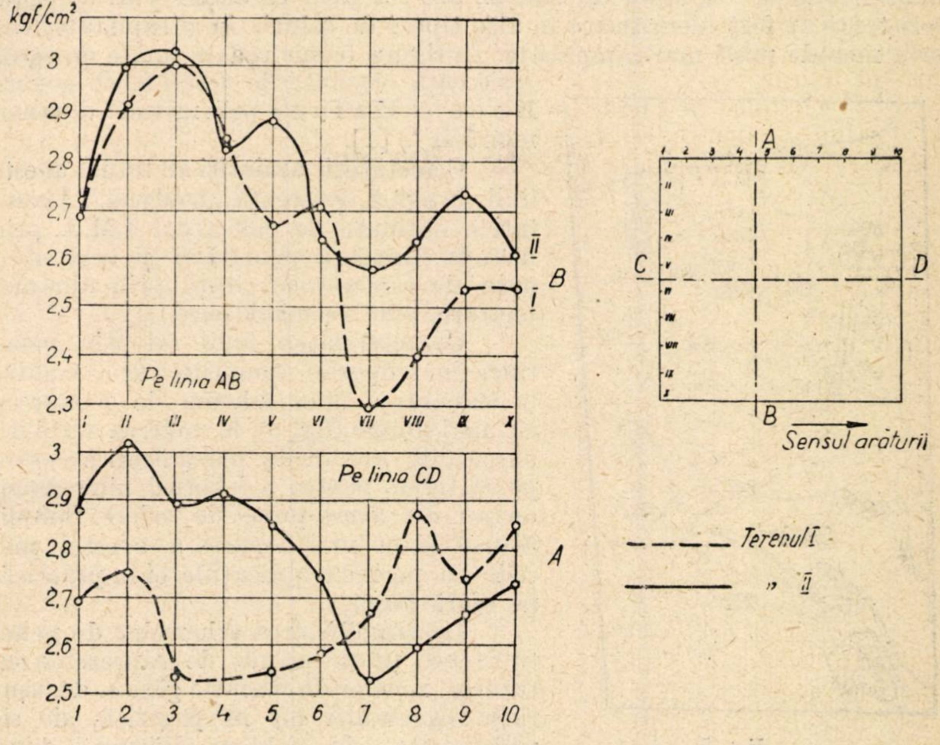

kgf/cm²
3
2,9
2,8
2,7
2,6
2,5
2,4
2,3
Pe linia AB
I II III IV V VI VII VIII IX X
II
I
B
Pe linia CD
A
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
A
B
C
D
Sensul arăturii
Terenul I
" II

Fig. 3

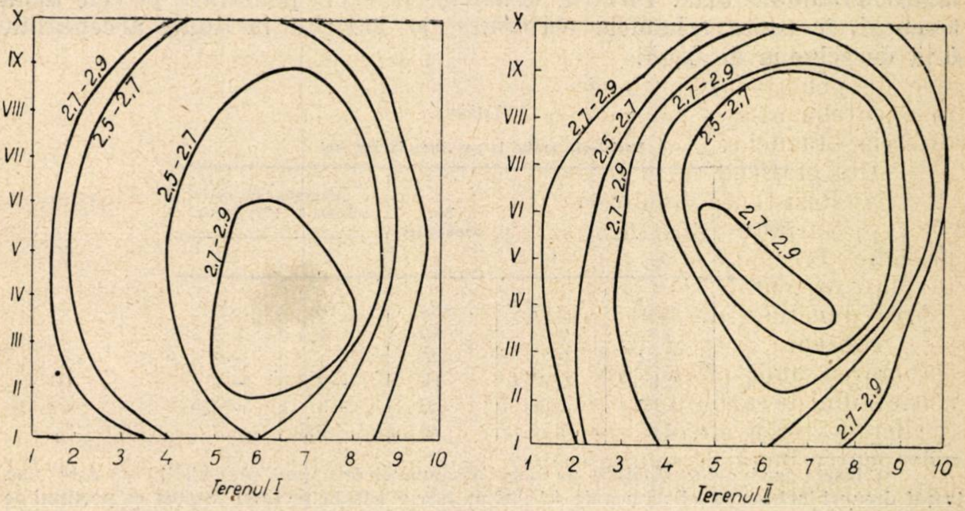

X IX VIII VII VI V IV III II I
2,7-2,9
2,5-2,7
2,5-2,7
2,7-2,9
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Terenul I
2,7-2,9
2,5-2,7
2,7-2,9
2,7-2,9
2,5-2,7
2,7-2,9
2,7-2,9
Terenul II

Fig. 4

Consultîndu-se literatura de specialitate s-a găsit că aceste linii de egală rezistență au fost identificate în alte tipuri de soluri, în străinătate, dar prin metode mult mai complicate. În figura 5 sînt redate liniile de egală rezistență obținute de cercetătorii englezi **Keen** și **Haines** prin metoda dinamometrării *) [1].

Cercetătorii amintiți au numit aceste linii de egală rezistență „izodyne". Rezultatele obținute de colectivul I.M.A. prin metoda simplă a penetrării și cele obținute de cercetătorii citați, prin dinamometrare, sînt asemănătoare.

Caracterizarea unui sol prin penetrare în scopurile amintite, ne-a condus la elaborarea unor scheme de penetrare cît mai simple (fig. 6), în vederea stabilirii numărului minim de măsurători necesare pe un teren, pentru a fi totuși bine caracterizat din acest punct de vedere. Simplificarea și pe mai departe a acestei metode va permite aplicațiile ei în practică, pe scară largă.

La simplificarea schemelor de penetrare s-a ținut seama de reprezentarea tuturor zonelor de variație găsite, de ușurința executării lor în practică, de simetrie etc., în tabloul alăturat fiind expuse datele obținute.

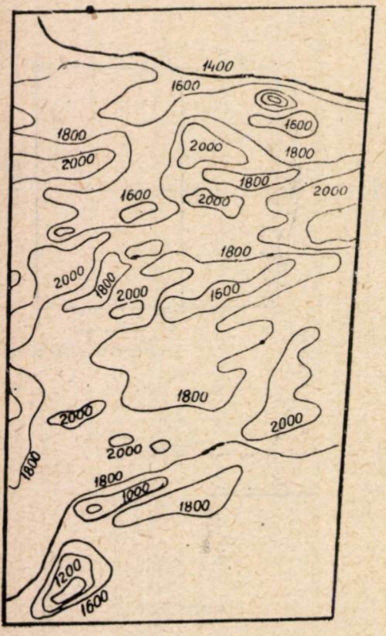


Fig. 5

— Din rezultatele obținute în limitele schemelor 1—6, se pot trage următoarele concluzii : variația rezistenței medii la penetrare pe cele două terenuri, în toate schemele elaborate, se menține în limite acceptabile față de schema de bază.

Tablou

Rezistența medie la penetrare în kgf/cm²

Schema	Teren		Nr. sondaielor	Abaterea față de schema 1. (%) Teren	
	I	II		I	II
1	2,66	2,78	100	0	0
2	2,7	2,71	50	1,5	−3
3	2,64	2,78	25	−1	0
4	2,6	2,67	16	−2,3	−4
5	2,58	2,85	20	−3	2,5
6	2,67	2,75	20	0,4	−1

---

*) Harta izodynelor stabilită pe baza dinamometrării unui plug-cîrtiță cu care s-au trasat drenuri închise, la adîncimea de 18—30 m, într-o pășune pe teren argilos cu porțiuni de pietriș. În stînga figurii, jos, un teren moale cu ape subterane. Intervalul între izodyne 100 lb.

Iª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
II	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
III	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
IV	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
V	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
VI	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
VII	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
VIII	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
IX	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
X	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

IIª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
II	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○
III	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
IV	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○
V	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
VI	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○
VII	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
VIII	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○
IX	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
X	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○

IIIª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	○	●	●	●	○	●	●	●	○	●
II	●	●	○	●	●	●	○	●	●	●
III	○	●	●	●	○	●	●	●	○	●
IV	●	●	○	●	●	●	○	●	●	●
V	○	●	●	●	○	●	●	●	○	●
VI	●	●	○	●	●	●	○	●	●	●
VII	○	●	●	●	○	●	●	●	○	●
VIII	●	●	○	●	●	●	○	●	●	●
IX	○	●	●	●	○	●	●	●	○	●
X	●	●	○	●	●	●	○	●	●	●

IVª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	○	●	●	○	●	●	○	●	●	○
II	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
III	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
IV	○	●	●	○	●	●	○	●	●	○
V	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
VI	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
VII	○	●	●	○	●	●	○	●	●	○
VIII	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
IX	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
X	○	●	●	○	●	●	○	●	●	○

Vª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
II	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
III	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
IV	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
V	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
VI	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
VII	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
VIII	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
IX	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●
X	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●

VIª

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	○	●	●	●	●	●	●	●	●	○
II	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●
III	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●
IV	●	●	●	○	●	●	○	●	●	●
V	●	●	●	●	○	○	●	●	●	●
VI	●	●	●	●	○	○	●	●	●	●
VII	●	●	●	○	●	●	○	●	●	●
VIII	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●
IX	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●
X	○	●	●	●	●	●	●	●	●	○

Fig. 6

– Reducerea cu 75–85 % a numărului de măsurători, față de schema de bază, nu aduce variații mai mari de 5 % față de media rezistenței la penetrare a schemei 1.

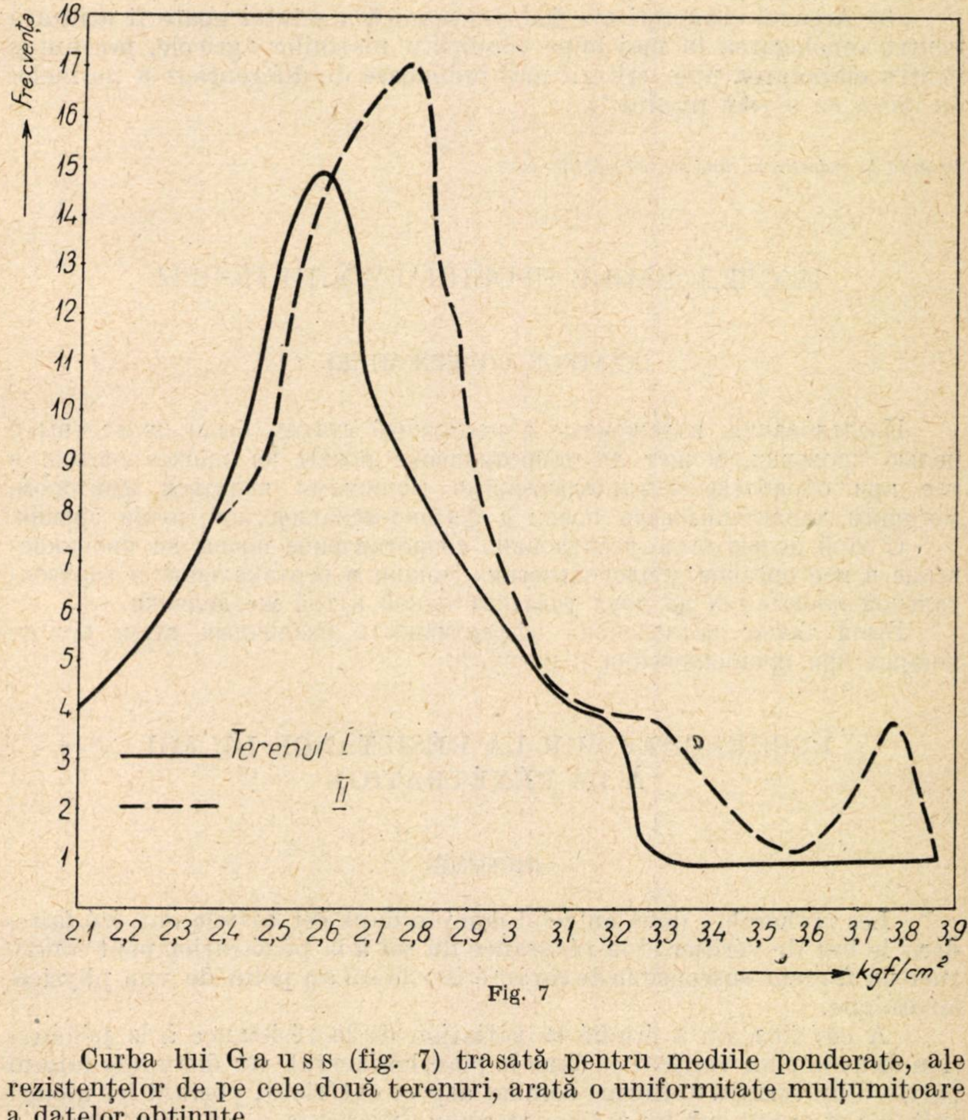


Fig. 7

Curba lui Gauss (fig. 7) trasată pentru mediile ponderate, ale rezistențelor de pe cele două terenuri, arată o uniformitate mulțumitoare a datelor obținute.

Din cele expuse se pot desprinde următoarele:

1) Din analiza diagramelor prezentate (fig. 2) rezultă că aparatura folosită este suficient de sensibilă pentru a contribui la determinarea variației rezistenței solului în plan vertical a unui teren, la un moment dat.

2) Prin măsurătorile executate s-au pus în evidență zone de variație a rezistenței la penetrare a solului, în plan vertical și în plan orizontal, pe terenuri uniforme după aspectul exterior și cu aceleași culturi și lucrări anterioare.

3) Această caracterizare fizico-mecanică a solului poate fi utilizată pentru omologarea în mai bune condiții a mașinilor agricole, precum și pentru elaborarea unor criterii mai judicioase de diferențiere a normelor de lucru cu aceste mașini *).

Primită la redacție la data de 30 aprilie 1957.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПОЧВЫ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследования, изложенные в настоящей статье, были проведены с целью проверки, может ли сопротивление почвы на проникновение в нее при обработке земледельческими машинами являться фактором, могущим характеризовать почву с физико-механической точки зрения.

С этой целью было исследовано сопротивление почвы на проникновение в нее органов земледельческих машин в вертикальной и горизонтальной плоскостях на двух участках одной и той же делянки.

Была также исследована эффективность различных схем, применяемых при проникновении в почву.

RECHERCHES SUR LA RÉSISTANCE DU SOL À LA PÉNÉTRATION

(RÉSUMÉ)

Les recherches dont on rend compte dans cet article ont été faites dans le but de vérifier si la résistance du sol à la pénétration peut constituer un facteur susceptible de caractériser le sol au point de vue physico-mécanique.

A ces fins, on a étudié la variation de la résistance à la pénétiation dans le plan vertical et dans le plan horizontal, sur deux lots faisant partie d'un terrain uniforme comme aspect extérieur, portant les mêmes cultures et ayant sub les mêmes travaux antérieurs.

On a également étudié l'efficacité des divers schémas de pénétration.

---

*) Concluziile de mai sus se referă în primul rînd la solurile cercetate, pentru generalizare fiind necesară verificarea lor pe alte tipuri de sol.

BIBLIOGRAFIE

1. B. A. Keen şi Haines, *The Pysical Properties of the Soil.* Londra, 1931, cap. VIII.
2. G. Ionescu-Siseşti, *Agrotehnica.* Ed. Cartea Romînească, Bucureşti, 1943.
3. A. N. Zelenin, *Fiziceskie osmovii teorii rezania gruntov.* Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscova-Leningrad, 1950.
4. Const. D. Chiriţă, *Pedologie generală,* Ed. agrosilvică de Stat, Bucureşti, 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
Tomul VIII, nr. 3, 1957

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

PENETROGRAF DINAMIC PENTRU SOL, CU ACŢIONARE MANUALĂ TIP IMA-II

DE

C. FLORESCU şi N. ZELINGHER

Pentru caracterizarea fizico-mecanică a solurilor se folosesc şi aparate de măsurare a rezistenţei opusă de sol la pătrunderea unui corp etalon.

Cercetările făcute cu aceste penetrometre au deschis perspectivele unor aplicaţii practice în domeniul construcţiei şi exploatării maşinilor agricole pentru lucrările solului. Această posibilitate de aplicare largă a cercetărilor fizico-mecanice în practica agricolă au făcut să se construiască şi să se experimenteze mai multe tipuri de astfel de penetrometre.

Penetrometrele cunoscute în prezent pot fi considerate ca aparţinînd uneia din următoarele două grupe :

a) Penetrometre statice, caracterizate prin variaţia înceată a forţei de pătrundere în sol.

b) Penetrometre dinamice, caracterizate prin pătrunderea datorită şocurilor.

Penetrometrele statice au avantajul că permit adaptarea uşoară a unei aparaturi oarecare de înregistrare. Dezavantajele lor principale constau în necesitatea de a se folosi în construcţia lor arcuri etalonate, piese articulate şi glisante care provoacă mari variaţii de înregistrare, datorită uzurii şi condiţiilor mediului în care se lucrează. De asemenea sînt influenţate de operator.

Penetrometrele dinamice sînt construcţii robuste, fără uzură practică, sînt influenţate în mai mică măsură de operator, sau de mediu, corespunzînd în cea mai mare măsură condiţiilor de lucru din agricultură.

Pînă în prezent aceste penetrometre nu au fost adaptate pentru un sistem oarecare de înregistrare. Înregistrarea rezultatelor experimentale se face de un al doilea operator.

Pentru a se mări precizia datelor culese de pe teren şi a randamentului aparatului, micşorîndu-se în acelaşi timp personalul necesar, colectivul I.M.A. a elaborat un tip de penetrograf dinamic cu acţionare manuală.

Descrierea penetrografului

Acest penetrograf (vezi figura) este format dintr-o tijă metalică *2* ce are la capătul inferior un vîrf *1* ce se poate schimba în funcţie de necesităţile experimentale. Pe tijă poate aluneca un berbec *4*. Şocurile provocate de căderea berbecului sînt transmise tijei prin intermediul unei nicovale *3* sudate pe tijă. Ridicarea (cursa) berbecului se face cu camele *5*, ce se pot roti cu manivela *8* în jurul axului *6* sprijinit pe cadrul *7*. Partea de înregistrare este formată dintr-un ghidaj *9*, care se sprijină pe sol prin intermediul plăcii suport *15*, care constituie planul de referinţă al măsurătorilor.

Cadrul *8* alunecă în lungul ghidajului *9*, ceea ce permite creioanelor *10* fixate pe came să înregistreze adîncimea de pătrundere, lovitură cu lovitură. Banda *11* pe care se fac înregistrările este susţinută de suportul *12* şi se poate rula în casetele *13*. Pentru transport s-au prevăzut mînerele *14*. Pentru scoaterea tijei din sol se poate folosi un mîner, acţionînd cu el ca o pîrghie.

Partea de înregistrare se poate ataşa cînd lucrările necesită înregistrări cu un grad ridicat de precizie. Cînd se lucrează fără partea de înregistrare, adîncimile sînt indicate de marcajul făcut pe tija *2*.

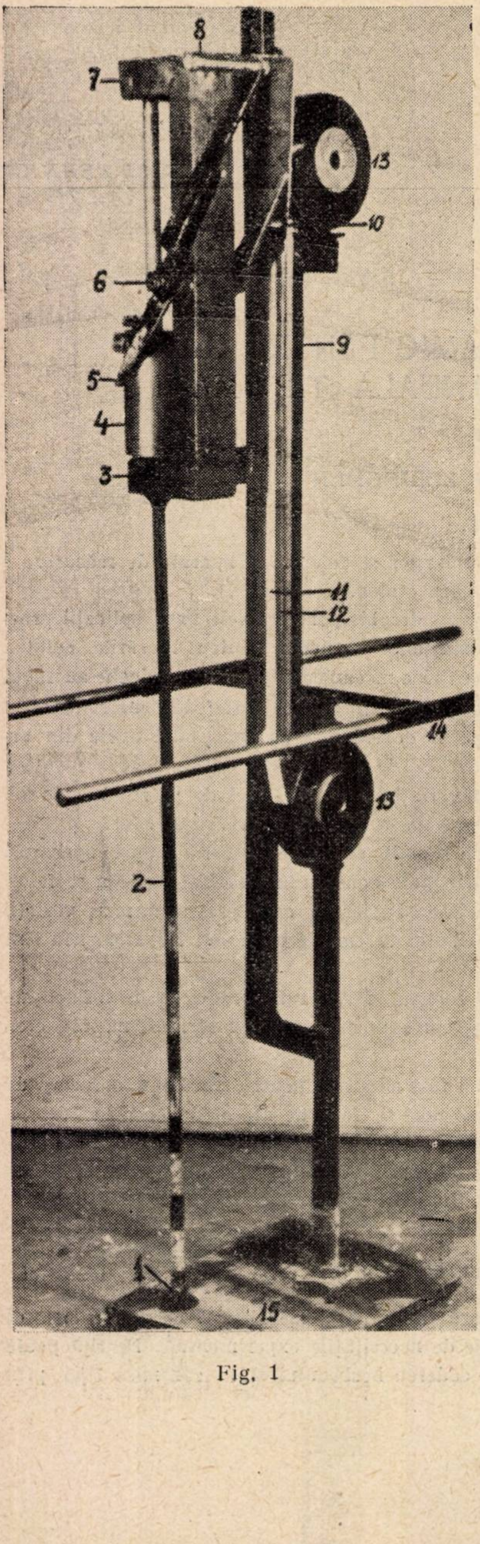


Fig. 1

Caracteristicile aparatului

G_1, greutatea berbecului, 5 kgf

G_2, greutatea compactimetrului, 5 kgf

h_1, cursa berbecului, 0,2 m

h_2, adîncimea de pătrundere după fiecare lovitură, m

s, secţiunea maximă a vîrfului de pătrundere, 2×2 cm

F, forţa rezistentă, kgf

$\frac{F}{s} = R$, rezistenţa specifică, kgf/cm^2

Determinarea lui F se face aplicînd formula

$$Fh_2 = (G_1 + G_2)h_2 + \frac{G_1^2}{G_1 + G_2}h_1,$$

care se deduce uşor aplicînd principiul conservării energiei în două momente diferite (înainte de căderea berbecului şi după căderea berbecului). De asemenea, căderea berbecului se consideră o ciocnire plastică $k = 0$ (coeficientul de restituţie).

Rezistenţa specifică este

$$R = \frac{F}{s} = \frac{G_1 + G_2}{s} + \frac{G_1^2}{G_1 + G_2} \cdot \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{1}{s} \cdot$$

Părţile originale ale penetrografului

— Datorită camelor cursa berbecului este riguros constantă, ea nu suferă nici un fel de variaţie în funcţie de oboseala operatorului, sau de iuţeala cu care se lucrează.

— Şocurile de jos în sus ce se observă la acţionarea manuală a celorlalte tipuri de penetratoare dinamice, sînt excluse. Aceste şocuri sînt cu atît mai numeroase şi mai puternice, cu cît se încearcă a se lucra mai repede, datorită oboselii operatorului. Înlăturarea lor la penetrograful tip IMA-II asigură o mai mare precizie a rezultatelor.

— Acţionarea berbecului se face comod cu ajutorul manivelei, realizîndu-se cu aceeaşi mişcare şi înregistrarea fiecărei poziţii succesive a părţii de pătrundere în sol.

— Comoditatea şi precizia acţionării permite mărirea vitezei de lucru, deci se măreşte productivitatea aparatului.

— Pentru scopuri de studiu se poate ataşa partea de înregistrare fără ca prin aceasta să se micşoreze viteza de lucru.

— Diagramele sondajelor pot rămîne astfel ca document al rezultatelor experimentale, creindu-se posibilitatea prelucrărilor în timp mai îndelungat.

— Datorită adaptării părţii de înregistrare se poate cunoaşte pătrunderea penetrografului după fiecare lovitură, înlesnind cunoaşterea variaţiei pe verticală a forţelor rezistente.

— Acţionarea lui se poate face de un operator necalificat fără nici o repercursiune asupra calităţii măsurătorilor.

Măsurătorile executate cu acest penetrograf au confirmat eficacitatea lui, rezultatele obţinute vor fi publicate într-un număr viitor.

(Primită la redacţie la 9 mai 1957)

ДИНАМИЧЕСКИЙ ПЕНЕТРОГРАФ РУЧНОГО ДЕЙСТВИЯ ТИП IMA-11

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В работе описывается новый тип динамического пенетрометра, к которому добавлено устройство для записи.

Новый пенетрограф обладает новыми конструктивными качествами: строго постоянным пробегом бабы, приведением ее в действие при помощи кулачков и т. д.

Устройство для записи можно включать в зависимости от цели производимых измерений, записывая проникание в грунт при каждом ударе.

PÉNÉTROGRAPHE DYNAMIQUE POUR LE SOL, ACTIONNÉ À LA MAIN, TYPE IMA-II

(RÉSUMÉ)

On décrit un nouveau type de pénétromètre dynamique, auquel est joint un système d'enregistrement.

Le pénétrographe réalisé présente des innovations de construction telles que : course rigoureusement constante du bélier, actionnement du bélier par des cames, etc.

Le dispositif d'enregistrement peut être attaché à l'appareil en fonction du but des mesures à effectuer, et il marque la pénétration du pénétromètre dans le sol, coup par coup.

RECENZII

Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. v. W. G. L. (Anuarul 1955 al societății științifice pentru aeronautică), Akademie Verlag, Berlin 1956, 341 pag.

Volumul cuprinde textele conferințelor ținute la sesiunea din 1955 a W.G.L., care a avut loc la Augsburg. Materialul prezentat este deosebit de variat și cuprinde aproape toate domeniile legate de problemele aviației. Se expun, astfel, rezultate noi privind cercetările științifice, sau articole de sinteză și realizări tehnice, de către autori din Germania, Franța, Anglia, U.S.A., Italia, Elveția, Suedia.

Subiectele se referă la problemele de aerodinamică și dinamica gazelor, la aerodinamica experimentală, teoria aripei de avion și a elicei, aerodinamica și mecanica avionului, la motoarele cu reacție, la procesele în camerele de ardere. O altă grupă cuprinde chestiuni de meteorologie, navigație aeriană, pilotaj automat, instrumente de bord, aparatură pentru aterizarea fără vizibilitate și radar, aerofotogrametrie. Se tratează, de asemenea, problemele de calcul și construcția avionului, helicoptere, materiale pentru construcția avionului și tehnologia lor. În sfîrșit, se expun subiecte privind dreptul aerian, precum și realizări importante ale fabricilor de diferite specialități din domeniul aviației.

Printre lucrările mai importante, se relevă articolul lui R. Sauer asupra noilor rezultate și posibilități de dezvoltare ale dinamicei gazelor. Se prezintă în acesta utilizarea surselor pozitive și negative pentru studiul mișcărilor supersonice în jurul corpurilor de revoluție, interacțiunea aripă-fuzelaj în scurgerile supersonice, apoi dezvoltările metodei caracteristicilor pentru mișcări compresibile bi- și tridimensionale. La sfîrșit, se arată schematic posibilitățile de folosire a instalațiilor electronice de calcul pentru probleme de dinamica gazelor. Întreg articolul face numai o prezentare a problemelor și rezultatelor cu trimiteri la bibliografica recentă.

E. Trukebrodt expune teoria liniarizată a aripilor în curent subsonic, transonic și supersonic, urmărind aplicarea rezultatelor la problemele puse de construcția avionului ca dimensionarea aripei, determinarea focarului rezultant, comportarea aripilor în săgeată etc. Tratarea este făcută într-o formă unitară pentru toate valorile numărului Mach.

K. Gersten studiază experimental și teoretic, pe baza lucrărilor lui E. Truckenbrodt, cîmpul de viteze în aval pentru o aripă delta. Willi Jacobs tratează interacțiunea aripă-fuzelaj, în ipoteza corpurilor subțiri (în vecinătatea vitezei sunetului). Se pune în evidență influența poziției aripei în înălțime și a raportului dintre anvergura și diametrul fuzelajului. G. Richter prezintă cîteva rezultate ale aerodinamicei aripilor inelare, din care rezultă că în afara stabilității care este superioară, celelalte caracteristici sînt asemănătoare cu acelea ale aripei plane de aceeași alungire.

F. Keune expune teoria semicorpului de revoluție în regim sonic, bazată pe teoria corpului de mică anvergură și pe teorema echivalenței pentru mișcările transonice. Pentru corpurile întregi, se poate extinde calculul cu ajutorul caracteristicilor neliniare. Se deduce astfel rezistența de undă la semicorpuri și la corpuri întregi, de diferite grosimi.

S. Nocillas, plecînd de la aproximația adiabatei dată de Tomotika și Tamada, face un studiu matematic al mișcării transonice în jurul profilelor de aripi pentru diferite domenii limitate de viteza sunetului și de cele două caracteristici frontiere (în planul hodografic). W. Seibold tratează efectul spoilerelor în domeniul supersonic, iar O. Tietjens, cercetînd elicea de randament maxim, stabilește nomograme pentru stabilirea datelor constructive, ținînd seama și de cavitație.

Din domeniul turbomașinilor, se semnalează lucrarea lui N. Scholz care calculează caracteristica și randamentul treptelor de compresiune, prin aplicarea metodelor noi de determinare a mișcării cu frecare prin grătare. Se obține potențialul teoretic, apoi se studiază stratul limită, cu eventualele desprinderi. H. Schröder prezintă o metodă de calcul a curgerilor tridimensionale prin grătare, folosind teoria Prandtl-Glauert pentru aripile de anvergură finită în cazul unei rețele situate într-un canal plan și supusă acțiunii unor vîrtejuri elementare de intensitate variabilă. În felul acesta, se ține seama de faptul că viteza axială nu rămîne constantă ; în general, se poate determina pe o cale simplă întreg cîmpul de viteze, luîndu-se în considerație și extinderea limitată a paletelor pe direcția axului mașinii.

Privitor la mecanica avionului, volumul cuprinde de asemenea materiale interesante. Astfel H. Wurster dă o metodă pentru determinarea focarului rezultant al unui avion, ținînd seama de efectele compresibilității, de săgeata aripei, de suflul elicei și de influența ampenajelor. L. Lazzarino arată, într-o comunicare asupra încercărilor în sbor, mijloacele de înlăturare a erorilor ce apar în aceste împrejurări și propune o serie de parametri, care sînt apoi analizați din punctul de vedere al preciziei rezultatelor. F. Vinsonneau studiază necesitatea creerii unor centre mari internaționale, pentru studiile complete asupra machetelor la viteze mari. Apare astfel necesară folosirea unor suflerii de 2 × 2 m transonice și supersonice, precum și a instalațiilor permițînd cercetarea fenomenelor de încălzire la viteze mari. Studiile de aeroelasticitate, arată autorul, necesită încercări complete în sbor, precedate de încercări pe machete. Un rol de seamă revine instalațiilor electronice de calcul și analogiilor electrice, atît pentru calculul structurilor cît și pentru cercetarea traiectoriilor, a stabilității, a sistemelor de telecomandă sau pentru prelucrarea rezultatelor experimentale. O. Frenzl expune principiul de funcționare al unei machete de suflerii supersonice cu funcționare intermitentă, utilizînd apă caldă sub presiune ca agent de antrenare în ejector. Pe această cale, se pot realiza economii în prețul de cost al antrenării aerului, eficacitatea unui acumulator cu apă caldă fiind de cîteva ori mai mare decît a unuia de tip Ruth, iar acesta la rîndul său, depășește de cîteva ori pe aceea a unui rezervor cu aer comprimat. Sufleria care urmează a se realiza pe acest principiu va avea o secțiune de 9 m^2 pentru $M=3$ și este destinată cercetărilor pentru motoarele cu reacție.

Din domeniul motoarelor cu reacție, O. Lutz dă o nouă reprezentare grafică a proceselor din camerele de combustie, sau din circuitul gazelor din aceste motoare, plecînd de la presiuni și volume specifice. Trecînd la parametrii adimensionali, se trag concluzii interesante privitoare la starea critică ce limitează aportul de căldură, la pierderile de sarcină și se arată superioritatea camerelor cilindrice de combustie, cu difuzor la intrare. Diagramele prezentate permit calculul tracțiunii, modificările de stare a gazelor în ejector, determinarea undei de șoc drepte, randamentul statoreactoarelor etc. E. Staab cercetează problema zgomotului și a undelor ultrascurte produse de diferite tipuri de motoare cu reacție.

Dintre lucrările legate de calculul și construcția avioanelor, cităm studiul lui H. Hertel asupra învelișurilor subțiri pretensionate, al lui P. Brenner asupra aliajelor de aluminiu de înaltă rezistență și a tehnologiei acestora, al lui H. Hornauer asupra utilizării profilelor semifabricate din aliaje ușoare, obținute prin trefilare. E. Meyer-Hartwig prezintă, de asemenea, un studiu referitor la cercetările materialelor sinterizate pentru temperaturi ridicate, semimetale și cermeturi (metale întărite), descriind proprietățile acestora cu ajutorul unor coeficienți caracterizînd un sistem cu două componente. Volumul mai cuprinde lucrări asupra avioanelor cu decolare verticală (B. de Pontfarcy), helicopterelor cu antrenarea rotorului prin reacție (C. Marchetti), asupra avioanelor-cargo (L. Coroller) etc.

Problemele deosebit de actuale ale pilotajului fără vizibilitate, ale pilotajului automat și, în general, ale aparaturii de bord sînt trecute în revistă cu prilejul unor comunicări de la sesiunea W.G.L. din München. G. Klein arată importanța pilotajului automat și necesitatea aparaturii de aterizare fără vizibilitate pentru menținerea regularității traficului aerian și descrie diferitele dispozitive automate de aterizare fără vizibilitate. Într-un articol semnat de K. H. Doetsch se studiază problemele comenzilor automate ale avioanelor, în deosebi pentru corectarea instabilității la avioane de mare viteză și helicoptere, mai ales în cazul rafalelor, sau în zborul cu rezistență minimă (la incidența corespunzătoare inversiunii comenzilor de profunzime) și la viteze mai mici decît în acest caz. O expunere a realizărilor privind stabilizarea poziției în zbor a axei fuzelajului, a eforturilor pe comenzi și a teleindicatorului giroscopic este făcută de W. P. Lear. De asemenea, J. L. Anast prezintă măsurile luate în U.S.A. pentru reglementarea navigației aeriene și rolul automatizării în această direcție. Cîteva instrumente noi de bord, ca și principiile care stau la baza construcției acestor aparate, sînt descrise de G. Jaques. R. Claret descrie, de asemenea, un aparat pentru determinarea directă a coordonatelor geografice. Într-o expunere documentată, K. E. Karwath arată utilizările radarului de bord pentru determinarea elementelor necesare pilotajului, cît și pentru evitarea zonelor de aer foarte agitate sau cu precipitații puternice; din experiența actuală, reiese însă că radarul are aplicări limitate în ceea ce privește evitarea obstacolelor.

Se mai menționează articolele privind meteorologia în navigația aeriană (W. Georgii), aerofotogrametria (W. Brucklacher), vizibilitatea în timpul zborului (L. Foitzik, E. S. Calvert). Printre comunicările de interes general, W. Messerschmitt arată legăturile dintre știință și industria aeronautică, A. Baeumker dă unele date din istoricul aviației, A. Meyer face considerații privind transportul aerian, sau lansarea sateliților artificiali, din punctul de vedere al dreptului aerian. În comunicarea asupra securității zborurilor civile, E. W. Pleines analizează, cu ajutorul datelor statistice, cauzele și consecințele accidentelor de aviație și dă recomandări asupra amenajării interioare a cabinelor de pasageri, pentru reducerea la minimum a efectelor acestor accidente.

Anuarul W.G.L. pe anul 1955 este deosebit de interesant prin actualitatea problemelor și, în numeroase cazuri, prin metodele folosite pentru rezolvarea lor. Rezultatele prezentate sînt de asemenea importante, deoarece urmăresc soluții practice sau îmbunătățiri în construcțiile de avioane. Publicat sub îngrijirea lui H. Blenk și prezentat în condiții excelente poate fi de un real folos tuturor acelora care se interesează de multiplele aspecte ale aerodinamicei construcției de avioane și motoare și, în genere, ale navigației aeriene. Lucrările cuprinse în volum constituie o bibliografie deopotrivă de prețioasă pentru cercetătorii științifici și pentru inginerii din industriile de specialitate.

N. Tipei

Société Belge des Mécaniciens (SBM), Recommandations pour la conception et le calcul des assemblages par pièces filettées (Recomandări pentru concepția și calculul îmbinărilor cu șuruburi). Bruxelles, 1956, ed. I-a, 80 pag., 97 fig.

Deși șuruburile sînt elementele de mașini folosite de la început, pe scară largă încă și astăzi, la realizarea îmbinărilor demontabile în construcția de mașini sau în alte construcții și deși ele au făcut obiectul unor ample preocupări de studii și cercetări, pătrunderea complexului de fenomene care constituie solicitarea lor se prezintă încă laborioasă. Concepția construcției elastice a șuruburilor supuse la solicitări alternative poate fi considerată desigur ca rezultatul cel mai important obținut pe calea studierii stărilor de tensiuni care iau naștere în corpurile supuse la eforturi. Strîngerea piuliței sau șurubului, influența strîngerii asupra stărilor de tensiuni care iau naștere nu numai în șurub dar și la contactul dintre șurub și piesele asamblate, asigurarea contra deșurubării și procesul desfacerii de la sine a șurubului etc. sînt fenomene care prezintă aspecte mereu noi, pe măsură ce se analizează mai adînc. La acestea se mai adaugă influența cu efecte multilaterale a variației de temperatură din îmbinare și altele.

Aspectul atît de complex sub care se prezintă îmbinarea cu șuruburi, ca fenomen, se poate atribui în mare măsură realizării tehnice, practice a asamblărilor. Forma geometrică perfectă a pieselor și a șurubului, precum și gradul lor de prelucrare corespunzător, ușurează solicitarea șurubului. Aceste elemente sînt legate însă de procesul de producție care are, nu rare ori, un aspect economic precumpănitor.

Lucrarea *Recomandări pentru concepția și calculul îmbinărilor cu șuruburi* elaborată sub auspiciile lui Société Belge des Mécaniciens, ca studiu de ansamblu asupra îmbinărilor cu șuruburi este interesantă și utilă, tratînd zece aspecte mai importante ale problemei.

În capitolul 1 *Condițiile de solicitare a filetelor* se stabilesc relațiile cantitative de repartizare a eforturilor asupra filetelor în ipoteza solicitării la tracțiune, atît a șurubului cît și a piesei (cazul prezonului), precum și în ipoteza solicitării la tracțiune a șurubului, iar a piesei la compresiune (cazul șurubului cu piuliță). Se prezintă cîteva soluții constructive de ameliorare a acestei repartiții. În capitolul 2 *Tensiunile din buloanele strînse* se prezintă influența formei șurubului asupra fluxului liniilor de forță și se stabilesc relații cantitative cu privire la tensiuni în calculul solicitării bulonului la încovoiere și la momentul de strîngere. Capitolul 3

Solicitarea bulonului cu o forță exterioară suprapusă efectului rezultat din strîngere reprezintă modul favorabil de comportare a șuruburilor elastice la solicitări alternative. Se dezvoltă cazul general de calcul analitic și grafic al unei asemenea îmbinări. În capitolul 4 *Felul rezistenței și modul de rupere al buloanelor* se arată condițiile de rezistență și de rupere la sarcini statice, la oboseală și la șoc, acționînd simplu sau combinat, precum și suprapuse peste eforturile de prestrîngere. În capitolul 5 *Calculul și dimensionarea buloanelor* se arată condițiile și modul cum se aplică ipotezele de calcul a șuruburilor cu prestrîngere, calculul șuruburilor solicitate static, precum și a șuruburilor supuse la oboseală. Capitolul 6 *Tehnologia strîngerii șuruburilor* tratează despre realizarea strîngerii și măsurarea ei, despre metodele de împiedicare a desfacerii înșurubării și eficacitatea lor practică. *Influența temperaturii asupra îmbinărilor filetate* este tratată în capitolul 7, arătîndu-se și prin relații cantitative efectele variației de temperatură asupra solicitării pieselor îmbinate și asupra bulonului, în domeniul temperaturilor înalte, mijlocii și la frig. În capitolul 8 se tratează *Probleme relative la materiale*, arătîndu-se că materialul pentru șurub trebuie să fie calitativ superior aceluia folosit pentru piulița lui. Capitolul 9 cuprinde *Reguli practice de concepție și construcție a îmbucărilor cu șuruburi*, analizîndu-se un număr de 8 cazuri tipice mai frecvente în construcția de mașini. Se examinează probleme în legătură cu parametrii constructivi și cu execuția privind corpul șurubului, a piuliței și a prezoanelor. În capitolul 10 se prezintă *Cazul particular de asamblare cu buloane supuse la forfecare*, determinîndu-se rezistența în buloanele cu una și două secțiuni solicitate la forfecare și încovoiere.

Gruparea materialului, felul cum sînt puse și soluționate problemele, precum și schițele explicative fac ca lucrarea să poată fi ușor consultată, sporindu-i astfel utilitatea.

Gh. Vasilca

CURT F. KOLLBRUNNER și MARTIN MEISTER, Knicken (Flambajul). J. Springer, Berlin-Göttingen, 1955.

Problemele puse de marile progrese realizate în domeniul construcțiilor cît și tendința de a obține economii cît mai importante a readus pe primul plan al cercetărilor problema stabilității elastice. În literatura de specialitate au apărut în toate țările numeroase articole și lucrări izolate tratînd cele mai variate aspecte ale acestei probleme.

O sinteză a diferitelor soluții date problemelor de flambaj este o lucrare de mare folos pentru inginerul activînd în domeniul construcțiilor fie ca cercetător, fie ca proiectant, fie ca executant.

Lucrarea *Knicken* a lui C. F. Kollbrunner și M. Meister constituie o prezentare a problemelor și a soluțiilor date pentru fenomenul de flambaj pusă complet la zi. Ea formează prima parte dintr-o lucrare privind stabilitatea echilibrului elastic și va fi urmată de o altă lucrare a acelorași autori privind fenomenul de voalare.

Autorii lucrării sînt binecunoscuți în literatura tehnică. C. F. Kollbrunner este unul dintre cercetătorii cu renume, cunoscut pentru investigațiile și experimentările făcute în domeniul stabilității echilibrului elastic și în același timp un constructor care a realizat numeroase construcții metalice. Kollbrunner este și autorul unui tratat modern de fundații în trei volume.

Lucrarea începe cu o introducere în care se examinează aspectul general, aspectul stabilității echilibrului elastic, după care se expune teoria flambajului barelor drepte începînd cu formula lui Euler și terminînd cu noul aspect dat de Shanley acestei probleme.

Sînt apoi expuse cele trei metode generale de calcul pentru barele drepte cu cercetarea amănunțită a diferitelor cazuri particulare de flambaj ce se pot pune inginerului constructor.

Această cercetare formează esența lucrării și îmbrățișează atît cazurile de flambaj pur cît și cele de încovoiere cu torsiune și flambaj. De asemenea este examinat și flambajul lateral al grinzilor. Se trece apoi la cercetarea flambajului sistemelor de bare, indicîndu-se metoda generală pentru verificarea unui sistem existent cît și pentru proiectarea unei construcții noi. Se examinează calculul la flambaj a grinzilor de poduri și al cadrelor în general. În sfîrșit, se expune problema flambajului barelor curbe și capitolul se încheie cu cercetarea unor aspecte speciale ale fenomenelor de flambaj.

Volumul se încheie cu analizarea critică a cîtorva prescripții oficiale de calcul ale elementelor supuse la flambaj făcîndu-se o comparație între ele.

Lucrarea prezintă problemele cu toată rigurozitatea științifică, dar pune accentul în special pe aspectul practic, ea fiind destinată inginerului proiectant. Acesta găsește efectiv aici toate problemele curente ce apar în practica inginerului constructor. O amplă bibliografie indică cititorului izvoarele de studiu ale problemelor speciale care nu au putut fi cuprinse în text.

Bogata experiență de constructori unită cu aceea de cercetători a autorilor au permis realizarea unei lucrări în care claritatea și precizia constructorului unită cu rigurozitatea și erudiția cercetătorului prezintă problema flambajului în lumina celor mai noi cercetări și aplicații. Aspectul teoretic este armonios îmbinat cu soluția practică, astfel încît lucrarea poate fi consultată cu mare folos atît de inginerul proiectant și de cel executant, cît și de cercetătorul științific.

Aurel A. Beleș
Membru corespondent al Academiei R.P.R.

A. S. KALMANOK, *Rasciot balok-stenok (Calculul grinzilor pereți)*. Gos. izd. lit. po stroitelstvu i arhitekture, Moscova, 1956, 148 pag.

Problema calculului grinzilor pereți, atacată de A. S. Kalmanok în volumul de mai sus, a pasionat pe mulți cercetători încă de la sfîrșitul secolului trecut și începutul secolului acesta.

Putem cita astfel pe Ribière care studiază grinda de secțiune dreptunghiulară cu ajutorul seriilor simple Fourier cu coeficienți variabili, adică cu ajutorul funcțiilor exponențialo-trigonometrice sau hiperbolico-trigonometrice. Asemenea soluții, valabile pentru grinzi lungi, puneau condiții stricte pe latura de sus și pe latura de jos a grinzii și condiții globale pe fețele de capăt. Soluția dată de Ribière corespunde mai bine grinzii dublu încastrate ; o soluție asemănătoare, dată ulterior de Filon, corespunde mai bine grinzii simplu rezemate. Cu toate că extinderea acestor rezultate la grinzi pereți, făcută de Ribière, nu este corectă, ele constituie totuși o etapă importantă în studiul acestor probleme.

Trecînd peste lucrările lui Timpe, Bleich, Bay, Bortsch, Craemer, Seewald, vom menționa pe Fr. Dischinger, care în 1932 pune la punct studiul grinzilor pereți de înălțime finită pe multe reazeme*), dînd forme finale practice de calcul.

Ulterior I. A. Wojtaszak (1937), apoi G. Pickett (1944) și P. Lardy (1949) studiază cazul unei grinzi perete cu o singură deschidere, acționată de sarcini normale pe două laturi opuse. Ei folosesc dezvoltări în serie simplă Fourier pe una din direcții și trec la dezvoltarea în serie pe cealaltă direcție cu ocazia punerii condițiilor pe contur.

K. Girkman expune**) o metodă de a pune condiții pe toate cele patru laturi ale conturului, metodă ce se bazează pe dezvoltarea în serie simplă Fourier a liniilor hiperbolice ce intră în componența integralelor ecuației biarmonice ; el studiază astfel două cazuri de încărcare. Aceste rezultate sînt folosite de H. Parkus pentru studiul grinzii perete pe trei reazeme.

Recent în R. Cehoslovacă, I. Babuška și colaboratorii săi au studiat problema benzii și a semibenzii, adică a grinzii perete pe multe reazeme.

În Uniunea Sovietică s-au publicat studii importante în acest domeniu, în special în ultimii 15 ani, în care s-a căutat să se rezolve problema nu numai pentru condiții în eforturi pe contur, ci și pentru condiții în deplasări (cînd unele laturi sînt încastrate). Cităm astfel lucrările lui Lazarian, Goldenblat, Papkovici, Lurie, Grinberg, Lebedev, Ufliand, Kitover, Prokopov, Pîhtunov.

În cadrul preocupărilor menționate mai sus, un pas important înainte îl constituie studiile întreprinse în 1950 de A. S. Kalmanok***) asupra plăcilor solicitate normal pe planul lor. El extinde aceste rezultate la plăcile solicitate de sarcini cuprinse

---

*) Fr. Dischinger, *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens*. Abh.-Intern. Ver. für Brückenbau u. Hochbau, vol. I, p. 69, 1932.

**) K. Girkmann, *Flächentragwerke*. Wien, 1946, 1948, 1954, 1956.

***) A. S. Kalmanok *K reșenii zadaci o ploskom napriajennom sostoianii priamougolnoi plastinki*, Konstr. mat. v gorodskom stroitelstve, 1950, nr. 6, p. 70 ; *Stroitelnaia mehanika plastinok*, Moscova, 1950.

în planul lor, adică la grinzi pereţi. Kalmanok observă că funcţia $F(x, y)$ a eforturilor verifică ecuaţia lui Lagrange-Sophie Germain a plăcilor subţiri elastice în lipsa încărcărilor normale. Deci $z = F(x, y)$ este suprafaţa medie deformată a acestei plăci încărcată cu anumite deformaţii pe contur. Considerînd gradele de libertate de mişcare ale unui element infinit mic, lipit de conturul exterior al plăcii dreptunghiulare, putem vedea că fiecare element are două grade de libertate : deplasarea şi unghiul de rotaţie relativ la secţiunea de contur ; exceptează colţurile dreptunghiului, unde sînt trei grade de libertate : deplasarea şi cele două unghiuri de rotaţie relative la cele două feţe perpendiculare ale conturului. Astfel suprafaţa elastică a plăcii rezolvă univoc problema ordonatelor şi a derivatelor lor normale pe întreg conturul. A. S. Kalmanok foloseşte aceste reprezentări geometrice la construcţia soluţiei problemei cu metoda generală a lui Filon. El ia o integrală în sinus, la care adaugă o soluţie de aceeaşi formă, la care schimbă rolurile celor două variabile între ele. Pentru ca aceste integrale să corespundă numai la încărcări ce se echilibrează pe fiecare latură, Kalmanok foloseşte şi un polinom biarmonic, alcătuit dintr-o sumă de monoame biarmonice. Pentru a pune condiţii pe cele patru laturi ale conturului, Kalmanok (ca şi K. Girkmann de altfel), dezvoltă liniile hiperbolice în serie simplă Fourier, introducînd unele notaţii şi funcţii care simplifică scrierea şi care, prin intabulare, dau un calcul mai rapid. A. S. Kalmanok nu foloseşte proprietăţile de simetrie şi de antisimetrie ale încărcării. Studiile lui sînt însă foarte interesante prin faptul că a căutat să ajungă la o formă practică de calcul.

În 1955 autorul acestei recenzii a întreprins un studiu detaliat şi complet în legătură cu această problemă*), luînd în considerare toate cazurile de rezemare şi de încărcare posibile şi folosind proprietăţi de simetrie şi antisimetrie pentru sistematizarea calculului. În acelaşi an B. L. Abramian a publicat un studiu analog, privind un singur caz de încărcare (simetric în raport cu axele de simetrie ale grinzii perete), fără a pune condiţii în deplasări pe contur. El a reluat această problemă în 1957, într-o formă mai generală, analogă celei dată de Kalmanok, fără a folosi proprietăţi de simetrie şi antisimetrie.

În volumul publicat în 1956, A. S. Kalmanok reia studiile sale anterioare, le dezvoltă şi prezintă un număr de aplicaţii ale metodei de calcul. Cartea cuprinde două capitole.

Primul capitol se ocupă cu rezolvarea generală a problemei plane a teoriei elasticităţii pentru un contur dreptunghiular. După ce se trec în revistă principalele rezultate teoretice, se dau cîteva soluţii elementare în polinoame ale problemei, valabile pentru cazuri particulare de încărcare. Apoi se prezintă metoda generală de rezolvare a problemei cu ajutorul seriilor trigonometrice, bazată pe ideile expuse mai sus ; această metodă se aplică pentru prima şi pentru cea de a doua problemă fundamentală a teoriei elasticităţii (atunci cînd pe contur se dau eforturile unitare, respectiv deplasările). De asemenea, se arată care sînt metodele practice de calcul în diferite cazuri.

În capitolul al doilea, Kalmanok prezintă cîteva cazuri particulare, pe care le rezolvă cu ajutorul metodei sale de calcul. După ce se ocupă de problema benzii acţionate de o sarcină periodică (grinda perete pe o infinitate de reazeme), autorul tratează grinzile pereţi cu o singură deschidere : grinda simplu rezemată încărcată cu o sarcină uniform distribuită sau cu o sarcină concentrată, grinda dublu încastrată şi grinda în consolă, încărcate cu o sarcină uniform distribuită.

În încastrări Kalmanok a pus condiţia ca cele două componente ale deplasării să fie nule pe toată latura, deci condiţii de încastrare totală. Aceasta este o problemă foarte dificilă şi este un merit deosebit al autorului că a putut fi rezolvată.

Funcţiile introduse de autor sînt întabulate la sfîrşitul volumului, ceea ce constituie un aport preţios pentru calculul practic.

Trebuie să menţionăm că nu se utilizează proprietăţile de simetrie şi antisimetrie în diversele probleme studiate, proprietăţi care — credem noi — ar simplifica în mod considerabil unele calcule.

Prin cuprinsul ei, cartea se adresează unui cerc larg de cititori ; ea poate fi folosită cu succes atît de inginerii proiectanţi şi de calculatori, cît şi de cercetătorii ştiinţifici care găsesc un material bogat ce poate fi un imbold spre studii ulterioare.

---

*) P. P. Teodorescu, *Calculul grinzilor pereţi cu o singură deschidere în caz general de rezemare şi încărcare* (autoreferat disertaţie). Ed. Min. Înv., Bucureşti, 1955 ; *Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere*, Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, p. 115 şi nr. 2, p. 451, 1957.

Lucrarea lui A. S. Kalmanok atacă o problemă interesantă şi importantă din punct de vedere practic; de asemenea, ea rezolvă o problemă importantă din punct de vedere teoretic (problema plană pentru un contur dreptunghiular). Studiul teoretic făcut, completat cu un interesant studiu practic şi cu posibilităţi de aplicare practică a rezultatelor, fac din acest volum o etapă importantă pe drumul rezolvării problemei grinzilor pereţi.

Petre P. Teodorescu

N. K. SNITKO, *Ustoicivosti sjatîh i sjato-izognutîh sterjnevîh sistem* (Stabilitatea sistemelor de bare comprimate). Ed. de Stat pentru literatura de construcţii şi arhitectură, Leningrad, Moscova, 1956, 207 pag.

Eşalonată pe patru capitole, cartea prof. N. K. Snitko prezintă într-o formă concisă şi clară teoria stabilităţii sistemelor de bare comprimate axial şi excentric.

Examinarea stării de echilibru se face prin aplicarea metodelor generale ale mecanicii construcţiilor. Acolo unde intervin rezolvări de probleme practice (cadre, arce, ferme) se expun metode eficace, inginereşti, de calcul.

În capitolul I în cadrul teoriei deplasărilor se studiază calculul dinamic şi static al barelor solicitate numai la compresiune şi al acelora solicitate la compresiune şi încovoiere, ţinînd seama de forţele de compresiune. De asemenea, se studiază influenţa forţelor axiale asupra oscilaţiilor proprii ale structurilor.

Stabilitatea barelor şi sistemelor continui pe reazeme elastice este tratată în capitolul II.

Capitolul III reprezintă calculul stabilităţii cadrelor şi fermelor avînd barele comprimate centric şi excentric, iar capitolul IV calculul stabilităţii arcelor.

Contribuţia personală a autorului este remarcată în toate capitolele lucrării, cum ar fi metoda parametrilor iniţiali la calculul grinzilor drepte pe reazeme elastice solicitate de forţe axiale şi transversale, metoda lucrului mecanic virtual pentru determinarea sarcinii critice de flambaj a cadrelor deplasabile etc.

În mare măsură sînt folosite contribuţiile aduse de A. N. Diunik, B. G. Galerkin, I. M. Rabinovici, N. V. Kornovhov, A. F. Smirnov, K. Sattler etc. în studiul stabilităţii sistemlor.

Avînd la bază cunoscutele lucrări anterioare ale autorului precum şi alte publicaţii aparţinînd unor cercetători consacraţi, privind studiul stabilităţii şi vibraţiilor sistemelor de bare, cartea lui N. K. Snitko reprezintă un material deosebit de preţios atît pentru inginerii proiectanţi de structuri cît şi pentru cercetătorii din domeniul stabilităţii sistemelor de bare.

Mihail Ifrim

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN ÎNTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

20

E R A T Ă

Pag.	rîndul sau formula	în loc de :	se va citi :
621	(10)	$\ldots = \frac{kv}{g_0} \ln \frac{1-kt_0}{1-kt}$	$\ldots = \frac{v_\sigma}{g} \ln [1 - k(t - t_0)]$
624	(16)	$\ldots \frac{e^{kx_3}}{\ldots},$	$\ldots \frac{e^{Kx_3}}{\ldots},$
625	7	sau	sau [4]
626	(27)	$\ldots e^{KX^{30}} \ldots$	$\ldots e^{KX_{30}} \ldots$
627	(30)	$\ldots e^{KX_{30}}{}^{\frac{\xi^3}{\xi^{\star 2}}} \ldots$	$\ldots e^{KX_{30}}{}^{\frac{\xi^2}{\xi^{\star 2}}} \ldots$
636	16 şi 20	fugoïde	phygoïde
656	16	$R = \ldots$	$\frac{R}{r} = \ldots$
684	28	$\ldots \left[\frac{1}{(X-S)^j} \ldots \right.$	$\ldots A_j \left[\frac{1}{(X-S)^j} \ldots \right.$
691	2	OC_1	OC_2
691	5	rezultă și	rezultă formal și
722	18	pot fi	vor fi
731	(7)	$\ldots m^2C_1 + \ldots$	$\ldots m^2C_s + \ldots$
779	13 de jos	[2]	[3]
824	14 de jos	racordărilor	racordurilor
934	21 de jos	E. Trukebrodt	E. Truckenbrodt
945	8 de jos	A. N. Diunik	A. N. Dinnik

c. 1638. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, nr. 3 1957.

F2557

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ȘI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

4

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

4

ANUL VIII

1957

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

COMITETUL DE REDACŢIE

Redactor responsabil :

ACADEMICIAN E. CARAFOLI

Membri :

ACADEMICIAN N. PROFIRI
A. BELEŞ, membru corespondent al Academiei R.P.R.
C. MATEESCU, membru corespondent al Academiei R. P. R.
A. BĂRGLĂZAN, membru corespondent al Academiei R. P. R.
R. BOGDAN, conferenţiar la Institutul de petrol şi gaze, Bucureşti
N. TIPEI, conferenţiar la Institutul politehnic, Bucureşti
M. ARCAN, conferenţiar la Institutul de construcţii, Bucureşti

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ «TRAIAN VUIA»

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VIII, nr. 4 1957

SUMAR

STUDII ŞI CERCETĂRI

AEROMECANICĂ Pag.

ELIE CARAFOLI şi BÉATRICE HOROVITZ, Scurgerea supersonică omogenă de ordin superior în jurul unei aripi unghiulare prevăzută cu placă normală 959
ST. SĂVULESCU, Aplicarea metodei profilelor tip de viteze şi temperaturi la calculul stratului limită de pe un corp de revoluţie 975
T. HACKER, Despre comportarea avionului în zbor în atmosferă agitată . . . 983

HIDRODINAMICĂ

CR. MATEESCU, Metode noi de determinare a distribuţiei vitezelor în mişcarea uniformă a fluidelor vîscoase 991
M. KAHAN şi S. HÎNCU, Despre similitudinea dintre curenţii cu nivel liber şi curenţii sub presiune 1011

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

N. TIPEI, Lubrificaţia suprafeţelor cilindrice cu mişcare de rostogolire şi de alunecare 1039
V. N. CONSTANTINESCU, C. TANASICIUC şi V. GRABARI, Determinarea experimentală a sarcinii pe osiile vagoanelor de cale ferată 1051

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

D. PAVELESCU şi TH. PANTELIMON, Asupra înregistrării pe bandă magnetică a unor mărimi mecanice cu variaţii „lente". 1073

ELASTICITATE—REZISTENŢA MATERIALELOR

L. HAMBURGER, FL. DINCĂ şi V. MANEA, Asupra torsiunii unor bare cilindrice 1091
P. P. TEODORESCU, Asupra unor probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii 1101

Pag.

L. SOLOMON și D. DRĂGHICESCU, Asupra utilizării transformărilor conforme în problema plană a elasticității pentru domenii dublu conexe. . . . 1115
M. ARCAN, F. STOENESCU și R. MIHAIL, Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate : Dinox F 110 1133
EDUARD NICOLAU, Deformații la o consolă încastrată într-un mediu elastic 1145
CRISTIAN STĂNESCU și VIOREL VISARION, O metodă pentru calculul învelitorilor cilindrice de secțiune circulară cu ortotropie de material. . . 1173

VIBRAȚII

MIHAIL IFRIM, Precizări în legătură cu aplicarea formulei lui Geiger la calculul primei frecvențe proprii de vibrație ale clădirilor în cadre. 1197

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

R. PRIȘCU și ST. CĂCIULESCU, Studiu asupra barajelor de greutate evidate 1205

TRATAMENTE MECANICE ȘI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

M. POPOV, E. DECIU și I. MITRICĂ, Asupra unei condiții la limită în analogia hidrodinamică a laminării 1229

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE 1241

NOTE 1299

RECENZII 1309

Index alfabetic pentru 1957 1317

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII POPULARE ROMÎNE

REVISTA STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

cuprinde lucrări din domeniul mecanicii aplicate, după cum urmează:

— Mecanică generală (elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

— Aeromecanică (aerodinamică, aviaţie, mecanica fluidelor, ventilaţie, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, motoare cu reacţie, construcţii de avioane, utilizarea energiei eoliene).

— Construcţii de maşini (rezistenţa materialelor, cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calcul ale diferitelor maşini, automatizare, studiul suprafeţelor, tratamente mecanice şi prelucrarea mediilor solide continue).

— Tehnica măsurătorilor (aparate electronice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

— Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, geotehnică, stabilitatea terenurilor, metode moderne de executarea lucrărilor de construcţii).

— Hidromecanica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine hidraulice şi pompe, amenajări hidraulice).

Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice precum şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

Articolele vor fi redactate într-o formă concisă şi clară, evitîndu-se introduceri lungi referitoare la părţile cunoscute ale problemei.

Manuscrisele se vor preda în trei exemplare, dactilografiate la două rînduri, iar formulele vor fi scrise clar şi citeţ cu cerneală. Figurile şi graficele se vor desena în tuş pe hîrtie de calc. Se vor utiliza figuri numai cînd este absolut necesar şi în număr cît mai mic.

Literatura citată în text se va insera la sfîrşitul lucrării sub formă de bibliografie. Se va indica numele autorului, titlul lucrării, tomul, pagina, locul, editura, anul de apariţie, iar pentru reviste se va indica şi numărul respectiv. Trimiteri la lucrări nepublicate nu se admit.

Pe lîngă text se vor înainta pentru fiecare exemplar, rezumate în limba romînă, eventual în rusă, franceză, engleză şi germană. Rezumatele vor fi în medie una pagină dactilografiată la 20 pagini de text.

Aceleaşi norme sînt valabile şi pentru colaborările din străinătate, care pot fi redactate în limbile rusă, engleză, franceză sau germană.

Manuscrisele se vor trimite la sediul Institutului de mecanică aplicată, Bucureşti, str. C. Mille, nr. 15, raionul Gh. Gheorghiu-Dej.

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES
DE
MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VIII, n° 4 1957

SOMMAIRE

ÉTUDES ET RECHERCHES

AÉROMÉCANIQUE

Page

ELIE CARAFOLI et BÉATRICE HOROVITZ, L'écoulement supersonique homogène, d'ordre supérieur, autour d'une aile angulaire à plaque normale 959

ST. SĂVULESCU, Application de la méthode des profils types de vitesses et de températures au calcul de la couche limite sur un corps de révolution 975

T. HACKER, Sur le comportement de l'avion pendant le vol en atmosphère agitée 983

HYDRODYNAMIQUE

CR. MATEESCU, Nouvelles méthodes de détermination de la distribution des vitesses au cours du mouvement uniforme des fluides visqueux. . . . 991

M. KAHAN et S. HÎNCU, Sur la similitude des courants à niveau libre avec les courants sous pression 1011

LUBRIFICATION—FROTTEMENT—USURE

N. TIPEI, Lubrification des surfaces cylindriques à mouvement de roulement et de glissement. 1039

V. N. CONSTANTINESCU, G. TANASICIUC et V. GRABARI, Détermination expérimentale de la charge supportée par les essieux des wagons de chemin de fer 1051

TECHNIQUE DES MESURES

D. PAVELESCU et TH. PANTELIMON, Magnetic Tape Recording of Mechanical Magnitudes with Slow Variations. 1073

ÉLASTICITÉ—RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

L. HAMBURGER, FL. DINCĂ et V. MANEA, Sur la torsion de certaines barres cylindriques 1091

P. P. TEODORESCU, About some Space Problems of the Theory of Elasticity 1101

Page

L. SOLOMON et D. DRĂGHICESCU, Sur l'emploi des transformations conformes dans le problème plan de l'élasticité pour des domaines doublement connexes 1115

M. ARCAN, F. STOENESCU et R. MIHAIL, Recherches sur l'introduction d'un nouveau matériel pour maquettes en photo-élasticité, Dinox F-110 1133

EDUARD NICOLAU, Déformation d'une console encastrée dans un milieu élastique 1145

CRISTIAN STĂNESCU et VIOREL VISARION, Une méthode de calcul des enveloppes cylindriques de section circulaire et à orthotropie de matériel 1173

VIBRATIONS

MIHAIL IFRIM, Précisions sur l'application de la formule de Geiger au calcul de la première fréquence propre de vibration des constructions sur cadres 1197

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

R. PRIŞCU et ST. CĂCIULESCU, Etude sur les barrages à gravité, évidés 1205

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET TRAVAIL DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

M. POPOV, E. DECIU et I. MITRICĂ, Sur une condition à la limite dans l'analogie hydrodynamique du laminage 1229

RAPPORTS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES 1241

NOTES 1299

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE 1309

Index alphabétique pour l'amée 1957 1327

ÉDITIONS DE L'ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE

La revue de l'Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la R.P.R.

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

comprend des études de mécanique appliquée, notamment :

— Mécanique générale (élasticité, plasticité, vibrations et chocs, stabilité, analogies électriques et hydrauliques).

— Aéromécanique (aérodynamique, aviation, mécanique des fluides, ventilation, aérodynamique des moteurs à combustion interne, moteurs à réaction, construction des avions, utilisation de l'énergie éolienne).

— Constructions mécaniques (résistance des matériaux, cinématique et dynamique des mécanismes, frottement, lubrification, usure, méthodes modernes de calcul des différentes machines, automatisation, étude des surfaces, traitements mécaniques et travail des milieux solides continus).

— Technique des mesures (appareils électroniques pour la mesure des grandeurs mécaniques, utilisation des ultrasons et des isotopes radio-actifs en technique).

— Statique et dynamique des constructions (méthodes de calcul statique et dynamique des constructions, étude des matériaux hétérogènes, mécanique des sols, stabilité des terrains, méthodes modernes de construction).

— Hydromécanique (hydraulique, constructions hydrotechniques, irrigation, turbines et pompes hydrauliques, aménagements hydrauliques).

La revue tend à stimuler la recherche scientifique et la diffusion des travaux méritoires, publiant dans ce but les articles scientifiques des collaborateurs roumains et étrangers.

Les études seront rédigées dans un style concis, en évitant autant que possible, les introductions trop longues concernant les données connues du problème.

Les manuscrits seront envoyés dactilographiés en trois exemplaires; les formules seront écrites à l'encre et d'une manière lisible.

Les figures et les diagrammes seront tracés à l'encre de Chine sur papier calque. On ne doit utiliser que le nombre de figures strictement indispensables.

Les références bibliographiques seront mentionnées spécialement à la fin de l'article. Elles doivent être aussi complètes que possible, comprenant, par exemple pour les périodiques, l'indication du tome, de l'année, de la page, etc. Il ne sera pas fait mention des travaux non publiés.

Les manuscrits seront accompagnés d'un résumé (environ une page pour 20 pages de texte).

Les articles des collaborateurs étrangers seront rédigés en russe, français, anglais ou allemand.

Ils seront envoyés à l'adresse suivante: Institut de Mécanique Appliquée de l'Académie de la République Populaire Roumaine, Bucarest, 15, rue Constantin Mille.

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VIII, № 4 **1957**

СОДЕРЖАНИЕ

СТАТЬИ

Стр.

АЭРОМЕХАНИКА

Е. КАРАФОЛИ и Б. ХОРОВИЦ, Сверхзвуковое однородное обтекание высшего порядка треугольного крыла с нормальной пластиной . 959
Ш. СЭВУЛЕСКУ, Применение метода типовых профилей скоростей и температур к расчету пограничного слоя на теле вращения . 975
Т. ХАКЕР, О поведении самолета при полете в возмущенной атмосфере 983

ГИДРОДИНАМИКА

Г. МАТЕЕСКУ, Новые методы определения распределения скоростей в равномерном движении вязких жидкостей 991
М. КАХАН и С. ХЫНКУ, К вопросу о подобии потоков со свободной поверхностью и напорных потоков 1011

СМАЗКА — ТРЕНИЕ — ИЗНОС

Н. ТИПЕЙ, Смазка цилиндрических поверхностей при движении качения и скольжения 1039
В. Н. КОНСТАНТИНЕСКУ, Г. ТАНАСИЧУК и В. ГРАБАРИ, Экспериметальное определение нагрузки на оси железнодорожных вагонов 1051

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

Д. ПАВЕЛЕСКУ и Т. ПАНТЕЛИМОН, О записи на магнитную ленту некоторых «медленно» изменяющихся механических величин . 1073

УПРУГОСТЬ — СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Л. ГАМБУРГЕР, Ф. ДИНКЭ и В. МАНЯ, О кручении некоторых цилиндрических стержней . . . . , 1091
П. П. ТЕОДОРЕСКУ, О некоторых пространственных задачах теории упругости . . . . , , , , , 1101

Стр.

Л. СОЛОМОН и Д. ДРЭГИЧЕСКУ, О применении конформных преобразований в плоской задаче упругости для двухсвязных областей . . . . , 1115

М. АРКАН, Ф. СТОЕНЕСКУ и Р. МИХАИЛ, Исследование по внедрению нового материала Динокс Ф 110 для изготовления моделей в области фотоэластичности 1133

Э. НИКОЛАУ, Деформации защемленной в упругой среде консоли.

К. СТЭНЕСКУ и В. ВИСАРИОН, Метод расчета цилиндрических по- 1145
крытий круглого сечения с ортотропией материала 1173

ВИБРАЦИИ

М. ИФРИМ, О применении формулы Гейгера к вычислению первой частоты собственных колебаний рамных сооружений . . . 1197

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. ПРИШКУ и Ш. КЭЧУЛЕСКУ, Об облегченных гравитационных плотинах 1205

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА СПЛОШНЫХ ТВЕРДЫХ СРЕД

М. ПОПОВ, Е. ДЕЧУ и И. МИТРИКЭ, Об одном граничном условии в гидродинамической аналогии прокатки 1229

НАУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ 1241

ЗАМЕТКИ 1299

РЕЦЕНЗИИ 1309

Алфавитный указатель за 1957 год 1322

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

Журнал Института прикладной механики Академии РНР

«ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ»

содержит нижеследующие разделы прикладной механики:

— Общую механику (упругость, пластичность, вибрации и удары, устойчивость электрические и гидравлические аналогии).

— Аэромеханику (аэродинамика, авиация, механика жидкостей и газов, вентиляция, аэродинамика двигателей внутреннего сгорания, реактивные двигатели, самолетостроение, использование энергии ветра).

— Машиностроение (сопротивление материалов, кинематика и динамика механизмов, трение, смазка, износ, современные методы расчета различных машин, автоматизация, исследование поверхностей, механическая обработка сплошных твердых сред).

— Технику измерений (электронные приборы для измерения механических величин, применение ультразвука и радиоактивных изотопов в технике).

— Статику и динамику сооружений (методы статического и динамического расчета сооружений, исследование неоднородных материалов, геотехника, устойчивость грунтов, современные методы производства строительных работ).

— Гидромеханику (гидравлика, гидротехнические сооружения, орошение, гидравлические турбины и насосы, гидравлические устройства).

Журнал предназначен для стимулирования научной деятельности, а также для распространения выдающихся работ, и принимает с этой целью к опубликованию статьи всех отечественных и зарубежных сотрудников.

Статьи следует редактировать в сжатой и ясной форме, избегая длинных введений, относящихся к уже известным данным проблемы.

Рукописи следует направлять в трех экземплярах, напечатанных на машинке через два интервала на одной стороне листа, а формулы должны быть вписаны чернилами четко и ясно. Рисунки и графики следует исполнять китайской тушью на кальке. Присылать рисунки следует только в случае совершенной необходимости и в ограниченном количестве.

Цитированная литература в тексте должна даваться общим списком в конце статьи. Нужно указывать инициалы и фамилию автора, название работы, том, страницу, место издания, издательство, год издания, а для журналов следует указывать и соответствующий номер. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

Кроме текста лля кождого экземпляра нужно представлять резюме на римынском и, если возможно, на русском и французском языках. Резюме должно в среднем составлять 1 страниц, написанню на машинке, на 20 страниц текста. Эти же нормы относятся и к работам зарубежных авторов, редактированным на русском, английском, французском или немецком языке.

Рукописи препровождаются в адрес: Институт прикладной механики. Бухарест, ул. Константин Милле № 15, район Г. Георгиу-Деж.

AEROMECANICĂ

SCURGEREA SUPERSONICĂ OMOGENĂ DE ORDIN SUPERIOR ÎN JURUL UNEI ARIPI UNGHIULARE PREVĂZUTĂ CU PLACĂ NORMALĂ

DE

ELIE CARAFOLI şi BÉATRICE HOROVITZ

CONSIDERAŢII PRELIMINARE

Mişcările omogene de ordin superior şi aplicaţiile lor la aripile triunghiulare, introduse pentru prima dată de L. Beshkine [1], au fost dezvoltate de P. Germain şi alţi autori cunoscuţi [2 — 5], obţinîndu-se rezultate interesante. Noi înşine, ne-am ocupat de aceeaşi problemă elaborînd o teorie unitară care ne permite să găsim o soluţie generală a acestei probleme [6].

În cele ce urmează ne propunem să extindem încă domeniul aplicaţiilor [7] şi să studiem scurgerea omogenă de ordin superior în jurul unei aripi prevăzută cu o placă normală. Sistemul aripă-placă are importante aplicaţii în practică fiind utilizat, cum ar fi de exemplu, ca ampenaje orizontale şi verticale ale avioanelor, ampenaje cruciforme ale rachetelor etc.

Să considerăm un sistem de axe trirectangulare Ox_1, x_2, x_3 (fig. 1), a cărui axă Ox_1 este paralelă cu viteza curentului de la infinit şi origina axelor este în vîrful aripii unghiulare, prevăzută cu placă normală. Presupunem că atît incidenţa aripii precum şi cea a plăcii sînt suficient de mici ca să putem admite că aripa se găseşte în planul Ox_1x_2 şi placa în planul Ox_1x_3. În planul $x_1 = 1$ (fig. 1), în care este definit sistemul de axe Oyz, segmentul A_2A_1 $(-l_2 < y < l_1)$ este urma aripii, iar segmentul $H_1H_2(-h < z < h)$ este urma plăcii.

Fie Φ (x_1, x_2, x_3) o funcţie omogenă de ordinul n în x_1, x_2, x_3, care ar reprezenta potenţialul unei mişcări în jurul sistemului aripă-placă.

Presupunem că funcţia Φ precum şi derivatele ei satisfac ecuaţia liniarizată a mişcării în ipoteza micilor perturbaţii. Astfel, de exemplu, notînd cu

$$\Phi_{p,q,r} = \frac{\partial^{p+q+r}\Phi}{\partial x_1^p \partial x_2^q \partial x_3^r}, \qquad (1)$$

una din derivatele lui Φ, putem scrie ecuaţia liniarizată

$$B^2 \frac{\partial^2\Phi_{p,q,r}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2\Phi_{p,q,r}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\Phi_{p,q,r}}{\partial x_3^2}, \quad (B^2 = M_\infty^2 - 1). \qquad (2)$$

Componentele vitezei de perturbaţie

$$u = \Phi_{100}, \quad v = \Phi_{010}, \quad w = \Phi_{001} \qquad (3)$$

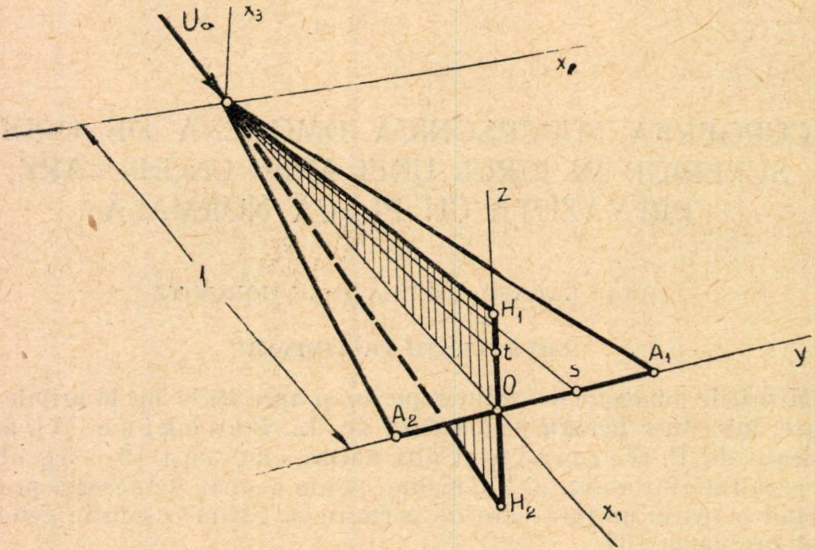


Fig. 1

sînt funcţii omogene de ordinul $(n - 1)$ şi ca atare satisfac formula lui Euler

$$(n-1)!\,\Phi_m = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} \Phi_m, \; (m = 100, 010, 001). \qquad (4)$$

Utilizînd notaţiile

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \qquad z = \frac{x_3}{x_1}, \qquad (5)$$

expresia anterioară devine

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\,\Phi_m = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + y \frac{\partial}{\partial x_2} + z \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^{(n-1)} \Phi_m, \; (m = 100, 010, 001). \qquad (6)$$

Observăm că în membrul doi al relaţiei (6) intervin derivate de ordinul n ale lui Φ. Aceste derivate sînt funcţii omogene de ordinul zero şi satisfac ecuaţia micilor perturbaţii.

Prin transformarea geometrică a lui Busemann

$$Br = \frac{2\rho}{1+\rho^2}, \quad \Theta = \theta, \quad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}), \tag{7}$$

unde r este raza vectoare în planul Oyz şi ρ raza vectoare din noul plan $\omega\eta\zeta$, derivatele de ordinul n ale lui Φ devin funcţii armonice de η şi ζ.

Considerînd variabila complexă

$$\xi = \eta + i\zeta = \rho e^{i\theta}, \tag{8}$$

asociind, pe de altă parte, derivatelor $\Phi_{p,q,r}$ $(p+q+r=n)$, funcţiile conjugate $\dot{\Phi}_{p,q,r}$ $(p+q+r=n)$, putem scrie următoarele funcţii analitice de variabila complexă ξ,

$$F_{p,q,r}(\xi) = \Phi_{p,q,r}(\eta,\zeta) + i\,\dot{\Phi}_{p,q,r}(\eta,\zeta). \tag{9}$$

Aplicăm planului ξ transformarea conformă dată de funcţia

$$Bx = \frac{2\xi}{1+\xi^2}, \quad (x = y + i\mathfrak{z}); \tag{10}$$

în planul x obţinem configuraţia din figura 2, în cazul aripii cu ambele borduri subsonice; semidreptele $(-\infty < y < D_2)$ şi $(D_1 < y < +\infty)$ corespund prin transformări urmei cercului Mach.

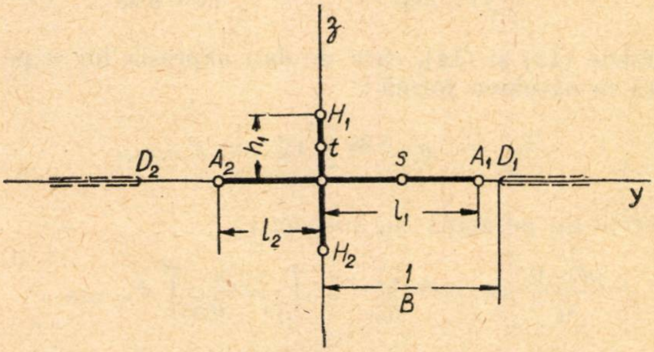


Fig. 2

Funcţiile $F_{p,q,r}$ sînt legate prin relaţii de compatibilitate care pot fi enunţate scriind că expresiile de forma

$$(-1)^q x^q \left(\frac{ix}{\sqrt{1-B^2x^2}}\right)^r dF_{n-q-r,q,r}, \tag{11}$$

unde $0 \leqslant q+r \leqslant n$, sînt egale [2].

Problema constă în determinarea componentei u a vitezei de perturbaţie, cu ajutorul căreia se calculează coeficientul de presiune.

Știind că u, v, w sînt funcții omogene de ordinul $(n-1)$ și aplicînd formula (6) putem scrie pentru punctele de pe aripă $(z = 0)$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, y^{q}\, \Phi_{n-q,q,0}\,, \tag{12}$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, w = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, y^{q}\, \Phi_{n-q-1,q,1}\,, \tag{13}$$

iar pentru punctele de pe placă $(y = 0)$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, z^{q}\, \Phi_{n-q,0,q}\,, \tag{14}$$

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, v = \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, z^{q}\, \Phi_{n-q-1,1,q}\,. \tag{15}$$

Observăm pe de altă parte că, utilizînd transformările (7) și (10), putem scrie pe aripă

$$y\Phi_{n-q,q,0} = \mathcal{R}e\; x\, F_{n-q,q,0}\,; \tag{16}$$

iar pe placă

$$z\, \Phi_{n-q,0,q} = \frac{\mathfrak{z}}{\sqrt{1+B^{2}\mathfrak{z}^{2}}}\, \Phi_{n-q,0,q} = \mathcal{R}e\, \frac{-ix}{\sqrt{1-B^{2}x^{2}}}\, F_{n-q,0,q}\,. \tag{17}$$

Astfel, formulele (12) și (14), care ne dau expresia lui u pe aripă și pe placă, capătă următoarea formă :

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q}\, x^{q}\, F_{n-q,q,0} \tag{18}$$

pentru punctele de pe aripă și, respectiv,

$$\frac{(n-1)!}{x_1^{n-1}}\, u = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} C_{n-1}^{q} \left(\frac{-ix}{\sqrt{1-B^{2}x^{2}}}\right)^{q} F_{n-q,0,q}\,, \tag{19}$$

pentru punctele de pe placă ; sau încă, ținînd seama de relațiile de compatibilitate (11),

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{q}\, C_{n-1}^{q}\, x^{q} \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{dF_{n00}}{x^{q}} \tag{20}$$

pentru punctele de pe aripă și

$$\frac{(n-1)!\,u}{x_1^{n-1}} = \mathcal{R}e \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^{q}\, C_{n-1}^{q} \left(\frac{x}{\sqrt{1-B^{2}x^{2}}}\right)^{q} \int_{\text{cercul Mach}}^{\text{placă}} \left(\frac{\sqrt{1-B^{2}x^{2}}}{x}\right)^{q} dF_{n00} \tag{21}$$

pentru punctele de pe placă [7].

Observăm astfel că problema determinării lui u, atît pe aripă cît și pe placă, se reduce la a găsi expresia lui F_{n00}, care are anumite proprietăți ce ne permit să o determinăm într-un mod foarte ușor.

Pentru a pune problema la limită a lui F_{n00}, ne interesează distribuția componentei w pe aripă și a componentei v pe placă.

Vom considera astfel că pe aripă viteza verticală de perturbație este dată de un polinom omogen de ordinul $(n-1)$ în x_1 și x_2

$$w = w_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} w_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_2^q, \tag{22}$$

iar pe placă, viteza laterală este dată în mod analog de polinomul omogen

$$v = v_{n-1} = \sum_{q=0}^{n-1} v_{n-q-1,q}\, x_1^{n-q-1} x_3^q, \tag{23}$$

unde $w_{n-q-1,q}$, $v_{n-q-1,q}$ sînt constante.

Comparînd relațiile (13), (15) cu condițiile la limită date mai sus (22), (23), rezultă pe aripă

$$C_{n-1}^q\, \Phi_{n-q-1,q,1} = (n-1)!\, w_{n-q-1,q}\,, \ (d\Phi_{n-q-1,q,1} = 0)\,, \tag{24}$$

iar pe placă

$$C_{n-1}^q\, \Phi_{n-q-1,1,q} = (n-1)!\, v_{n-q-1,q}\,, \ (d\Phi_{n-q-1,1,q} = 0)\,. \tag{25}$$

Din relațiile de compatibilitate (11) și condițiile (24), (25) obținem

$$d\Phi'_{n00} = 0, \quad (\Phi'_{n00} = \text{const.})\,, \tag{26}$$

pe aripă și pe placă, de unde rezultă că se poate considera funcția F_{n00} ca fiind potențialul unei mișcări fictive incompresibile, care admite aripa și placa drept linie de curent; putem deci aplica *metoda analogiei hidrodinamice* [8] și [9] pentru a găsi expresia sa.

DETERMINAREA FUNCȚIEI F_{n00}

Să considerăm mai întîi comportarea vitezei axiale de perturbație u în jurul bordurilor subsonice ale plăcii și ale aripii subțiri precum și în jurul unei muchii pe aripă sau pe placă, care pornește din vîrful sistemului aripă-placă.

a) La bordurile subsonice ale aripii, în cazul cînd ele există, corespunzătoare punctelor $y = l_1$ și $y = -l_2$ și la acele ale plăcii corespunzătoare punctelor $z = \pm h$, u tinde către infinit respectiv ca expresiile

$$\frac{1}{\sqrt{y-l_1}}, \quad \frac{1}{\sqrt{y+l_2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{z \pm h}}. \tag{27}$$

Rezultă că expresia lui F_{n00} trebuie să conţină următoarele singularităţi :

$$\frac{1}{(x-l_1)^{1/2}}, \frac{1}{(x-l_1)^{3/2}}, \ldots, \frac{1}{(x-l_1)^{n-1/2}} \tag{28}$$

corespunzătoare bordului subsonic din A_1 $(y = l_1)$,

$$\frac{1}{(x+l_2)^{1/2}}, \frac{1}{(x+l_2)^{3/2}}, \ldots, \frac{1}{(x+l_2)^{n-1/2}} \tag{29}$$

corespunzătoare bordului subsonic din A_2 $(y = -l_2)$ şi

$$\frac{1}{(x \pm ih_1)^{1/2}}, \frac{1}{(x \pm ih_1)^{3/2}}, \ldots, \frac{1}{(x \pm ih_1)^{n-1/2}} \tag{30}$$

corespunzătoare bordurilor subsonice din H_1 şi H_2 $(\mathfrak{z} = \pm h_1)$, unde

$$h_1^2 = \frac{h^2}{1 - h^2B^2}; \tag{31}$$

această relaţie este obţinută din transformările (7) şi (10).

b) Presupunem că pe o muchie pornită din vîrf, aşezată pe aripă sau pe placă, vitezele normale trec de la zero la w_{n-1}, valoare definită de (22), respectiv de la 0 la v_{n-1}, definită de (23); în acest caz u tinde către infinit, respectiv ca

$$\ln|y - s|, \quad \ln|z - t|, \tag{32}$$

unde $y = s$ este urma muchiei de pe aripă şi $z = t$ urma muchiei de pe placă în planul Oyz.

Rezultă că expresia lui F_{n00} conţine următoarele singularităţi [6] :

$$\ln(x - s), \frac{1}{x-s}, \frac{1}{(x-s)^2}, \ldots, \frac{1}{(x-s)^{n-1}} \tag{33}$$

datorite muchiei de pe aripă şi

$$\ln(x - it_1), \frac{1}{x - it_1}, \frac{1}{(x-it_1)^2}, \ldots, \frac{1}{(x-it_1)^{n-1}} \tag{34}$$

datorite muchiei de pe placă, unde

$$t_1^2 = \frac{t^2}{1 - B^2t^2}, \tag{35}$$

această ultimă expresie rezultînd din transformările (7) şi (10).

Aceste condiţii fiind cunoscute, problema se reduce la găsirea potenţialului mişcării fictive datorită acestor singularităţi, care să admită urma aripii şi plăcii drept linie de curent şi care să satisfacă totodată şi celelalte condiţii la limită. Vom căuta un plan convenabil, în care rezolvarea problemei să se facă într-un mod simplu.

După cum am procedat şi în cazul mişcărilor conice în jurul aripilor prevăzute cu placă [10], vom utiliza transformarea conformă

$$X^2 = x^2 + h_1^2 . \tag{36}$$

Pentru a fixa ideile, redăm în figura 3 configuraţia în planul X în cazul aripii cu ambele borduri subsonice.

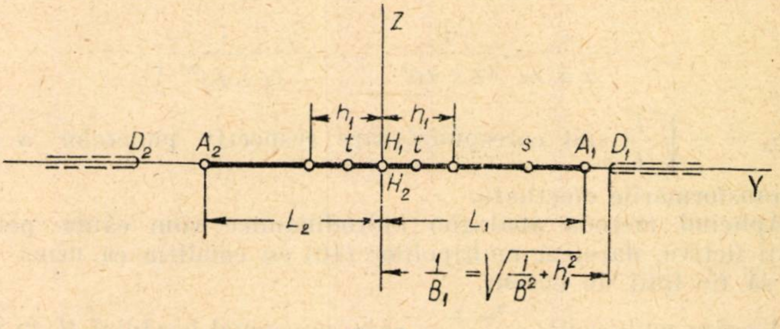


Fig. 3

Urma aripii şi a plăcii corespunde segmentului $-L_2 < Y < L_1$ unde

$$L_2^2 = l_2^2 + h_1^2 , \; L_1^2 = l_1^2 + h_1^2 , \tag{37}$$

iar urma cercului Mach corespunde semidreptelor $(-\infty < Y < -1/B_1)$, $(1/B_1 < Y < +\infty)$, unde

$$\frac{1}{B_1^2} = \frac{1}{B^2} + h_1^2 . \tag{38}$$

Facem următoarea transformare conformă

$$\chi^2 = \frac{L_2 + X}{L_1 - X} \tag{39}$$

şi obţinem astfel configuraţia din figura 4.

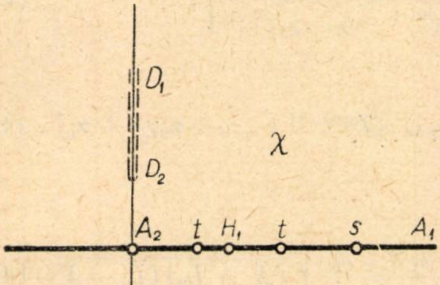


Fig. 4

În cele ce urmează vom determina expresia lui F_{n00} punînd în evidenţă contribuţia fiecărui bord şi fiecărei muchii ale aripii respectiv ale plăcii.

Contribuţia bordurilor subsonice ale plăcii. Ne ocupăm mai întîi de contribuţia bordurilor subsonice (H_1 şi H_2) ale plăcii, deosebind două cazuri precum urmează :

1. *Mişcarea simetrică faţă de axa reală.* În acest caz placa lucrează ca o aripă izolată. Expresia lui u pe aripa izolată (în cazul nostru placa)

a fost obţinută pe căi diferite de mai mulţi autori [2 — 6]. Ţinînd seama de poziţia plăcii, facem o schimbare de axe pentru a obţine expresia lui u raportată la sistemul nostru de coordonate.

După ce obţinem expresia lui *u pe placă* se poate deduce uşor Φ_{n00} şi deci F_{n00} ; rezultă, ca urmare, din relaţia (20) expresia lui *u pe aripă.*

2. ***Mişcarea antisimetrică faţă de axa reală.*** În planul χ singularităţile (30) devin de forma

$$\frac{1}{\chi \pm \chi_1}, \frac{1}{(\chi \pm \chi_1)^3}, \ldots, \frac{1}{(\chi \pm \chi_1)^{2n-1}}, \tag{40}$$

unde $\chi_1 = \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$ sînt corespunzătoare respectiv punctelor $x = \pm ih_1$ prin transformările efectuate.

Aplicînd metoda analogiei hidrodinamice vom căuta potenţialul mişcării fictive, datorită multipolilor (40) cu condiţia ca urma aripii şi plăcii să fie linii de curent.

Aşezăm multipolii $\frac{a_{2k-1}}{(\chi - \chi_1)^{2k-1}}$ care corespund bordului H_1 în punctele respective ; deoarece $\Phi_{n00} = 0$ pe cercul Mach şi deci axa imaginară din planul χ trebuie să fie linie de egal potenţial, aşezăm în punctul $\chi = -\chi_1$ multipolii $\frac{a_{2k-1}}{(\chi + \chi_1)^{2k-1}}$ care corespund bordului H_2 .

Obţinem astfel contribuţia bordurilor subsonice ale plăcii sub forma

$$f_H = \sum_1^n {}_k a_{2k-1} \left[\frac{1}{(\chi - \chi_1)^{2k-1}} + \frac{1}{(\chi + \chi_1)^{2k-1}} \right], \tag{41}$$

sau încă

$$f_H = \frac{\chi}{(\chi^2 - \chi_1^2)^{2n-1}}, [\alpha_{2(2n-2)} \chi^{2(2n-2)} + \alpha_{2(2n-3)} \chi^{2(2n-3)} + \ldots + \alpha_2 \chi^2 + \alpha_0] . \tag{42}$$

Revenind în planul X rezultă

$$f_H = \frac{a_{2n-2} X^{2n-2} + a_{2n-3} X^{2n-3} + \ldots + a_1 X + a_0}{X^{2n-1}} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)} . \tag{43}$$

În cazul aripii, subţiri sau groase, cu unul sau ambele borduri supersonice, urmăm aceeaşi cale pentru a găsi contribuţia bordurilor plăcii, înlocuind însă în transformarea conformă (39), L_2, respectiv L_1, prin $1/B_1$, după cum bordul A_2 sau A_1 este supersonic sau încă, punînd $L_1 = L_2 = 1/B_1$ dacă ambele borduri sînt supersonice.

Ţinînd seama de acest lucru, rezultă că formula (43) este generală şi se aplică în toate cazurile procedînd după cum urmează :

1) Cînd bordul A_1 este subsonic, iar A_2 supersonic, se va înlocui în formula (43) L_2 cu $1/B_1$.

2) Cînd bordul A_2 este subsonic, iar A_1 supersonic, se înlocuieşte L_1 cu $1/B_1$.

3) În cazul cînd ambele borduri A_2 şi A_1 sînt supersonice, se va înlocui L_2 şi L_1 prin $1/B_1$.

Contribuţia bordurilor subsonice ale aripii. Vom determina în continuare contribuţia în expresia lui F_{n00} a bordurilor subsonice ale aripii subţiri.

Ne vom ocupa mai întîi de bordul subsonic A_2.

Prin transformările conforme efectuate, expresiile (29) devin în planul χ de forma

$$\frac{1}{\chi}, \frac{1}{\chi^3}, \ldots, \frac{1}{\chi^{2n-1}}. \tag{44}$$

Aşezînd multipolii respectivi în origină în planul χ obţinem potenţialul mişcării fictive datorită acestora sub forma

$$f_{A_2} = \sum_1^n \frac{\beta_{2k-1}}{k\,\chi^{2k-1}} = \frac{B_{2(n-1)}\,\chi^{2(n-1)} + B_{2(n-2)}\,\chi^{2(n-2)} + \ldots + B_2\chi^2 + B_0}{\chi^{2n-1}}. \tag{45}$$

Se vede uşor că axa reală este linie de curent iar axa imaginară linie de egal potenţial conform condiţiilor $\Phi'_{n00} = \text{const.}$ pe urma aripii şi plăcii şi $\Phi_{n00} = 0$ pe cercul Mach.

Revenind în planul X rezultă

$$f_{A_2} = \frac{b_{n-1}\,X^{n-1} + b_{n-2}\,X^{n-2} + \ldots + b_1\,X + b_0}{(X + L_2)^{n-1}} \sqrt{\frac{L_1 - X}{X + L_2}}, \tag{46}$$

expresie care reprezintă contribuţia bordului subsonic A_2 bordul A_1 fiind şi el subsonic. Formula aceasta se poate aplica şi cînd bordul A_1 devine supersonic dar atunci L_1 se înlocuieşte cu $1/B_1$. Contribuţia bordului subsonic A_1, considerînd bordul A_2 de asemenea subsonic, este dată de următoarea funcţie

$$f_{A_1} = \frac{c_{n-1}\,X^{n-1} + c_{n-2}\,X^{n-2} + \ldots + c_1\,X + c_0}{(X - L_1)^{n-1}} \sqrt{\frac{X + L_2}{L_1 - X}}. \tag{47}$$

Această formulă este valabilă şi în cazul cînd bordul A_2 este supersonic; în acest caz însă trebuie înlocuit L_2 cu $1/B_1$.

În cazul cînd ambele borduri ale aripii lucrează ca nişte borduri subsonice, atunci în expresia lui F_{n00} intervine următoarea funcţie obţinută adunînd f_{A_2} dat de (46) şi f_{A_1} dat de (47):

$$f_A = \frac{d_0 + d_1\,X + \ldots + d_{2n-1}X^{2n-1}}{(X - L_1)^{n-1}\,(X + L_2)^{n-1}\sqrt{(X + L_2)\,(L_1 - X)}}. \tag{48}$$

Contribuţia muchiilor. În cele de mai sus am studiat contribuţia bordurilor subsonice. În continuare punem în evidenţă contribuţia muchiilor de pe aripă şi de pe placă corespunzătoare, respectiv punctelor $y = s$ şi $z = t$.

a) Expresiile (33) referitoare la muchia de pe aripă din punctul $y = s$, devin în planul χ de forma

$$\ln(\chi \pm \chi_s), \frac{1}{\chi \pm \chi_s}, \frac{1}{(\chi \pm \chi_s)^2}, \ldots, \frac{1}{(\chi \pm \chi_s)^{n-1}}, \tag{49}$$

unde $\chi = \pm \chi_s$ sînt corespunzătoare prin transformările efectuate punctului $y = s \left(X = L_s, L_s^2 = s^2 + h_1^2\right)$; în cazul aripii subțiri cu ambele borduri subsonice avem

$$\chi_s^2 = \frac{L_2 + L_s}{L_1 - L_s} \cdot \tag{50}$$

Potențialul complex al mișcării fictive datorită surselor și multipolilor din punctele $\pm \chi_s$ (corespunzătoare muchiei de pe aripă) are următoarea expresie [6]

$$f_s = Q \ln \frac{\chi - \chi_s}{\chi + \chi_s} + \sum_1^{n-1}{}_q \gamma_q \left[\frac{1}{(\chi - \chi_s)^q} + \frac{(-1)^{q+1}}{(\chi + \chi_s)^q}\right] \cdot \tag{51}$$

Se vede ușor că urma aripii și a plăcii (axa reală) este linie de curent și urma cercului Mach, pe axa imaginară, este linie de egal potențial.

Revenind în planul X, se obține contribuția unei muchii pe aripă sub forma

$$f_s = q_s \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(L_1 - L_s)}{(X - L_s)(L_1 + L_2)}} +$$

$$+ \frac{c_{n-2} X^{n-2} + c_{n-3} X^{n-3} + \ldots + c_1 X + c_0}{(X - L_s)^{n-1}} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)} \cdot \tag{52}$$

Această formulă este valabilă și în cazul aripii cu unul sau ambele borduri supersonice, după cum am văzut și în cazul formulelor obținute anterior, făcînd anumite schimbări precum urmează :

1) Cînd bordul A_1 este subsonic și A_2 supersonic se va înlocui L_2 prin $1/B_1$.

2) Cînd bordul A_2 este subsonic și A_1 supersonic se va înlocui L_1 prin $1/B_1$.

3) În cazul cînd ambele borduri A_2 și A_1 sînt supersonice se înlocuiește L_1 și L_2 prin $1/B_1$; în cazul aripii de grosime simetrică cu borduri subsonice sau supersonice se procedează tot în acest mod.

b) În ceea ce privește contribuția muchiilor de pe placă, vom face mai întîi următoarele considerații :

Vom presupune că muchiile sînt așezate simetric față de axa Ox_1. Orice distribuție de viteze laterale v poate fi descompusă în două părți : una simetrică și cealaltă antisimetrică.

În cazul problemei simetrice, după cum am văzut mai sus, placa lucrează ca o aripă izolată. Prin urmare expresia lui u pe placă fiind cunoscută se poate determina F_{n00} și, ca atare, u pe aripă.

Rămîne să ne ocupăm de cazul antisimetric. În planul X, punctele $x = \pm i t_1$, corespunzătoare muchiilor de pe placă se transformă în punctele $X = \pm L_t$ $(L_t^2 = h_1^2 - t_1^2)$, iar în planul χ, în punctele $\chi = \pm \chi_t$, $\chi = \pm \chi_t'$. Configurația respectivă poate fi urmărită succesiv în figurile 2, 3 și 4.

În cazul aripii cu ambele borduri subsonice, avem

$$\chi_t^2 = \frac{L_2 + L_t}{L_1 - L_t}, \; \chi'^2_t = \frac{L_2 - L_t}{L_1 + L_t}. \tag{53}$$

Contribuția muchiilor de pe placă este analoagă celei obținute pentru muchiile de pe aripă. Astfel, și în cazul nostru, contribuția o găsim sub forma unui potențial al unei mișcări fictive incompresibile datorită unui sistem de surse și multipoli situați astfel ca urma aripii și plăcii să fie linie de curent și urma cercului Mach linie de egal potențial.

Rezultă următoarea expresie

$$\begin{aligned} f_t = q_t \Bigg[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(L_1 - L_t)}{(X - L_t)(L_1 + L_2)}} - \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(L_1 + L_t)}{(X + L_t)(L_1 + L_2)}} \Bigg] + \\ + \left(\frac{d_{n-2} X^{n-2} + \ldots + d_1 X + d_0}{(X - L_t)^{n-1}} + \right. \\ \left. + \frac{e_{n-2} X^{n-2} + \ldots + e_1 X + e_0}{(X + L_t)^{n-1}} \right) \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)}, \end{aligned} \tag{54}$$

care reprezintă contribuția muchiilor de pe placă în cazul antisimetric, aripa subțire sau de grosime simetrică fiind considerată cu ambele borduri subsonice.

Expresia (54) mai poate fi scrisă sub forma

$$\begin{aligned} f_t = q_t \Bigg[\operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(L_1 - L_t)}{(X - L_t)(L_1 + L_2)}} - \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(L_1 + L_t)}{(X + L_t)(L_1 + L_2)}} \Bigg] + \\ + \frac{m_{2n-3} X^{2n-3} + m_{2n-4} X^{2n-4} + \ldots + m_1 X + m_0}{(X^2 - L_t^2)^{n-1}} \sqrt{(X + L_2)(L_1 - X)}. \end{aligned} \tag{55}$$

În cazul aripii cu bordul A_2 supersonic, contribuția muchiei pe placă este obținută din (55), înlocuind L_2 cu $1/B_1$; dacă bordul A_1 este supersonic, se înlocuiește L_1 cu $1/B_1$, și în sfîrșit în cazul aripii cu ambele borduri supersonice se înlocuiesc L_1 și L_2 prin $1/B_1$.

Exemple de aplicații pentru F_{n00}. În cele ce urmează vom aduna diferitele expresii f obținute mai sus și vom găsi expresia lui F_{n00} în cîteva cazuri concrete :

a) În cazul aripii și a plăcii subțiri total cuprinse în conul Mach (toate bordurile subsonice), se obține

$$F_{n00} = i \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-2} X^{4n-2}}{X^{2n-1} (X - L_1)^{n-1} (X + L_2)^{n-1} \sqrt{(X + L_2)(X - L_1)}} \tag{56}$$

b) În cazul aripii și a plăcii subțiri, placa avînd ambele borduri subsonice, aripa cu un bord subsonic A_2, celălalt A_1 supersonic și cu o muchie situată în punctul $y = s \left(s < \frac{1}{B}\right)$ de-a lungul cărora w trece de la w_{n-1} la 0, se găsește

$$F_{n00} = q_s \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + L_2)(1/B_1 - L_s)}{(X - L_s)(1/B_1 + L_s)}} +$$

$$+ i \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4n-3} X^{4n-3}}{X^{2n-1} (X - L_s)^{n-1} (X + L_2)^{n-1}} \sqrt{\frac{X - 1/B_1}{X + L_2}} . \qquad (57)$$

Luînd în această expresie $s > \frac{1}{B}$ obținem expresia lui F_{n00} în cazul aripii cu bordul supersonic în $y = s$.

c) În cazul aripii și plăcii subțiri, placa cu ambele borduri subsonice, aripa cu ambele borduri supersonice și două muchii situate respectiv în $y = s$, $y = -\sigma \left(-\frac{1}{B} < -\sigma < s < \frac{1}{B}\right)$ de-a lungul cărora w trece de la w_{n-1} la zero și respectiv de la zero la w_{n-1} se obține

$$F_{n00} = q_s \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/B_1)(1/B_1 - L_s)}{2/B_1 (X - L_s)}} + q_\sigma \operatorname{argch} \sqrt{\frac{(X + 1/B_1)(1/B_1 + L_\sigma)}{2/B_1 (X + L_\sigma)}} +$$

$$+ i \frac{a_0 + a_1 X + \ldots + a_{4(n-1)} X^{4(n-1)}}{X^{2n-1} (X - L_s)^{n-1} (X + L_\sigma)^{n-1}} \sqrt{X^2 - 1/B_1^2} . \qquad (58)$$

Dacă în expresia de mai sus facem $-\sigma < -\frac{1}{B} < \frac{1}{B} < s$ obținem expresia lui F_{n00} în cazul aripii cu ambele borduri supersonice în $y = -\sigma$, $y = s$.

Am putea continua astfel cu multe alte exemple, modul de lucru este același.

DETERMINAREA VITEZEI AXIALE DE PERTURBAȚIE ÎN CAZUL SCURGERII OMOGENE DE ORDINUL 2 ÎN JURUL ARIPII ÎN CRUCE

Presupunem că urma aripii este segmentul $-l < y < l$ iar urma plăcii $-h < z < +h$ și că distribuția pe aripă și pe placă a componentelor w și v sînt respectiv

$$w = w_{01} \, x_2 \qquad (59)$$

pe aripă și

$$v = v_{01} \, x_3 \qquad (60)$$

pe placă.

Formula (20) care ne dă expresia lui u pe aripă, poate fi scrisă în cazul nostru sub forma

$$\frac{u}{x_1} = \mathfrak{R}_e\left(F_{200} - x\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{dF_{200}}{x}\right) = \mathfrak{R}_e\, x\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} F_{200}\, d\frac{1}{x} \cdot \qquad (61)$$

În expresia lui F_{200} intervin contribuția bordurilor discului și a aripii astfel că putem scrie utilizînd formulele (43) și (48)

$$F_{200} = \frac{a_0 + a_1 X + a_2 X^2}{X^3}\sqrt{L^2 - X^2} +$$

$$+ \frac{b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3}{(X^2 - L^2)\sqrt{L^2 - X^2}}, \quad (L^2 = l^2 + h_1^2) \qquad (62)$$

sau încă

$$F_{200} = \frac{A_0 + A_1 X + \ldots + A_6 X^6}{X^3(X^2 - L^2)\sqrt{L^2 - X^2}} \cdot \qquad (63)$$

Dat fiind că avem antisimetrie față de axa imaginară rezultă

$$F_{200} = \frac{A_0 + A_2 X^2 + A_4 X^4 + A_6 X^6}{X^3(X^2 - L^2)\sqrt{L^2 - X^2}} \cdot \qquad (64)$$

Revenind în planul x găsim următoarea expresie

$$F_{200} = i\,\frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6}{(x^2 + h_1^2)(x^2 - l^2)\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}} \cdot \qquad (65)$$

Avem de efectuat următoarea integrală

$$\frac{u}{x_1} = \mathfrak{R}_e\left(-ix\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6}{x^2(x^2 + h_1^2)(x^2 - l^2)\sqrt{(x^2 - l^2)(x^2 + h_1^2)}}\,dx\right) \cdot \qquad (66)$$

Despărțim expresia rațională în x^2 în fracții simple și integrăm de la un punct oarecare de pe aripă din primul cadran pînă la un punct oarecare de pe cercul Mach.

Efectuînd calculele obținem

$$\frac{u}{x_1} = \frac{a + by^2}{\sqrt{(l^2 - y^2)(h_1^2 + y^2)}} + C_1 y[F(\varphi, k) - K(k)] + C_2 y[E(\varphi,k) - E(k)], \qquad (67)$$

unde a, b, C_1, C_2 sînt constante, $F(\varphi,k)$ și $E(\varphi,k)$ integrale eliptice de prima și a doua speță, $K(k)$ și $E(k)$ aceleași integrale eliptice complete cu

$$\varphi = \arcsin\sqrt{\frac{y^2(l^2 + h_1^2)}{l^2(h_1^2 + y^2)}}, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad (68)$$

$$k^2 = \frac{l^2}{l^2 + h_1^2} \cdot \qquad (69)$$

Determinarea constantelor. Scriind formula (67) sub forma

$$u = x_1\, u_1(y), \quad u = x_1\, \mathcal{R}_e\, U_1(x) \tag{70}$$

obținem respectiv

$$\Phi_{200} = u_1(y) - y\,\frac{du_1(y)}{dy}. \tag{71′}$$

$$F_{200} = U_1(x) - x\,\frac{dU_1(x)}{dx}. \tag{71″}$$

Pentru a determina constantele trebuie să impunem următoarele condiții pe aripă

$$\Phi_{101} = 0, \quad \Phi_{011} = w_{01}, \tag{72}$$

respectiv

$$\Phi_{110} = 0, \quad \Phi_{011} = v_{01}, \tag{72′}$$

pe placă.

Utilizînd relațiile de compatibilitate și ținînd seama de expresia (71′) obținem patru relații de unde se pot deduce constantele

$$0 = \mathcal{R}_e\left(\frac{dU_1}{dx}\right)_{\text{placă}} \tag{73′}$$

$$0 = \mathcal{R}_e\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} i\sqrt{1 - B^2 x^2}\,\frac{d^2 U_1}{dx^2}\,dx, \tag{73″}$$

$$w_{01} = -\,\mathcal{R}_e\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{aripă}} \frac{i\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\,\frac{d^2 U_1}{dx^2}\,dx, \tag{73 c}$$

$$v_{01} = -\,\mathcal{R}_e\int_{\text{cercul Mach}}^{\text{placă}} \frac{i\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\,\frac{d^2 U_1}{dx^2}\,dx. \tag{73 d}$$

Este ușor de văzut că u pe aripă este în cele din urmă funcție de variabilele x_1, x_2 și de parametrii l, h, w_{01} și v_{01}.

Expresia lui u pe placă poate fi obținută înlocuind în formula (67) $y = \frac{x_2}{x_1}$ prin $z = \frac{x_3}{x_1}$ și schimbînd între ei l cu $-h$ și w_{01} cu $-v_{01}$.

Primită la redacție la 20 august 1957.

СВЕРХЗВУКОВОЕ ОДНОРОДНОЕ ОБТЕКАНИЕ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С НОРМАЛЬНОЙ ПЛАСТИНОЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе исследуется сверхзвуковое обтекание треугольного крыла с нормальной пластиной в рамках теории однородных движений высшего порядка.

Задача сводится к определению выражения осевой составляющей u возмущающей скорости на крыле и на пластине.

Полагают, что движение является однородным n-го порядка и что распределение нормальной составляющей w на крыле, а также нормальной составляющей v на пластине, определяются однородным полиномом $(n-1)$-го порядка.

При помощи формулы Эйлера для однородных функций, а также соотношений совместимости, пишется выражение осевой составляющей u на крыле и на пластинев зависимости от определенной производной F_{n00} $(n-1)$-го порядка этой составляющей.

Эта производная имеет такие свойства, вытекающие из граничных условий задачи, что ее можно определить очень просто путем применения метода гидродинамической аналогии.

В качестве примера приводится однородное обтекание второго порядка крестообразного крыла.

L'ÉCOULEMENT SUPERSONIQUE HOMOGÈNE, D'ORDRE SUPÉRIEUR, AUTOUR D'UNE AILE ANGULAIRE À PLAQUE NORMALE

(RÉSUMÉ)

L'objet de ce travail est l'étude de l'écoulement supersonique autour d'une aile triangulaire à plaque normale, étude entreprise dans le cadre de la théorie des mouvements homogènes d'ordre supérieur.

Le problème revient à déterminer l'expression de la composante axiale, u, de la vitesse de perturbation sur l'aile et sur la plaque.

Le mouvement est considéré homogène, d'ordre n, et la distribution de la composante normale à l'aile, w, ainsi que celle de la composante normale à la plaque, v, sont considérées données par des polynômes homogènes d'ordre $(n-1)$.

La formule d'Euler pour les fonctions homogènes et certaines relations de compatibilité, permettent de poser l'expression de la composante axiale, u, sur l'aile et sur la plaque, fonction d'une certaine dérivée, F_{n00}, d'ordre $(n-1)$ de cette composante.

Cette dérivée possède des propriétés, déduites des conditions aux limites du problème, telles, qu'elle peut être déterminée d'une manière

extrêmement simple, en appliquant la méthode de l'analogie hydrodynamique.

En tant qu'application pratique, les auteurs donnent l'écoulement homogène, du deuxième ordre, autour d'une aile en croix.

BIBLIOGRAFIE

1. L. Beshkin, *Forces aérodynamiques agissant sur les surfaces portantes aux vitesses supersoniques.* Les cahiers d'aérodynamique, nr. 6, ianuarie-februarie 1947.
2. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique.* La Recherche Aéronautique, nr. 7, ianuarie 1949.
3. H. Multhopp, *A Unified theory of Supersonic Wing Flow, Emploing Conical Fields,* R.A.E. Report nr. Aero 2415, aprilie 1951.
4. H. Lomax a. M. A. Heaslet, *Generalized Conical Flow Fields in Supersonic Wing theory.* N.A.C.A., T.N., nr. 2497, septembrie 1951.
5. G. N. Lance, *The Delta Wing in a Non-Uniform Supersonic Stream.* Aeronautical Quarterly, vol. V, mai 1954, Londra.
6. E. Carafoli et M. Ionescu, *Ecoulements coniques d'ordre supérieur autours des ailes triangulaires minces ou à épaisseur symétrique.* Revue de Mécanique Appliquée, t. II, nr. 1, 1957.
7. E. Carafoli et B. Horovitz, *L'écoulement supersonique homogène d'ordre superieur autour d'une aile cruciforme.* Application au mouvement oscillatoire. Le Ie Congr. international de Mécanique appliquée, Bruxelles, septembrie 1956.
8. E. Carafoli, *Asupra caracterului hidrodinamic al soluţiilor din mişcările conice aplicate la teoria aripilor poligonale.* Comunicările Acad. R.P.R., t. II, nr. 9-10, 1952.
9. — *High-Speed Aerodynamics.* Bucureşti, 1956
10. E. Carafoli et B. Horovitz, *L'écoulement supersonique autour d'une aile à disque axial.* Revue de Mécanique Appliquée, t. I, nr. 1, 1956.

AEROMECANICĂ

APLICAREA METODEI PROFILELOR TIP DE VITEZE ŞI TEMPERATURI LA CALCULUL STRATULUI LIMITĂ DE PE UN CORP DE REVOLUŢIE

DE

ST. SĂVULESCU

1. Într-o lucrare anterioară [1] am arătat în ce constă metoda profilelor tip de viteză şi temperaturi şi am utilizat-o la calculul stratului limită bidimensional. În nota de faţă se va discuta posibilitatea aplicării acestor profile în cazul stratului limită de pe un corp de revoluţie, atunci cînd grosimea stratului limită are ordinul de mărime al razei cercului transversal. În acest sens vom arăta că noua formă geometrică nu influenţează prea mult forma profilelor tip şi că utilizarea lor duce la evaluarea directă, simplă, a influenţei curburii transversale asupra caracteristicilor stratului limită. Soluţiile cunoscute (2) nu sînt valabile decît pentru un raport subunitar al grosimii stratului limită faţă de raza cercului transversal.

2. Notaţiile şi schema scurgerii se văd în figura 1 şi menţionăm că R cuprinde factorul $2\,\pi$ care intervine în calculele respective.

Aproximaţiile făcute pentru deducerea ecuaţiilor sînt cele cunoscute în cazul stratului limită bidimensional, iar ecuaţiile se transpun uşor pentru situaţia din figura 1, în forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u u\,(R \pm r\cos\alpha)\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho u v\,(R \pm r\cos\alpha)\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial r}\left[\tau\,(R \pm r\cos\alpha)\right] - (R \pm r\cos\alpha)\frac{dp}{dx}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\,(R \pm r\cos\alpha)\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho v\,(R \pm r\cos\alpha)\right] = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u E\,(R \pm r\cos\alpha)\right] + \frac{\partial}{\partial r}\left[\rho v E\,(R \pm r\cos\alpha)\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial r}\left[(\tau u + q_r)\,(R \pm r\cos\alpha)\right], \tag{3}$$

unde $E = C_p T + \frac{u^2}{2}$, $q_r = \Lambda \frac{\partial T}{\partial r}$, $\tau = M \frac{\partial u}{\partial r}$, semnul plus corespunzînd mişcării exterioare (fig. 1) şi minus mişcării interioare (de exemplu tuburi). Condiţiile la limită sînt :

$$\begin{aligned} &r = 0,\ u = 0,\ v = v_w\ ;\ T = T_w(x) \text{ sau } q_r = q_{rw}(x),\ \tau = \tau_w(x),\\ &r = \delta(\Delta),\ u = u_e,\ T = T_e,\ \tau \simeq 0,\ q_r \approx 0, \end{aligned} \tag{4}$$

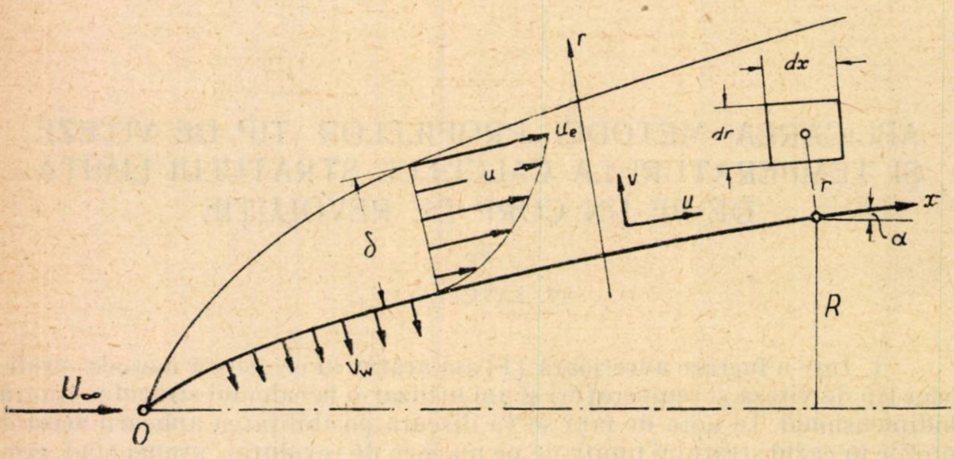


Fig. 1

δ fiind grosimea stratului limită dinamic, iar Δ grosimea stratului limită termic, indicele e însemnînd valori exterioare, iar w valori la perete.

3. Considerînd că avem transfer de masă la perete, să introducem funcţiile

$$\Psi_r = \int_0^x \rho_w v_w \, dx \, R + \int_0^r \rho u (R \pm r\cos\alpha)\, dr = Q_r + \Psi_r,$$

$$\Psi_{r\delta(\Delta)} = \int_0^x \rho_w v_w R dx + \int_0^{\delta(\Delta)} \rho u (R \pm r\cos\alpha)\, dr = Q_r + \Psi_{r\delta(\Delta)}$$

cu semnificaţia evidentă a unor debite. Cu notaţia $S_{(1)} = \frac{Q_r}{\Psi_{r\delta(\Delta)}}$ raportul

$$\eta_{(1)} = \frac{\Psi_r}{\Psi_{r\delta(\Delta)}} = \frac{\frac{\Psi_r}{\Psi_{r\delta(\Delta)}} + \frac{S_{(1)}}{1 - S_{(1)}}}{1 + \frac{S_{(1)}}{1 - S_{(1)}}} \tag{5}$$

va fi noua variabilă generalizată analoagă cazului bidimensional.

Pentru a vedea influenţa curburii transversale asupra acestei noi variabile să considerăm un caz ideal, dar semnificativ : scurgerea în jurul unui con supersonic de deschidere 2 α, viteza exterioară u_e = constant, numărul MACH, M_e = const. fără transfer de masă ($Q_r = 0$). Să admitem, spre simplificare, că profilele de viteze sînt lineare şi că peretele este izolat termic, iar numărul Prandtl unitar, astfel că $E = C_p\, T_e + \frac{u^2}{2} = E_e$ = const.

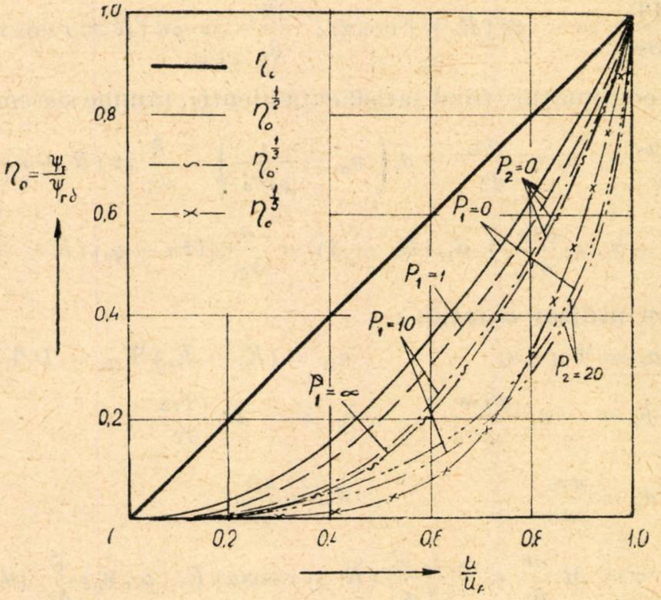


Fig. 2

Notînd cu $P_1 = \frac{\delta \cos\alpha}{R}$ parametrul influenţei curburii şi cu $P_2 = \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2$ parametrul de compresibilitate, vom obţine:

$$\eta_0 = \frac{\Psi_r}{\Psi_{r\delta}} = \frac{\displaystyle\int_0^{u_a} \frac{u_a(1 + P_1\, u_a)}{1 + P_2(1 - u_a^2)}\, du_a}{\displaystyle\int_0^{1} \frac{u_a(1 + P_1\, u_a)}{1 + P_2(1 - u_a^2)}\, du_a}. \tag{6}$$

Rezultatele calculului pentru diverse valori ale parametrilor P_1, P_2 sînt trasate în figura 2, unde curbele $\frac{u}{u_e} = u_a = f(\eta_0)$ arată o uşoară accentuare a caracterului „plin” al profilelor de viteze transformate. Concluzia imediată este aceea că vom putea utiliza prima aproximaţie de natura

$$u_a \simeq \left(\frac{\psi_r}{\psi_{r\delta}}\right)^n, \quad E_a = \frac{E - E_w}{E_e - E_w} \simeq \left(\frac{\Psi_r}{\Psi_{r\Delta}}\right)^{n_1} \tag{7}$$

analog cazului bidimensional (1), însă n, n_1 vor fi ușor deosebiți de acest din urmă caz.

4. Să efectuăm schimbarea de variabile:

$$x = x, \quad \eta_{(1)} = \eta_{(1)}(x, r), \tag{8}$$

unde

$$\frac{\partial \Psi_r}{\partial x} = -\rho v (R \pm r\cos\alpha), \quad \frac{\partial \Psi_r}{\partial r} = \rho u (R \pm r\cos\alpha). \tag{9}$$

Ecuația de continuitate fiind satisfăcută identic, rămîne sistemul de ecuații

$$a_r \frac{\partial u_a}{\partial x} + b_r \eta \frac{\partial u_a}{\partial \eta} + d_r\left(u_a - \frac{1}{\rho_a u_a}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}[\tau (R \pm r\cos\alpha)], \tag{10}$$

$$a_{1r} \frac{\partial E_a}{\partial x} + b_{1r} \eta_1 \frac{\partial E_a}{\partial \eta_1} + d_{1r}(E_a - 1) = \frac{\partial}{\partial \eta_1}[(\tau u + q_r)(R \pm r\cos\alpha)], \tag{11}$$

în care s-au utilizat notațiile:

$$\begin{aligned} a_r &= \Psi_{r\delta} \cdot u_e & \qquad a_{1r} &= (E_e - E_w)\Psi_{r\Delta} = D\Psi_{r\Delta} \\ b_r &= -u_e \frac{d\Psi_{r\delta}}{dx} & b_{1r} &= -D\frac{d\Psi_{r\Delta}}{dx} \\ d_r &= \frac{du_e}{dx} & d_{1r} &= \frac{dD}{dx} \end{aligned}$$

$$\tau = M\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\mu_e \rho_e u_e^2}{2\Psi_{r\delta}}(R \pm r\cos\alpha) F_\tau(\rho_a, u_a)\frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2)$$

$$\tau u + q_r = Mu\frac{\partial u}{\partial r} + \Lambda\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\mu_e \rho_e u_e}{\Psi_{r\Delta}}\frac{D}{P_r}(R \pm r\cos\alpha). F_q(\rho_a, u_a)\frac{\partial}{\partial \eta_1}\left[E_a + \right.$$

$$\left. + \frac{P_r - 1}{2D} u_e^2 \cdot u_a^2\right].$$

În expresiile de mai sus $\rho_a = \frac{\rho}{\rho_e}$, P_r este numărul lui Prandtl, iar M și Λ sînt analoage viscozității, respectiv conductibilității termice.

Condițiile la limită devin

$$\begin{gathered} \eta = S,\ u_a = 0;\ \eta_1 = S_1,\ E_a = 0,\ E_w = E_w(x) \text{ sau } q_r = q_{rw}(x), \\ \eta_{(1)} = 1,\ u_a = 1,\ \rho_a = 1,\ E_a = 1,\ \tau \simeq 0,\ q_r \simeq 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Să mai observăm că utilizînd transformarea (9) într-o secțiune a stratului limită căpătăm relația

$$Rr \pm \cos\alpha\frac{r^2}{2} = \frac{\Psi_r\delta(\Delta)}{\rho_e u_e}\int_{S_{(1)}}^{\eta_{(1)}} \frac{d\eta_{(1)}}{\rho_a u_a}, \tag{13}$$

care ne va fi necesară pentru evaluarea termenilor $(R \pm r\cos\alpha)^2$.

5. Integrînd ecuaţiile (10), (11) în raport cu $\eta_{(1)}$ de la 1 la $S_{(1)}$ obţinem final :

$$R\tau_w = \frac{d}{dx}\left[u_e \Psi_{r\delta}\left(1 - \int_S^1 u_a\, d\eta\right)\right] - \Psi_{r\delta}\frac{d\,u_e}{dx}\left(1 - \int_S^1 \frac{1}{\rho_a u_a}\, d\eta\right), \tag{14}$$

$$Rq_{rw} = \frac{d}{dx}\left[D\,\Psi_{r\Delta}\left(1 - \int_{S_1}^1 E_a\, d\eta\right)\right] - Q_r\frac{dD}{dx}, \tag{15}$$

relaţii care dau frecarea şi transferul de căldură la perete. Grosimea stratului limită se va obţine din formula (13) pentru $\eta_{(1)} = 1$.

Pentru a găsi ecuaţiile parametrului $\Psi_{r\delta(\Delta)}$ integrăm de două ori ecuaţiile (10) şi (11), aşa că în cele din urmă găsim :

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(\Psi_{r\delta}^2) + 2\left(\frac{u_e'}{u_e}\frac{f_d}{f_b} - \frac{f_a}{f_b}\right)\Psi_{r\delta}^2 + \\ + \frac{\mu_e \rho_e u_e}{f_b}\int_0^1 F_\tau(\rho_a,\ u_a)(R \pm r\cos\alpha)^2 d(u_a^2) = 0,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx}(\Psi_{r\Delta}^2) + 2\left(\frac{D'}{D}\frac{f_{1d}}{f_{1b}} - \frac{f_{1a}}{f_{1b}}\right)\Psi_{r\Delta}^2 + \\ + \frac{\mu_e \rho_e u_e}{P_r f_{1b}}\int_0^1 F_q(\rho_a,\ u_a)\ (R \pm r\cos\alpha)^2\, d\left[E_a + \frac{P_r - 1}{2\,D}\, u_e^2\, u_a^2\right] = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

n care s-au notat :

$$f_a = \int_S^1\left[\int_1^\eta \frac{\partial u_a}{\partial x}\, d\eta\right] d\eta\,;\ f_b = \int_S^1\left[\int_1^\eta \eta d\, u_a\right] d\eta\,;\ f_d = \int_S^1\left[\int_1^\eta\left(\frac{1}{\rho_a u_a} - u_a\right) d\eta\right] d\eta,$$

$$f_{1a} = \int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_1} \frac{\partial E_a}{\partial x}\, d\eta_1\right] d\eta_1\,;\ f_{1b} = \int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_1} \eta_1 dE_a\right] d\eta_1\,;\ f_{1d} = \int_{S_1}^1\left[\int_1^{\eta_1}(1 - E_a)\, d\eta_1\right] d\eta_1.$$

Pentru a găsi valorile lui τ_w şi q_{rw} vom pune în primă aproximaţie

$$u_a \simeq \left(\frac{\eta - S}{1 - S}\right)^n,\quad E_a \simeq \left(\frac{\eta_1 - S_1}{1 - S_1}\right)^{n_1}, \tag{18}$$

cu ajutorul cărora aflăm parametri $\Psi_{r\delta(\Delta)}$ din ecuaţiile (16), (17). Să remarcăm că din relaţia (13) deducem

$$(R \pm r\cos\alpha)^2 = R^2 \pm \cos\alpha\,\frac{2\,\Psi_{r\delta(\Delta)}}{\rho_e u_e}\int_{S_{(1)}}^{\eta_{(1)}} \frac{d\eta_{(1)}}{\rho_a u_a}, \tag{19}$$

pe care o utilizăm în ecuaţia (16) şi (17). Pentru $r = \delta\ (\Delta)$ şi $\eta_1 = 1$ relaţia (19) ne indică valori limitative pentru parametrul $\frac{\delta\cos\alpha}{R}$, care în cazul scurgerii exterioare poate creşte oricît, însă în cazul scurgerii interioare este mai mic decît unitatea.

6. Vom trata ca exemplu influența curburii transversale asupra coeficientului de frecare în cazul stratului limită laminar compresibil cu transfer în masă în exteriorul unui cilindru cu temperatura constantă la perete, pentru care avem : $R = \text{const.}, \frac{du_e}{dx} = 0, \frac{dD}{dx} = 0$. Considerînd $P_r = 1$, $\frac{\mu}{\mu_e} = \left(\frac{\rho}{\rho_e}\right)^{-s}$ avem $F_\tau(\rho_a, u_a) = \rho_a^{1-s}$ și obținem soluția $E_a = u_a$.

Ecuația (16) cu soluție simptotică $S \to 0$, devine

$$\frac{d}{dx}\left(\Psi_{r\delta}^2\right) - \frac{n+2}{n} \mu_e \rho_e u_e \Theta(1) R^2 \left[1 + \frac{2\Psi_{r\delta}}{\rho_e u_e R^2} \int_s^1 \frac{1}{\rho_a u_a} (1 - u_a^2)\, d\eta\right] = 0, \tag{20}$$

unde s-a pus

$$\frac{1}{\rho_a} = k + \frac{D}{i_e} u_a - \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 u_a^2, \; k = \frac{T_w}{T_e}, \; \Theta(u_a) = \int_0^{u_a} \rho_a^{1-s} d(u_a^2),$$

$$\Theta(1) = \int_0^1 \rho_a^{1-s} d(u_a^2) \simeq 1 + \frac{s-1}{6k}\left(4 + \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2 - 4k\right), \; \frac{\Theta(u_a)}{\Theta(1)} \simeq u_a^2.$$

Soluția aproximativă a ecuației (20) se poate pune sub următoarea formă, corectă chiar pentru valori mari ale parametrului $\frac{\delta}{R}$:

$$\Psi_{r\delta} \simeq \Psi_{r\delta_0}\left(1 + 0{,}4\, \Psi_{r\delta_0} \frac{2A}{\rho_e u_e R^2}\right), \tag{21}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$\Psi_{r\delta_0}^2 = \frac{n+2}{n} \mu_e \rho_e u_e \Theta(1) R^2 x$$

$$\underset{S\to 0}{\mathrm{A}} = \int_S^1 \frac{1 - u_a^2}{\rho_a u_a} d\eta \simeq \frac{2n}{1-n^2} \cdot \frac{1}{1+2n}\left[1 - n^2 + n(2+n)k + \right.$$

$$\left. + \frac{n(1-n)(2+3n)}{1+3n} \frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2\right].$$

Cu acestea găsim imediat din relația (14)

$$\frac{C_{fr}}{C_{f0}} = \sqrt{\frac{n(n+2)}{n_0(n_0+2)}} \frac{1+n_0}{1+n}\left[\frac{1}{1 + 0{,}8\sqrt{\frac{n+2}{n}} A\, \xi_1} + 2\sqrt{\frac{n+2}{n}} A\, \xi_1\right] +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{n_0(2+n_0)}} \frac{1+n_0}{1+n} \frac{1}{\sqrt{\Theta(1)}} \sigma_s \sqrt{Re_x} \cdot \tag{22}$$

în care s-a pus

$$C_{f_0} = \frac{2\tau_w}{\rho_e\, u_e^2} = \frac{2+n_0}{1+n}\, \mu_e\, \Theta\,(1)\, \frac{R}{\Psi_{r\delta_0}} \quad \text{pentru placa plană}$$

$$\xi_1 = \frac{x}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{Re_x}} \sqrt{\Theta\,(1)},\ \sigma_s = \frac{\rho_w\, v_w}{\rho_e\, u_e},\ \ Re_x = \frac{\rho_e\, u_e x}{\mu_e}\,.$$

7. Concluziile acestui studiu sînt următoarele :

a) Din punct de vedere fizic n şi n_0 nu pot diferi prea mult, aşa că formula (22) poate fi utilizată într-o primă aproximaţie cu $n \simeq n_0 = 1/3$ din cazul plan. O mai precisă evaluare trebuie făcută prin apropierea expresiilor (18) de soluţiile obţinute prin dubla integrare.

b) Parametrul ξ_1 cuprinde influenţa variaţiei viscozităţii cu temperatura prin expresia Θ (1) care arată o uşoară scădere a coeficientului de frecare faţă de cazul $s = 1$ (Θ (1) $= 1$).

c) Formula (22), obţinută pe această cale simplă şi directă, completează rezultatul lucrării [2] în sensul că nu mai e supusă condiţiei restrictive ca $\frac{\delta \cos\alpha}{R} < 1$ şi include influenţa transferului de masă. Deşi, utilizînd aproximaţia $n \simeq n_0 = 1/3$, soluţia nu este prea precisă, totuşi ea indică comportarea influenţei curburii transversale pentru rapoarte $\frac{\delta \cos\alpha}{R} > 1$. În acest din urmă caz se poate observa imediat din formula (22) că avem (cu $\sigma_s = 0$) formula $\frac{C_{fr}}{C_{f0}} \sim K\, A\, \xi_1$, adică proporţionalitatea dintre $\frac{C_{fr}}{C_{f0}}$ şi $\frac{\delta \cos\alpha}{R}$.

Primită la redacţie la 25 Iulie 1957.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ТИПОВЫХ ПРОФИЛЕЙ СКОРОСТЕЙ И ТЕМПЕРАТУР К РАСЧЕТУ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Автор распространяет свой метод расчета характеристик двухмерного пограничного слоя на трехмерный случай тел вращения. Показано, что, используя обобщенную переменную

$$\eta_{(1)} = \frac{\Psi_r}{\Psi_{r\delta(\Delta)}} = \left.\frac{\int_0^r \rho u\,(R \pm r\cos\alpha)\, dr}{\int_0^{\delta(\Delta)} \rho u (R \pm r\cos\alpha)\, dr}\right],$$

можно представить безразмерные скорости и энергии в типовой форме

$$u_a \approx \eta^n\,,\ E_a \approx \eta_1^{n_1},$$

где n, n_1 несколько меньше по сравнению с двухмерным случаем· В остальном ход расчета сохраняется. Рассматривается случай ламинарного сжимаемого пограничного слоя с переносом массы с цилиндра ; получается формула :

$$\frac{C_{f_r}}{C_{f_0}} = C_1 \left[\frac{1}{1 + C_2 A \xi_1} + C_3 A \xi_1 \right] + C_4 \sigma_s \sqrt{R_{ex}}, \; \xi_1 = \frac{x}{R} \sqrt{\frac{\Theta (1)}{R_{ex}}}$$

справедливая для всякого отношения $\frac{\delta \cos \alpha}{R}$ и учитывающая также влияние зависимости вязкости от температуры.

APPLICATION DE LA MÉTHODE DES PROFILS TYPE DE VITESSES ET DE TEMPÉRATURES AU CALCUL DE LA COUCHE LIMITE SUR UN CORPS DE RÉVOLUTION

(RÉSUMÉ)

Dans cet article, l'auteur étend sa méthode de calcul des caractéristiques de la couche limite bidimensionnelle au cas tridimensionnel des corps de révolution. On montre que, en utilisant la variable généralisée

$$\eta_{(1)} = \frac{\Psi_r}{\Psi_{\gamma \delta \Delta}} = \frac{\int_0^r \rho \, u \, (R \pm \cos \alpha) \, dr}{\int_0^{\delta(\Delta)} \rho u \, (R \pm r \cos \alpha) \, dr}$$

les vitesses et les énergies adimensionnelles peuvent se mettre sous la forme type

$$u_x = \eta^n, \; E_0 \simeq \eta_1^{n_1}$$

où n, n_1 diminuent légèrement en égard du cas bidimensionnel. Pour le reste, la marche du calcul est la même. Dans la conclusion on traite du cas de la couche limite laminaire compressible, à transfert de masse, sur un cylindre, obtenant la formule :

$$\frac{C_{fr}}{C_{f0}} = C_1 \left[\frac{1}{1 + C_2 A \xi_1} + C_3 A \xi_1 \right] + C_4 \sigma_s \sqrt{R_{ex}} \quad ; \xi_1 = \frac{x}{R} \sqrt{\frac{\Theta (1)}{R_{ex}}}$$

valable pour tout rapport $\frac{\delta \cos \alpha}{R}$ et qui contient aussi l'influence de la variation de la viscosité avec la température.

BIBLIOGRAFIE

1. St. Săvulescu, *Asupra determinării caracteristicilor stratului limită prin utilizarea unor profile tip de viteze şi temperaturi*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, 1957, p. 339.
2. R. Probstein, D. Elliot, *The Transverse Curvature Effect in Compressible Axially Symmetrical Laminar Boundary-Layer Flow*. J.A.S. nr. 3, 1956.

AEROMECANICĂ

DESPRE COMPORTAREA AVIONULUI ÎN ZBOR ÎN ATMOSFERĂ AGITATĂ

DE

T. HACKER

Alături de caracteristicile de maniabilitate, comportarea în zbor în atmosfera agitată se consideră condiție fundamentală în alegerea gradului de stabilitate longitudinală a unui avion ([1], p. 301 – 304). Dar, cu toată importanța ei, această problemă nu a putut fi soluționată mulțumitor pînă azi din cauza dificultăților pe care le comportă studierea însăși a curenților atmosferici, precum și a fenomenelor aerodinamice tranzitorii ce au loc pe avion sub acțiunea acestor curenți. Pe de altă parte, oricît de bine studiate ar fi fenomenele atmosferice și acțiunea lor asupra avionului ele niciodată nu vor putea fi luate riguros în considerație la stabilirea ecuațiilor de mișcare din cauza imensei lor varietăți. Pentru aceasta, matematic, problema trebuie pusă în așa fel încît descrierea precisă a proceselor tranzitorii să nu fie necesară. Aceasta revine la cercetarea soluțiilor unor ecuații diferențiale neliniare, conținînd în membrul al doilea termeni necunoscuți, dar cantitativ evaluabili într-un fel sau întraltul*).

În cele ce urmează vom impune forțelor provenite prin acțiunea curenților atmosferici condiția cea mai generală, aceea de a fi mărginite în modul de cantități constante cunoscute, sau care urmează a fi determinate. Cu alte cuvinte, vom presupune că aceste forțe (respectiv momente) satisfac niște inegalități simple de forma $|R_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leqslant \rho_i$, cantitățile constante ρ_i caracterizînd intensitatea agitației atmosferice (mărimea rafalelor).

Vom căuta relații care să lege mărimile ρ_i de acelea ale parametrilor constructivi și de cele ce caracterizează regimul de zbor neperturbat.

---

*) În literatura matematică problema este cunoscută sub denumirea de stabilitate în cazul perturbațiilor cu acțiune continuă.

Se va considera doar mişcarea longitudinală a avionului, depinzînd de următorii parametrii cinematici : viteza de zbor, unghiul de incidenţă, unghiul de tangaj şi viteza unghiulară de tangaj. Perturbaţiile adimensionale ale acestor parametri le vom nota respectiv prin x, y, z, u.

Mişcarea de bază fiind uniformă, orizontală şi rectilinie, mişcarea perturbată va fi descrisă de următorul sistem de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + X(x,y,z,u) + R_x\,(t,x,y,z,u),\\
\frac{dy}{dt} &= a_{21}\, x + a_{22} y + u + Y(x,y,z,u) + R_y\,(t,x,y,z,u),\\
\frac{dz}{dt} &= u,\\
\frac{du}{dt} &= a_{41}\, x + a_{42}\, y + a_{44}\, u + U(x,y,z,u) + R_u\,(t,x,y,z,u),
\end{aligned} \tag{1}$$

unde X, Y, U reprezintă sumele respective ale termenilor de grad mai mare decît unu ai dezvoltării părţilor drepte în serii de puteri ale perturbaţiilor, iar R_x, R_y şi R_u forţele perturbatoare (generalizate) pe direcţiile $O\,x$, $O\,y$ şi $O\,u$. Funcţiile X, Y şi U se anulează în origine, spre deosebire de R_x, R_y şi R_u care pentru $x = y = z = u = 0$ au, în general, valori diferite de zero. Presupunem că funcţiile X, Y şi U satisfac unor condiţii de tip Lipschitz pentru orice $t \geqslant 0$

$$\begin{aligned}
|X\,(x,y,z,u)| &\leqslant \eta_x\,(|x|+|y|+|z|+|u|),\\
|Y\,(x,y,z,u)| &\leqslant \eta_y\,(|x|+|y|+|z|+|u|),\\
|U\,(x,y,z,u)| &\leqslant \eta_u\,(|x|+|y|+|z|+|u|).
\end{aligned} \tag{a}$$

Constantele lui Lipschitz (η_x, η_y şi η_u) se pot considera date ale problemei, sau vor putea fi evaluate pe baza condiţiilor ce vor rezulta la sfîrşit. În ceea ce priveşte funcţiile R_x, R_y, R_u, reprezentînd forţele şi momentele din planul longitudinal provenite din acţiunea rafalelor atmosferice, le vom impune, precum s-a amintit mai sus, doar o condiţie de mărginire de forma

$$\begin{aligned}
|R_x\,(t,x,y,z,u)| &\leqslant \rho_x,\\
|R_y\,(t,x,y,z,u)| &\leqslant \rho_y,\\
|R_u\,(t,x,y,z,u)| &\leqslant \rho_u.
\end{aligned} \tag{b}$$

Constantele ρ_x, ρ_y, ρ_u pot fi date, urmînd a se determina parametrii constructivi şi cinematici (referitori la zborul neperturbat) în funcţie de acestea ; sau se pot determina sub formă de valori admisibile de intensitate a rafalelor în funcţie de avion şi regimul neperturbat.

Să presupunem, în continuare că avionul este static stabil şi prin urmare că ecuaţia caracteristică a sistemului liniar are două perechi de rădăcini complex conjugate*). Fie

$$\lambda_{1,3} = \mu_1 \pm i\,\nu_1\,, \qquad \lambda_{2,4} = \mu_2 \pm i\,\nu_2$$

şi fie părţile reale μ_1 şi μ_2 negative.

Se ştie că în cazul avioanelor în general şi în special al celor static stabile, valoarea absolută a uneia dintre perechi întrece considerabil pe a celeilalte. Se ştie de asemenea că această inegalitate are loc şi în ceea ce priveşte valorile absolute ale părţilor reale. Fie

$$|\mu_1| > |\mu_2|.$$

Părţile reale negative asigură stabilitatea asimptotică a soluţiei banale a sistemului liniarizat. Pentru acest caz, I. L. Massera**), a demonstrat existenţa funcţiei Leapunov (V) pozitiv definită, a cărei derivată $\frac{dV}{dt}$, scrisă în virtutea sistemului (1) fără termenii R_x, R_y, R_u este negativ definită, iar derivatele parţiale, în raport cu perturbaţiile, mărginite ([2] p. 299–308). În aceste condiţii, rezultă, conform teoremei date de I. G. Malkin ([2], p. 294), că mişcarea de bază este stabilă şi în cazul perturbaţiilor cu acţiune continuă, reprezentate prin adausurile R_x, R_y şi R_u.

Existenţa stabilităţii, determinată de semnul lui μ_1 şi μ_2 se traduce printr-o mărginire a perturbaţiilor. Valorile marginilor respective însă sînt în corelaţie cu mărimea perturbaţiilor în momentul iniţial şi a forţelor perturbatoare cu acţiune continuă. Pentru ca această „stabilitate" să aibă un sens practic, este necesar să se asigure pentru valori uzuale ale perturbaţiilor iniţiale şi a intensităţii rafalelor (ale constantelor ρ_i), valori suficient de mici pentru marginile superioare ale modulelor perturbaţiilor în orice moment $t \geqslant t_0$.

Prin urmare problema constă în a stabili nişte relaţii care să lege toate aceste mărimi : ecarturile admisibile ale mărimii perturbaţiilor, intervalul de timp în care se cere un anumit grad de amortizare, mărimea perturbaţiilor în momentul iniţial ($t = t_0$) şi valoarea constantelor ρ_x, ρ_y, ρ_u.

Soluţia generală a sistemului liniar cu coeficienţi constanţi se determină imediat. Expresiile adaosurilor la această soluţie, provenite din prezenţa în sistem a termenilor nelineari X, Y, U şi a termenilor R_x, R_y, R_u le determinăm prin metoda variaţiei constantelor, urmînd să le evaluăm ulterior cantitativ.

Pentru stabilirea soluţiei generale a sistemului liniar alegem un sistem fundamental de soluţii depinzînd numai de mărimi reale. Din combinarea lor vom obține soluția generală sub forma

---

*) Remarcăm că metoda ce urmează a fi prezentată se aplică fără nici o rezervă şi în cazul a două sau patru rădăcini reale.

**) I.L. Massera, *On Liapounoff's Condition of Stability*. Annals of Mathematics, t. 50, nr. 3, 1949.

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1(\alpha_1'\cos\nu_1 t - \alpha_1''\sin\nu_1 t)e^{\mu_1 t} + C_3(\alpha_1'\sin\nu_1 t + \alpha_1''\cos\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t} + \\ &\quad + C_2(\alpha_2'\cos\nu_2 t - \alpha_2''\sin\nu_2 t)e^{\mu_2 t} + C_4(\alpha_2'\sin\nu_2 t + \alpha_2''\cos\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t}, \\ y(t) &= C_1\cos\nu_1 t\cdot e^{\mu_1 t} + C_3\sin\nu_1 t\cdot e^{\mu_1 t} + C_2\cos\nu_2 t\cdot e^{\mu_2 t} + C_4\sin\nu_2 t.\, e^{\mu_2 t}, \\ z(t) &= C_1(\gamma_1'\cos\nu_1 t - \gamma_1''\sin\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t} + C_3(\gamma_1'\sin\nu_1 t + \gamma_2''\cos\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t} + \\ &\quad + C_2(\gamma_2'\cos\nu_2 t - \gamma_2''\sin\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t} + C_4(\gamma_2'\sin\nu_2 t + \gamma_2''\cos\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t}, \\ u(t) &= C_1(\delta_1'\cos\nu_1 t - \delta_1''\sin\nu_1 t)\,e^{\mu_1} + C_3(\delta_1'\sin\nu_1 t + \delta_1''\cos\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t} + \\ &\quad + C_2(\delta_2'\cos\nu_2 t - \delta_2''\sin\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t} + C_4(\delta_2'\sin\nu_2 t + \delta_2''\cos\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Constantele α_1', α_1'', γ_1', γ_1'' etc. depind de coeficienții sistemului liniarizat.

Considerînd coeficienții C_1, C_2, C_3 și C_4 drept funcții de t, x, y, z și u și înlocuind x, y, z și u în sistemul (1) prin expresiile (2) se obțin următoarele formule pentru determinarea funcțiilor C_1 și C_3:

$$\begin{aligned} C_1(t, x, y, z, u) &= \int_0^t e^{-\mu_1 s}[(L_1'\sin\nu_1 s + L_1''\cos\nu_1 s)(X + R_x) + (M_1'\sin\nu_1 s + \\ &\qquad + M_1''\cos\nu_1 s)(Y + R_y) + (N_1'\sin\nu_1 s + N_1''\cos\nu_1 s)(U + R_u)]\,ds \\ C_3(t, x, y, z, u) &= \int_0^t e^{-\mu_1 s}[(-L_1'\cos\nu_1 s + L_1''\sin\nu_1 s)(X + R_x) + (-M_1'\cos\nu_1 s + \\ &\qquad + M_1''\sin\nu_1 s)(Y + R_y) + (-N_1'\cos\nu_1 s + N_1''\mathit{sin}\,\nu_1 s)(U + R_u)]\,ds \end{aligned} \tag{3}$$

și alte două ecuații pentru C_2 și C_4 obținute prin schimbarea în ecuațiile lui C_1 respectiv C_3, peste tot a indicelui 1 prin 2. Constantele L_1', L_1'' etc. depind de α_1', α_1'', γ_1' etc. Astfel, soluția generală a sistemului (1) complet satisface niște ecuații integrale de forma

$$\begin{aligned} x(t) &= (\alpha_1'\cos\nu_1 t - \alpha_1''\sin\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t}[C_{10} + C_1(t, x, y, z, u)] + \\ &\quad + (\alpha_1'\sin\nu_1 t + \alpha_1''\mathit{cos}\,\nu_1 t)\,e^{\mu_1 t}[C_{30} + C_3(t, x, y, z, u)] + \\ &\quad + (\alpha_2'\cos\nu_2 t - \alpha_2''\sin\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t}[C_{20} + C_2(t, x, y, z, u)] + \\ &\quad + (\alpha_2'\sin\nu_2 t + \alpha_2''\cos\nu_2 t)\,e^{\mu_2 t}[C_{40} + C_4(t, x, y, z, u)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Prin C_{io} s-au notat constantele de integrare ale sistemului liniarizat, ce se determină din condițiile inițiale, iar $C_i\,(t, x, y, z, u)$ reprezintă integralele definite (3). Pentru y, z și u se pot scrie ecuații analoage. Notînd cu

$$\alpha_i = \sqrt{\alpha_i'^2 + \alpha_i''^2}, \quad \gamma_i = \sqrt{\gamma_i'^2 + \gamma_i''^2}, \quad \delta_i = \sqrt{\delta_i'^2 + \delta_i''^2}, \quad \beta_i = \sqrt{2}, \; i = 1,2,$$

$$\overline{L}_i = \sqrt{2}\,(|L_i'| + |L_i''|), \quad \overline{M}_i = \sqrt{2}\,(|M_i'| + |M_i''|),$$

$$\overline{N}_i = \sqrt{2}\,(|N_i'| + |N_i''|).$$

şi ţinînd seama de condiţiile (a) şi (b), pe baza ecuaţiilor de tip (4) obţinem inegalitatea

$$\begin{aligned} |x(t)| \leqslant\ & \alpha_1(|C_{10}|+|C_{30}|)e^{\mu_1 t} + \alpha_2(|C_{20}|+|C_{40}|)e^{\mu_2 t} + \frac{\alpha_1}{-\mu_1}(\overline{L}_1\rho_x + \\ & + \overline{M}_1\rho_v + \overline{N}_1\rho_u)(1-e^{\mu_1 t}) + \frac{\alpha_2}{-\mu_2}(\overline{L}_2\rho_x + \overline{M}_2\rho_v + \overline{N}_2\rho_u)(1-e^{\mu_2 t}) + \\ & + \alpha_1 e^{\mu_1 t}\int_0^t e^{-\mu_1 s}(\overline{L}_1\eta_x + \overline{M}_1\eta_v + \overline{N}_1\eta_u)(|x|+|y|+|z|+|u|)\,ds + \\ & + \alpha_2 e^{\mu_2 t}\int_0^t e^{-\mu_2 s}(\overline{L}_2\eta_x + \overline{M}_2\eta_v + \overline{N}_2\eta_u)(|x|+|y|+|z|+|u|)\,ds \end{aligned} \tag{5}$$

şi altele asemănătoare pentru y, z şi u.

Notînd în continuare

$$\begin{aligned} K_i &= (\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\delta_i)(|C_{i0}|+|C_{i+2,0}|), \\ L_i &= (\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\delta_i)\overline{L}_i, \qquad\qquad i = 1,2 \\ M_i &= (\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\delta_i)\overline{M}_i, \\ N_i &= (\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\delta_i)\overline{N}_i, \end{aligned}$$

şi însumînd cele patru inegalităţi de tipul (5) obţinem în sfîrşit

$$\begin{aligned} |x|+|y|+|z|+|u| \leqslant\ & K_1 e^{\mu_1 t} + K_2 e^{\mu_2 t} + \\ & + \frac{1}{\mu_1}(L_1\rho_x + M_1\rho_v + N_1\rho_u)(1-e^{\mu_1 t}) + \\ & + \frac{1}{\mu_2}(L_2\rho_x + M_2\rho_v + N_2\rho_u)(1-e^{\mu_2 t}) + \\ & + \int_0^t e^{\mu_1(t-s)}(L_1\eta_x + M_1\eta_v + N_1\eta_u)(|x|+|y|+|z|+|u|)\,ds + \\ & + \int_0^t e^{\mu_2(t-s)}(L_2\eta_x + M_2\eta_v + N_2\eta_u)(|x|+|y|+|z|+|u|)\,ds. \end{aligned}$$

Pentru ca în membrul al doilea să nu mai apară perturbaţiile, transformăm ultima inegalitate după cum urmează.

Deoarece mărimile de sub semnul celor două integrale definite sînt toate pozitive şi $\mu_1 < \mu_2$ avem evident

$$\begin{aligned} |x|+|y|+|z|+|u| \leqslant\ & \left(\frac{L_1}{-\mu_1}+\frac{L_2}{-\mu_2}\right)\rho_x + \left(\frac{M_1}{-\mu_1}+\frac{M_2}{-\mu_2}\right)y + \\ & + \left(\frac{N_1}{-\mu_1}+\frac{N_2}{-\mu_2}\right)\rho_u + \left[K_1 - \frac{1}{-\mu_1}(L_1\rho_x + M_1\rho_v + N_1\rho_u)\right]e^{\mu_1 t} + \\ & + \left[K_2 - \frac{1}{-\mu_2}(L_2\rho_x + M_2\rho_v + N_2\rho_u)\right]e^{\mu_2 t} + (L\eta_x + M\eta_v + \\ & + N\eta_u)e^{\mu_2 t}\int_0^t e^{-\mu_2 s}(|x|+|y|+|z|+|u|)\,ds, \end{aligned}$$

unde $L = L_1 + L_2$, $M = M_1 + M_2$, $N = N_1 + N_2$, sau prescurtat,

$$|x| + |y| + |z + |u| \leqslant S(\rho_x, \rho_y, \rho_u) + [K_1 - S_1(\rho_x, \rho_y, \rho_u)]\, e^{\mu_1 t} +$$
$$+ [K_2 - S_2(\rho_x, \dot{\rho}_y, \rho_u)]\, e^{\mu_2 t} + H \int_0^t e^{\mu_2 (t-s)} (|x| + |y| + |z| + |u|)\, ds$$
$$(S = S_1 + S_2)$$

și încă

$$e^{-\mu_2 t}(|x| + |y| + |z| + |u|) \leqslant S e^{-\mu_2 t} + (K_1 - S_1)\, e^{(\mu_1 - \mu_2)t} + K_2 - S_2 +$$
$$+ \int_0^t H e^{-\mu_2 s} (|x| + |y| + |z| + |u|)\, ds. \tag{6}$$

Pusă sub această formă, inegalității (6) i se poate aplica lema lui Gronwall generalizată*) ([3] p. 10) și în felul acesta se obține o inegalitate care nu conține în membrul al doilea modulele perturbațiilor:

$$e^{-\mu_2 t}(|x| + |y| + |z| + |u|) \leqslant S e^{-\mu_2 t} + (K_1 - S_1)\, e^{(\mu_1 - \mu_2)t} + K_2 - S_2 +$$
$$+ \int_0^t H\, [S e^{-\mu_2 t} + (K_1 - S_1)\, e^{(\mu_1 - \mu_2)t} + K_2 - S_2]\, e^{H(t-s)}\, ds,$$

de unde rezultă imediat

$$|x| + |y| + |z| + |u| \leqslant \frac{\mu_2 S}{\mu_2 + H} + \frac{(K_1 - S_1)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 - (\mu_2 + H)}\, e^{\mu_1 t} + \tag{7}$$
$$+ H \left[\frac{S}{-(\mu_2 + H)} + \frac{K_1 - S_1}{\mu_1 - (\mu_2 + H)} - (K_2 - S_2) \right] e^{(\mu_2 + H)t}.$$

Toate relațiile căutate se deduc din (sau pornind de la) ultima inegalitate.

O primă relație rezultă imediat din condiția ca membrul al doilea al inegalității (7) să reprezinte o funcție monoton descrescătoare de timp. Într-adevăr aceasta are loc atunci și numai atunci, dacă

$$\mu_2 + H \leqslant 0 \tag{8}$$

sau, *H* fiind o funcție liniară de constantele lui Lipschitz,

$$|\mu_2| \geqslant L\eta_x + M\dot{\eta}_y + N\eta_u. \tag{8'}$$

---

*) Lema se poate enunța astfel. Fie $w(t)$ o funcție continuă într-un interval $[t_0, t_1]$ satisfăcînd inegalitatea

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + \int_{t_0}^t k(s)\, w(s)\, ds,$$

unde φ și k sînt funcții continue, pozitive sau nule, în intervalul $[t_0, t_1]$. Atunci pentru orice t din acest interval avem

$$w(t) \leqslant \varphi(t) + \int_{t_0}^t \varphi(s)\, k(s)\, e^{\int_s^t k(\tau)\, d\tau}\, ds.$$

Pentru a deduce celelalte relații, vom adăuga la datele problemei gradul de amortizare cerut într-un anumit interval de timp $[0, t_f]$. Cu alte cuvinte se cere ca suma modulelor perturbațiilor să satisfacă o inegalitate de forma

$$|x| + |y| + |z| + |u| \leqslant \varepsilon(t_f). \tag{9}$$

Pentru ca relația (9) să fie satisfăcută, vom impune ca membrul al doilea al inegalității (7) să fie mărginit, pentru $t = t_f$ de cantitatea pozitivă ε, sau dacă $\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon''' \leqslant \varepsilon$

$$\frac{\mu_2 S}{\mu_2 + H} \leqslant \varepsilon', \tag{10}$$

$$H\left[\frac{S}{-(\mu_2 + H)} + \frac{K_1 - S_1}{\mu_1 - (\mu_2 + H)} - \frac{K_2 - S_2}{H}\right] e^{(\mu_2 + H)t} \leqslant \varepsilon', \tag{11}$$

$$\frac{(K_1 - S_1)(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 - (\mu_2 + H)}\, e^{\mu_1 t} \leqslant \varepsilon'''. \tag{12}$$

În calcule, $|\mu_1|$ fiind mare, inegalitatea (12) se poate neglija în majoritatea cazurilor.

Din inegalitățile (8), (10) și (11) se pot trage imediat cîteva concluzii.

Pentru stabilitatea soluțiilor sistemului liniar, precum se știe este suficientă (și necesară) îndeplinirea inegalității $\mu_2 < 0$. Din (8) rezultă o condiție suficientă de stabilitate pentru soluțiile sistemului neliniar, $\mu_2 + H \leqslant 0$, unde H este o cantitate pozitivă, depinzînd de termenii neliniari (prin intermediul constantelor lui Lipschitz).

Mai departe, dacă se ține seama și de forțele perturbatoare cu acțiune continuă, din inegalitatea (10) rezultă o condiție suplimentară pe care trebuie s-o satisfacă μ_2: $\mu_2 + \frac{\varepsilon'}{S - \varepsilon'} H \leqslant 0$ (din aceeași inegalitate rezultă evident că $S - \varepsilon' > 0$).

Pentru un avion și un regim de zbor date, din inegalitatea (10) rezultă următoarea limită pentru ρ_x, ρ_y, ρ_u, pentru care amortizarea cerută este asigurată :

$$S = l\,\rho_x + m\,\rho_y + n\,\rho_u \leqslant \frac{\mu_2 + H}{\mu_2}\,\varepsilon'. \tag{11}$$

Pentru a determina intervalul de timp t_f minim în care inegalitatea (9) este asigurată punem

$$\varepsilon' = \frac{\mu_2 S}{\mu_2 + S}.$$

Atunci, neglijînd ε''', vom pune $\varepsilon'' = \varepsilon - \frac{\mu_2 S}{\mu_2 + H}$ și din relația (11) rezultă, în urma unor transformări elementare

$$t_f \geqslant \frac{1}{-(\mu_2 + H)} \ln \frac{H\left[\frac{S}{-(\mu_2 + H)} + \frac{K_1 - S_1}{\mu_1 - (\mu_2 + H)} - \frac{K_2 - S_2}{H}\right]}{\varepsilon - \frac{\mu_2 S}{\mu_2 + H}}, \tag{12}$$

sau, neglijînd termenul $\frac{K_1 - S_1}{\mu_1 - (\mu_2 + H)}$

$$t_f \geqslant \frac{1}{-(\mu_2+H)} \ln \frac{H[S + (K_2 - S_2)(\mu_2 + H)]}{-(\mu_2 + H)\,\varepsilon + \mu_2 S} \tag{12'}$$

Întrucît variația logaritmului este lentă, se vede imediat că, pentru a avea un t_f cît mai mic, $|\,\mu_2 + H\,|$ trebuie să fie cît mai mare.

Primită la redacție la 25 iunie 1957.

О ПОВЕДЕНИИ САМОЛЕТА ПРИ ПОЛЕТЕ В НЕСПОКОЙНОЙ АТМОСФЕРЕ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Вопрос о поведении самолета в неспокойной атмосфере (полет «в болтанку») не получил до сих пор удовлетворительного разрешения из-за ряда трудностей, связанных с недостаточными сведениями о природе воздушных порывов и об их воздействии на самолет, а также из-за некоторых трудностей математического характера.

В настоящей статье автор предлагает метод, не требующий точных сведений о соответствующих атмосферных и аэродинамических явлениях. При этом достаточно знать лишь количественную оценку пределов области их изменения. В результате получаются некоторые величины, характеризующие атмосферные условия, при которых обеспечивается устойчивость установившегося режима полета.

SUR LE COMPORTEMENT DE L'AVION PENDANT LE VOL EN ATMOSPHÈRE AGITÉE

(RÉSUMÉ)

Le problème du comportement de l'avion en atmosphère agitée n'a pas encore été résolu à cause de certaines lacunes dans la connaissance de la nature des courants d'air et des forces qu'ils exercent sur l'avion, ainsi qu'à cause des difficultés d'ordre mathématique.

L'auteur expose une méthode où la connaissance rigoureuse des phénomènes atmosphériques et aérodynamiques n'est pas nécessaire. Il suffit de connaître d'une maniere estimative les limités de leur domaine de variation. Il en résulte des valeurs qui caractérisent les conditions atmosphériques permettant le maintien du vol de régime sans l'intervention du pilote.

BIBLIOGRAFIE

1. I.V. Ostoslavski i G.S. Kalacev, *Prodolnaia ustoicivost i upravleaemost samoleta*. Moscova, 1951.
2. I. G. Malkin, *Teoria ustoicivosti dvijenia*. Moscova-Leningrad, 1952.
3. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*. Paris, 1951.

METODE NOI DE DETERMINARE A DISTRIBUȚIEI VITEZELOR ÎN MIȘCAREA UNIFORMĂ A FLUIDELOR VÎSCOASE

DE

GR. MATEESCU
MEMBRU CORESPONDENT AL ACADEMIEI R. P. R.

I. STADIUL ACTUAL AL PROBLEMEI

Determinarea distribuției vitezelor în mișcările laminare uniforme deși nu are importanță practică, este o problemă interesantă pentru analogia sa matematică cu alte probleme de mecanică aplicată.

Ecuațiile diferențiale ale lui Navier-Stokes se reduc în cazul susenunțat la ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = -\frac{gJ}{\nu}, \tag{1}$$

în care u este componenta vitezei în direcția mișcării, pe cînd y și z sînt direcțiile axelor din planul unei secțiuni plane transversale curentului, g = accelerația, ν = viscozitatea cinematică și J — sau mai exact, $\sin\alpha$ = = panta piezometrică.

J. Boussinesq [1] a stabilit analogia acestui fenomen cu torsiunea unei bare prizmatice avînd o secțiune plană, ecuația fiind în acest caz

$$\nabla^2 \varphi = -G\theta,$$

în care G este modulul de elasticitate la tăiere, θ = unghiul de răsucire, φ = funcția de tensiuni.

L. Prandtl [2] a stabilit și analogia cu problema deformației unei membrane plane flexibile, supusă la o diferență de presiune p și o tensiune uniformă S, în care caz ecuația ia forma

$$\nabla^2 w = -\frac{p}{S}. \tag{1''}$$

A. G. Greenhill [3] a studiat o altă analogie, mișcarea plană a unui fluid perfect animat de o rotație constantă ω.

Chiar și încovoierea plăcilor se poate studia cu ajutorul unor ecuații de același tip sau de un tip mai general, ecuația $\nabla^2 M = -q$ furnizînd mărimea momentului $M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu}$, iar ecuația $\nabla^2 w = -\frac{M}{D}$ permițînd calculul deformației w, în care $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$.

Dintre toate analogiile este de remarcat în special, analogia cu membrana care permite studiul oricărui fenomen de mai sus cu ajutorul unui model format dintr-o membrană de lichid glicero-săpunos sau dintr-o membrană de cauciuc.

În orice caz, interesul rezolvării acestei probleme este multiplu, ceea ce explică și mulțimea cercetărilor și a metodelor aplicate pînă în prezent.

Neexistînd o soluție generală a ecuației (1), rezolvarea exactă s-a efectuat în diverse cazuri particulare. În afară de cazul banal al unei secțiuni circulare și cazul mișcării între două plane paralele, s-au mai găsit soluții exacte pentru triunghiul echilateral, distribuția vitezelor fiind dată de o funcție algebrică de gradul trei ; pentru elipsă, în care caz viteza este dată de un polinom de gradul doi. Tot printre metodele exacte se pot socoti acele care conduc la funcții exprimate prin serii (cazul secțiunii dreptunghiulare). [4]. O metodă mai generală, fructuoasă, a fost dată de B. de Saint-Venant [4] pentru torsiunea prismelor, scriind că integrala ecuației în φ se compune din suma a doi termeni : $\overline{\varphi}$ o funcție armonică, soluție a ecuației $\nabla^2 \overline{\varphi} = 0$ și termenul $\varphi_0 = -\frac{G\theta}{2}(y^2 + z^2)$ care este o soluție particulară a ecuației $\Delta^2 \varphi = -2G\theta$. Funcția φ se alege astfel ca $\overline{\varphi} + \varphi_0$ să îndeplinească condițiile pe contur.

Această metodă a fost aplicată la o serie de contururi, găsindu-se, ca soluții, funcții armonice polinomiale (cerc, elipsă, parabolă, ovoid ș.a.) [5]. S-au dat soluții exacte și pentru poligoane regulate. L. N. G. Filon [6] și H. Love [7] rezolvă cazurile secțiunilor formate din segmente de conice și intersecții de cercuri. E. Trefftz [5] rezolvă cu ajutorul transformării conforme secțiunile poligonale neregulate, iar C. Kolosoff [8] cazul unui triunghi dreptunghi. S-a preconizat și aplicarea unor metode mai generale, prin folosirea ecuațiilor integrale a calculului variațional (metodele Ritz, Trefftz, Timoshenko), fără rezultate remarcabile. Detalii asupra metodelor de rezolvare arătate pînă acum se pot găsi în lucrările lui Timoshenko [9], într-un studiu al lui Aug. Ghetti [10] etc. Recent s-au rezolvat de autori romîni cîteva probleme prin metode exacte: Caius Iacob rezolvă cazul unei coroane circulare cu o ușoară excentricitate și cazul unui cerc prevăzut cu palete [11] ; Șt. Gheorghiță studiază cazul unui paralelogram apropiat de un dreptunghi [12] ; Șt. Zarea și P. Georgescu*) rezolvă ecuațiile Navier-

---

*) Șt. Zarea și P. Georgescu, *A case of integrating the system of Navier-Stokes differential equations* (al 9-lea congres internațional de mecanică aplicată), Bruxelles, 1956.

Stokes găsind soluții exacte pentru formele de lunulă; și Cristian Stănescu și L. Dumitrescu rezolvă cazul mișcării a două lichide imiscibile în tuburi de secțiune circulară și dreptunghiulară [13].

Se impune însă a cita și acele metode aproximative, care permit a găsi soluții prin calculul unei rețete de puncte discrete; prin înmulțirea în anumite zone a numărului acestor puncte se poate ajunge la valori suficient de exacte ale funcției căutate. Astfel este metoda rețelelor, perfecționată în ultimul timp de V.R. Soutwell [14] și alți matematicieni și cunoscută sub numele de metoda relaxării. Această metodă, expusă și aplicată în unele exemple de D. Dumitrescu și colaboratorii săi în publicațiile Academiei R.P.R. [15], are avantajul de a fi absolut generală și permite rezolvarea chiar în cazul cînd secțiunea transversală are un contur foarte neregulat.

II. CÎTEVA METODE ȘI PROCEDEE NOI

În trei comunicări făcute în ședințele Academiei R.P.R. în 1957 [16], [17] și [18] am expus principiile unor procedee noi pentru aflarea distribuției vitezelor în mișcarea uniformă în regim laminar. În acest studiu se vor arăta detaliile tehnice de aplicare ale acestor procedee și economia lor.

1. Metoda tuburilor de curent avînd secțiuni cu contur curbiliniu

Această metodă aparține marelui grup de procedee cunoscut sub denumirea de *metoda relaxării*. Caracteristic metodei noastre este că pe cînd rețelele lui Southwell, Allen ș.a. sînt formate din linii drepte, noi pornim de la o rețea curbilinie cu ochiurile congruente la contur. Fiecare ochi al acestei rețele se consideră ca secțiune normală a unui tub de curent și se scrie ecuația mișcării fluidului cuprins în tub, exprimînd echilibrul dinamic între forțe în ecuația (2) și, în cazul mișcării laminare, relația între viteze și forțele de frecare, în ecuația (3)

$$\int_c \tau \, d C = \gamma J \Omega, \tag{2}$$

$$\tau = -\mu \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \tag{3}$$

Ecuația (2) este valabilă și în mișcare turbulentă, în care caz ecuația (3) trebuie înlocuită cu alta corespunzătoare.

În cazul unor ochiuri de forma unor dreptunghiuri curbilinii (fig. 1) gradientul vitezei $\frac{\partial u}{\partial n}$ va fi considerat constant pe toată latura $\overline{MM'}$ și egal cu $\frac{u_1 - u_0}{\Delta l_{01}}$, astfel ca

$$\int_M^{M'} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \frac{u_1 - u_0}{\Delta l_{01}} \overline{MM'} \cdot$$

Lungimi ca MM' și Δl_{01} se măsoară pe arce.

Aici mai intervine aproximația datorată faptului că $\frac{\partial u}{\partial n}$ trebuie considerat chiar în punctul N de intersecție al curbei vitezelor $0'1'$ cu suprafața cilindrică (MM', x), avînd ca directoare curba MM' și nu ca pantă a coardei din diagrama vitezelor u_0, u_1, față de planul secțiunii udate. Această aproximație nu este inerentă numai rețelei curbilinii, cu pasuri neegale, dar și rețelei rectilinii, cu pasuri egale, căci în ambele cazuri înclinarea tangentei în N la curba vitezelor nu este egală cu înclinarea coardei, ci aproximația poate fi mai bună într-un caz sau altul, după mersul curbei vitezelor.

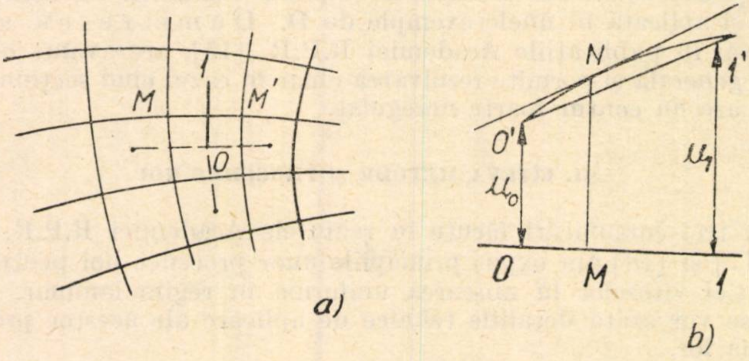


Fig. 1

Ecuațiile cu diferențe finite se obțin deci direct din ecuațiile mișcărilor tuburilor de curent, fără a mai trece prin ecuația diferențială Poisson și în acest fel, fiecare ecuație are interpretarea sa fizică.

Pentru ca ecuațiile care dau vitezele să fie cît mai simple, se va prefera o rețea de patrate curbilinii. Pe lîngă ortogonalitatea laturilor sale curbilinii și a curbelor diagonale, patratul curbiliniu se poate defini prin condiția ca în ochiul rețelei să se poată înscrie un cerc. S-a arătat în lucrarea [18] că în acest caz, ecuația pentru un nod (adică pentru centrul cercului înscris în ochiul rețelei) se scrie întocmai ca pentru o rețea cu ochiuri patrate rectilinii, numai că în loc de pasul h constant, în termenul al doilea al rețelei, pasul este variabil.

$$4\,u_0 - (u_1 + u_2 + u_3 + u_4) = K = \frac{gJ}{\nu}\,(2r_0)^2. \tag{4}$$

Gradul de aproximație al calculului. S-au arătat anterior aproximațiile ce se fac în calculul cu diferențe finite, dar care sînt comune rețelelor de patrate rectilinii și curbilinii. Vom analiza acum și erorile caracteristice numai rețelelor curbilinii, rezolvate cu ecuația precedentă. În acest scop să scriem aceeași ecuație în stadiul său inițial, ca expresie a mișcării fluidului în tubul de curent (0), înconjurat de tuburile (1), (2), (3) și (4) (fig. 2)

$$\frac{u_0 - u_1}{OO_1}\,MM' + \frac{u_0 - u_3}{O\,O_3}\,NN' + \frac{u_0 - u_2}{O\,O_2}\,MN + \frac{u_0 - u_4}{O\,O_4}\,M'N' = \frac{gJ}{\nu}A, \tag{5}$$

în care A este aria ochiului (0). Ecuația (4) se obține făcînd două categorii de aproximații noi

— rapoartele

$$\frac{MM'}{OO_1} \approx \frac{NN'}{OO_3} \approx \frac{MN}{OO_2} \approx \frac{M'N'}{OO_4} \approx 1,$$

— aria

$$A \approx (2r_0)^2.$$

Aproximația cu privire la rapoarte. Se poate evalua eroarea maximă în felul următor. Se trasează prin M' curba $L''M'N''$ prin translația curbei LMN. Din figură rezultă că arcul $MM' = 2r_1 + r_1\theta_1 = 2r_0 - r_0\theta_1$, θ_1 fiind divergența unghiulară a curbelor $M'M'N'$ și $L''M'N''$ în punctul M'. Se deduce

$$r_1 = \frac{MM'}{2+\theta}, \quad r_0 = \frac{MM'}{2-\theta},$$

$$\frac{MM'}{r_0+r_1} = \frac{MM'}{OO_1} = 1 - \frac{\theta_1^2}{4}.$$

Tot astfel, notînd cu θ_3, θ_2 respectiv θ_4 divergențele unghiulare ale celorlalte perechi de laturi în punctele N', N și M, găsim că rapoartele respective diferă de unitate, prin cantitățile $\pm\frac{\theta_i^2}{4}$.

Dacă divergența cea mai mare din acele patru valori θ_i se notează cu θ și considerînd că toate ar avea același semn se obține ca limită superioară a erorii relative valoarea $\frac{\theta^2}{4}$ prin lipsă sau exces. De fapt eroarea este cu mult mai mică deoarece semnul lui $\frac{\theta_i^2}{4}$ este alternat. Găsim următoarele erori maxime ε_1

$\theta = 11°30'$ 16° 25°30',

$\varepsilon_1 = 1\%$ 2% 5%

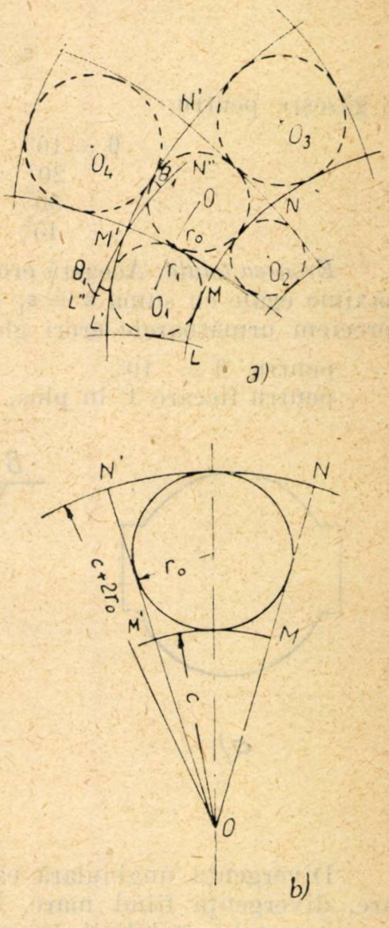


Fig. 2

Aproximație cu privire la aria A. Pentru a găsi ordinea de mărime a erorii în cazul cînd luăm $A = 4r_0^2$ se calculează aria exactă din perimetrul $MMN'N'$, în cazul unui ochi format din două arce concentrice și razele marginale. Din figura 2*b* rezultă : aria $MM'N'N = 2\theta r_0 (r_0 + c)$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{r_0}{r_0 + c},$$

$$\frac{4r_0^2}{\text{aria } MM'N'N} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}.$$

Eroarea relativă

$$\varepsilon_2 = 1 - \frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

se găsește pentru

$$\begin{array}{ll} \theta = 10^\circ & \varepsilon_2 = 0{,}012\,\% \\ 20^\circ & 0{,}57\ \text{''} \\ 30^\circ & 1{,}15\ \text{''} \\ 45^\circ & 2{,}85\ \text{''} \end{array}$$

Eroarea totală. Această eroare datorită ambelor aproximații ia valori maxime egale cu suma $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Dat fiind că ε_1 a fost supraevaluat, apreciem următoarele erori globale (în limita $\theta < 30^\circ$)

pentru $\theta = 10^\circ$, $\varepsilon = 1\%$,
pentru fiecare 1° în plus, ε crește cu $\sim 0{,}3\%$.

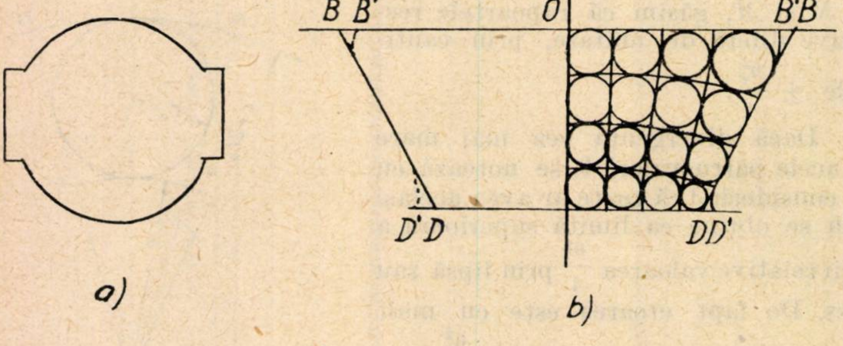


Fig. 3

Divergența unghiulară este un indice al desimii rețelei, la rețele rare, divergența fiind mare. Din studiul precedent rezultă că erorile inerente rețelei curbilinii sînt mici, chiar dacă rețeaua este rară.

Metoda tuburilor de curent conferă o libertate mare în alegerea unei forme de tub cît mai potrivită pentru o rezolvare mai rapidă.

În lucrarea [16] s-a arătat că, alegînd ca tuburi, coroane cilindrice elementare, se poate rezolva ușor probelma mișcării uniforme în interiorul unei coroane cilindrice circulare.

Pentru obținerea rețelei ortogonale congruentă cu un contur dat se pot folosi mai multe mijloace :

Se consideră unele laturi ale conturului ca linii de curent, celelalte ca linii echipotențiale și se trasează curbele intermediare, fie printr-un calcul de reprezentare conformă, fie prin procedee grafice aproximative sau experimentale (metoda E.G.D.A.). De exemplu în figura 3 *a* existența unor unghiuri drepte ale conturului înlesnește trasarea curbelor rețelei ; în cazul *b* putem lua ca linii echipotențiale liniile *AB* și *CD*, cu o ușoară deplasare a vîrfurilor și o curbare la vîrf a liniilor *AC* și *BD* spre a se obține două linii de curent.

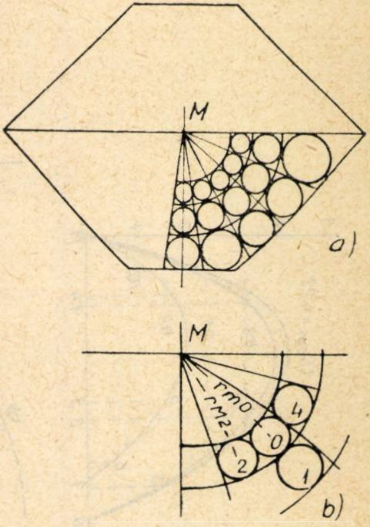


Fig. 4

În figura 4 *a* vom considera o sursă în *M* sau o mișcare circulatorie în jurul lui *M*. În jurul lui M se va evita divizarea inutilă a rețelei, considerînd întregul bloc al ochiurilor (în număr infinit), închis într-o curbă. În punctele vecine cu acest bloc, în care viteza $= u_{max}$ în centrul *M*, ecuația mișcării va lua o formă specială. De exemplu pentru nodul (0) din figura 4*b*

$$3u_0 - (u_1 + u_2 + u_4) +$$

$$+ \frac{u_0 - u_m}{r_{m0}} 2r_0' = \frac{gJ}{\nu}(2r_0)^2,$$

în care

$$r_{m0} = \overset{\frown}{OM} \text{ (măsurat pe arc)},$$

iar $2r_0'$ este lungimea arcului care separă ochiurile *O* și *M*.

În sfîrșit, în nodul *M*, cu care se învecinează *n* ochiuri ale rețelei, este valabilă ecuația

$$n u_m - 2\, u_m \sum \frac{r_i}{r_{mi}} = \frac{gJ}{\nu}\, \Omega_M. \tag{6}$$

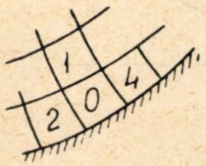


Fig. 5

Este de observat că în general, dacă blocul *M* nu este prea mare în raport cu ochiurile vecine, raportul $\frac{r_i}{r_{mi}}$ este ≈ const.

Dar se poate folosi și o cale inversă : plecînd de la spectrele unor mișcări potențiale cunoscute, se determină un contur format din curbe care aparțin liniilor echipotențiale sau de curent cunoscute și în acest fel se pot imagina o infinitate de contururi. Se alege apoi din aceste contururi acela care se poate adapta mai bine conturului dat.

Prin împărţirea domeniului mişcării, în patrate (sau alte forme) curbilinii congruente cu conturul, ecuaţiile nodurilor învecinate cu conturul iau forme simple (fig. 5).

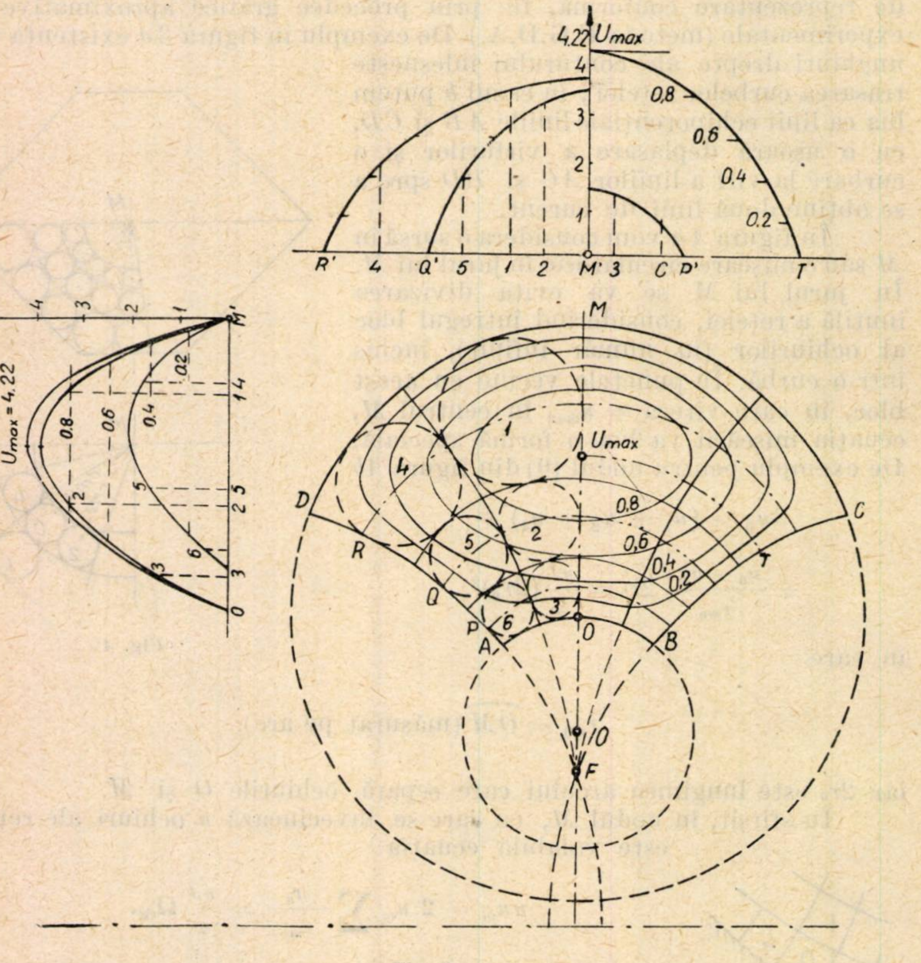

4,22
U_{max}
4
3
2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
R'
4
Q'
5
1
2
M'
3
C
D'
T'
5
4
3
2
1
M'
$U_{max} = 4,22$
0,8
0,6
0,4
0,2
1
4
2
5
3
6
0
M
U_{max}
D
C
R
T
Q
P
A
O
B
1/0
F

Fig. 6

Dacă reţeaua este formată din drepte, cum se aplică totdeauna în metoda relaxării, iar conturul este curb, la nodurile de lîngă contur ecuaţiile cer un calcul şi măsurători speciale preliminare, căci forma generală a acestor ecuaţii este

$$\frac{2u_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{2\,u_C}{\eta(1+\eta)} + \frac{2\,u_3}{1+\xi} + \frac{2\,u_4}{1+\eta} - \left(\frac{2}{\xi} + \frac{2}{\eta}\right) u_0 = -\,h^2 U(0).$$

Aşadar lucrul suplimentar necesitat de trasarea reţelei curbilinii este compensat în parte, prin simplificarea calculelor numerice la nodurile de lîngă contur.

Exemple.

a. *Patrulater curbiliniu din reţeaua Appolonius* (fig. 6)

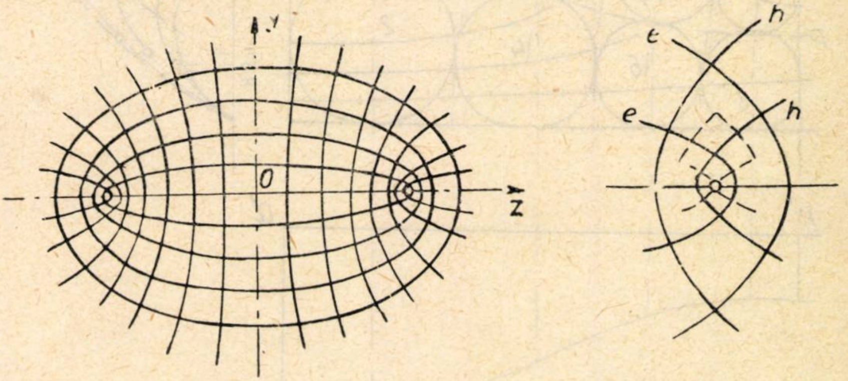
Secţiunea udată a fost împărţită în 12 patrate curbilinii din care 6 distincte, ducînd la sistemul de ecuaţii, în care $C = \frac{gJ}{\nu}$

$$\begin{aligned} &4u_1 - u_2 - u_4 = 9{,}00\, C, && 6u_4 - u_1 - u_5 = 6{,}25\, C,\\ &3u_2 - u_1 - u_3 - u_5 = 2{,}89\, C, && 5u_5 - u_2 - u_4 - u_6 = 2{,}56\, C,\\ &4u_4 - u_2 - u_6 = 1{,}21\, C, && 6u_6 - u_3 - u_5 = 1{,}06\, C. \end{aligned}$$

Membrii ai doilea din acest sistem s-au obţinut după măsurarea diametrelor cercurilor înscrise în ochiurile reţelei şi care au fost găsite $\varnothing_1 = 3$ cm ; $\varnothing_2 = 1{,}7$; $\varnothing_3 = 1{,}1$; $\varnothing_4 = 2{,}5$; $\varnothing_5 = 1{,}6$; $\varnothing_6 = 1{,}03$.

S-au găsit soluţiile $u_1 = 3{,}52\, C$; $u_2 = 3{,}26\, C$; $u_3 = 1{,}28\, C$; $u_4 = 1{,}91 C$; $u_5 = 1{,}67\, C$; $u_6 = 0{,}67\, C$.

Pentru că reţeaua este prea rară, mai ales spre centru, se poate obţine o precizie mai mare construind diagramele vitezelor în profile avînd ca baze liniile φ şi ψ desfăşurate. S-au obţinut astfel, prin calcul grafic, viteza maximă $u_{\max} = 4{,}22\, C$ şi puncte pe 4 izotahe intermediare, care apoi au fost trasate în planul figurii. Viteza medie s-a calculat cu formula



a) b)

Fig. 7

$$\bar{u} = 2 \sum_1^6 u_i\, \Omega_i / 2 \sum_1^6 \Omega_i$$

găsindu-se

$$\bar{u} = 11{,}892\, C/45{,}94 = 2{,}58\, C = 0{,}61\, u_{\max}.$$

b. *Jumătate de elipsă, sfert de elipsă* (fig. 7)

În acest caz folosim rețeaua cunoscută de elipse și iperbole ortogonale homofocale, axele elipsei fiind curbe degenerate din aceste familii de conice. Rețeaua devine prea densă în jurul focarului și putem grupa aici 4 patrate într-un bloc, avînd forma unui triunghi curbiliniu cu trei unghiuri drepte, care poate fi considerat ca un patrat degenerat (fig. 7 *b*). Nu vom face aici și calculul vitezelor.

În ceea ce privește elipsa întreagă, există o soluție exactă de mult timp cunoscută.

c. *Secțiunea cuprinsă între o dreaptă și o sinusoidă de lungimi infinite* (fig. 8)

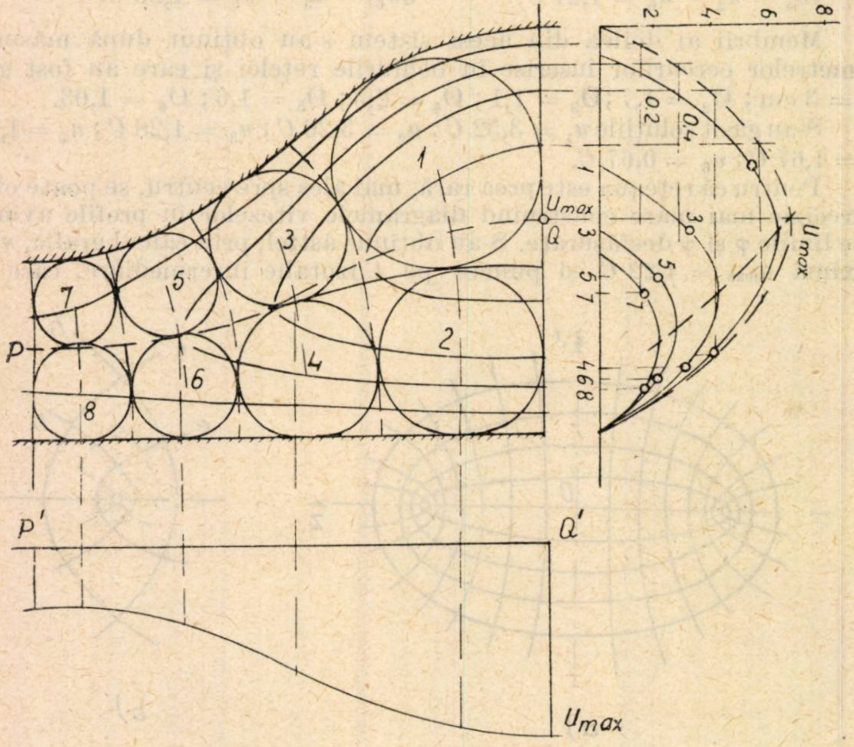


Fig. 8

Deși s-ar putea găsi și prin calcul exact curbele ortogonale ale spectrului figurii, putem prodceda pe cale grafică.

În figura 8 se arată rețeaua curbilinie din 8 patrate, diametrele cercurilor înscrise fiind :

$\varnothing_1 = 3{,}76$ cm ; $\varnothing_2 = 2{,}90$; $\varnothing_3 = 2{,}35$; $\varnothing_4 = 2{,}42$; $\varnothing_5 = 1{,}72$; $\varnothing_6 = 1{,}87$; $\varnothing_7 = 1{,}50$; $\varnothing_8 = 1{,}66$ cm.

Ecuaţiile care dau vitezele la noduri (în centrele cercurilor) sînt :

$$4u_1 - u_2 - u_3 = 14{,}13\, C, \qquad 5u_5 - u_3 - u_6 - u_7 = 2{,}95\, C,$$
$$5u_2 - u_1 - u_4 = 8{,}41\, C, \qquad 5u_6 - u_4 - u_5 - u_8 = 3{,}50\, C,$$
$$5u_3 - u_1 - u_4 - u_5 = 5{,}52\, C, \qquad 4u_7 - u_5 - 4_8 = 2{,}25\, C,$$
$$5u_4 - u_2 - u_3 - u_6 = 5{,}86\, C, \qquad 4u_8 - u_7 - u_6 = 2{,}76\, C.$$

Soluţiile sistemului, obţinute printr-o metodă de relaxare sînt : $u_1 = 5{,}41\, C$, $u_2 = 4{,}22\, C$, $u_3 = 3{,}18\, C$, $u_4 = 3{,}05\, C$, $u_5 = 1{,}92\, C$, $u_6 = 2{,}00\, C$, $u_7 = 1{,}43\, C$, $u_8 = 1{,}55$, $C = \frac{gJ}{\nu}$.

După construirea profilului vitezelor de-a lungul suprafeţelor φ şi ψ desfăşurate s-au obţinut punctele de viteze egale cu echidistanţa 0,2 $u_{\max}$, iar $u_{\max} = 6{,}80$. Au fost trasate izotahele pentru o semiondulaţie, admiţînd că secţiunea udată se întinde la infinit, fără pereţi transversali ; $u_{\text{mediu}} = 335{,}2\, C/90{,}8 = 3{,}68\, C, = 0{,}54\, u_{\max}$, O valoare mai exactă s-ar obţine prin planimetrarea fîşiilor cuprinse între curbele izotahe.

d. *Probleme diverse.* Prin metoda tuburilor se rezolvă uşor şi probleme de mişcări a mai multor lichide imiscibile, în genul problemei tratate prin metode mai exacte, însă dificile, în lucrarea [16]. Fie de exemplu două straturi paralele de grosimi egale de lichide de viscozităţi dinamice, cinematice şi greutăţi specifice μ_1, ν_1, γ_1 respectiv μ_2, ν_2, γ_2. Admitem în fiecare strat cîte 4 pături mai subţiri de grosimi egale h. Scriem ecuaţiile de mişcare a acestor pături, punînd condiţia în ecuaţiile straturilor (4) şi (5)) ca la contactul între lichide să fie viteza u' şi eforturile τ' egale. Vitezele se consideră în centrele stratelor

$$3u_1 - u_2 = C_1 = \frac{gJ}{\nu_1} h^2, \qquad 3u_5 - u_6 - 2u' = C_2 = \frac{gJ}{\nu_2} h^2,$$
$$2u_2 - u_1 - u_3 = C_1, \qquad 2u_6 - u_5 - u_7 = C_2,$$
$$2u_3 - u_2 - u_4 = C_1, \qquad 2u_7 - u_8 - u_6 = C_2,$$
$$3u_4 - u_3 - 2u' = C_1, \qquad u_8 - u_7 = C.$$

Condiţia de egalitate a eforturilor τ' se scrie

$$\tau' = \mu_1 \frac{u' - u_4}{\frac{h}{2}} = \mu_2 \frac{u_5 - u'}{\frac{h}{2}}, \qquad u' = \frac{u_u + m u_5}{1 + m},$$

în care

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{\gamma_2\, \nu_2}{\gamma_1\, \nu_1}.$$

Ecuaţiile a 4-a şi a 5-a din sistemul precedent s-au obţinut din

$$\mu_1 \frac{u_4 - u_3}{h} + \mu_2 \frac{u_4 - u'}{\frac{h}{2}} = \gamma_1 Jh,$$

$$\mu_2 \frac{u_5 - u_6}{h} + \mu_2 \frac{u_5 - u'}{\frac{h}{2}} = \gamma_2 Jh.$$

Dacă lichidul inferior este apă avînd $\gamma_1 = 1\,000$ kg/m^3, $\nu_1 = 1{,}15 \times 10^{-6}$n^2/s la $t = 15$°C şi lichidul inferior benzină avînd la aceeaşi temperatură, $\gamma_1 = 740$ kg/m^3, $\nu_2 = 0{,}76 \times 10^{-6}$m^2/s se găseşte

$$\begin{aligned}
u_1 &= 2\left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) C_1, & u_5 &= u' + 2\,C_2, & u_1/C_1 &= 3{,}48, & u_5/C_1 &= 22{,}68,\\
u_2 &= \left(5 + 6\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) C_1, & u_6 &= u' + 5\,C_2, & u_2/C_1 &= 9{,}44, & u_6/C_1 &= 27{,}40,\\
u_3 &= \left(7 + 10\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) C_1, & u_7 &= u' + 7\,C_2, & u_3/C_1 &= 18{,}35, & u_7/C_1 &= 30{,}42,\\
u' &= \left(8 + 16\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right) C_1, & u_8 &= u' + 8\,C_2, & u'/C_1 &= 19{,}83, & u_8/C_1 &= 31{,}95.
\end{aligned}$$

În această problemă s-a găsit mai avantajos a se rezolva sistemul printr-un calcul exact (substituţie).

e. *Triunghiu oarecare* (fig. 9)

În acest exemplu împărţirea suprafeţei în patrate curbilinii nu s-a făcut plecînd de la o reţea ajutătoare a unui spectru hidrodinamic, ci folosind următoarea construcţie pur geometrică. Ducem bisectoarele interioare şi podarele centrului cercului înscris *I*. Construim în fiecare unghi cercuri tritangente din ce în ce mai mici către vîrf. Liniile ortogonale sînt formate pe de o parte din laturi, din bisectoare şi pe de altă parte din trei familii de cercuri concentrice avînd vîrfurile triunghiului ca centre. Dacă dorim o reţea mai deasă, patratele curbilinii mai mari pot fi împărţite în cîte patru. La vîrfuri rămîne cîte un bloc format dintr-o infinitate de mici patrate aparţinînd reţelei. Blocul are forma unui triunghi, pe două laturi cu viteze nule, a treia latură are contingenţă cu două ochiuri de calcul şi ecuaţia sa este foarte simplă. Reţeaua, odată pregătită se scriu ecuaţiile corespunzînd nodurilor şi vitezele se calculează cu o metodă de relaxare.

Observaţie

La rezolvarea ecuaţiilor ce dau vitezele, prin metoda relaxării, se poate micşora numărul de reveniri aşa cum se arată mai departe. Pentru a da un exemplu simplu, vom considera o secţie patrată împărţită în 25

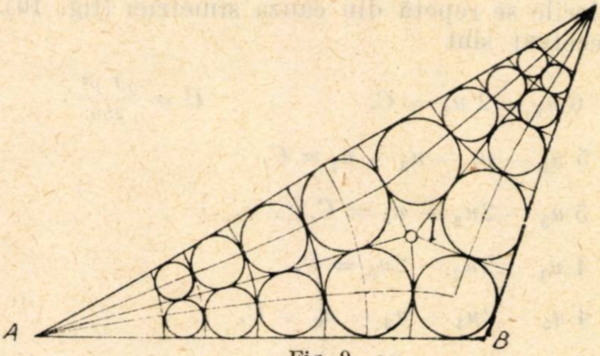

C
1
A
B

Fig. 9

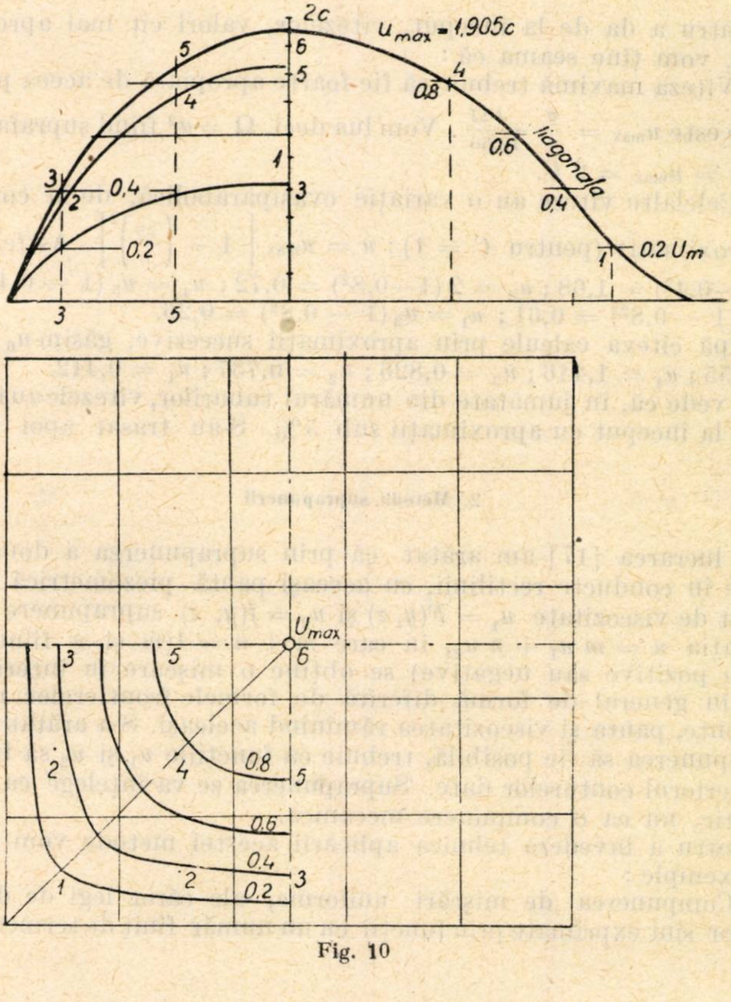

2c
u_max = 1.905c
5
6
5
4
4
0.8
0.6
diagonala
1
3
3
0.4
2
0.4
0.2
1
0.2 U_m
3
5
U_max
6
3
5
2
4
0.8
5
0.6
0.4
2
3
1
0.2

Fig. 10

ochiuri pătrate, din care numai în 6 din ele vitezele iau valori distincte; în celelalte, valorile se repetă din cauza simetriei (fig. 10). Ecuațiile de rezolvat sînt

$$6\,u_1 - 2\,u_2 = C, \qquad C = \frac{gJ\,a^2}{25\nu}.$$

$$5\,u_2 - u_1 - u_3 - u_4 = C,$$

$$5\,u_3 - 2u_2 - u_5 = C,$$

$$4\,u_4 - 2u_2 - 2u_5 = C,$$

$$4\,u_5 - 2u_4 - u_3 - u_6 = C,$$

$$4\,u_6 - 4u_5 = C.$$

Pentru a da de la început, vitezelor, valori cît mai apropiate de realitate, vom ține seama că:

a) Viteza maximă trebuie să fie foarte apropiată de aceea pentru un cerc care este $u_{\max} = \frac{g}{\nu}\,\frac{J\,\Omega}{12{,}56}$. Vom lua deci, $\Omega = a^2$ fiind suprafața patratului, $u_6 = u_{\max} = 2\,C$.

b) Celelalte viteze au o variație cvasiparabolică, de la contur spre $u_{\max}$, aproximativ (pentru $C = 1$) : $u = u_{\max}\left[1 - \left(\frac{2y}{a}\right)^2\right]$. Astfel, găsim : $u_5 = 2\,(1 - 0{,}4^2) = 1{,}68$; $u_3 = 2\,(1 - 0{,}8^2) = 0{,}72$; $u_4 = u_5\,(1 - 0{,}4^2) = 1{,}41$; $u_2 = u_5\,(1 - 0{,}8^2) = 0{,}61$; $u_1 = u_3\,(1 - 0{,}8^2) = 0{,}26$.

După cîteva calcule prin aproximații succesive, găsim $u_6 = 1{,}905$; $u_5 = 1{,}655$; $u_4 = 1{,}446$; $u_3 = 0{,}826$; $u_2 = 0{,}737$; $u_1 = 0{,}412$.

Se vede că, în jumătate din numărul tuburilor, vitezele au fost apreciate de la început cu aproximații sub 5%. S-au trasat apoi izotahele.

2. **Metoda suprapunerii**

În lucrarea [17] am arătat că prin suprapunerea a două mișcări uniforme în conducte rectilinii, cu aceeași pantă piezometrică și același coeficient de viscozitate $u_1 = F(y, z)$ și $u_2 = f(y, z)$ suprapunere definită prin relația $u = m\,u_1 + n\,u_2$, în care $m + n = 1$(m și n fiind numere arbitrare pozitive sau negative) se obține o mișcare în interiorul unui contur, în general de formă diferită de formele frontierelor mișcărilor componente, panta și viscozitatea rămînînd aceleași. S-a arătat că pentru ca suprapunerea să fie posibilă, trebuie ca funcțiile u_1 și u_2 să fie extinse și în exteriorul conturelor date. Suprapunerea se va înțelege ca procedeu matematic, nu ca o compunere mecanică.

Pentru a învedera tehnica aplicării acestei metode vom considera cîteva exemple :

a) Compunerea de mișcări uniforme, ale căror legi de distribuție a vitezelor sînt exprimate prin funcții cu un număr finit de termeni. Pentru ilustrarea acestor cazuri să considerăm mișcarea cu profilul triunghiular, exprimată prin distribuția de viteze, cunoscută

$$u_1 = \frac{gJ}{4\nu}\,\frac{b-y}{b}\left(\frac{y^2}{3} - z^2 + \frac{4}{3}\,by + \frac{4\,b^2}{3}\right)$$

și mișcarea cu secțiunea udată, eliptică, avînd distribuția de viteze

$$u_2 = \frac{gJ}{2\nu}\left(1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)\frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Să operăm compunerea $u = \frac{u_1+u_2}{2}$, în cazul particular $a = 2b$ (fig. 11).

Se găsește

$$u = \frac{gJ}{4\nu}\left[\frac{b-y}{2b}\left(4\frac{b^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{4}{3}\,by - z^2\right) + \frac{4}{5}\,b^2\left(1 - \frac{y^2}{4b^2} - \frac{z^2}{b^2}\right)\right].$$

Sau, notînd $y/b = \eta$, $z/b = \zeta$

$$u = \frac{gJ\,b^2}{4\nu}\left[-\frac{\eta^3}{6} + \frac{\eta\zeta^2}{2} - \left(\frac{7}{10}\,\eta^2 + \frac{13}{10}\,\zeta^2\right) + \frac{22}{15}\right] = c.\,f\,(\eta, \zeta).$$

Ecuația noului contur este $f\,(\eta, \zeta) = 0$, care se determină prin puncte. Iată coordonatele cîtorva puncte caracteristice :

η	-1	0	$1{,}27$	-2
ζ	$\pm 0{,}721$	$\pm 1{,}065$	0	0

Conturul rezultat astfel are forma unui ovoid care trece prin intersecțiile elipsei cu laturile triunghiului.

Viteza maximă are loc în centrul de coordonate și este $u_{\max} = \frac{11}{30}\,\frac{gJb^2}{\nu} = \frac{22\,C}{15}$.

Izotaha $u_K = K.\ u_{\max}$ are ca ecuație

$$u_K = KCf\,(\eta, \zeta) = K \cdot \frac{22}{15}\,C \quad \text{sau} \quad f(\eta, \zeta) = \frac{22\,K}{15}.$$

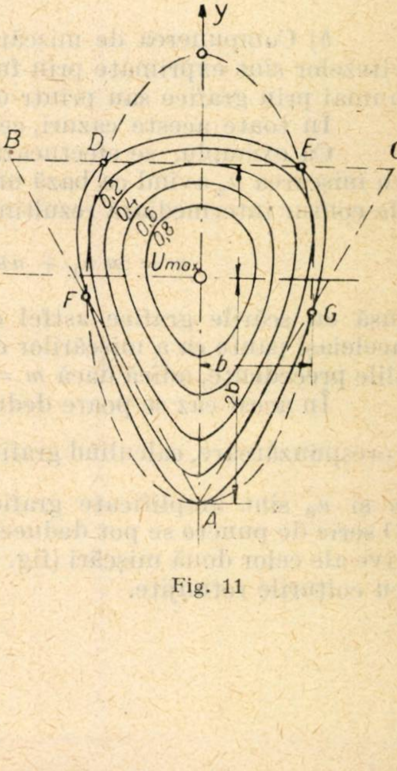


Fig. 11

Obținem pentru izotahele cu echidistanțe 0,2 $u_{\max}$, punctele următoare :

Izotaha					
0,2	η	−1,77	−1	0	1,15
	ζ	0	±0,595	±0,95	0
0,4	η	−1,42	−1	0	1,01
	ζ	0	±0,438	±0,827	0
0,6	η	−1,05	−1	0	+0,85
	ζ	0	±0,158	±0,672	0
0,8	η	−0,69	0	0,65	
	ζ	0	±0,475	0	

b) Compunerea de mișcări uniforme, ale căror legi de distribuire a vitezelor sînt exprimate prin funcții cu un număr infinit de termeni sau numai prin grafice sau printr-un ansamblu de valori numerice.

În toate aceste cazuri, cel mai comod procedeu este calculul grafic.

Ca exemplu, se efectuează suprapunerea mișcării u_1 cu baza pătrat cu mișcarea u_2 avînd ca bază un cerc înscris în patrat. Se caută o formă de contur intermediară rezultînd dintr-o compunere

$$u = m\,u_1 + nu_2, \qquad (m + n = 1),$$

însă cu scările grafice astfel ca $mu_{1\max} = nu_{\max 2}$. Mișcarea corespunde aceleiași pante ca a mișcărilor componente dacă m și n îndeplinesc condițiile precedente, adică dacă $m = 0{,}45 \quad n = 0{,}55$.

În acest caz se poate deduce noul contur și curbele de egală viteză corespunzătoare, calculînd grafic, într-o serie de puncte $u = \frac{u_1 + u_2}{2}$ deoarece u și u_2 sînt amplificate grafic ca și vitezele maxime, la scările m și n. O serie de puncte se pot deduce direct din suprapunerea izotahelor respective ale celor două mișcări (fig. 12). Rezultă un patrat cu laturi curbilinii cu colțurile rotunjite.

Diverse forme intermediare, mai apropiate de cerc sau de patrat se pot obține cu compunerea

$$u = m\,u_1 + n\,u_2, \qquad (m + n = 1).$$

Analog se pot compune mișcări cu baza de dreptunghi cu aceea cu bază de elipsă, obținînd forme intermediare cu colțurile rotunjite.

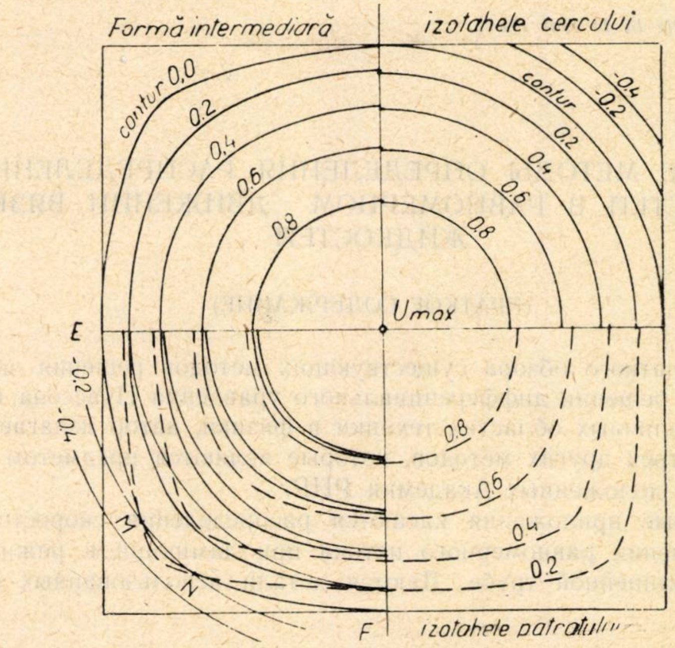


Fig. 12

În toate acestea, folosirea calculului exact pentru mișcarea cu bază de dreptunghi sau patrat este dificilă și laborioasă, urmînd a se efectua numeroase sume de serii. Sînt indicate de aceea, metode geometrice, luînd ca bază izotahele calculate în prealabil pentru aceste figuri prin orice alte metode.

3. Trasarea curbelor de viteză egală

În lucrarea [18] am arătat că izotahele se bucură de unele proprietăți interesante, care ne permit o mai exactă și precisă trasare a lor. Mai mult, folosind și curbele ce taie ortogonal izotahele, curbe pe care le-am denumit ortotahe, precum și ecuațiile tuburilor de curent care sînt simplificate în cazul acestei rețele speciale de dreptunghiuri curbilinii, se pot calcula puncte ale izotahelor pe anumite linii ortogonale, obținînd o primă evaluare grafică a cîmpului vitezelor. Rețeaua găsită nu îndeplinește dintr-o dată condițiile și urmează a fi corectată.

În cazul cînd avem vitezele calculate în puncte prin metoda tuburilor sau a suprapunerii, izotahele se trasează după ce s-au construit diagramele vitezelor în diferite profile şi intersecţia lor cu liniile paralele 0,8 $u_{\max}$; 0,6 ; 0,4 ; 0,2 $u_{\max}$ sau şi alte linii intermediare. În acest mod se obţine o epură mai exactă decît prin interpolare prin calcule de proporţionalitate. Astfel s-a procedat de exemplu la figurile 6, 8 şi 12.

Primită la redacţie la 11 mai 1957.

НОВЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТЕЙ В РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

После краткого обзора существующих методов решения задач, основанных на решении дифференциального уравнения Пуассона и применяемых в различных областях техники и физики, автор излагает способ применения трех других методов, которые являются предметом сообщений, недавно доложенных Академии РНР.

Выбранные приложения касаются распределения скоростей в поперечном сечении равномерного потока при ламинарном режиме течения в прямолинейной трубе. Даются детали использованных способов расчета.

NOUVELLES MÉTHODES DE DÉTERMINATION DE LA DISTRIBUTION DES VITESSES AU COURS DU MOUVEMENT UNIFORME DES FLUIDES VISQUEUX

(RÉSUMÉ)

Après un bref aperçu des méthodes appliquées actuellement à la solution des problèmes basés sur la solution de l'équation différentielle de Poisson et rencontrés dans divers domaines de la technique et de la physique, l'auteur expose l'application de trois autres méthodes, faisant l'objet des comptes rendus qu'il a récemment présentés à l'Académie de la République Populaire Roumaine.

Les applications choisies concernent la distribution des vitesses dans la section transversale d'un courant uniforme, en régime laminaire, dans une conduite droite. On donne les détails des procédés de calcul employés.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Boussinesq, *Journal Math, pures et appl.*, seria a 2-a, 1871, vol. 16.
2. L. Prandtl, Pysik Zeitschrift,, 1903, vol. 4.
3. A.G. Greenhill, *On the flow of a viscous liquid in a pipe or channel*. Proc. Lond. Math. Soc. 1881, t. XIII, nr. 43.
4. Barrée de Saint Venant, *Mémoire sur la torsion des prismes, avec considérations sur leur flexion, etc.* ; Mém. prés. par divers sav. à l'Académie de France, Sc. Mathém. et Phys., 1885, t. 14.
5. E. Trefftz, *Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt*. Mathem. Annalen, 1920, vol. 82.
6. L.N. G. Filon, *On the resistance to torsion of certain forms of shafting*. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1900, seria A, t. 193.
7. H. Love, *Theory of elasticity*. Cambridge, 1927.
8. C. Kolossof, *Sur la torsion des prismes ayant pour base un triangle rectangle*. C. R. Acad. Sc. Paris, 1924, t. 178, nr. 25.
9. Timoshenko, *Théorie de l'élasticité*. Paris, 1936.
10. Aug. Ghetti, *Distribuzione delle velocità all'interno e sforzi di scorimento al contorno nelle correnti a regime uniforme*. L'Energia elettrica, 1950, nr. 11—12.
11. Caius Iacob, *Asupra unor mișcări lente ale fluidelor vîscoase*. Rev. Univ. ,,C.I. Parhon'' și a politehnicii București, seria Șt. naturii, nr. 3, 1953.
12. I. Șt. Gheorghiță, *Mișcarea staționară a unui fluid vîscos incompresibil într-o mișcare lentă nepermanentă*. Rev. Univ. ,,C.I. Parhon'' și a politehnicii București, seria Șt. naturii, nr. 3, 1953.
13. Cr. Stănescu și L. Dumitrescu, *Mișcarea unidimensională a două fluide vîscoase grele separate printr-o suprafață plană*.
14. V.R. Southwell, *Relaxation methods in theoretical physics*. Oxford, 1946.
15. D. Dumitrescu, V. Ionescu și R. Toth, *Aplicarea metodei rețelelor la studiul fluidelor grele cu suprafața liberă*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3, 1955, p. 339.
16. Cristea Mateescu, Comunicările Acad. R.P.R., t. VII, nr. 10, 1957, p. 863.
17. — Comunicările Acad. R.P.R., t. VII, nr. 8, 1957, p. 697.
18. — Comunicările Acad. R.P.R., t. VII nr. 12, 1957.
19. G. Di Ricco, *Moto uniforme a regime regolare d'una corrente fluida cilindrica a sezione diversa della circolare*. L'Ingegnere, 1949, nr. 2 și 3.

HIDRODINAMICĂ

DESPRE SIMILITUDINEA DINTRE CURENȚII CU NIVEL LIBER ȘI CURENȚII SUB PRESIUNE

DE

M. KAHAN și S. HÎNCU

Studiul construcțiilor hidrotehnice în curenți de aer își găsește justificare, numai în cazul în care fenomenele caracteristice ale scurgerii de pe prototip se reproduc întocmai pe model.

Cercetările efectuate pînă în prezent pe modelele cu aer au arătat că problemele de scurgere plană, sau apropiată de cea plană cu nivel liber — caracteristice scurgerii din albiile de rîuri — se pot studia cu succes în curenți sub presiune.

Asigurînd similitudinea geometrică de contur a celor doi curenți — prototip și model — și păstrînd același regim de curgere, cu toată rezistența suplimentară, ce apare pe model la suprafața inferioară a geamului sau a plexiglasului, se obțin spectre hidrodinamice de scurgere asemenea. Acest fapt arată că elementele geometrice cinematice și dinamice specifice celor doi curenți — prototip și model — sînt legate prin aceleași relații. În lucrarea de față ne propunem să găsim aceste relații care caracterizează similitudinea celor doi curenți.

Se știe că dacă ecuațiile generale hidrodinamice admit soluții unice, atunci condiția necesară și suficientă pentru ca doi curenți să fie similari este ca expresiile matematice ce-i definesc să fie identice : aceleași ecuații diferențiale, aceleași condiții de contur.

Identitatea ecuațiilor diferențiale, scrise în orice puncte omoloage ale celor doi curenți, impune respectarea anumitor rapoarte între elementele ce definesc mișcarea fluidului pe prototip și model. Condiții identice de contur impun ca aceste rapoarte să fie constante în toată masa fluidului. Se obțin astfel cunoscutele criterii de similitudine, respectarea cărora asigură similitudinea prototipului cu model.

Pe modelul cu aer, deși similitudinea geometrică este asigurată, condițiile dinamice de contur (deci și cele cinematice) diferă pe o anumită porțiune de cele existente pe prototip. Acesta este unul și cel mai important aspect ce caracterizează metoda modelării în curenți de aer a scurgerilor hidraulice cu suprafața liberă. Din acest motiv sînt două puncte de plecare în căutarea criteriilor de similitudine și în utilizarea metodei :

a) Se renunță la similitudinea vitezelor pe verticală, respectîndu-se în schimb similitudinea geometrică a modelului (fig. 1).

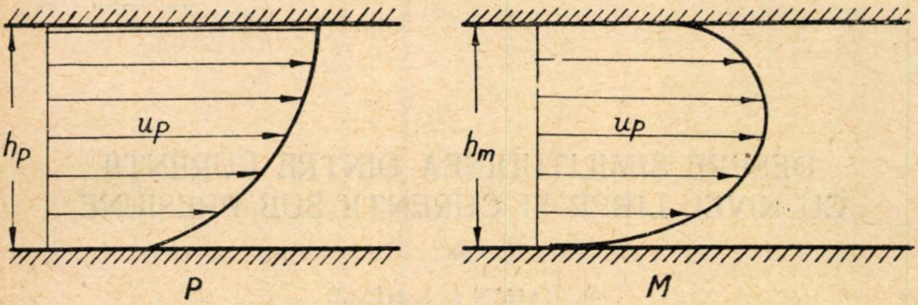


Fig. 1. — Schema de similitudine globală a curentului.

b) Se determină domeniul în care se respectă în limite dorite similitudinea epurei vitezelor pe verticală și se fac abateri de la similitudinea geometrică a modelului supraînălțînd suprafața apei pe model (fig. 2).

Pe baza unei analize intuitive se poate afirma că în cazul *a*) metoda se utilizează cu precădere pentru modelarea albiilor cu fund accidentat, iar în cazul *b*) metoda se utilizează pentru a modela mai fidel schimbările morfologice legate de antrenarea aluviunilor într-o albie relativ puțin accidentată.

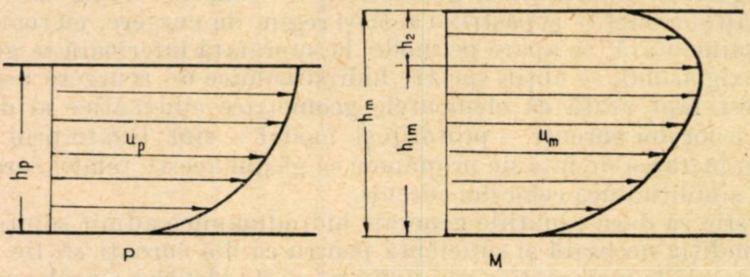


Fig. 2. — Schema de similitudine cinematică a curenților.

În cazul *a*), cei doi curenți se analizează global.

La un regim pătratic de scurgere, atît pe prototip (scurgere cu nivel liber), cît și pe model (scurgere sub presiune) se pot lua în considerație doar două forțe care definesc global cei doi curenți : forța motrice (F_m) și forța de inerție (F_i). Raportate la unitate de masă pe prototip și model cele două forțe au respectiv expresiile

$$F_{mp} = gI, \qquad F_{mm} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = gi,$$

$$F_{ip} = \frac{V^2}{H}, \qquad F_{im} = \frac{v^2}{h},$$

unde

$\frac{dp}{dx}$ — căderea de presiune pe unitate de lungime;
g — accelerația gravitației;
I — panta hidraulică pe prototip;
i — panta piezometrică pe model, determinată în coloana de apă;
H și h — înălțimile medii ale curentului, respectiv pe prototip și model;
V și v — vitezele medii pe secțiune ale celor doi curenți. Făcînd raportul dintre aceste forțe, obținem următorul criteriu de similitudine

$$A = \frac{V^2}{HI} = \frac{v^2}{hi}. \tag{1}$$

Notînd cu:

α_l — scara lungimilor în plan
α_h — scara înălțimilor
α_v — scara vitezelor
α_q — scara debitelor
α_i — scara pantelor
α_ρ — scara maselor specifice
α_τ — scara eforturilor tangențiale
α_λ — scara coeficienților de rezistență

și avînd în vedere relațiile

$$\alpha_q = \alpha_v \, \alpha_h \, \alpha_l; \qquad \alpha_\tau = \alpha_\rho \, \alpha_h \, \alpha_i,$$

se obțin

$$\alpha_v^{2} \, \alpha_h^{-1} \, \alpha_i^{-1} = 1, \tag{1'}$$

sau

$$\alpha_q^{2} \, \alpha_l^{-2} \, \alpha_h^{-3} \, \alpha_i^{-1} = 1, \tag{2}$$

$$\alpha_\rho \, \alpha_v^{2} \, \alpha_\tau^{-1} = 1. \tag{3}$$

Folosind relația

$$\alpha_v^{2} = \alpha_\lambda^{-1} \, \alpha_\tau \, \alpha_\rho^{-1}$$

din (3) obținem

$$\alpha_\lambda = 1. \tag{4}$$

Deci pentru respectarea similitudinii dinamice globale este necesar să asigurăm egalitatea coeficienților de rezistență a celor doi curenți

$$\lambda_m = \lambda_p. \tag{4'}$$

Trebuie subliniat că în cazul similitudinii dinamice globale se admit oarecari abateri de la structura curentului.

Acest fapt poate fi văzut şi direct din formula (4). Într-o lucrare anterioară [3] pentru coeficientul de rezistenţă medie pătratică s-a obţinut expresia : $\lambda_m = \frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{2}$.

De aici rezultă posibilitatea menţinerii aceleiaşi valori λ_m pentru diferiţi λ_1' şi λ_2'. Însă diferiţi λ_1' şi λ_2' influenţează deosebit asupra structurii curentului.

Prezenţa pe modelul cu aer a unei repartiţii de viteze pe verticală de forma din figura 1 duce la introducerea în criteriul de similitudine scris cu viteza medie a unui coeficient de viteză α_E

$$\alpha_E = \frac{h_1 v_1^2 + h_2 v_2^2}{h v^2}. \tag{5}$$

Utilizînd mărimile adimensionale $\alpha = \frac{v_1}{v}$; $\beta = \frac{v_2}{v}$; $\gamma = \frac{h_1}{h}$; $\delta = \frac{h_2}{h}$ şi ţinînd seama de relaţiile stabilite anterior [3] obţinem

$$\alpha_E = \gamma\alpha^2 + \delta\beta^2 = \alpha + \beta - \alpha\beta. \tag{6}$$

În cazul *b*) se caută să se ţină seama de structura curentului în găsirea criteriilor de similitudine.

În condiţiile efectului de frînare a mişcării la suprafaţa geamului, se poate vorbi despre o similitudine exactă între prototip şi model numai pe o porţiune de curent pe modelul cu aer şi anume pe înălţimea h_1 (fig. 2).

Exerienţele [3] au arătat că în problema plană epura de distribuţie a vitezelor în zona definită de h_1 se poate reprezenta prin relaţia dată de Von Karman

$$u_{\max} - u = v_* f\left(\frac{y}{h}\right).$$

Pe prototip epura de distribuţie a vitezelor poate fi reprezentată de aceeaşi relaţie a deficitului de viteză dată de Von Karman. Generalizînd relaţiile obţinute de A. P. Zegjda [8] se poate arăta că similitudinea cinematică între curentul de pe prototip şi curentul din zona definită de h_1 pe model este asigurată dacă

$$\lambda_{1m} = \lambda_p \tag{7}$$

şi

$$f_{1m}\left(\frac{y}{h}\right) = f_p\left(\frac{y}{h}\right) \tag{8}$$

unde λ_{1m} este coeficientul de rezistenţă numai a fundului modelului.

Într-adevăr din relaţia

$$\lambda = \frac{2 v_*^2}{v^2}$$

și relația (7) rezultă

$$\alpha_{v_*} = \alpha_v . \tag{9}$$

Din relația (8) și (9) rezultă

$$\frac{u_{\max\ p} - u_p}{u_{\max_1 m} - u_{sm}} = \frac{v_{*\,p}}{v_{*,m}} = \alpha_v . \tag{10}$$

Avînd în vedere expresia vitezei medii

$$u_{\max} - v = v_* K, \tag{11}$$

unde K este constanta lui Prandtl obținem

$$\alpha_{u_1} = \frac{v_p + v_{*\,p} A - v_{*\,p} f\left(\frac{y}{h}\right)}{v_{1m} + v_{*1m} A - v_{*1m} f\left(\frac{y}{h}\right)} = \alpha_{v_1} \frac{1 + \frac{v_{*p}}{v_p}\left[A - f\left(\frac{y}{h}\right)\right]}{1 + \frac{v_*{}'m}{v_{1m}}\left[A - f\left(\frac{y}{h}\right)\right]} .$$

Ținînd cont de (9) rezultă ceea ce trebuie să arătăm

$$\alpha_{u_1} = \alpha_{v_1} . \tag{12}$$

Prin urmare, dacă pentru prototip și model repartiția vitezelor pe verticală poate fi reprezentată prin relația deficitului de viteză a lui Von Karman cu aceeași funcție $f\left(\frac{y}{h}\right)$, atunci în dimensiunile date se poate asigura similitudinea cinematică ; în orice puncte omoloage raportul vitezelor este o mărime constantă egală cu raportul vitezelor medii pe cele două domenii.

Determinarea criteriului de similitudine se poate face fie pornind de la ecuațiile diferențiale și condițiile de contur ale mișcării din domeniile similare de pe prototip și model, fie pornind de la expresia energiei de mișcare pentru prototip și model. Vom urma prima cale, ca fiind cea mai obișnuită în mecanica fluidelor.

Să scriem ecuațiile diferențiale pentru prototip în forma dată de Reynolds

$$\rho_p \frac{d\,(\overline{u'\,v'})_p}{dy_p} + f_p = \mu_p \frac{d^2 \overline{u}_p}{dy_p^2} , \tag{13}$$

unde

$(\overline{u'\,v'})_p$ — valoarea mediată a produsului vitezelor pulsatorii u' și v'.

$f_p = -\rho g i$ — forța motrice pe prototip raportată la unitatea de volum,

i — panta hidraulică,

μ_p — coeficientul de viscozitate,

$\overline{u}_p$ — viteza punctuală mediată.

Ecuația (13) împreună cu condițiile de contur determină mişcarea fluidului pe prototip. Desigur se presupune că există o dependență definită

$$\overline{u'v'} = f\,(\bar{u}, y).$$

Pentru zona h_1 pe model se poate scrie de asemenea ecuația

$$\rho_m \frac{d\,(\overline{u'v'})_m}{dy_m} + f_m = \mu_m \frac{d^2\bar{u}_m}{dy^2_m}, \tag{14}$$

$$f_m = \frac{d\bar{p}}{dx}.$$

Condițiile de contur ale celor două domenii similare sînt aceleași

$$\frac{d\,(\overline{u'v'})}{dy} = 0\,; \frac{d\bar{u}}{dy} = 0 \text{ pentru } y = h_1 \; (u = u_{\max}), \tag{15}$$

$$\overline{u'v'} = 0\,;\; u = 0 \text{ pentru } y = 0.$$

Ca și în cazul precedent se notează parametrii de reducere la scară cu

$$\alpha_f,\ \alpha_\rho\,,\ \alpha_h,\ \alpha_u,\ \alpha_v\ \alpha_\mu\,,\ \alpha_\lambda\,,\ \alpha_{\overline{u'v'}}\,;$$

$$\alpha_f = \frac{f_p}{f_m} = -\frac{\rho g_i}{\frac{dp}{dx}},$$

$$\alpha_{\overline{u'v'}} = \frac{(\overline{u'v'})_p}{(\overline{u'v'})_m}\,;\quad \alpha_h = \frac{h_p}{h_{1m}}.$$

Ecuația (13) devine

$$\sigma_\rho \frac{\sigma_{\overline{u'v'}}}{\alpha_h} \rho_m \frac{d\,(\overline{u'v'})_m}{dy_m} + \alpha_f\, f_m = \alpha_\mu \frac{\sigma_u}{\alpha^2{}_\lambda} \mu_m \frac{d^2\bar{u}_m}{dy^2{}_m}. \tag{13'}$$

Simplificînd cu $\frac{\alpha^2{}_v}{\alpha_h}\alpha_\rho$ și ținînd seama că $\alpha_u = \alpha_v$, obținem

$$\frac{\alpha_{\overline{u'v'}}}{\alpha^2{}_v} \rho_m \frac{d\,(\overline{u'v'})_m}{dy_m} + \frac{\sigma_f\,\sigma_u}{\sigma_\rho\ \alpha^2{}_v} f_m = \frac{\sigma_\mu}{\sigma_\rho\,\alpha_v\,\alpha_h} \mu_m \frac{d^2\bar{u}}{dy^2}. \tag{13''}$$

Identitatea ecuațiilor (14) și (13″) duce la următoarele criterii de similitudine :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\alpha_{\overline{u'v'}}}{\alpha^2{}_v} = 1 \quad \text{sau } \frac{(\overline{u'v'})_p}{v^2{}_p} = \frac{(\overline{u'v'})_m}{u^2{}_m} = \mathcal{K}_a,\\
&\frac{\alpha_f\,\alpha_h}{\sigma_\rho\ \alpha^2{}_v} = 1 \quad \text{sau } \frac{f_p\,h_p}{\rho_p\,v^2{}_p} = \frac{f_m\,h_{1m}}{\rho_m\,v^2{}_{1m}} = \mathcal{A}_o,\\
&\frac{\sigma_\rho\,\alpha_v\,\alpha_h}{\alpha_\mu} = 1 \quad \text{sau } \frac{\rho_p\,v_p\,h_p}{\mu_p} \quad \frac{\rho_m\,v_{1m}\,h_m}{\mu_m} = \mathfrak{R}_e,
\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$\mathcal{K}_\alpha$ este o constantă ce reprezintă cunoscutul criteriu al lui Karman pentru mișcările în regim turbulent.

În cazul existenței unei dependențe definite $\overline{u'v'} = f(\overline{u}, y)$ (și această dependență există întotdeauna) criteriul lui Karman se reduce la o identitate

$$\alpha_v^2 = \alpha_u^2.$$

De exemplu, dacă se consideră dependența dată de Prandtl

$$\overline{u'v'} = l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2,$$

$$\alpha_{\overline{u'v'}} = \alpha_{u^2} = \alpha_{v^2}.$$

Avem de-a face aici cu un raport de mărimi cinematice, consecință a criteriilor de bază de similitudine cinematică a curenților. Astfel de rapoarte sînt analoage rapoartelor de natură geometrică întîlnite la conturile geometrice asemenea compuse din mai multe elemente. Dacă conturul geometric al prototipului L_p este compus din elementele $l_{p\,1}, l_{p2}, l_{p3}, \ldots, l_{pn}$, iar conturul geometric al modelului L_m este compus respectiv din elementele $l_{m1}, l_{m2}, l_{m3}, l_{m4}, \ldots l_{mn}$, similitudinea geometrică totală, în toate detaliile, înseamnă

$$\alpha_l = \frac{l_{p1}}{l_{m_1}} = \frac{l_{p2}}{l_{m2}} = \cdots = \frac{l_{pn}}{l_{mn}} = \frac{l_p}{l_m}$$

unde l_p și l_m sînt două mărimi caracteristice.

În mod analog va trebui să caracterizăm o similitudine cinematică totală, în toate detaliile

$$\alpha_v = \frac{u_{pi}}{u_{mi}} = \frac{v_p}{v_m},$$

unde u_{pi} și u_{mi} sînt două elemente omoloage ale conturului cinematic de pe prototip și model, v_p și v_m două viteze caracteristice ale celor doi curenți similari.

Operînd atît cu α_l, cît și cu α_v, similitudinea curenților va trebui să o înțelegem în toate detaliile, atît geometric cît și cinematic. Concepînd în sensul acesta similitudinea, criteriul lui Karman nu intră în rîndul criteriilor caracteristice de similitudine a curenților

$$\alpha_{\overline{u'v'}} \equiv \alpha_v^2$$

$\mathcal{A}_0 =$ const. sau

$$\alpha_v = \alpha_{h_1}^{1/2} \alpha_\rho^{1/2} \alpha_\rho^{-1/2},$$

$$\alpha_q = \alpha_{h_1}^{3/2} \alpha_l \alpha_f^{1/2} \alpha_\rho^{-1/2} \qquad (17)$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

este analog criteriului (1) dedus din similitudinea globală a curenților. De astă dată debitul q, viteza medie v și înălțimea h se referă numai la zona inferioară pe model definită de h_1.

$\mathfrak{R}e$ este constanta ce reprezintă criteriul lui Reynolds.

Dacă avem în vedere notațiile de mai sus

$$\alpha = \frac{v_1}{v_m}\,; \quad \beta = \frac{v_2}{v_m}\,; \quad \gamma = \frac{h_1}{h}\,; \quad \delta = \frac{h_2}{h},$$

criteriile de similitudine capătă forma

$$\mathcal{A}o = \text{const.}$$

$$\alpha_v = \alpha_f^{1/2}\,\alpha_\rho^{-1/2}\,\alpha_h^{1/2}\,\alpha^{-1}\,\gamma^{1/2},$$

$$\mathfrak{R}e = \text{const.}$$

$$\alpha_v = \alpha_\mu\,\alpha_\rho^{-1}\,\alpha_h^{-1}\,\alpha^{-1}\,\gamma^{-1}.$$

Subliniem însă că valorile α, β, γ, δ date anterior corespund numai regimului turbulent pătratic de curgere, cînd criteriul $\mathfrak{R}e$ nu influențează scurgerea. Din existența numai a două criterii de bază de similitudine, rezultă dependența funcțională

$$\mathcal{A}o = f\,(\mathfrak{R}e), \tag{18}$$

$$\text{sau} \quad \frac{f_p\,h_p}{\rho_p v^2_p} = \frac{f_m h_1}{\rho_m v^2_m} = f\,(\mathfrak{R}e). \tag{19}$$

Cum prin definiție (L. G. Loițianski [4]) raportul $\frac{f_h}{\rho v^2}$ reprezintă coeficientul de rezistență λ pentru zona în care viteza medie caracteristică este v, din (19) rezultă următoarea concluzie importantă:

Dacă pe model pentru zona definită de h_1 se asigură același coeficient de rezistență ca și pe prototip $\lambda_{1m} = \lambda_p$ atunci $\mathfrak{R}e_{1m} = \mathfrak{R}e_p$ — similitudinea curenților este asigurată.

Această concluzie a fost obținută fără să se facă vreo ipoteză suplimentară cu privire la legea de distribuție a vitezelor, spre deosebire de relația (12) care exprimă același lucru și care a fost obținută în ipoteza admiterii formulei (19) a lui Karman. Această concluzie poate fi de asemenea obținută și din criteriul lui Karman. Dacă se consideră relația

$$\rho\overline{u'v'} = \tau = \tau_0\left(1 - \frac{y}{h}\right) = \lambda_\rho\,\frac{v^2}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right), \tag{20}$$

atunci

$$\mathcal{K}a = \frac{\overline{u'v'}}{v^2} = \frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{y}{h}\right), \tag{21}$$

și

$$\frac{\alpha_{\overline{u'v'}}}{\alpha^{2}_{v_1}} = \alpha_{\lambda_1} = \frac{\lambda_p}{\lambda_{1m}}. \tag{22}$$

Condiția de similitudine cinematică totală în toate detaliile impune

$$\alpha_{\lambda_1} = 1 \qquad \text{sau} \qquad \lambda_p = \lambda_{1m}.$$

Relația (19) a fost dedusă în condițiile existenței unei similitudini geometrice în toate detaliile, deci și în condițiile existenței unei similitudini a rugozităților. Notînd cu Δ rugozitatea absolută, relația (19) poate fi scrisă

$$\lambda = f\left(\mathcal{R}_e, \frac{\Delta}{h}\right). \tag{23}$$

Cum în majoritatea cazurilor mișcarea fluidelor pe prototip este turbulent pătratică, în ecuația (13) se poate neglija termenul $\mu_p = \frac{d^2\bar{u}_p}{dy^2_p}$ relația (23) devine

$$\lambda = f\left(\frac{\Delta}{h}\right). \tag{23'}$$

În aceste cazuri este deajuns să modelăm rugozitatea relativă a fundului modelului, pentru ca automat să avem egalitățile

$$\alpha_{\lambda_1} = 1,$$

$$\alpha_{v1} = \alpha_{h_1}^{1/2}\ \alpha_f^{1/2}\ \alpha_\rho^{-1/2}.$$

În modul în care s-a pus problema s-a neglijat complet pe model influența zonei superioare definite de h_2 asupra zonei inferioare definite de h_1. Experiențele sistematice efectuate de A. G. Averkiev precum și experiențele noastre pe diferite modele expuse în lucrări anterioare [3], au arătat că alura în plan a liniilor de curent nu este modificată de rezistențele suplimentare introduse de geam sau plexiglas. În ceea ce privește structura curenților, materializarea suprafeței libere cu ajutorul geamului sau plexiglasului aduce numai unele modificări în repartiția vitezei pe verticală.

Pentru a înțelege influența geamului sau plexiglasului asupra spectrului general hidrodinamic al curentului să ne imaginăm următoarea situație :

Fluidul pe prototip, înainte de a ajunge în regiunea de albie ce ne interesează curge în straturi paralele în condițiile unei mișcări plane. Elementele spațiale, ale albiei, care vor determina noul spectru hidrodinamic al scurgerii, întîlnesc straturile de lichid cu caracteristici hidrodinamice diferite pe verticală. Influența elementelor spațiale asupra straturilor de lichid paralele va fi funcție de caracteristicile hidrodinamice ale straturilor.

Pe modelul cu aer caracteristicile hidrodinamice ale straturilor diferă pe verticală de cele pe prototip. Elementele spaţiale geometrice la fel dispuse ca şi pe prototip, vor influenţa în altfel scurgerea paralelă a straturilor de aer.

Prin comparaţie de măsurători între prototip şi model s-a constatat că această diferenţă de spectrul hidrodinamic, care există datorită rezistenţelor suplimentare introduse de geam, apare foarte greu şi cu o intensitate redusă, deşi abaterea de la distribuţia vitezelor pe verticală pe model faţă de prototip există. Aceasta se explică prin faptul că în apropierea geamului curentul nu întîlneşte elemente geometric spaţiale, care să modifice simţitor spectrul.

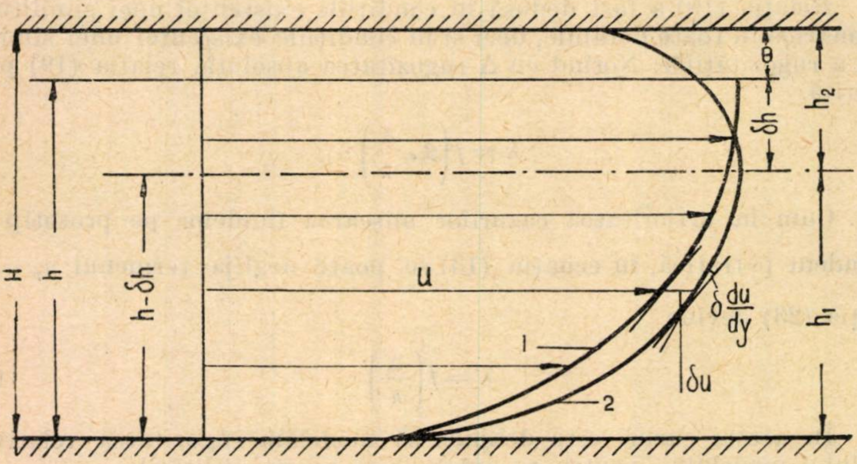


Fig. 3. — Abaterile de la similitudinea cinematică a curenţilor în cazul unei supraînălţări a zonei de modelare.

Acţionînd asupra structurii curentului, asupra lui λ_1 şi λ_2, asupra numărului $\mathfrak{R}_e$ putem să reducem această diferenţă de spectru hidrodinamic la minimum.

Rezultă că în contact cu elementele spaţiale dau un acelaşi spectru hidrodinamic al scurgerii nu numai grupul de straturi de fluid care au aceeaşi viteză ci şi grupul de straturi de fluid care au o viteză întrucîtva diferită. Această proprietate sugerează posibilitatea de a considera zonă de modelare pe modelul cu aer zona $h_1 + \delta h$, unde δh este o supraînălţare, care duce la o abatere $\delta \bar{u}$ a vitezelor pe verticală (fig. 3).

După cum rezultă şi din figura 3, δu este o funcţie continuă de ordonată şi de δh. Considerăm posibil a da o apreciere cantitativă asupra lui δh, $\delta \bar{u}$ şi asupra abaterii de la spectrul hidrodinamic al scurgerii, pornind de la expresia unui funcţional energie, care defineşte mişcarea în condiţiile noastre şi pe care îl vom numi energie de mişcare.

În legătură cu energia de mişcare, în mecanica mediilor disperse, ca şi în mecanica mediilor continue, ecuaţiile diferenţiale ale mişcării sînt în multe probleme înlocuite cu ajutorul unor funcţionali. Aceşti funcționali, de obicei, impun tratarea problemelor respective sub un aspect energetic și ajută la găsirea unor soluții aproximative, în unele cazuri, prin utilizarea metodelor variaționale directe.

În teoria elasticității, teoria plasticității, acești funcționali sînt bine cunoscuți și au un mare rol în rezolvarea problemelor respective (de exemplu teorema unicității soluțiilor ecuațiilor diferențiale de echilibru).

În hidrodinamică acești funcționali au constituit obiectul de studiu al multor cercetători și pot fi întîlniți în lucrările lui C. B. Millikan[5], H. Bateman [1], C. Stanley [7], A. Sommerfeld [6], J. Herivel [2] și alții.

Pentru ecuațiie diferențiale tip (13) se poate utiliza funcționalul energiei

$$E = \int_0^h \left[f\bar{u} - \frac{1}{3}\rho\overline{u'v'}\frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \right] dy. \tag{24}$$

Acest funcțional a fost alcătuit în ipoteza existenței unei relații de forma

$$\overline{u'v'} = -\text{const.}\ \varphi\ (y) \left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

și are caracteristicile unei energii de mișcare.

La o variație a vitezei $\delta\bar{u}$ în regimul de scurgere turbulent corespunde o variație a energiei de mișcare ΔE.

Să calculăm variația δE

$$\delta E = \delta\int_0^h \left[f\bar{u} + \frac{1}{3}\,\text{const.}\ \rho\varphi(y)\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\frac{d\bar{u}}{dy} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 \right] dy, \tag{25}$$

$$\delta E = \int_0^h \left[f\delta\bar{u} + \text{const.}\ \rho\,\varphi\ (y)\left(\frac{du}{dy}\right)^2\frac{d\delta\bar{n}}{dy} + \mu\frac{d\bar{u}}{dy}\frac{d\delta\bar{u}}{dy} \right] dy. \tag{25'}$$

Pentru ca variația vitezei $\delta\bar{u}$ să fie cinematic posibilă, este necesar ca

$$\delta u = 0 \text{ pentru } y = 0. \tag{26}$$

Dar

$$\int_0^h \text{const.}\ \varphi(y)\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\frac{d\delta u}{dy}\,dy = \text{const.}\ \varphi\ (y)\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\delta u\ \Big|_0^h - \int_0^h \text{const.}\frac{d}{dy}\varphi\ (y)\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\delta u\ dy$$

și

$$\int_0^h \mu\frac{d\bar{u}}{dy}\frac{d\delta\bar{u}}{dy}\,dy = \mu\frac{d\bar{u}}{dy}\,\delta\bar{u}\ \Big|_0^h - \int_0^h \mu\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}\,\delta\bar{u}\ dy.$$

Avînd în vedere (25) și (26) obținem

$$\delta E = \int_0^h \left\{ f - \text{const.}\ \rho\frac{d}{dy}\left[\varphi(y)\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2\right] - \mu\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right\} \delta\bar{u}\ dy$$

sau

$$\delta E = \int_0^h \left[f\rho + \rho \frac{d\,(\overline{u'v'})}{dy} - \mu \frac{d^2\bar{u}}{dy^2} \right] \delta\bar{u}\, dy . \qquad (25'')$$

Cum partea din paranteza mare este egală cu zero, rezultă

$$\lim_{\delta\bar{u}\to 0} \frac{\Delta E}{\delta\bar{u}} = 0. \qquad (27)$$

Relația (27) arată, că în felul cum am construit noi funcționalul (24), la variații mici de viteză mediată se obține o variație infinit mică de ordin superior în raport cu $\delta\bar{u}$ a energiei de mișcare.

Rezultă că funcționalul (24) împreună cu condițiile de contur (15) definește mișcarea plană a fluidului, substituie ecuațiile diferențiale de tipul (13) și poate fi numit energie de mișcare.

Pentru prototip expresia energiei de mișcare are forma

$$E_p = \int_0^h \left[f_p\bar{u}_p - \frac{1}{3}\rho_p(\overline{u'v'})_p \frac{d\bar{u}_p}{dy_p} + \frac{\mu_p}{2}\left(\frac{d\bar{u}_p}{dy_p}\right)^2 \right] dy_p . \qquad (28)$$

Pentru model

$$E_m = \int_0^h \left[f_m\bar{u}_m - \frac{1}{3}\rho_m\,(\overline{u'v'})_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} + \frac{\mu_m}{2}\left(\frac{d\bar{u}_u}{dy_m}\right)^2 \right] dy_m . \qquad (29)$$

Folosind parametrii de scară de mai sus putem scrie

$$E_p = \alpha_\rho\, \alpha_{v_1}^3 \int_0^{h_1} \left[\frac{\alpha_f\, \alpha_u\, \alpha_{h_1}}{\alpha_\rho\, \alpha_{v_1}^3} f_m\bar{u}_m - \frac{\alpha_{\overline{u'v'}}\, \alpha_{\bar{u}}}{\alpha_{v_1}^3} \frac{1}{3}\, \rho_m (\overline{v'u'})_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha_\mu\, \alpha_{\bar{u}}^2}{\alpha_\rho \alpha_{h_1} \alpha_{v_1}^3} \frac{\mu}{2} - \left(\frac{d\bar{u}_u}{dy_m}\right)^2 \right] dy_m .$$

Utilizînd relațiile (15), avem

$$E_p = \alpha_\rho\, \alpha_{v_1}^3\, E_m . \qquad (30)$$

Deci pentru doi curenți asemenea energiile de mișcare stau într-un raport constant, funcționalul energiei fiind o mărime omogenă de variabilele de care depinde. Mai departe vom presupune că modelul este construit la aceeași scară și avînd același cîmp de forțe f ca și prototipul. Cazul cînd parametrii de scară diferă de unitate, energia de mișcare poate fi calculată cu ajutorul formulei (30).

Dacă pe prototip cîmpul de viteză este $\bar{u}$, iar pe model $\bar{u} + \delta\bar{u}$, energia de mișcare a modelului diferă de energia de mișcare a prototipului cu o variație ΔE.

Variația energiei de mișcare ΔE, luînd în considerație formula (27), poate fi apreciată prin variația a doua a funcționalului E.

Variația a doua a funcționalului, pornind de la expresia sa pentru cazul mișcării în regim turbulent, o calculăm în felul următor :

Notăm expresia de sub semnul integral

$$\Phi\left(\bar{u}, \frac{d\bar{u}}{dy}\right) = f \cdot \bar{u} + \frac{1}{3}\rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^3, \tag{31}$$

în care s-a considerat

$$\varphi \doteq (y) = k^2 y^2.$$

Dezvoltînd în serie Taylor (31), obținem pentru variația a doua

$$\delta^2 E = \int_0^h \left[\Phi_{\bar{u},\bar{u}}\,\delta u^2 + 2\,\Phi_{\bar{u},\frac{d\bar{u}}{dy}}\,\delta u\,\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) + \Phi_{\frac{d\bar{u}}{dy},\frac{d\bar{u}}{dy}}\,\delta\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right] dy \tag{32}$$

sau

$$\delta^2 E = \int_0^h 2\,\rho k^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\,\delta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 dy. \tag{33}$$

Dacă examinăm relația (33) împreună cu figura 3, observăm următoarele :

Valoarea $\delta^2 E$ depinde în general de două mărimi variabile în raport cu ordonata : $\frac{du}{dy}$ și $\delta\frac{du}{dy}$. Variabila $\delta\frac{du}{dy}$ în orice punct tinde la zero o dată cu δh — supraînălțarea zonei de modelare.

Integrala (33), luîndu-se pe curba 1 (fig. 3) în zona definită de h_1, deși $\frac{du}{dy}$ ia valori mari, $\delta\frac{du}{dy}$ reprezintă o cantitate relativ mică, care dă ordinul de mărime expresiei $\delta^2 E$. În zona δh, $\frac{du}{dy}$ este foarte apropiată de zero, iar $\delta^2 E$ are o valoare mică, în ciuda valorilor relativ mari ale $\delta\frac{du}{dy}$.

Reprezentăm variația a doua a energiei de mișcare ca o sumă a doi termeni

$$\delta^2 E = \int_0^{h_1} 2\,\rho k^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\,\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 dy + \int_{h_1}^{h+\delta h} 2\,\rho k^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\,\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 dy.$$

Pentru primul termen

$$\delta^2 E_1 = \int_0^{h-\delta h} 2\,\rho k^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\,\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 dy,$$

avem

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\sqrt{ghi}}{k}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{y}{h}}}{y}, \tag{34}$$

$$\delta\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{\sqrt{ghi}}{k}\,\frac{\sqrt{1 - \frac{y}{h}} - \sqrt{1 - \frac{\delta h}{h} - \frac{y}{h}}}{y}, \tag{35}$$

$$\delta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \frac{2\tau_0}{\rho k^2 y^2}\left(1 - \frac{y}{h} - \frac{\delta h}{2h} - \sqrt{\left(1 - \frac{y}{h}\right)^2 - \frac{\delta h}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)}\right). \tag{36}$$

Cum $\frac{\delta h}{h} \leqslant 1 - \frac{y}{h} \leqslant 1$, dezvoltînd în serie radicalul și rezumîndu-ne la primii trei termeni, obținem

$$\delta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \frac{2\tau_0}{\rho k^2 y^2}\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{y}{h}}, \tag{36'}$$

de unde

$$\delta^2 E_1 \Rightarrow \frac{\tau_0}{2}\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 \int_0^{h-\delta h} \frac{d\bar{u}}{1-\frac{y}{h}}. \tag{37}$$

Utilizînd (34) avem

$$\delta^2 E_1 = \frac{\tau_0}{2k}\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \int_0^{h-\delta h} \frac{dy}{y\sqrt{1-y/h}} = -\frac{\tau_0}{2k}\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{1+\sqrt{1-y/h}}{1-\sqrt{1-y/h}}\Bigg]_0^{h-\delta h}. \tag{37'}$$

Pentru a da o interpretare fizică a valorii logaritmului corespunzătoare celor două limite, folosim relația deficitului de viteză a lui Taylor

$$\frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{1+\sqrt{1-y/h}}{1-\sqrt{1-y/h}} = u_{\max} - u + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\sqrt{1-y/h}.$$

Obținem

$$\delta^2 E_1 = \frac{\tau_0}{h}\left(\frac{\delta h}{h}\right)^2 \left\{ u_{h-\delta h} + \frac{2}{k}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}\left(1-\sqrt{\frac{\delta h}{h}}\right)\right\}. \tag{38}$$

Pentru al doilea termen

$$\delta^2 E_2 = \int_{h-\delta h}^{h} 2k^2 y^2 \frac{d\bar{u}}{dy}\, \delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 dy$$

avem

$$\frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\sqrt{ghi}}{k}\,\frac{\sqrt{1-y/h}}{y},$$

$$\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right) = \frac{\sqrt{ghi}}{k}\left(\frac{\sqrt{y/h-1+\delta h/h}}{h+\theta-y} + \frac{\sqrt{1-y/h}}{y}\right), \tag{39}$$

$$\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho k^2}\left(\frac{\sqrt{y/h-1+\delta h/h}}{h+\theta-h} + \sqrt{\frac{1-y/h}{y}}\right)^2. \tag{40}$$

Valoarea $\delta^2 E_2$ o vom calcula aproximativ ținînd seama de faptul că în intervalul $h - \delta h < y < h$, $\delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)$ este o funcție monoton crescătoare cu derivata pozitivă.

Pentru $y = h - \delta h$

$$k^2 y^2\, \delta\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho}\,\frac{\delta h}{h}.$$

Pentru $j = h$

$$k^2 y^2 \delta \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho} \frac{\delta h}{h} \frac{h^2}{\theta^2} .$$

Rezultă

$$\delta^2 E_2 \leqslant \frac{\tau_0}{2} \frac{\delta h}{h} \left(1 + \frac{h^2}{\theta^2} \right) \left(u_{\max} - u_{h-\delta h} \right), \tag{41}$$

sau

$$\delta^2 E_2 \leqslant \frac{\tau_0}{2} \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 h \left(1 + \frac{h^2}{\theta^2} \right) \frac{u_{\max} - u_h - \delta h}{\delta h} . \tag{41'}$$

Avem deci

$$\Delta E \approx \delta^2 E \leqslant \frac{\tau_0}{2} \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 \left[u_{h-\delta h} + \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(1 - \sqrt{\frac{\delta h}{h}} \right) + \right.$$

$$\left. + h \left(1 + \frac{h^2}{\theta^2} \right) \frac{u_{\max} - u_{h-\delta h}}{\delta h} \right. . \tag{42}$$

Dacă neglijăm $\delta^2 E_2$, expresia (42) capătă forma

$$\Delta E \approx \frac{\tau_0}{2} \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 \left[u_{h-\delta h} + \frac{2}{k} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left(1 - \frac{\sqrt{\delta h}}{h} \right) \right] . \tag{42'}$$

Energia curentului în regim turbulent, utilizînd relația :

$$\varphi \overline{u'v'} = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

are valoarea

$$E = \int_0^h \left[f . \bar{u} + \frac{1}{3} \varphi(y) \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^3 \right] dy = \int_0^h \left[- \rho g i \bar{u} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho g i}{3} \left(1 - \frac{y}{h} \right) \frac{d\bar{u}}{dy} \right] dy,$$

$$E = - \frac{2 \tau_0 v}{3} , \tag{43}$$

iar variația relativă a energiei rezultă sub forma

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{4} \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 \left[\frac{u_{h-\delta h}}{v} + \frac{2 \left(\frac{u_h}{v} - 1 \right)}{k} \left(1 - \sqrt{\frac{\delta h}{h}} \right) + \frac{h}{v} \left(1 + \frac{h^2}{\theta^2} \right) \left(\frac{u_h - u_{h-\delta h}}{\delta h} \right) \right] . \tag{44}$$

Neglijînd $\delta^2 E_2$, expresia (44) capătă forma

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3}{4} \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 \left[\frac{u_h - \delta h}{v} + \frac{2 \left(\frac{u_h}{v} - 1 \right)}{k} \left(1 - \sqrt{\frac{\delta h}{h}} \right) \right] . \tag{44'}$$

S-a utilizat formula deficitului de viteză

$$u_h - v = \frac{v_*}{k} \cdot K .$$

în care K este constanta lui Prandtl.

Am obținut astfel o evaluare rapidă a variației relative a energiei de mișcare, funcție de supraînălțarea relativă $\frac{\delta h}{h}$ a zonei de modelare. Formula (44) arată că abaterea relativă a energiei de mișcare este în general proporțională cu pătratul supraînălțării relative $\frac{\delta h}{h}$.

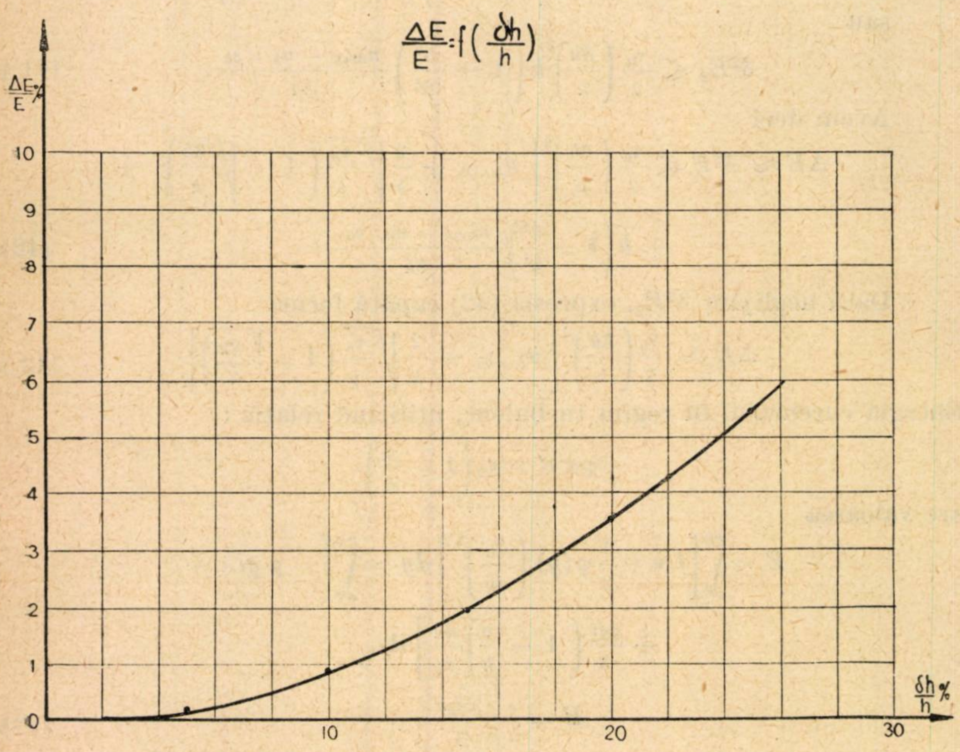


Fig. 4. — Curba $\frac{\Delta E}{E} = f\left(\frac{\delta h}{h}\right)$.

Pentru a reprezenta grafic relația (44′) se are în vedere faptul că

$$\frac{u_h}{v} \approx 1{,}25 \qquad \text{și} \; \frac{u_{h-\delta h}}{v} \leqslant 1{,}25 \qquad \text{pentru } \delta h \geqslant 0.$$

Figura 4 reprezintă dependența funcțională

$$\frac{\Delta E}{E} = f\left(\frac{\delta h}{h}\right) \quad \text{pentru} \; \frac{u_{h-\delta h}}{v} = 1{,}1,$$

$$\frac{u_h}{v} = 1{,}25 \qquad \text{și} \qquad k = 4{,}07.$$

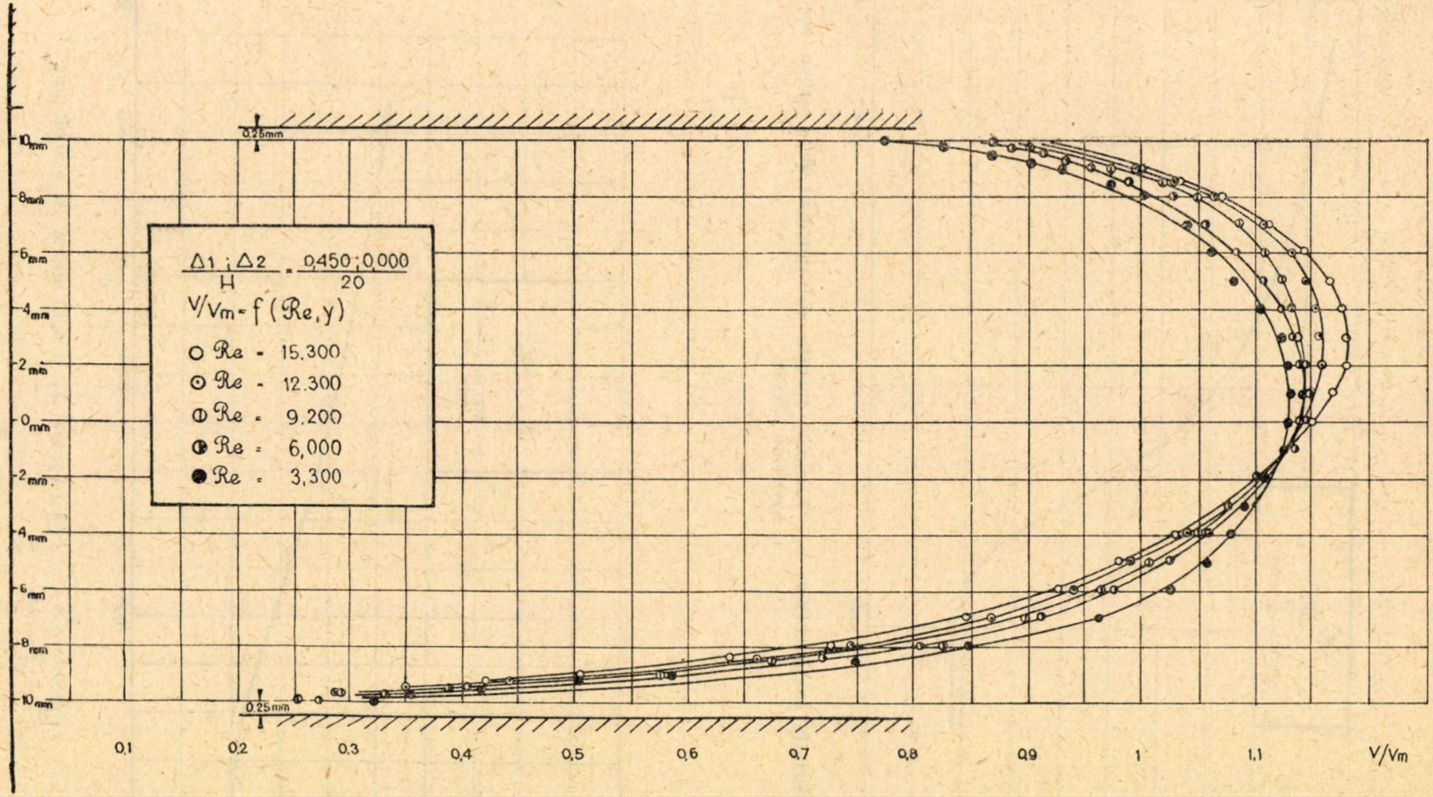


Fig. 5. — Repartiția vitezelor pe verticală funcție de numărul Re — pentru aceeași rugozitate mixtă.

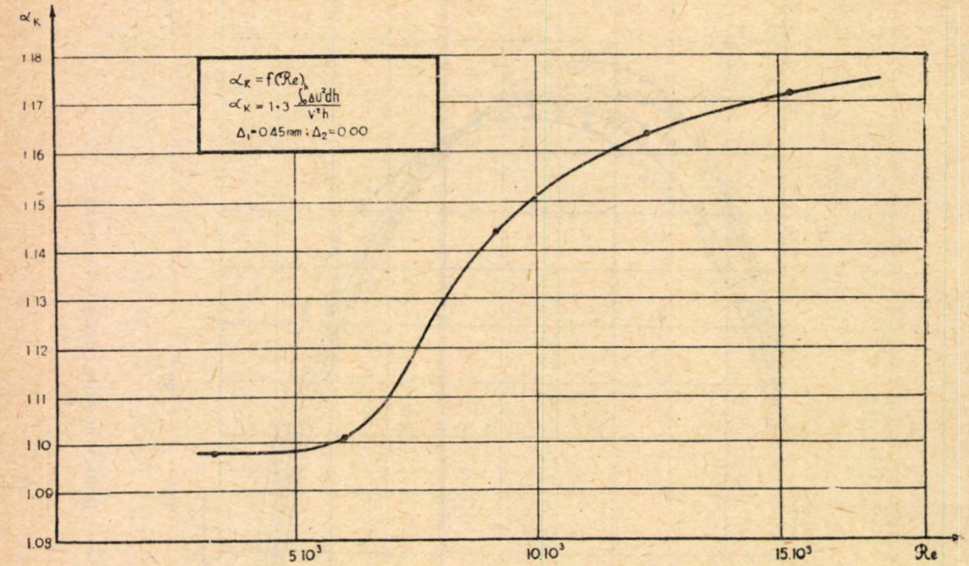


Fig. 6. — Variaţia coeficientului lui Koriolis funcţie de numărul $\mathcal{R}e$, pentru aceeaşi rugozitate mixtă.

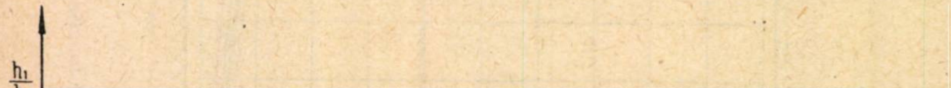


Fig. 7. — Curba $\frac{h_1}{h_1 + h_2} = f\ (\mathcal{R}e)$ pentru $\Delta_1 = 0{,}45$ mm şi $\Delta_2 = 0{,}00$ mm.

Din figura 4 se vede că pentru a obține abateri relative ale energiei de mișcare $\frac{\Delta E}{E} \leqslant 5\%$ pe model față pe prototip, este necesar ca $\frac{\delta h}{h} \leqslant 24\%$.

Pentru a estima mai complet cantitatea δh de supraînălțare a zonei de modelare s-a recurs la efectuarea unor măsurători de viteză în canalul cu rugozitate mixtă. La numere $\mathfrak{R}_e$ suficient de mari s-a constatat că alura epurei vitezelor în regiunea punctului de viteză maximă este foarte aplatisată. La aceeași rugozitate poziția punctului de viteză maximă cît și gradientul epurelor de viteză variază în funcție de numărul $\mathfrak{R}_e$ (fig. 5)

Este interesant de remarcat faptul că pentru scurgerea într-o suprafață netedă și alta rugoasă ($\Delta_2 = 0$; $\Delta_1 \neq 0$) curba de repartiție a vitezei raportată la viteza medie $\frac{u}{u_m}$ își mărește maximul, o dată cu creșterea numerelor $\mathfrak{R}_e$. În figura 6 s-a reprezentat grafic variația coeficientului lui Koriolis de neuniformitatea vitezelor pe secțiune $\alpha_k = 1 + 3 \frac{\rho\,\Delta\, u^2 d\omega}{v^2\omega}$ funcție de numărul $\mathfrak{R}_e$ pentru epurele de viteză din figura 5.

Folosind figura 5 se poate trasa o curbă $\frac{h_1}{h_1 + h_2} = f\ (\mathfrak{R}_e)$ pentru valori date ale rugozităților absolute ale celor doi pereți Δ_2 și Δ_1 (fig. 7).

După cum se vede din figurile 5 și 7 pentru $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = 0$ valoarea $\frac{h_2 - \delta h}{h + h_2}$ corespunzătoare unui raport $\frac{\delta h}{h_1 + h_2} \leqslant 0{,}25$ ia valori mici la valori $\mathfrak{R}_e$ foarte mari. Din considerații practice (de mișcare a aluviunilor) va trebui să ne limităm însă la anumite numere $\mathfrak{R}_e$ de lucru pe model.

Dacă $\frac{\Delta_2}{\Delta_1} \neq 0$, experiențele au arătat că de la anumite valori în sus ale numărului $\mathfrak{R}_e$ cînd regimul de mișcare este turbulent pătratic, atît în zona inferioară h_1, cît și în zona superioară h_2, raportul $\frac{h_1}{h_1 + h_2}$ se păstrează constant.

Pentru aceleași numere $\mathfrak{R}_e$ poziția relativă a punctului de maxim a vitezei ca și gradientul vitezei variază în funcție de rugozitatea unuia din pereți, cum arată figura 8.

Cu alte cuvinte în cazul general

$$\frac{h_1}{h_1 + h_2} = f\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\ ,\ \mathfrak{R}_e\right).$$

Deci alegînd o adîncime medie de modelare a albiei pe modelul cu aer 15 mm $\leqslant h \leqslant$ 25 mm pentru un număr $\mathfrak{R}_e$ de lucru ales se va putea construi curba de tipul celei din figura 9 $\frac{\Delta_1}{h_1} = f\left(\frac{\Delta_1}{h_1}\right)$ (Δ_2 se consideră determinat).

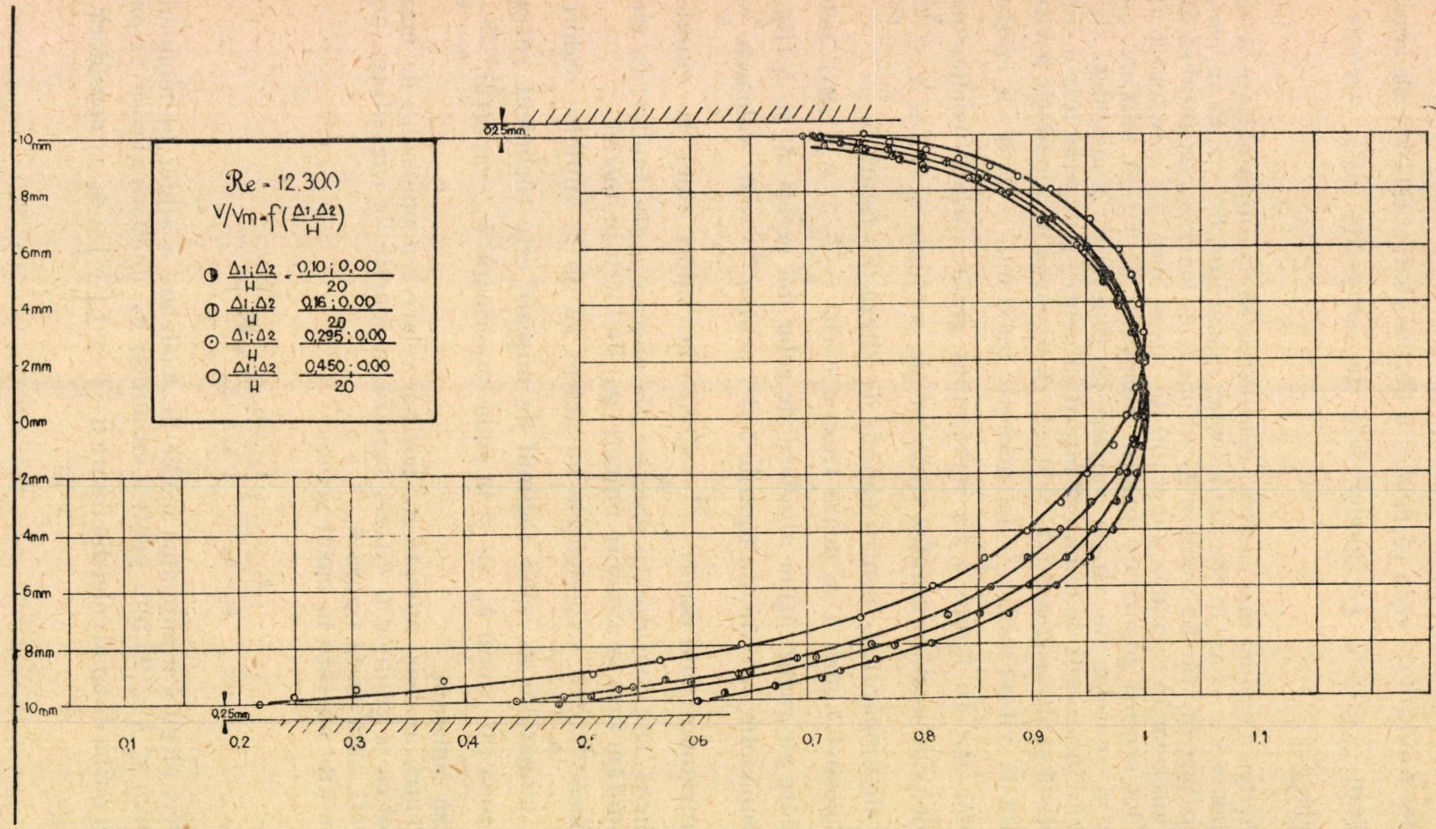


Fig. 8. — Repartiția vitezelor pe verticală funcție de rugozitatea pereților la același Re

Pentru un regim turbulent pătratic de curgere avem $\lambda_1 = f\left(\frac{\Delta_1}{h_1}\right)$. Din condiția de modelare $\alpha_{\lambda 1} = 1$ vom determina un $\frac{h_1}{\Delta_1}$ căruia îi va corespunde pe graficul din figura 7, rugozitatea absolută Δ_1, necesară fundului albiei pe modelul cu aer, pentru ca fenomenele hidraulice să fie modelate. Din cele expuse mai sus apare o complicație în alegerea valorii δh pe modelul cu aer, unde adîncimea h variază atît în cadrul aceleiași secțiuni, cît și de-a lungul modelului. La o rugozitate uniformă a fundului locul geometric al tuturor punctelor de viteză maximă pentru un număr $\mathcal{R}_e$ dat într-o anumită secțiune a albiei se va găsi pe o curbă C (fig. 10) mai apropiată de suprafața geamului decît de fundul modelului.

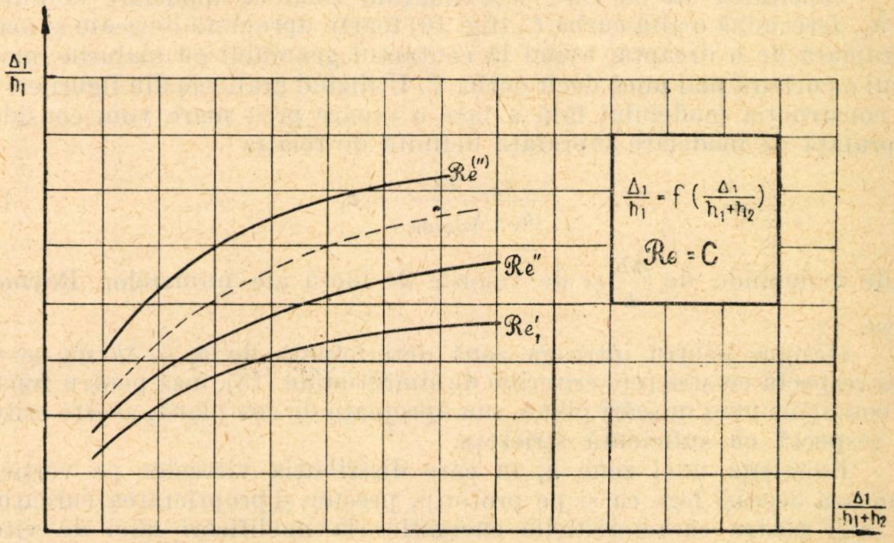


Fig. 9. — Curbele $\frac{\Delta_1}{h_1} = f\frac{\Delta_1}{h_1 + h_2}$ pentru diverse numere $\mathcal{R}_e$.

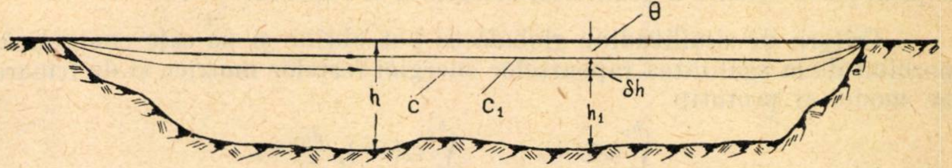


Fig. 10. — Locul geometric al punctelor cu viteză de valoare maximă C și locul geometric al punctelor $h_1 + \delta h - C_1$ în secțiunea unei albii.

Curba C se poate transforma într-o dreaptă numai în cazul cînd suprafața geamului ar avea aceeași formă și aceeași rugozitate ca suprafața fundului albiei. Deși pare recomandabil să construim în felul acesta modelul cu aer, totuşi pentru studiul fenomenelor morfologice construcţia unui asemenea model nu e admisibilă. Din măsurătorile de viteze făcute pe model s-a constatat că în partea centrală curba C este foarte apropiată de o dreaptă şi numai la contactul geamului sau plexiglasului cu malurile albiei prezintă o oarecare curbură.

Cantitatea δh cu care supraînălţăm zona de modelare definitivă de h_1, determină o altă curbă C_1 (fig. 10) foarte apropiată de geam şi foarte apropiată de o dreaptă, avînd la contactul geamului cu malurile modelului o curbură mai mică decît curba C. Utilizînd graficele din figurile 4—8 la construcţia modelului fără a face o eroare prea mare vom considera suprafaţă de modelare suprafaţa definită de relaţia

$$\frac{h_2 - \delta h}{(h_1 + h_2)_{\text{medie}}} = \varepsilon, \tag{45}$$

unde ε depinde de $\frac{\Delta E}{E}$ şi de valorile de lucru ale numerelor Reynolds alese.

Desigur pentru întreaga zonă determinată de $h_1 + \delta h$ nu se vor mai respecta cu stricteţe criteriile de similitudine (15), însă pentru zona h_1 în condiţiile unei mişcări plane, sau apropiate de cea plană, aceste criterii se respectă cu suficientă stricteţe.

Existenţa unei zone h_1 în care distribuţia vitezelor pe verticală urmează aceeaşi lege ca şi pe prototip, precum şi proprietatea curentului de a-şi păstra caracteristicile energetice la modificări mici de viteză explică similitudinea de spectru hidrodinamic de pe prototip şi modelul cu aer. De aceea pentru asigurarea similitudinii celor doi curenţi este necesar, pe de o parte respectarea criteriilor de similitudine pentru zona inferioară definită de h_1 pe model, pe de altă parte reducerea la minimum a distanţei de la geam a suprafeţei de modelare.

Criteriul de similitudine globală (1) sau (4′) poate fi utilizat pentru problemele la care nu interesează structura curentului. În plus utilizarea lui presupune cota de modelare a suprafeţei libere de curgere chiar cota suprafeţei inferioare a geamului, oricare ar fi raportul $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

Criterii de similitudine globală se pot obţine şi pe cale energetică, pornind de la egalitatea rapoartelor energiei forţelor motrice şi de frînare pe model şi prototip

$$A_E = \frac{\int_0^{h_p} f_p \bar{u}_p \, dy_p}{\int_0^{h_m} f_m \bar{u}_m \, dy_m} = \frac{\int_0^{h_p} \rho_p \left(\overline{u'v'}\right)_p \frac{d\bar{u}_p}{dy_p} dy_p}{\int_0^{h_m} \rho_m \left(\overline{u'v'}\right)_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} du_m}. \tag{46}$$

Utilizînd relaţia

$$\rho\overline{u'v'} = \rho \text{ const. } \varphi(y) \left(\frac{du}{dy}\right)^2 = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{h}\right),$$

unde τ_0 este efortul tangenţial la perete, obţinem *a*) Pentru prototip — *P*

$$\int_0^{h_p} f_p \bar{u}_p dy_p = - \rho_p \, g_i \, Q_p \, ,$$

$$\int_0^{h} \rho \left(\overline{u'v'}\right)_p \frac{d\bar{u}_p}{dy_p} \, dy_p = \tau_{0p} \, \frac{Q_p}{h_p} \, .$$

b) Pentru model — *M*

$$\int_0^{h_m} f_m \, \bar{u}_m \, dy_m = \int_0^{h_1} f_m \, \bar{u}_m \, dy_m + \int_{h_1}^{h_1+\delta h} f_m \, \bar{u}_m \, dy_m = f_m \, (Qh_1 + Q \, \delta h),$$

$$\int_0^{h_m} \rho_m \left(\overline{u'v'}\right)_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} \, dy_m = \int_0^{h_1} \rho_m \left(\overline{u'v'}\right)_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} \, dy_m + \int_0^{h+\delta h} \rho_m \left(\overline{u'v'}\right)_m \frac{d\bar{u}_m}{dy_m} \, dy_m =$$

$$= \tau_{01} \frac{Qh_1}{h_1} + \tau_{02} \frac{Q\,\delta h}{h_2} - \tau_{02} \frac{\delta h}{h_2} \bar{u} h_1 + \delta h \, .$$

Punînd valorile găsite în relaţia (46) criteriul de similitudine globală pe baze energetice capătă forma

$$A_E = \frac{f_p \, Q_p}{f_m \, (Qh_1 + Q\delta)} = \frac{\tau_{0p} \dfrac{Q_p}{h_p}}{\tau_{01} \dfrac{Qh_1}{h_1} \left(1 + \dfrac{Q\,\delta h}{Qh_1} - \dfrac{\delta h \bar{u}_h + \delta h}{Qh_1}\right)} \, . \qquad (47)$$

S-au folosit notaţiile:
Qh_1 şi $Q\,\delta h$ pentru debitele pe model care curg respectiv prin secţiunile h_1 şi δh;

$\bar{u}_h + \delta h$ — viteza mediată punctuală de ordonată $h_1 y : \delta h$.

Pentru cazurile particulare $\delta h = 0$ şi $\delta h = h_2$ criteriul A_E devine

$$\alpha_f = \alpha_{\lambda_1} \, \alpha_\rho \, \alpha_{v1}^{2} \, \alpha_{h_1}^{-1} \, . \qquad (48)$$

Dacă înlocuim în (48) $v_1 = \alpha v_m$, $h_1 = \dfrac{1 - \alpha}{\beta - \alpha} h$, $v_2 = \beta v_m$ obţinem

$$\alpha_f = \alpha_{\lambda_1} \, \alpha_\rho \, \alpha_v^{2} \, \alpha_h^{-1} \, \mu \, , \qquad (48')$$

unde

$$\mu = \alpha^2 \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \, .$$

Pentru

$$\alpha_{\lambda_1} = 1, \quad A_E = \mathcal{A} \, .$$

În general nu există motive care să împiedice la construcţia modelului respectarea condiţiei $\alpha_{\lambda_1} = 1$, cel puţin în cîteva secţiuni de control ale albiei.

Rugozitatea diferită în diferite secţiuni ale albiei prototipului sau uneori diferită în cadrul aceleiaşi secţiuni, face ca pe model să nu fie respectată riguros condiţia $\alpha_{\lambda_1} = 1$.

Se poate determina care este abaterea de la similitudinea cinematică, în cazul cînd $\alpha_{\lambda 1} \neq 1$. Pentru aceasta vom porni de la distribuția vitezelor pe prototip și pe model în zona h_1 legea deficitului de viteză a lui Karman. Prin definiție

$$\alpha_{\lambda 1} = \alpha v_1^2 \, \alpha_{v_{*1}}^{-2} \,. \tag{49}$$

Folosind formula lui Karman pentru distribuția vitezei și pentru expresia vitezei medii

$$u = u_{\max} - v_{*} f\left(\frac{y}{h}\right),$$

$$v = u_{\max} - v_{*} K$$

unde K este constanta lui Prandtl, obținem după cîteva transformări

$$\frac{\alpha u_1}{\alpha v_1} = \frac{1 + \alpha_{\lambda_1}^{1/2}\left[K - f\left(\frac{y}{k}\right)\right]\sqrt{\frac{\lambda_p}{2}}}{1 + \left[K - f\left(\frac{y}{h}\right)\right]\sqrt{\frac{\lambda_p}{2}}} \,. \tag{50}$$

Raportul $\frac{\alpha u_1}{\alpha v_1}$ reprezintă abaterea de la similitudinea cinematică punctuală în cazul în care $\alpha_{\lambda 1} \neq 1$. Din (50) se vede că această abatere variază pe verticală, fiind funcție de ordonata relativă $\frac{y}{h}$. Există o valoare a ordonatei relative $\frac{y_1}{h_1}$ pentru care $\frac{\alpha u_1}{\alpha v_1} = 1$, oricare ar fi coeficientul $\alpha_{\lambda 1}$. Nu este greu de observat că această valoare corespunde ordonatei relative pentru care viteza medie este egală cu viteza punctuală a curentului. Dacă avem în vedere figura 3, acest fapt se pretează și la verificări experimentale. Abaterea $\frac{\alpha u_1}{\alpha v_1}$ variază cu $\alpha_{\lambda 1}$ la puterea $1/2$, ceea ce arată influența relativ slabă a nerespectării condiției $\alpha_{\lambda 1} = 1$ asupra similitudinii cinematice. Graficul $\frac{\alpha u_1}{\alpha v_1} = F\,(\alpha_{\lambda 1}, y/h)$ ilustrează pentru un caz concret această dependență (fig. 11).

S-a luat $\lambda_p = 0{,}0123, K = 4{,}07$.

Din cele expuse reiese următoarea ordine de calcul a modelului cu aer.

a) Se alege scara în plan a modelului α_l, avînd în vedere spațiul care ne este pus la dispoziție, mijloacele de asigurare a preciziei în construirea modelului, precum și genul problemei care se studiază. De obicei $\alpha_l = \frac{l_p}{l_m}$ poate ajunge și la cifra de 4 000 – 5 000.

b) Se alege înălțimea medie a albiei pe model, avînd în vedere considerațiile făcute într-o lucrare anterioară [3].

Se recomandă 15 mm $\leqslant h_m \leqslant$ 25 mm prin aceasta e indicat ca $\alpha_l/\alpha_h < 3 \div 4$. Distorsiuni prea mari de scară aduc după sine denaturări ale fenomenelor spaţiale.

c) Se determină rugozitatea absolută a fundului albiei, astfel ca $\alpha_{\lambda 1} = \frac{\lambda_p}{\lambda_{1m}} = 1$. Coeficientul de rezistenţă a fundului modelului în regim turbulent pătratic este funcţie de rugozitatea relativă a zonei $h_1 - \lambda_1 = f\left(\frac{\Delta_1}{h_1}\right)$.

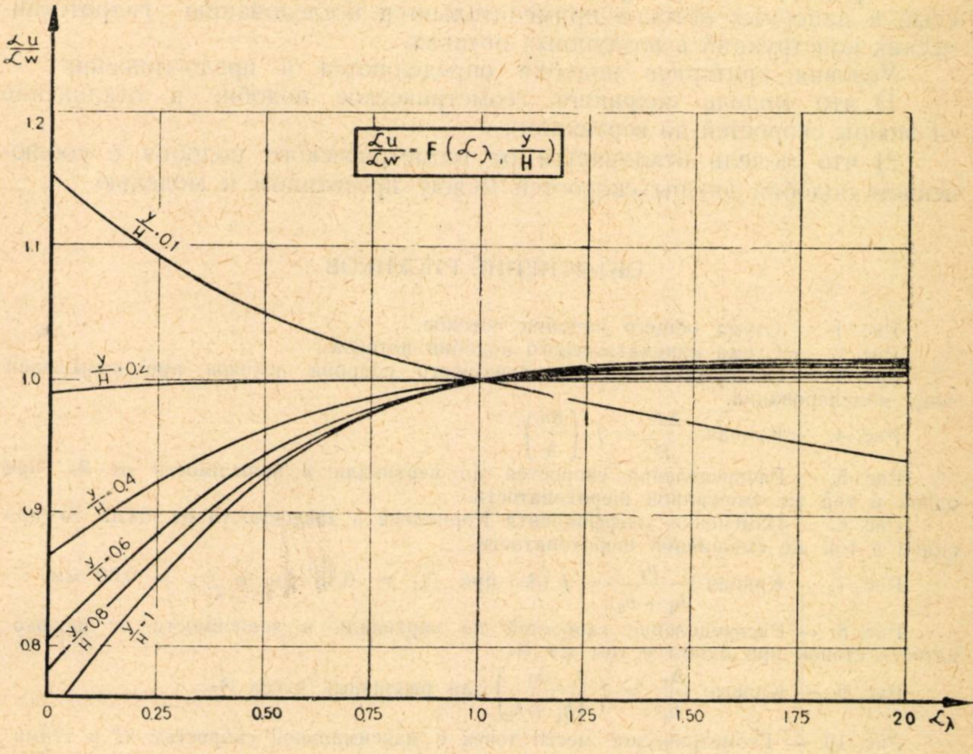


Fig. 11. — Funcţia $\frac{\alpha_u}{\alpha_{v_1}} = F\left(\alpha_\lambda, \frac{y}{h}\right)$.

Pentru aceasta se ia o valoare de lucru a numărului Reynolds $\mathfrak{R}_e$ lucru.

Pe graficul de tipul celui din figura 7 se alege rugozitatea fundului modelului, pentru care raportul $\frac{\Delta_1}{h_1}$ dă un coeficient de rezistenţă λ_{1m} egal cu cel din natură Δ_p.

Suprafaţa de modelare se consideră cea definită de relaţia (45).

Primită la redacţie la 20 aprilie 1957.

К ВОПРОСУ О ПОДОБИИ ПОТОКОВ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И НАПОРНЫХ ПОТОКОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Определяются критерии подобия потоков со свободной поверхностью и напорных потоков применительно к исследованию гидротехнических конструкций в воздушных потоках.

Условия критериев подобия определяются в предположении:

1) что модель сохраняет геометрическое подобие и отклонение от эпюры скоростей по вертикали;

2) что модель отклоняется от геометрического подобия с соблюдением подобия эпюры скоростей между прототипом и моделью.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Схема общего подобия потоков.

Рис. 2. — Схема кинематического подобия потоков.

Рис. 3. — Отклонения от кинематического подобия потоков при повышении зоны моделирования.

Рис. 4. — Кривая $\frac{\Delta E}{E} = f\left(\frac{\delta h}{h}\right)$.

Рис. 5. — Распределения скоростей по вертикали в зависимости от $\mathfrak{Re}$ при одной и той же смешанной шероховатости.

Рис. 6. — Изменения коэффициента Кориолиса в зависимости от числа $\mathfrak{Re}$ при одной и той же смешанной шероховатости.

Рис. 7. — Кривая $\frac{h_1}{h_1 + h_2} = f(\mathfrak{Re})$ при $\triangle_1 = 0{,}45$ мм и $\triangle_2 = 0{,}00$ мм.

Рис. 8. — Распределение скоростей по вертикали в зависимости от шероховатости стенок при одном и том же $\mathfrak{Re}$.

Рис. 9. — Кривые $\frac{\Delta_1}{h_1} = f\left(\frac{\Delta_1}{h_1 + h_2}\right)$ для различных чисел $\mathfrak{Re}$.

Рис. 10. — Геометрическое место точек с максимальной скоростью C и геометрическое место точек $h_1 + \delta h - C_1$ в сечении русла.

Рис. 11. — Функция $\frac{\alpha_u}{\alpha_{v_1}} = F\left(\alpha_\lambda, \frac{y}{h}\right)$.

SUR LA SIMILITUDE DES COURANTS À NIVEAU LIBRE AVEC LES COURANTS SOUS PRESSION

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on détermine les considérations et les critères de similitude entre les courants à niveau libre et les courants sous pression et leurs applications à l'étude des travaux hydrotechniques dans des courants d'air.

Les conditions des critères de similitude sont déterminées dans les deux hypothèses suivantes :

1° maquette respectant la similitude géometrique et s'écartant de l'épure des vitesses sur verticale et

2° maquette s'écartant de la similitude géometrique et respectant la similitude de l'épure des vitesses entre le prototype et la maquette.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Schéma de similitude globale des courants.

Fig. 2. — Schéma de similitude cinématique des courants.

Fig. 3. — Ecarts de la similitude cinématique des courants dans le cas d'une surélévation de la zone de construction de la maquette.

Fig. 4. — Courbe $\frac{\Delta E}{E} = f\left(\frac{\delta h}{h}\right)$.

Fig. 5. — Répartition des vitesses sur verticale en fonction du nombre $\mathcal{R}e$ — pour la même rugosité mixte.

Fig. 6. — Variation du coefficient de Koriolis en fonction du nombre $\mathcal{R}e$, pour la même rugosité mixte.

Fig. 7. — Courbe $\frac{h_1}{h_1 + h_2} = f\,(\mathcal{R}e)$ pour $\Delta_1 = 0{,}45$ mm et $\Delta_2 = 0{,}00$ mm.

Fig. 8. — Répartition des vitesses sur verticale en fonction de la rugosité des parois pour le même $\mathcal{R}e$.

Fig. 9. — Courbes $\frac{\Delta_1}{h_1} = f\left(\frac{\Delta_1}{h_1 + h_2}\right)$ pour divers nombres $\mathcal{R}e$.

Fig. 10. —Lieu géométrique des points à vitesse de valeur maximum C et lieu géométrique des points $h_1 + \delta\, h - C_1$ dans le section d'un lit de rivière.

Fig. 11.— Fonction $\frac{\alpha_u}{\alpha_{v_1}} = F\left(\alpha_\lambda, \frac{y}{h}\right)$

BIBLIOGRAFIE

1. Bateman H., *Partial differential equation of matematical physics.* New York, 1944-
2. Herivel J., *The derivation of the equations of an ideal fluid by Hamilton's principle.* Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1955, t. 51, nr. 2.
3. Kahan M. și Hîncu S., *Dinamica curenților sub presiuni în canale cu rugozitate mixtă.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, 1957, p. 557.
4. Loițianski L. G., *Mehanika Jidkosti i gaza.* Gosudarstvennoe izdatelstvo tehnikoteoreticeskoi literaturî, Moscova, 1950.
5. Millikan C. B., *On the steady motion of viscous, incompressible fluids, with particular reference to a variation principle.* Philosophical Magazine, 1929, t. 7, nr.44.
6. Sommerfeld A., *Mechanik der deformierbaren Medien.* Leipzig, 1949.
7. Stanley C., *Turbulent channel flow from a variational principle.* Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 20, mai 1953, nr. 5.
8. Zegjda A. P., *Teoria podobia i metodika rasciota tehniceskih modelei.* Gostroiizdat, Moscova, 1933.

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

LUBRIFICAȚIA SUPRAFEȚELOR CILINDRICE CU MIȘCARE DE ROSTOGOLIRE ȘI DE ALUNECARE

DE

N. TIPEI

Se va considera în cele ce urmează lubrificația hidrodinamică în straturi subțiri, pentru care ecuația presiunilor este, pentru lichide :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\delta^3}{\mu}\operatorname{grad} p\right) = 6\,[2V_n - \overline{V}_t^{*}\operatorname{grad}\delta + \delta\operatorname{div}\overline{V}_t^{**}] = \mathscr{F}(x_1, x_3, t), \qquad (1)$$

în care p este presiunea, μ viscozitatea fluidului, x_1, x_3 lungimi măsurate de la o origine de-alungul suprafeței solide (1), x_2 pe normala la aceasta, V_n este diferența vitezelor normale la suprafețe, $\overline{V}_t^{*}$ diferența componentelor celor două viteze, iar $\overline{V}_t^{**}$ suma acestora în planul tangent la (1), δ grosimea stratului fluid. În această ecuație s-au făcut simplificările bine cunoscute, derivînd din grosimea redusă a păturei fluide și din ordinul de mărime al forțelor de inerție.

Ca și în alte probleme ale lubrificației, elementele mișcării și constantele de integrare pot conține timpul ca parametru. Dacă se consideră două suprafețe cilindrice de raze r_1, r_2 (fig. 1) vitezele tangențiale a acestora în punctul de contact trebuie să fie egale $\overline{V}_1 = \overline{V}_2 = \overline{V}$ pentru a avea numai rostogolire. În cazul mai general cînd există și alunecare relativă, dacă se notează prin al doilea indice (j) axa x_d de-a lungul căreia se consideră componenta respectivă, condițiile pe frontiere sînt

$$\left.\begin{array}{l} V_{11} = V_1\,;\; V_{12} = V_{13} = 0 \\ V_{21} = V_2\cos\varepsilon\,;\; V_{22} = V_2\sin\varepsilon\,;\; V_{23} = 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Deoarece grosimea δ depinde numai de θ și eventual de timp, rezultă $\operatorname{grad}\,\delta = \dfrac{1}{r_1}\dfrac{\partial\delta}{\partial\theta}$, iar membrul al doilea al ecuației (1) este

$$\mathscr{F}(\theta, x_3, t) = 6\left[V_2\sin\varepsilon - (V_2\cos\varepsilon - V_1)\frac{1}{r_1}\frac{\partial\delta}{\partial\theta} + \frac{\delta}{2r_1}V_2\left(1 - \frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)^2\frac{\sin 2\theta}{\cos\varepsilon}\right]. \qquad (3)$$

În această expresie $V_1 = V_2$ în cazul rostogolirii pure și $V_2 = 0$ în cazul alunecării fără rostogolire.

Grosimea δ este (fig. 1)

$$\left.\begin{aligned}
\delta &= r_2 \cos\theta\left[\sqrt{1+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\,\mathrm{tg}^2\theta\cdot\left(2-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)}-1+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right]-r_1,\\
\frac{\partial\delta}{\partial\theta} &= \sin\theta\left(\frac{(r_1+\delta_2)\left(2-\dfrac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)-r_2}{\sqrt{1+\dfrac{r_1+\delta_2}{r_2}\left(2-\dfrac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\mathrm{tg}^2\,\theta}}+r_2-r_1-\delta_2\right).
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

Deoarece valorile maxime θ_1 sau θ_2 ale lui θ sînt mici și nu depășesc $\frac{\pi}{6}$, fiind în genere sensibil mai reduse, $r_1 < r_2$, iar δ_2 este neglijabil față de r_1, r_2, expresia lui $\frac{\partial\delta}{\partial\theta}$ se poate simplifica în felul următor

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial\theta} &\cong \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,r_1\left\{1-\frac{r_1}{r_2}-\frac{1}{2}\,\frac{r_1}{r_2}\left[\left(2-\frac{r_1}{r_2}\right)^2-1\right]\sin^2\theta\right\}\\
&\cong \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\,r_1\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

cu o eroare maximă sub 10%, deoarece în realitate $\frac{r_1}{r_2} < \frac{1}{4}$.

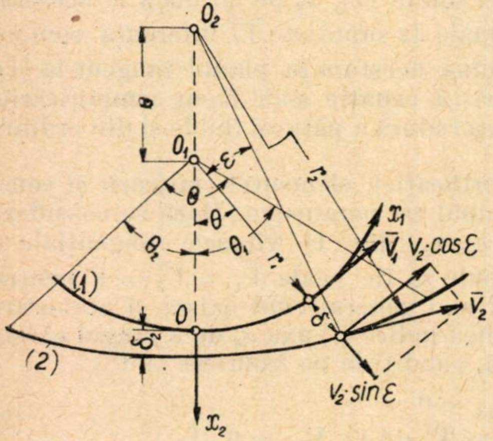


Fig. 1

De asemenea se vede din a doua formulă (4) că se poate înlocui radicalul cu o valoare medie $1 + \epsilon$ $(\epsilon \ll 1)$, sau

$$\frac{\partial\delta}{\partial\theta} \cong \frac{r_2-r_1-\delta_2}{1+\epsilon}\left(\epsilon+\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\cdot\sin\theta = K_\delta \sin\theta, \qquad (6)$$

în care se poate neglija și δ_2. În aceste condiții, dacă se observă că termenul care conține $\frac{\delta}{r_1}$ ca factor în formula (3) este de asemenea aproape nul, iar $\sin\varepsilon = \frac{e}{r_2}\sin\theta = \left(1-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\sin\theta$, se poate scrie

$$\mathfrak{F}\,(\theta, x_3, t) \cong 6\left[2\left(1-\frac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)\frac{V_2}{K_\delta}+\frac{V_1-V_2\sqrt{1-\left(1-\dfrac{r_1+\delta_2}{r_2}\right)^2\sin^2\theta}}{r_1}\right]\frac{\partial\delta}{\partial\theta}. \qquad (7)$$

Radicalul din paranteza mare reprezintă valoarea lui $\cos \varepsilon$. Această valoare, deoarece $\cos \varepsilon > \cos \theta$, este foarte apropiată de unitate, $0{,}9 < \cos \varepsilon \leqslant 1$; ca urmare, se poate admite o constantă $\cos \varepsilon \sim 0{,}95$ sau $\cos \varepsilon \sim 1$. Într-adevăr, se observă că în zona de grosime minimă $\delta = \delta_2$, $\theta = \varepsilon = 0$. În această regiune însă, de presiuni mari, este important ca $\mathcal{F}(\theta, x_3, t)$ să fie evaluată cît mai exact, alegîndu-se eventual ultima valoare indicată pentru $\cos \varepsilon$. Totodată, în cazul rostogolirii primul termen din paranteza mare (7) este preponderant, astfel încît admițînd $\cos \varepsilon =$ constant în al doilea termen se realizează o bună aproximație pentru $\mathcal{F}(\theta, x_3, t)$. Se va scrie astfel

$$\mathcal{F}(\theta, x_3, t) = A_\delta \frac{\partial \delta}{\partial \theta}. \tag{8}$$

În felul acesta se poate găsi soluția p_∞ a problemei plane pe calea obișnuită [1]. Pentru rezolvarea tridimensională, este necesar să se stabilească însă pentru δ o expresie mai simplă, dar suficient de exactă. În acest scop, se poate pune

$$\delta = \delta_2 [1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)]. \tag{9}$$

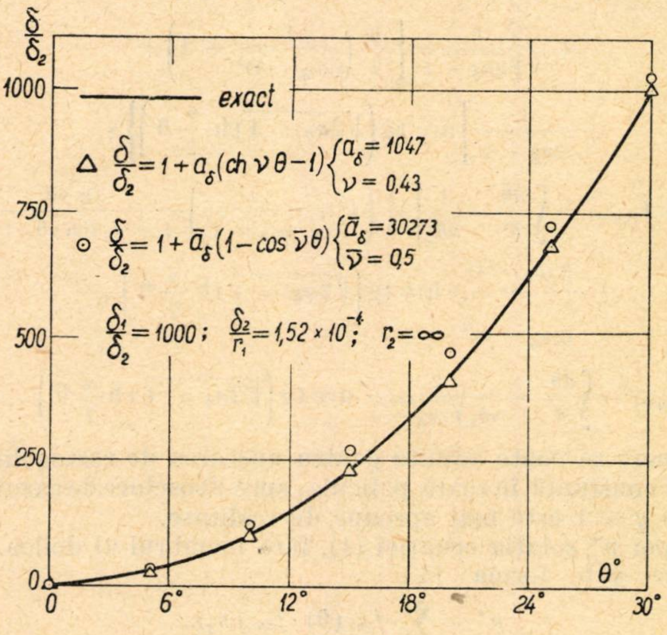


Fig. 2

Fie $\delta_1(\theta_1)$ și $\delta_3(\theta_3)$ valorile grosimii δ în două puncte (θ_1 fiind în genere valoarea maximă a lui $|\theta|$). Rezultă astfel ν și a_δ

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_3 - \delta_2} = \frac{1 - \operatorname{ch} \nu \theta_1}{1 - \operatorname{ch} \nu \theta_3}; \qquad a_\delta = \frac{\dfrac{\delta_1}{\delta_2} - 1}{\operatorname{ch} \nu \theta_1 - 1}. \tag{10}$$

În acest mod s-au calculat punctele din figura 2 pentru un caz defavorabil şi anume $\frac{\delta_1}{\delta_2} = 1\,000$, $\theta_1 = 30°$, $\Theta = 60°$, $r_2 = \infty$. Se vede că aceste puncte reprezintă suprafaţa (2) faţă de (1), fără nici un fel de eroare apreciabilă.

Soluţia p_∞ se poate scrie apoi admiţînd [1] o lege de variaţie a viscozităţii cu δ de forma $\mu = \mu_1 \left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^q$

$$p_\infty = \frac{A_\delta\, \mu_1 r_1}{\delta_1^q} (I_1 + C_1 I_2) + C_2 . \tag{11}$$

În aceasta I_1 şi I_2 au expresiile următoare pentru $q = 0$ (viscozitate constantă) sau $q = 1$ (viscozitate variabilă):

$$\left.\begin{aligned}
I_{1,q=0} = {} & \int \frac{d\theta}{\delta^3} = \frac{1}{\nu\delta_2^3} \Bigg\{ \bigg\{ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2(2a_\delta - 1)} \left(\frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + \frac{5}{2} \right) - 1 \right] \cdot \\
& \cdot \frac{1 + \operatorname{ch} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} - \frac{3}{8(2a_\delta - 1)} \bigg\} \frac{\operatorname{sh} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2a_\delta - 1}} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{1}{(2a_\delta - 1)^2} + 1 \right) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2a_\delta - 1} \right] \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2a_\delta - 1}\, \operatorname{th} \frac{\nu}{2}\theta \right) \Bigg\} , \\
I_{2,q=0} = I_{1,q=1} = {} & \int \frac{d\theta}{\delta^2} = \frac{1}{\nu\delta_2^2} \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2a_\delta - 1} \right) \frac{\operatorname{sh} \nu\theta}{1 + a_\delta (\operatorname{ch} \nu\theta - 1)} + \right. \\
& \left. + \frac{2(a_\delta - 1)}{(2a_\delta - 1)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2a_\delta - 1}\, \operatorname{th} \frac{\nu}{2}\theta \right) \right] , \\
I_{2,q=1} = {} & \int \frac{d\theta}{\delta} = \frac{2}{\nu\delta_2 \sqrt{2a_\delta - 1}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{2a_\delta - 1}\, \operatorname{th} \frac{\nu}{2}\theta \right) .
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

În genere se poate admite pentru mişcarea de rostogolire că viscozitatea este constantă în toată pelicula, spre deosebire de cazul alunecării pentru care $q = 1$ este mai aproape de realitate.

Fie apoi $p^\star$ soluţia ecuaţiei (1), fără membrul al doilea. Aceasta se poate pune sub forma [1]

$$p^\star = \sum_{m=1}^{\infty} f_{1m}(\theta) \cdot f_{3m}(x_3). \tag{13}$$

Notînd cu χ_m un parametru arbitrar, se obţine

$$f_{3m} = A_{3m} \operatorname{sh} \sqrt{\chi_m}\, x_3 + B_{3m} \operatorname{ch} \sqrt{\chi_m}\, x_3 \tag{14}$$

Funcţiile $f_{1m}(\theta)$ satisfac ecuaţia cu derivate totale

$$\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} + (3 - q) \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial \theta} \cdot \frac{d f_{1m}}{d\vartheta} + r_1^2 \chi_m f_{1m} = 0. \tag{15}$$

Fie

$$f_{1m} = \sum_{m=-n_{1m}}^{\infty} \frac{A_{1m,n}}{\mathrm{ch}^n \, \nu\theta} \, . \tag{16}$$

Coeficienții $A_{1m,n}$ sînt dați de relațiile de recurență

$$a_\delta \left[(n+1)(n+4-q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,n+1} - (a_\delta - 1) \left(n^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,n} - \\ - a_\delta (n-1)(n+3-q) A_{1m,n+1} + (a_\delta - 1)(n-2)(n-1) A_{1m,n-2} = 0. \tag{17}$$

Primele ecuații se scriu, observînd că toți coeficienții cu indice negativ mai mic decît $-n_1$ sînt nuli

$$\left. \begin{array}{l}
a_\delta \left[-n_{1m}(-n_{1m} + 3 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\
a_\delta \left[(1 - n_{1m})(-n_{1m} + 4 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+1} - \\
\qquad - (a_\delta - 1) \left(n_{1m}^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,-n_{1m}} = 0 \\
a_\delta \left[(2 - n_{1m})(-n_{1m} + 5 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+2} - (a_\delta - 1) \cdot \\
\qquad \cdot \left[(n_{1m} - 1)^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+1} + a_\delta n_{1m} (-n_{1m} + \\
\qquad + 4 - q) A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\
a_\delta \left[(3 - n_{1m})(-n_{1m} + 6 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,-n_{1m}+3} - \\
\qquad - (a_\delta - 1) \left[(n_{1m} - 2)^2 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] \cdot A_{1m,-n_{1m}+2} - \\
\qquad - a_\delta (-n_{1m} + 1)(-n_{1m} + 5 - q) A_{1m,-n_{1m}+1} + \\
\qquad + (a_\delta - 1) n_{1m} (-n_{1m} + 1) A_{1m,-n_{1m}} = 0, \\
\hline
a_\delta \left(4 - q + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,1} - (a_\delta - 1) \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} A_{1m,0} + \\
\qquad + a_\delta (3 - q) A_{1m,-1} + 12 (a_\delta - 1) A_{1m,-2} = 0, \\
a_\delta \left[2(5 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,2} - (a_\delta - 1) \left(1 + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,1} = 0 \\
a_\delta \left[3(6 - q) + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right] A_{1m,3} - (a_\delta - 1) \left(4 + \right. \\
\qquad \left. + \frac{\chi_m r_1^2}{\nu^2} \right) A_{1m,2} - a_\delta (5 - q) A_{1m,1} = 0.
\end{array} \right\} \tag{18}$$

Coeficienții $A_{1m,-n_{1m}}$ sînt arbitrari și reprezintă constantele de integrare. În acest caz însă, este necesar ca în prima ecuație (18) coeficientul lui $A_{1m,-n_{1m}}$, să fie nul ceea ce determină valorile lui χ_m în funcție de n_{1m} arbitrar ales

$$\chi_m = n_{1m}\,(-\,n_{1m} + 3 - q)\,\frac{\nu^2}{r_1^2}\,. \qquad (19)$$

Astfel pentru $n_{1m} > 3 - q$, $\chi_m < 0$, iar soluția f_{3m} (14) va cuprinde funcții trigonometrice în locul acelora hiperbolice.

Pentru a studia convergența soluției se va considera $n \to \infty$; ecuația (17) devine

$$A_{1m,n+1} - \left(1 - \frac{1}{a_\delta}\right)(A_{1m,n} - A_{1m,n-2}) - A_{1m,n-1} = 0. \qquad (20)$$

Soluția acestei ecuații cu diferențe va fi, notînd prin λ_1, λ_2, λ_3 trei constante arbitrare

$$(A_{1m,n})_{n\to\infty} = \lambda_1\left(1 - \frac{1}{a_\delta}\right)^n + \lambda_2 + (-1)^n\,\lambda_3. \qquad (21)$$

Raportul a doi termeni consecutivi ai soluției (16) pentru valori mari ale lui n și restul R al sumei începînd de la termenul A_{1w,n_2} va fi, dacă se consideră $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\left(\frac{A_{1m.n+1}}{A_{1m,n}}\right)_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}\ \nu\theta} = \frac{1 - \dfrac{1}{a_\delta}}{\mathrm{ch}\ \nu\theta}\,;\quad R = \frac{A_{1m,n_2}}{1 - \dfrac{1 - \dfrac{1}{a_\delta}}{\mathrm{ch}\,\nu\theta}}\,; R_{max} = a_\delta \cdot A_{1m,n_2} \qquad (22)$$

Se vede astfel că soluția (16) este totdeauna convergentă, dacă n_1 este finit, iar pentru $n \to \infty$, $R \to 0$.

Soluția generală a ecuației (1) se poate scrie astfel [1]

$$\begin{aligned} p = p_\infty - p^\star + ax_3 = \frac{A_\delta\,\mu_1 r_1}{\delta_1^q}\,(I_1 + C_1 I_2) \,- \\ -\sum_{m=1}^{\infty}\,[(A_{3m}\,\mathrm{sh}\sqrt{\chi_m}\,x_3 + B_{3m}\,\mathrm{ch}\sqrt{\chi_m}\,x_3) \cdot \sum_{n=-n_{1m}}^{\infty} \frac{A_{1m,n}}{\mathrm{ch}^n\nu\theta} + ax_3 + C_2 \end{aligned} \qquad (23)$$

După cum s-a arătat, toți coeficienții și constantele acestei soluții pot fi funcții de timp, în cazul cînd forțele exterioare sau vitezele variază. Soluția cuprinde $3\,m + 3$ constante arbitrare $A_{1m,-n_{1m}}$, A_{3m}, B_{3m}, C_1, C_2 și a, cu ajutorul cărora se pot îndeplini orice condiții pe frontiere, într-un număr oricît de mare de puncte. Dacă axele $O\,x_1\,x_3$ se află într-un plan situat la distanțele $-b_1$ și $+b_2$ de la capetele suprafeței de lărgime cea mai mică $b = b_1 + b_2$, (22) se poate simplifica din cauza simetriei mișcării față de planul median. Cum, pentru $\lambda = \frac{b}{2r_1} \to \infty$, $p \to p_\infty$, iar suma din (22) trebuie să se anuleze, se va pune $\frac{A_{3m}}{\operatorname{sh}\sqrt{\chi_m}\frac{b_1 - b_2}{2}} = \frac{\mathcal{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\, r_1\lambda}$.

Astfel rezultă

$$p = \frac{A_\delta \mu_1 r_1}{\delta_1^q}(I_1 + C_1 I_2) - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mathcal{A}_{3m}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\, r_1\lambda}\left(\frac{A_{1m,n_2+1}}{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1}{a_\delta}}{\operatorname{ch}\nu\theta}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=-n_{1m}}^{n=n_2} \frac{A_{1m,n}}{\operatorname{ch}^n \nu\theta}\right) \times \operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\left(x_3 + \frac{b_1 - b_2}{2}\right) + C_2 \tag{24}$$

Condițiile la limită $p = p_0$ pentru $x_3 = -b_1$ și $x_3 = b_2$ dau apoi

$$\frac{A_\delta \mu_1 r_1}{\delta_1}(I_1 + C_1 I_2) + C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{3m} \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\frac{b}{2}}{\operatorname{ch}\sqrt{|\chi_m|}\, r_1\lambda}$$

$$\left(\frac{A_{1m.n_2+1}}{1 - \cfrac{1 - \cfrac{1}{a_\delta}}{\operatorname{ch}\nu\theta}} + \sum_{n=-n_{1m}}^{n=n_2} \frac{A_{1m.n}}{\operatorname{ch}^n \nu\theta}\right) + p_0 \tag{25}$$

Se remarcă astfel că prima fracție din membrul al doilea este egală cu unitatea pentru $\chi_m > 0$, iar pentru $\chi_m < 0$ la numărător apare cos în loc de ch, ca și în formula (24). Deoarece $\mathcal{A}_{3m}$ este un factor real de amplificare pentru $A_{1m,n}$, care la rîndul lor sînt funcții liniare de $A_{1m-n_{1m}}$ urmează că în total rămîn $m + 2$ constante distincte cu ajutorul cărora se pot îndeplini condițiile (25) și se poate impune, în plus, ca presiunile să aibă valori prescrise într-o serie de puncte arbitrare. Aceste puncte pot fi alese în secțiunea inițială $\theta = \theta_1$, unde, datorită simetriei față de planul median, se obțin în realitate un număr dublu de puncte corespunzătoare legii prescrise de distribuție a presiunilor, sau în genere ele se pot găsi pe o curbă dată, cu presiuni cunoscute în fiecare punct.

Se observă că o aproximare foarte bună a lui δ se obține dacă se consideră expresia cunoscută pentru suprafețele cilindrice cu joc radial, pusă însă sub o formă mai generală pentru a ține seama de erorile ce ar apare datorită mărimii neobișnuite a acestui joc (fig. 2)

$$\delta = \delta_2\,[1 + \bar{a}_\delta (1 - \cos \bar{\nu}\theta)]. \tag{26}$$

Punînd apoi $\Delta = (1 + \bar{a}_\delta)\,\delta_2$, $\alpha = \dfrac{\bar{a}_\delta}{1 + \bar{a}_\delta}$ și făcînd substituția $\vartheta = \pi - \bar{\nu}\theta$, se ajunge la problema lubrificației suprafețelor cilindrice cu alunecare și cu joc radial, pentru care însă viteza relativă echivalentă de alunecare este dată de paranteza mare a expresiei (7). Toate rezultatele găsite cu această ocazie (1) pot fi apoi aplicate direct la cazul rostogolirii. Se remarcă totuși că soluția aceasta are o convergență sensibil mai redusă decît (24), deși este asemănătoare ca structură. În adevăr, pentru $n \to \infty$ raportul a doi coeficienți consecutivi pentru dezvoltările în $\sin n\vartheta$ și $\cos n\vartheta$ cu ajutorul cărora se construiește soluția în acest caz, este

$$\left(\frac{A_{1m,n+1}}{A_{1m,n}}\right)_{n\to\infty} = 1 + \frac{1}{\bar{a}_\delta} - \sqrt{\frac{1}{\bar{a}_\delta}\left(2 + \frac{1}{\bar{a}_\delta}\right)}, \tag{27}$$

iar pentru exemplul din figura 2 $\bar{a}_\delta = 30\,273$, față de $\bar{a}_\delta = 1\,047$ din formula (22).

În cele precedente s-a ajuns la o rezolvare a problemei presupunînd că unghiul Θ (fig. 1) are valori foarte mari față de majoritatea cazurilor practice. Dacă se admite că Θ, θ_1, θ_2 sînt mici, se poate aproxima grosimea peliculei de fluid cu ajutorul formulei

$$\delta = \delta_2\, e^{\tilde{\nu}\theta^2} \tag{28}$$

În figura 3, s-a reprezentat variația lui δ dată de formula (28) față de aceea exactă, într-un caz mai defavorabil, adică pentru un unghi la centru destul de mare ($\Theta \sim 40°$) al zonei fluide portante. La valori Θ mai reduse, aproximația se îmbunătățește ; de asemenea relația (28) poate reprezenta mai bine cazul cînd r_1 și r_2 sînt de semne contrare (ambele suprafețe convexe).

Această expresie are de altfel avantajul de a ține seama într-o măsură oarecare de deformațiile care intervin în zona de contact și care sînt de același sens cu abaterile pe care (28) le dă față de suprafețele perfect circulare. Soluția p_∞ (11) are aceeași expresie, I_1 și I_2 pot fi date de (12) sau, dacă se introduce δ din (28), rezultă, notînd cu Φ funcția erorilor,

$$\left.\begin{aligned}
I_{1,q=0} &= \int_0^{\Theta} \frac{d\theta}{\delta^3} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}\,\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}}\,\delta_2^3}\,\Phi\left(\sqrt{3\tilde{\nu}}\,\theta\right),\\
I_{2,q=0} &= I_{1,q=1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}}\,\delta_2^2}\,\Phi\left(\sqrt{2\tilde{\nu}}\,\theta\right),\\
I_{2,q=1} &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\tilde{\nu}^{\frac{3}{2}}\,\delta_2}\,\Phi\left(\sqrt{\tilde{\nu}}\,\theta\right).
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Ecuația (15) se scrie apoi

$$\frac{d^2 f_{1m}}{d\theta^2} + 2\,(3-q)\,\tilde{\nu}\,\theta\,\frac{d f_{1m}}{d\theta} + r_1^2\,\chi_m\,f_{1m} = 0. \tag{30}$$

Făcînd substituțiile [2]

$$\theta = \frac{\xi}{2\sqrt{5(3-q)\tilde{\nu}}}\,;\ f_{1m} = u\,e^{-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(3-q)\tilde{\nu}}{5}}\,\xi^2} \tag{31}$$

ecuația (30) devine

$$4\,\frac{d^2 \mu}{d\xi^2} = \left\{ \xi^2 - \sqrt{\frac{4}{5\,(3-q)\,\tilde{\nu}}}\,[\,\chi_m\,r_1^2 - (3-q)\,\tilde{\nu}\,]\right\} u. \tag{32}$$

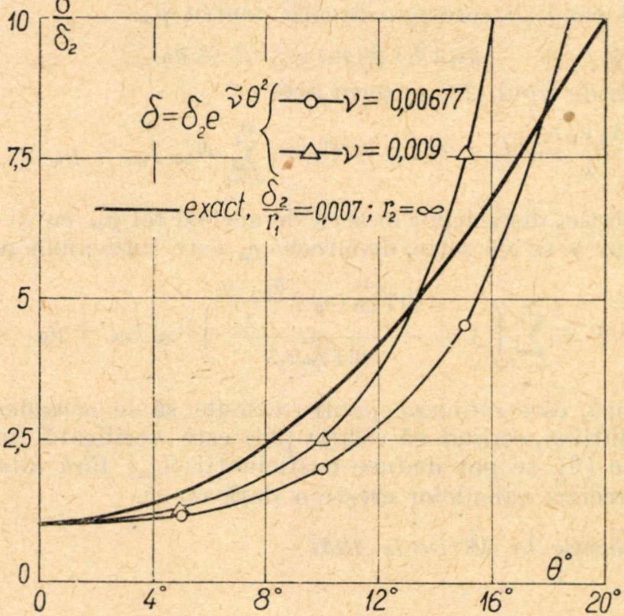


Fig. 3

Fie

$$\varkappa = \frac{2}{\sqrt{5\,(3-q)\tilde{\nu}}}\,[\,\chi_m\,r_1^2 - (3-q)\,\tilde{\nu}\,] - 1 = 4\,m + 1 \text{ sau } 2\,m \tag{33}$$

în care m este un număr întreg, pozitiv. Soluția u se exprimă în acest caz cu ajutorul polinoamelor lui Hermite, $H_m(\xi)$, sau, trecînd din nou la variabilele f_{1m} şi θ, se obţine

$$\left.\begin{aligned}
f_{1m} &= 2^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{1}{2}[(3-q)\tilde{\nu}+\sqrt{5(3-q)\tilde{q}}]\,\theta^2} H_m(\sqrt[4]{5(3-q)\tilde{\nu}}\,\theta) \text{ pentru } \chi = 4m+1\\
f_{1m} &= (-1)^m e^{-\frac{(3-q)\tilde{\nu}}{2}\theta^2} H_m(\sqrt[4]{20(3-q)\tilde{\nu}}\,\theta), \qquad ,, \quad \chi = 2m\\
H_m(\xi) &= (-1)^m e^{\xi^2} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-\xi^2}
\end{aligned}\right\} \quad (34$$

În fine, din (33) se poate deduce imediat χ_m, dînd diferite valori lui m. Soluţiile (34) sînt particulare, totuşi soluţia p se poate construi cu ajutorul acestora. Ea are forma (23), unde suma în raport cu n din paranteza mare trebuie înlocuită prin expresiile (34). Apar astfel $2m+3$ constante de integrare cu ajutorul cărora se pot pune orice condiţii pentru presiuni pe frontiere. Dacă , în afară de capetele rolei, presiunile au valorile p_0 la unghiurile θ_1 şi $-\theta_2$, se vor determina mai întîi constantele C_1, C_2 punînd condiţii corespunzătoare pentru p_∞

$$p_\infty(\theta_1) = p_\infty(-\theta_2) = p_0 \tag{35}$$

Condiţiile de tipul (25) se scriu apoi

$$\frac{A_8 \mu_1 r_1}{\delta_1}(I_1 + C_1 I_2) + C_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_{3m} f_{1m} + p_0 \tag{36}$$

din această relaţie, dezvoltînd în serii de acelaşi fel p_∞ ca şi f_{1m} se deduc valorile $\mathcal{A}_{3m}$, iar p se va scrie, deoarece χ_m este totdeauna pozitiv,

$$p = \sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\,(x_3 + \frac{b_1-b_2}{2})}{\operatorname{ch}\sqrt{\chi_m}\,r_1\lambda}\right)\mathcal{A}_{3m} f_{1m} + p_0 \tag{37}$$

În practică, este suficient pentru calcule să se considere un număr finit, m, de soluţii şi, scriind că relaţia (36) este verificată într-un număr egal de puncte (θ), se pot deduce coeficienţii $\mathcal{A}_{3m}$, fără alte dezvoltări. Evident că precizia calculelor creşte o dată cu m.

Primită la redacţie la 28 iunie 1957.

СМАЗКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ КАЧЕНИЯ И СКОЛЬЖЕНИЯ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается тонкослойное течение вязкой жидкости между двумя цилиндрическими поверхностями с относительным движением качения и скольжения. Путем некоторых сокращений в правой части дифференциального уравнения давлений и апроксимации выражения

толщины жидкого слоя при помощи гиперболических функций получается решение трехмерного движения и соответственно величина давления в каждой точке.

Можно также рассматривать показательные выражение для той же толщины при небольших центральных углах несущей зоны, при твердых поверхностях с радиусом кривизны противоположного знака или при учете местных деформаций. В этих случаях решение можно представить в простом виде при помощи многочленов Эрмита.

LUBRIFICATION DES SURFACES CYLINDRIQUES À MOUVEMENT DE ROULEMENT ET DE GLISSEMENT

(RÉSUMÉ)

On envisage le mouvement en couches minces d'un fluide visqueux, limité par des parois ayant un mouvement relatif combiné de roulement et de glissement. En introduisant quelques simplifications dans le deuxième membre de l'équation differentielle des pressions et en approximant l'épaisseur de la couche fluide, au moyen de fonctions hyperboliques, on obtient la solution générale du mouvement, c'est-à-dire la valeur des pressions en tout point.

Si l'angle total, au centre de la zone portante est réduit, ou bien pour les surfaces solides dont les rayons de courbure sont de signes contraires ou encore si l'on tient compte des déformations élastiques locales, on peut admettre une expression exponentielle de la distance entre les deux surfaces. Dans ce cas, la solution générale peut être exprimée simplement au moyen des polynômes d'Hermite.

BIBLIOGRAFIE

1. N. Tipei, *O metodă generală pentru studiul mișcării în pelicula de lubrifiant dintre două suprafețe de dimensiuni finite.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. II, 1951, p. 27.
2. E. Kamke, *Spravocinik po obîknovennîm differentialnîm uravneniam.* Moscova, 1951.

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A SARCINII PE OSIILE VAGOANELOR DE CALE FERATĂ

DE

V. N. CONSTANTINESCU, C. TANASICIUC şi V. GRABARI

1. INTRODUCERE

Determinarea experimentală a sarcinii pe osiile vagoanelor de cale ferată a avut ca scop principal stabilirea influenţei variaţiilor sarcinii pe osii asupra funcţionării lagărelor acestora. Într-adevăr pentru calculul şi proiectarea lagărelor, sarcina este considerată constantă şi de asemenea şi viteza unghiulară de rotaţie a osiei. Viteza unghiulară a osiei poate fi într-adevăr considerată ca fiind constantă, deoarece, pe parcurs, variaţia vitezei vagonului este suficient de lentă pentru a putea face această ipoteză. În schimb, este posibil ca sarcina pe lagăre în timpul mersului să aibă variaţii care să influenţeze defavorabil funcţionarea lor şi anume, provocînd variaţii ale grosimii stratului de lubrifiant, din care să rezulte pentru anumite intervale de timp grosimi minime ale stratului de lubrifiant mai mici decît cele prevăzute printr-un calcul în regim permanent (sarcini şi viteze constante). Mai mult, este posibil ca să se producă periodic funcţionări în regim semi fluid, care, în funcţie de durata lor, ar putea provoca aprinderea osiilor.

Într-o lucrare anterioară [1] s-a studiat, din punct de vedere teoretic, funcţionarea lagărelor fără joc radial supuse la sarcini şi viteze variabile, obţinîndu-se totodată o metodă pentru calculul lor, în ipoteza că se cunoaşte variaţia sarcinii în funcţie de timp. Pentru a aplica această metodă în vederea unui calcul mai exact al lagărelor osiilor de cale ferată este necesară determinarea pe cale experimentală a sarcinii $P(t)$ ca funcţie de timp, în diferitele condiţii de funcţionare care intervin în realitate.

Aceste determinări pot fi utile şi pentru calculul altor organe ale vagoanelor de cale ferată, în special la oboseală, ca arcuri, osii, cadre etc., sau în vederea altor scopuri aprecierea oscilaţiilor şi acceleraţiilor vagoanelor etc.

Sarcina pe o osie de cale ferată poate fi pusă sub forma

$$P = P_0 + \Delta P, \tag{1}$$

în care P_0 este sarcina statică (provenită din greutatea proprie a vagonului şi a încărcăturii), constantă în timp, iar ΔP este sarcina dinamică, variabilă în timp.

Existenţa unei sarcini dinamice ΔP se datoreşte unor factori multipli. Astfel unul dintre principalii factori, îl constituie şocurile periodice datorită trecerii peste rosturile dintre şinele de cale ferată. Amplitudinea acestor şocuri depinde de diametrul roţii, de sarcina pe roată, de viteza de translaţie, de lăţimea rostului dintre şine, de eventuala denivelare dintre cele două şine etc. O altă cauză a producerii unei sarcini dinamice ΔP o poate constitui şi eventualele neregularităţi ale căii în plan vertical, fenomen care depinde de aceeaşi parametri enumeraţi mai sus şi în special de viteza de deplasare şi de ordinul de mărime al neregularităţilor. De asemenea şi neregularităţile în plan orizontal ale căii constituie o sursă de variaţie a sarcinii pe osie, deoarece provoacă oscilaţii laterale şi de ruliu ale vagonului. În general toate oscilaţiile vagonului sînt surse de variaţie periodică a sarcinii pe osie din cauza reacţiunilor pe care le provoacă pe diferitele organe ale vagonului şi implicit pe osii, prin intermediul cărora vagonul se sprijină pe cale.

În sfîrşit o altă cauză de variaţie a sarcinii pe osie o constituie variaţiile forţei de tracţiune şi a forţelor de inerţie, deoarece punctele de legătură dintre vagoane sînt situate pe o linie orizontală care în general nu trece prin centrul de greutate al vagonului.

Pentru a pune în evidenţă variaţia sarcinii în funcţie de timp, precum şi influenţa diferiţilor factori şi în special a vitezii de deplasare asupra acesteia, s-au făcut măsurătorile experimentale descrise mai jos.

DESCRIEREA EXPERIENŢELOR

Măsurarea sarcinei pe lagărul osiei s-a făcut utilizînd metoda tensometriei rezistive, adică prin intermediul măsurării deformaţiei, respectiv eforturilor pe un element care preia sarcina pe care dorim să o măsurăm.

Metoda se bazează pe principiul variaţiei rezistenţei electrice a unui conductor în funcţie de alungirea acestuia. Troductorul tensometric (fig. 1) format dintr-un fir de constantan foarte subţire (0,005 mm diametru) care este prins între două foiţe de ţigară. El se lipeşte pe suprafaţa metalică a cărei deformaţie dorim să o măsurăm. Cînd aceasta suferă o deformaţie, de exemplu o întindere, firul tensometrului este şi el tensionat suferind aceeaşi deformaţie ca şi piesa respectivă. Din cauza acestei tensionări lungimea l a firului creşte, însă cu o valoare redusă (egală cu alungirea piesei); în schimb, din cauza contracţiei, secţiunea s a firului scade sensibil. Atunci rezistenţa electrică a firului

$$R = \rho \frac{l}{s}, \tag{2}$$

(ρ = rezistivitatea), creşte.

Pentru a pune în evidență aceste variații de rezistență, tensometrul activ T_a este montat într-o punte (fig. 2) împreună cu încă un tensometru pasiv T_p și cu două rezistențe R_1, R_2, dintre care una este variabilă.

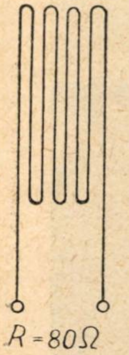


Fig. 1

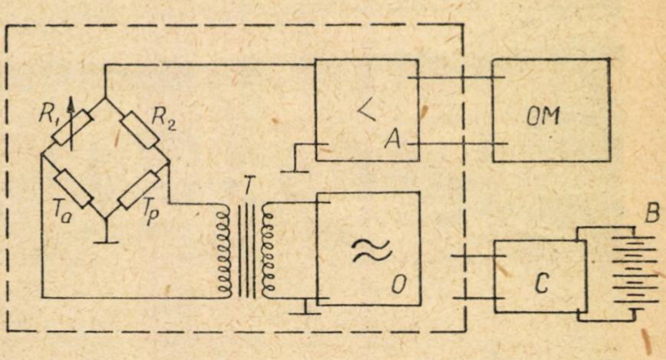


Fig. 2

Puntea este alimentată de la oscilatorul O, prin intermediul transformatorului T. Cu ajutorul rezistenței reglabile R_1 se echilibrează puntea astfel încît

$$R_1\, T_p = R_2\, T_a. \tag{3}$$

Această echilibrare este efectuată în scopul de a nu avea tensiune între punctele între care se montează amplificatorul A, pentru situația la care tensometrul T_a trebuie să dea originea măsurătorii. Prin echilibrarea punții se corectează atît diferența de rezistențe dintre tensometrele T_a și T_p (care nu pot fi riguros identice), cît și diferențele care apar din eventualele pretensionări, variații de temperatură etc.

În momentul cînd tensometrul T_a suferă o alungire, (tensometrul pasiv T_p avînd tot timpul aceeași rezistență), puntea se desechilibrează și amplificatorul A primește o tensiune variabilă în timp, în funcție de variațiile de rezistență ale tensometrului T_a. Amplificatorul A se compune dintr-un amplificator de tensiune și unul de putere, astfel încît variațiile de tensiune primite se transmit la oscilograful magnetic OM ca variații de intensitate. Aceste variații sînt înregistrate pe o hîrtie fotografică, sau pe film, după tipul oscilografului. În acest mod, amplificate la o anumită scară, pot fi măsurate deformațiile și deci tensiunile în punctul în care a fost lipită marca tensometrică.

Pentru a măsura sarcina pe osie, s-au lipit mărcile tensometrice pe foaia superioară a arcului de care este prinsă cutia de unsoare a osiei. Acesta a fost de altfel singurul element accesibil care să fie direct și rigid legat de cuzinetul osiei. Poziția tensometrelor pe arc, precum și montajul în exteriorul vagonului este arătat în fotografiile din figura 3 *a* și *b* ca și în desenul arcului, arătat în figura 4.

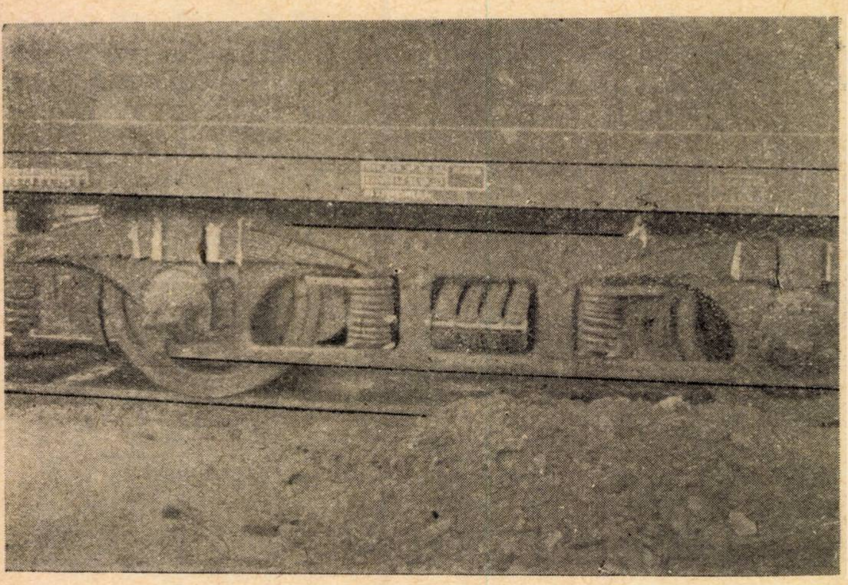


Fig. 3 *a*

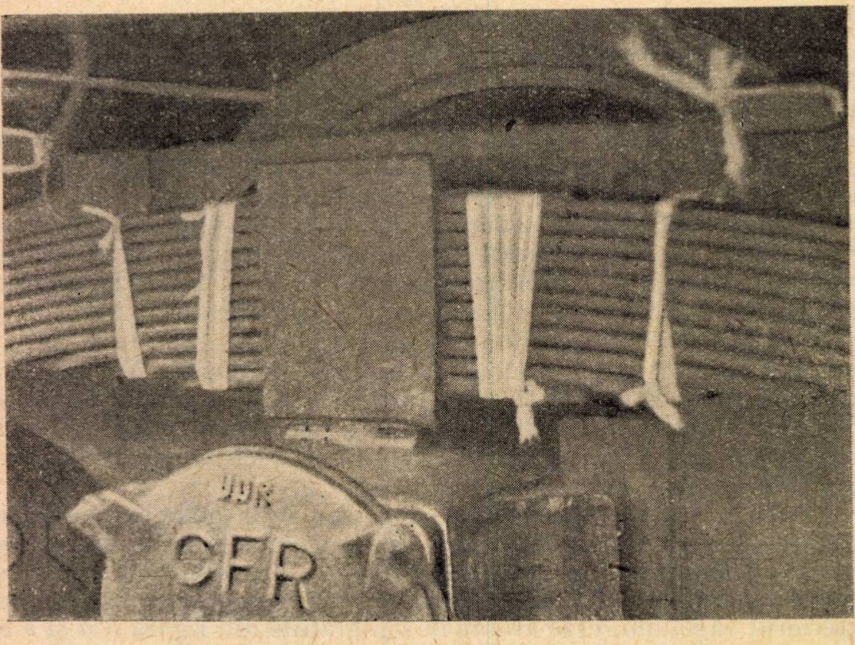


Fig. 3 *b*

Deoarece eventualele eforturi orizontale sînt preluate de ghidajele cutiei de ungere, arcul suportă numai sarcini verticale. Pentru a elimina eventualele diferențe în înregistrare de o parte și de alta a planului median al arcului, s-au montat cîte două tensometre, simetric, care au fost legate în serie (evident și pentru tensometrul pasiv T_p s-au utilizat două tensometre, de asemenea legate în serie). În acest mod, chiar dacă dintr-un motiv oarecare se produce în arc o distribuție de eforturi disimetrică, datorită montajului făcut, aceasta nu este înregistrată.

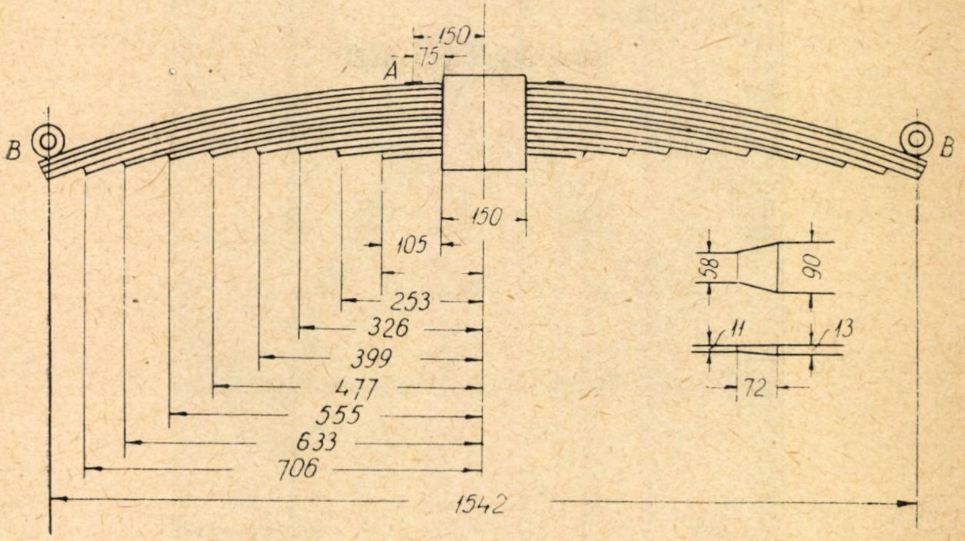


Fig. 4

Pentru verificarea rezultatelor, s-au făcut înregistrări simultane cu ajutorul a două sisteme de amplificare. Aceste aparate se compun din partea notată cu *I* în schema din figura 2, adică ele conțin atît oscilatorul, transformatorul și puntea, cît și amplificatorul. Primul sistem, dă direct variațiile de intensitate sub forma unei curbe continue, iar cel de al doilea, sub forma unor oscilații modulate. Din această cauză s-au utilizat pentru înregistrare 2 oscilografe diferite : unul cu înregistrarea pe hîrtie fotografică și unul cu înregistrarea pe peliculă fotografică.

Alimentarea acestor aparate s-a făcut de la bateria de acumulator *B* (fig. 2) a vagonului, prin intermediul unei comutatrice *C* care transformă curentul continuu primit în curent alternativ cu 50 Hz la 220 V. După comutatrice s-a montat un autotransformator, pentru a corecta scăderea de tensiune a comutatricei în plină sarcină.

Etalonarea înregistrărilor s-a făcut după efectuarea măsurătorilor, încărcînd cu greutăți cunoscute o bară de egală rezistență, pe care s-au lipit două tensometre legate în serie. În acest mod se poate etalona starea ordonatelor oscilogramelor direct în eforturi unitare σ kg/cm^2.

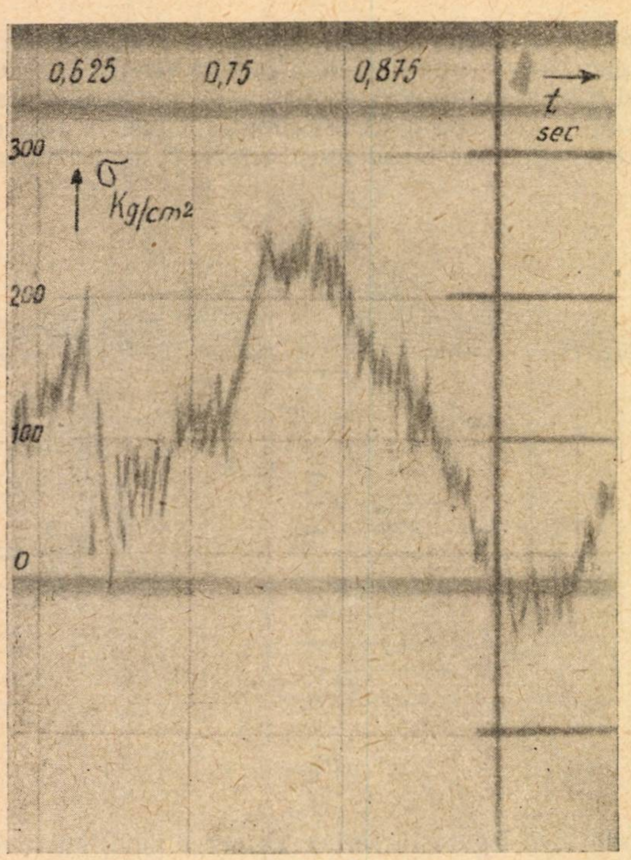

0,625
0,75
0,875
t
sec
300
200
100
0
σ
Kg/cm²

Fig. 5

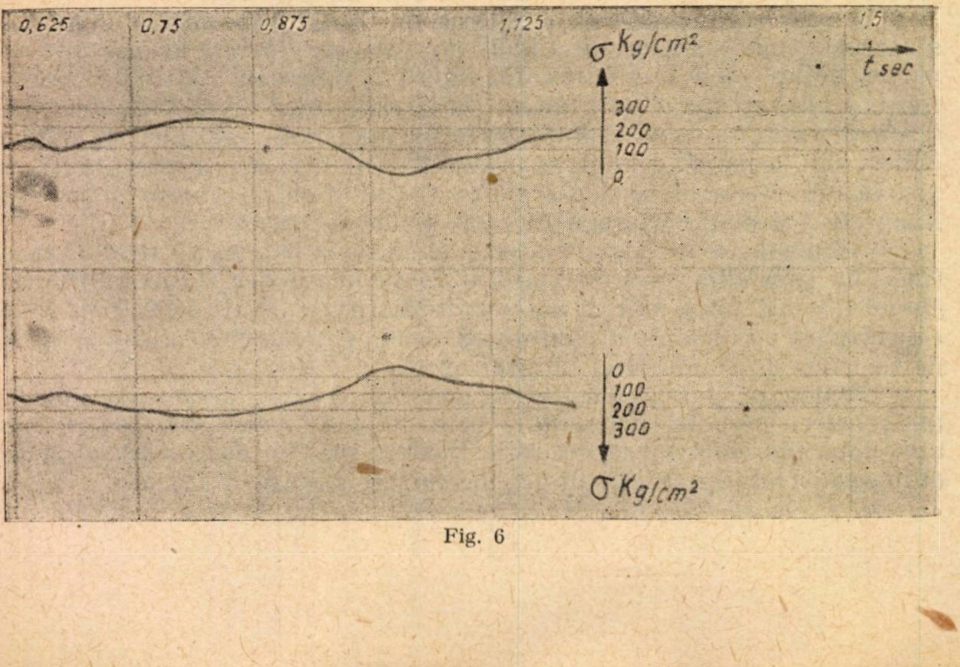

0,625
0,75
0,875
1,125
1,5
σ Kg/cm²
t sec
300
200
100
0
0
100
200
300
σ Kg/cm²

Fig. 6

Măsurătorile au fost efectuate în timpul mersului vagonului la diferite viteze, între 8—62 km/oră. Datorită faptului că lipirea tensometrelor, ca şi echilibrarea punţilor a fost făcută cu arcul suportînd întreaga încărcare statică (5 625 kg, corespunzînd unei greutăţi totale a vagonului de 45 tone), înregistrările vor da sarcina dinamică ΔP din relaţia (1).

REZULTATE EXPERIMENTALE

Rezultatele obţinute cu ambele amplificatoare sînt comparabile. Astfel, de exemplu în figura 5 şi figura 6 s-a reprezentat variaţia rezistenţei la încovoiere σ în secţiunea respectivă de pe resort, la o viteză a trenului de $V = 58$ km/oră, pentru acelaşi interval de timp. Deşi atît scara timpului, cît şi scara σ sînt diferite, reprezentarea acestor oscilograme la aceleaşi scări este aproximativ aceeaşi după cum rezultă din figura 7.

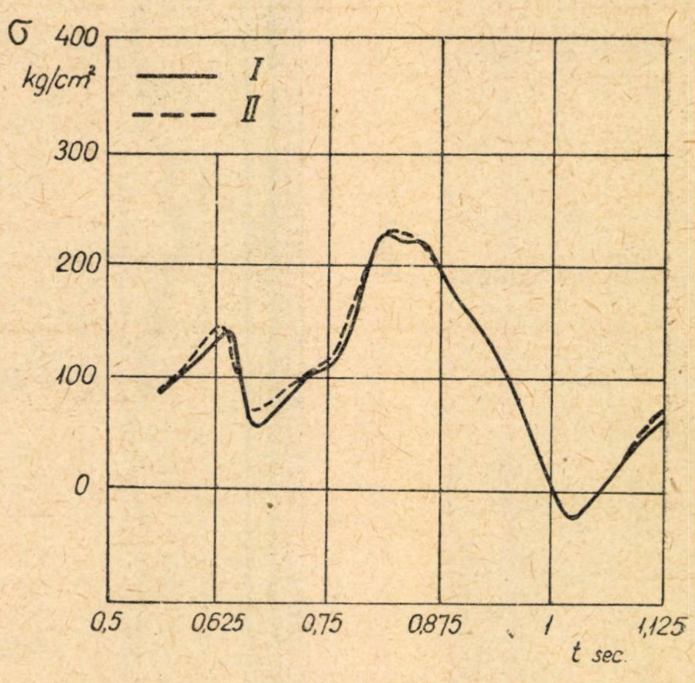


Fig. 7

De aceea vom utiliza numai oscilogramele înregistrate pe hîrtie fotografică, care dau direct variaţia efortului σ în funcţie de timp. În figurile 8—15 sînt reproduse cîteva porţiuni din aceste oscilograme, la diferite viteze de deplasare ale vagonului.

Aceste oscilograme dau variaţia efortului σ de încovoiere într-o anumită secţiune a arcului. În realitate însă interesează forţa $\Delta P(t)$ (fig. 16) care produce în secţiunea A efortul $\sigma(t)$.

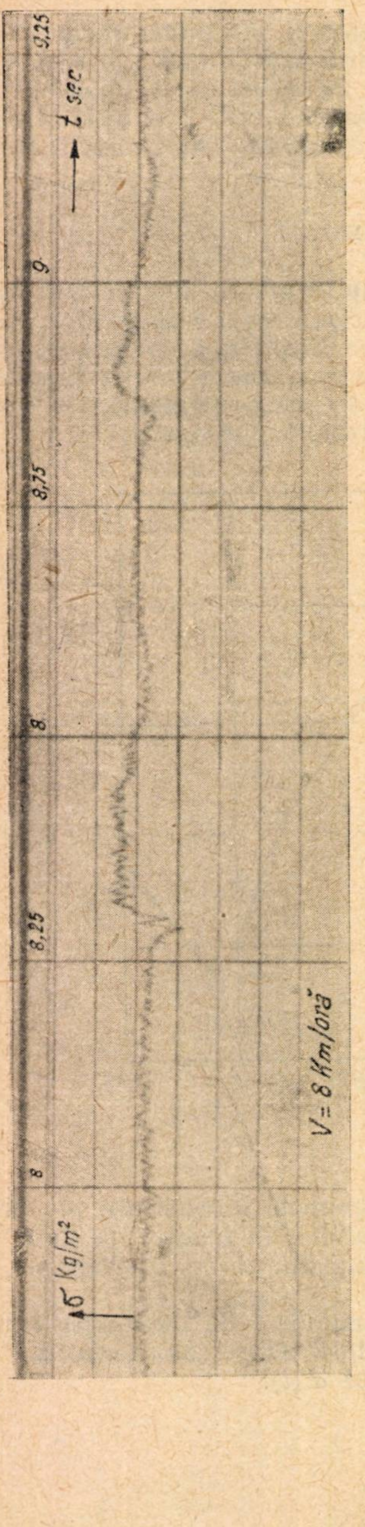

σ Kg/m²
8
8,25
8
8,75
9
9,25
t sec
V = 8 Km/oră

Fig. 8

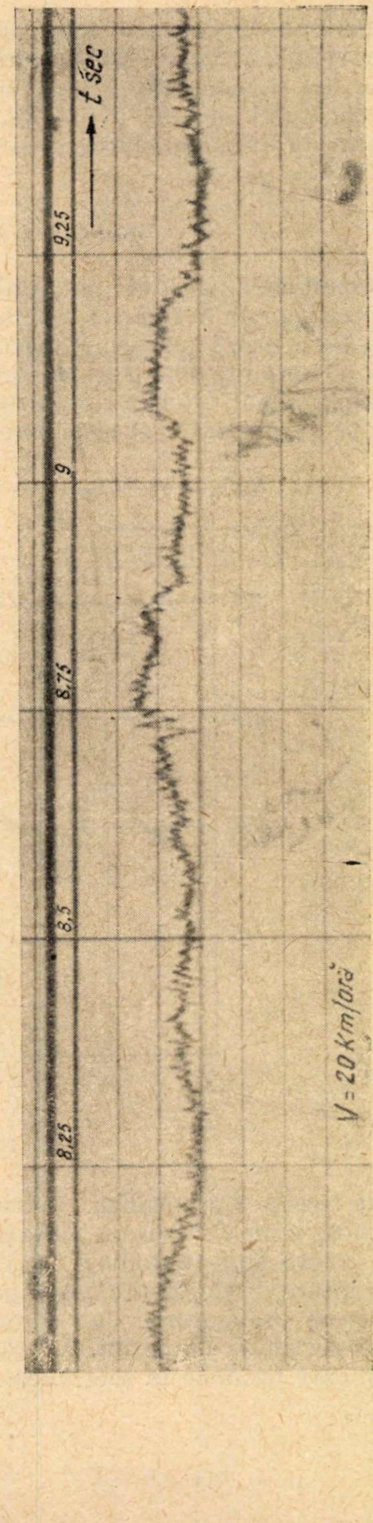

8,25
8,5
8,75
9
9,25
t sec
V = 20 Km/oră

Fig. 9

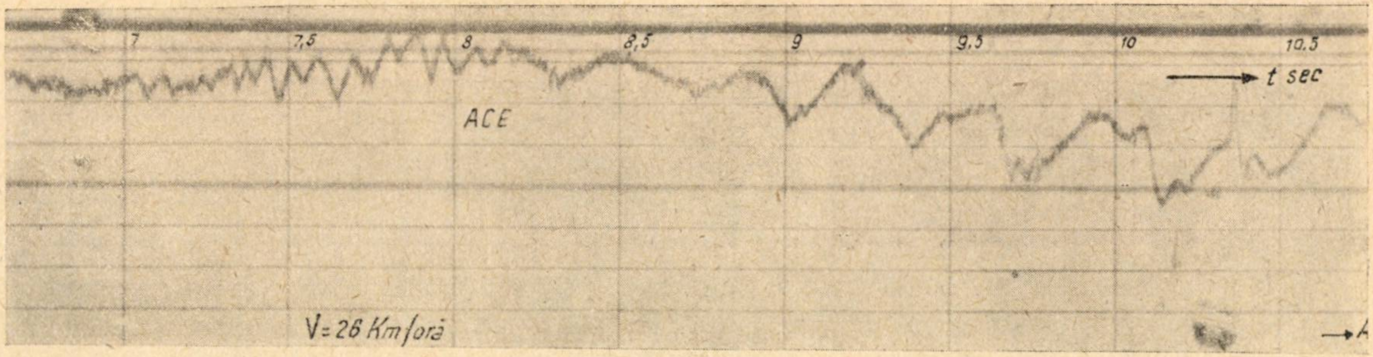

7
7,5
8
8,5
9
9,5
10
10,5
t sec
ACE
V=26 Km/oră
A

Fig. 10

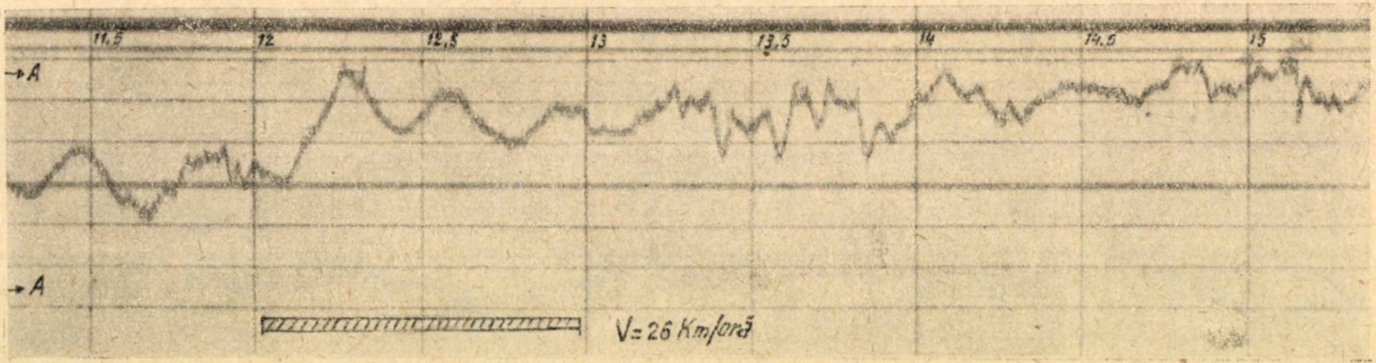

11,5
12
12,5
13
13,5
14
14,5
15
A
A
V=26 Km/oră

Fig. 11

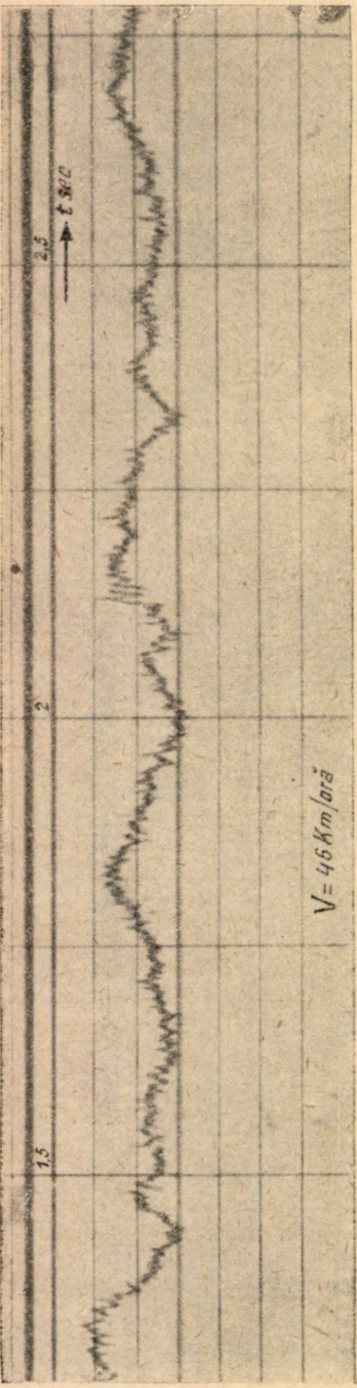


Fig. 12

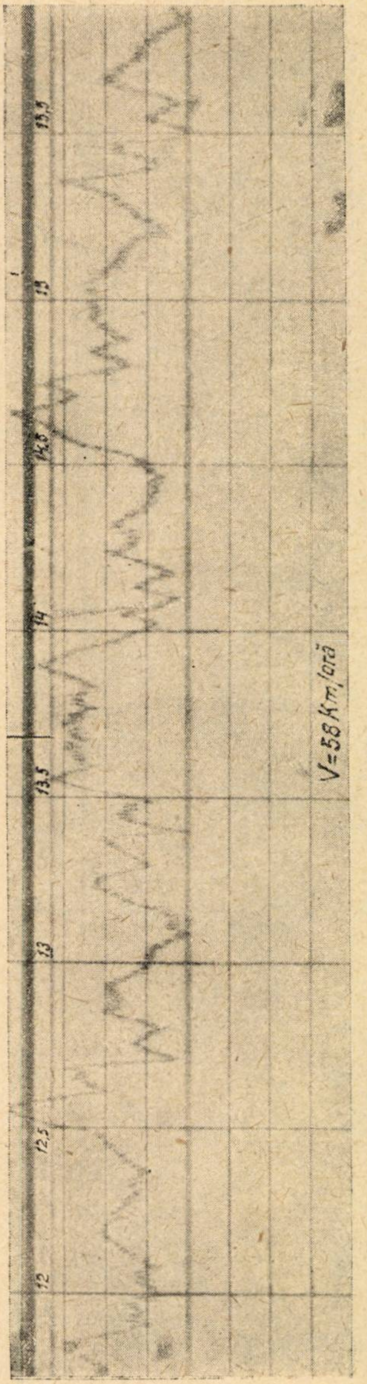


Fig. 13

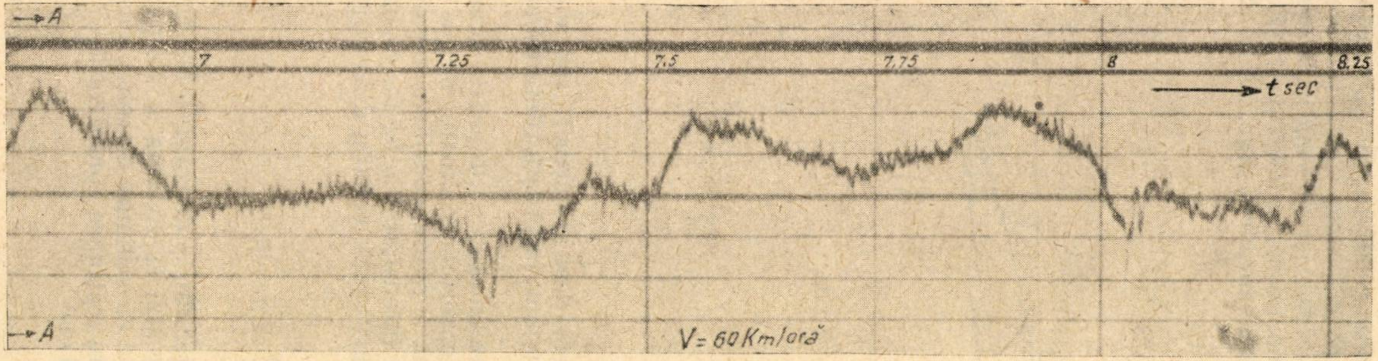

→A
7
7.25
7.5
7.75
8
8.25
→ t sec
→A
V=60Km/oră

Fig. 14

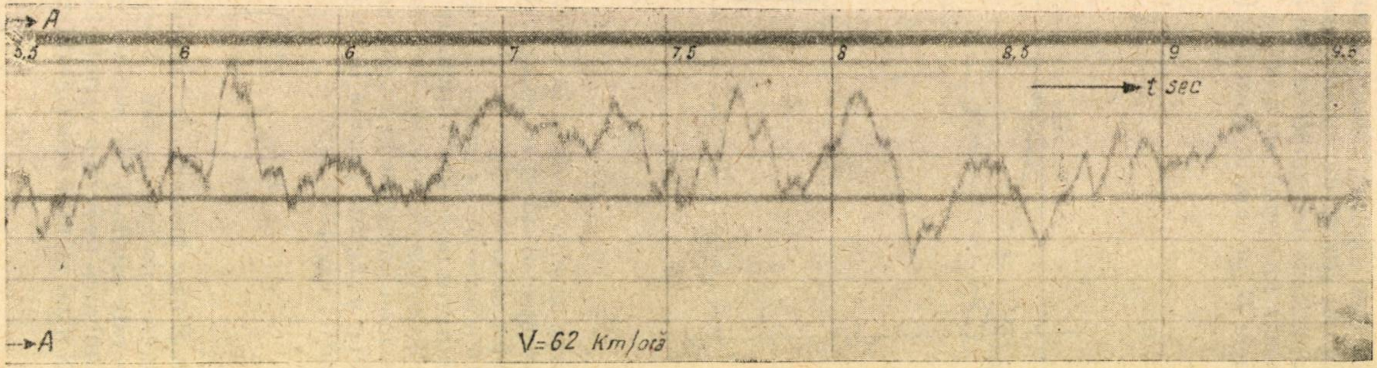

→A
5.5
6
6
7
7.5
8
8.5
9
9.5
→ t sec
→A
V=62 Km/oră

Fig. 15

În mod riguros, pentru aceasta ar trebui studiată vibrația forțată a întregului sistem de resoarte care formează suspensia vagonului, lucru desigur extrem de complicat. De aceea din acest sistem vom izola cutia de unsoare împreună au arcul și vom studia mișcarea acestuia față de reazemele B, pe care în acest caz le vom putea considera fixe. Astfel ΔP este forța care se produce în cutia de unsoare, deci în cuzinet, sau, dacă neglijăm efectul amortizor al stratului de lubrifiant, forța astfel determinată este chiar sarcina de pe osie.

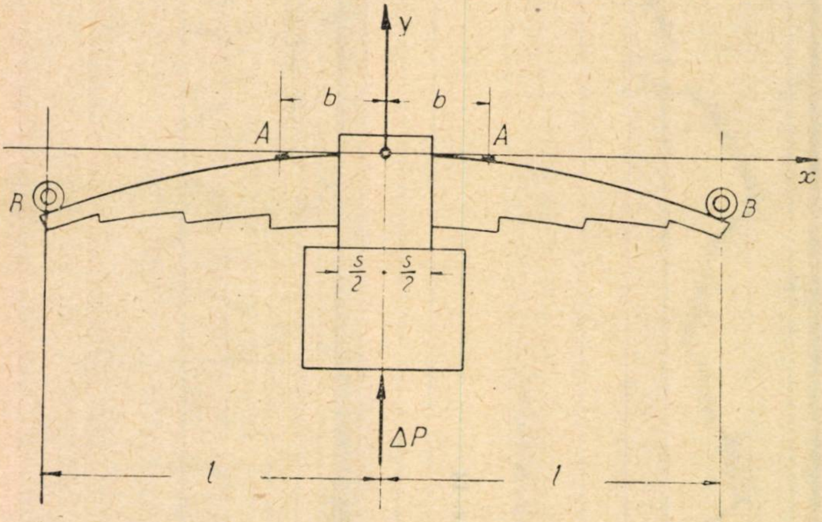


Fig. 16

În acest scop va trebui să scriem, pentru un element de arc de lățime dx, echilibrul între momentele de încovoiere, forțele tăietoare, forțele de inerție și forțele de frecare. Acestea din urmă le putem considera repartizate în mod continuu în lungul arcului, cu intensitatea q kg/m. Atunci, notînd cu y săgeata arcului în secțiunea considerată, ecuația diferențială a vibrației acestuia este

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \pm q = 0, \tag{4}$$

în care E este modulul de elasticitate al oțelului, ρ densitatea acestuia, I momentul de inerție, iar S secțiunea arcului la distanța x. Forța de frecare este afectată de semnul $\pm$ deoarece ea schimbă de semn o dată cu schimbarea de sens a variației efortului în secțiunea considerată.

Notînd soluția ecuației diferențiale (4) cu

$$y = y(x, t) \tag{5}$$

ea trebuie să satisfacă următoarele condiții la limită

$$\left.\begin{aligned}
& y(x,0) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 \\
& \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(-l,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 \\
& y(-l,t) = y(l,t) = 0 \\
& \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(-b,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(b,t) = \frac{W}{EI}\,\sigma(t)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Aceste condiții reprezintă respectiv: la $t = 0$ (momentul inițial, repausul) deplasarea și viteza normală în toate secțiunile arcului sînt nule; momentele de încovoiere în secțiunile marginale (pe reazeme) sînt nule la orice timp; săgeata în dreptul reazemelor este nulă; în sfîrșit, în cele două secțiuni simetrice la $x = \pm b$ unde s-au lipit mărcile tensometrice, momentele de încovoire sînt egale cu cele corespunzătoare variațiilor efortului de încovoiere $\sigma(t)$ înregistrat pe oscilograme.

Din soluția y s-a eliminat, după cum se vede, săgeata statică. Atunci ecuația diferențială (4) împreună cu condițiile la limită (6) definesc funcția $y(x,t)$, săgeata datorită încărcării dinamice. O dată cunoscută această funcție, forța căutată $\Delta P(t)$ este tocmai forța tăietoare la $x = 0$, adică

$$\Delta P(t) = EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0,t). \qquad (7)$$

Determinarea sarcinii dinamice ΔP pe această cale este foarte anevoioasă, datorită formei ecuației (4) în care atît I cît și S sînt funcție de x, și pentru care nu se poate găsi soluția generală. De aceea vom determina ΔP printr-o metodă aproximativă, dar mult mai simplă. Mai întîi să observăm că forța de frecare este practic constantă în timp, nedepinzînd decît într-o măsură neglijabilă de sarcina P.

Într-adevăr [2], notînd cu P' sarcina rezultată printr-un calcul în care frecarea se neglijează, sarcina care rezultă cînd se ține seama de frecarea dintre foi este, neglijînd frecarea datorită pretensionării foilor

$$P = P'(1 \pm \mu a), \qquad (8)$$

în care

$$a = \frac{\delta}{l}\left[2\sum_{n=n'+1}^{m}\frac{l_n}{l} - (n'-1)\right], \qquad (9)$$

unde m este numărul total al foilor, n' numărul foilor principale (care au aceeași lungime), iar δ grosimea unei foi.

Sarcina suplimentară suportată de resort ΔP_f datorită frecării este deci

$$\Delta P_f = P - P' = \pm \mu a P' \qquad (10)$$

În cazul măsurătorilor făcute

$$\Delta P_f = \pm \mu a(P_0 + \Delta P). \tag{11}$$

Cum μa este mic ($\mu = 0{,}3$ ca valoare maximă indicată în literatură, iar $a = 0{,}121$ în cazul resortului considerat) iar $\frac{\Delta P}{P_0} \cong 0{,}1$ ca valoare maximă rezultă că membrul secund al relației în (11) se poate neglija ΔP față de P_0 și deci

$$\Delta P_f = \pm \mu a P_0 \cong \pm 140 \text{ kg} \tag{12}$$

cu $P_0 = 5625$ kg cît este sarcina statică în cazul vagonului experimentat. Semnul + corespunde încărcării arcului, iar semnul — descărcării.

Cu alte cuvinte aproximația de a considera că ΔP_f nu depinde de ΔP revine la a presupune caracteristica arcului (fig. 17) formată din două drepte paralele cu linia $P(y_0)$ teoretică (fără frecare), în punctul y_0 corespunzător sarcinii statice P_0.

Pentru a ține seama de efectul forțelor de inerție, putem face aproximația acoperitoare că toată masa aferentă sistemului arc și cutia de unsoare este concentrată în centrul arcului, iar arcul înlocuit cu un resort ideal, fără masă, avînd aceeași rigiditate. De altfel, aproximația introdusă nu este mare, deoarece într-adevăr aproape întreaga masă este concentrată către centrul arcului. Avem atunci schema, din figura 18.

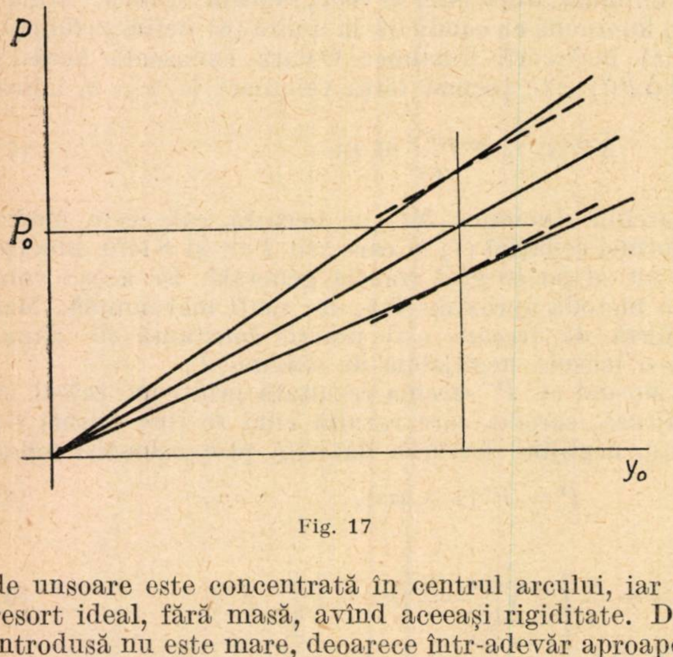


Fig. 17

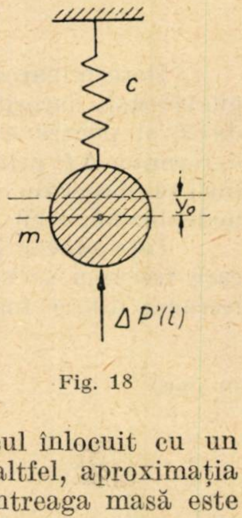


Fig. 18

Greutatea arcului este de aproximativ 108 kg, iar greutatea cutiei, 40 kg. În consecință masa m considerată este

$$m \cong \frac{150}{9{,}81} = 15{,}45 \frac{\text{kg s}^2}{\text{m}} \tag{13}$$

Pe de altă parte, rigiditatea arcului este egală cu (fig. 16).

$$C = \frac{P_0}{y_0} = \frac{6EI_0}{\eta(l-s)^3} \tag{14}$$

în care I_0 esete momentul de inerție al arcului în secțiunea centrală, iar $\eta = 1{,}3$ [2].

În aceste condiții, ecuația diferențială a mișcării se poate scrie sub forma

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + cy_0 = \Delta P' = \Delta P \mp \Delta P_f. \tag{15}$$

Ținînd seama că

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{\Delta P\,(l-b)}{2\,W}, \tag{16}$$

în care W este modulul de inerție în secțiunea $x = b$ în care s-au lipit tensometrele, atunci :

$$y_0 = \eta\frac{(l-s)^3}{l-b}\,\frac{W}{3\,E\,I_0}\,\sigma. \tag{17}$$

Ținînd seama de relațiile (14) și (17), ecuația (15) se scrie

$$\Delta P = k_1\sigma + k_2\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2} \pm \Delta P_f \tag{18}$$

în care k_1 și k_2 au expresiile

$$k_1 = \frac{2W}{l-b} \quad ; \quad k_2 = \eta\,\frac{(l-s)^3}{l-b}\,\frac{W\,m}{3\,EI_0} \tag{19}$$

sau, pentru cazul considerat

$$k_1 = 0{,}9\ \text{cm}^2 \quad ; \quad k_2 = 2{,}7 \times 10^{-4}\text{cm}^2\text{s}^2. \tag{20}$$

Cum $\sigma\,(t)$ este cunoscut, iar ΔP_f de asemenea cunoscut, fiind dat de relația (12), relația (18) permite calculul sarcinii dinamice $\Delta P(t)$.

Fie de exemplu cazul din oscilograma din figura 11 la $12 \leqslant t \leqslant 13\,s$. care reprezintă trecerea peste un rost dintre două șine, cu o viteză de 26 km/oră, arcul fiind încă influențat de solicitarea mai puternică datorită trecerii peste niște ace, petrecută cu 4 secunde mai înainte. Variația $\sigma(t)$ pentru intervalul de timp considerat este arătată în figura 19 *a*. Pe aceeași figură, diagramele *b* și *c* reprezintă $\dot{\sigma}(t)$ și respectiv $\ddot{\sigma}(t)$ obținute prin derivare grafică. Cunoscînd $\ddot{\sigma}(t)$ se poate calcula $\Delta P' = \Delta P - \Delta P_f$ și ΔP cu ajutorul ecuației (18). Aceste mărimi în funcție de timp sînt reprezentate în figura 19 diagrama *d*.

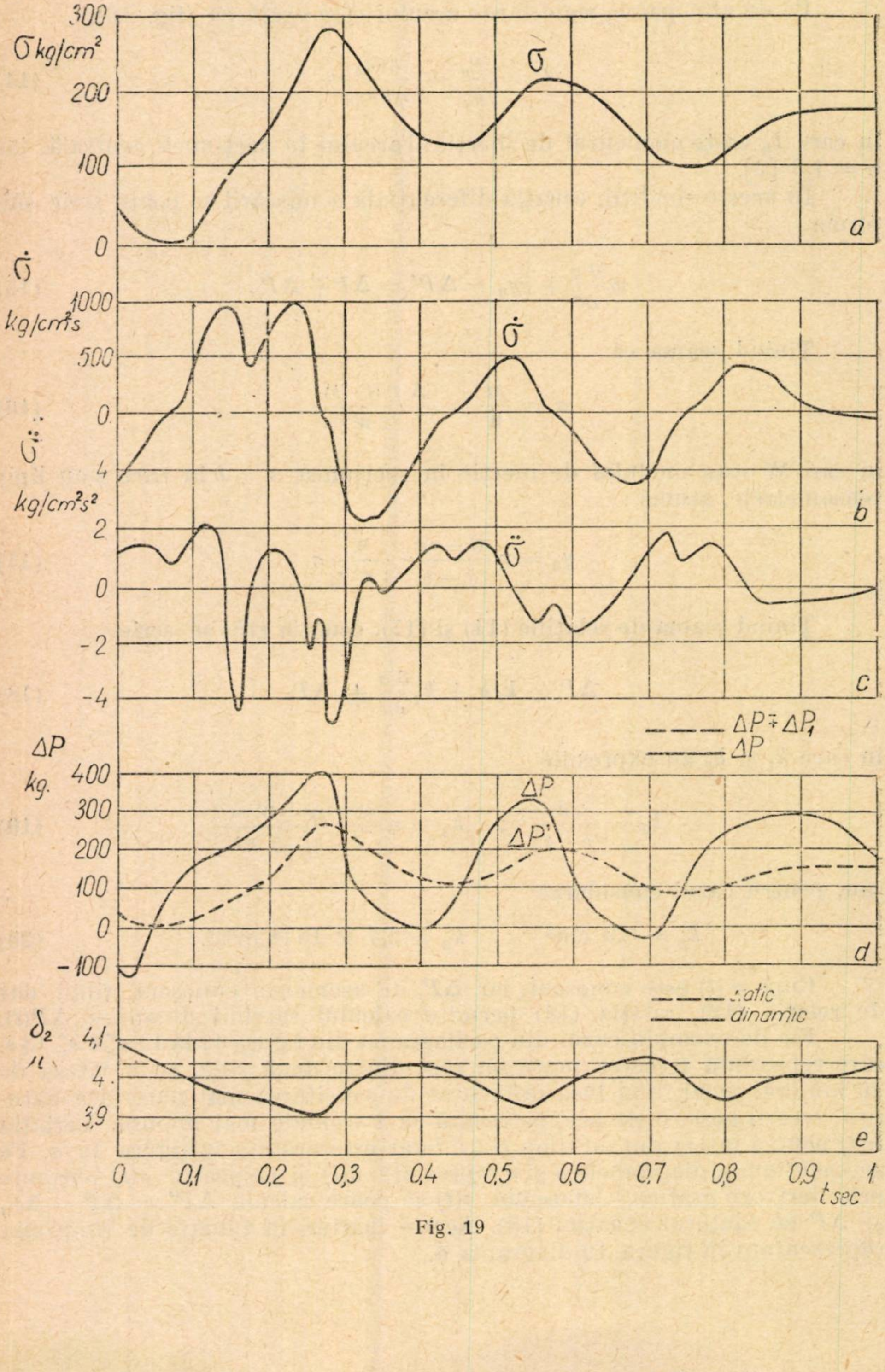

300
σ kg/cm²
200
100
0
σ
a
σ̇
1000
kg/cm²s
500
0
σ̇
σ̈
4
kg/cm²s²
2
0
-2
-4
σ̈
b
c
ΔP ∓ ΔP₁
ΔP
ΔP
kg.
400
300
200
100
0
-100
ΔP
ΔP'
d
static
dinamic
δ₂
μ
4,1
4
3,9
e
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
t sec

Fig. 19

Sarcina ΔP rezultă destul de redusă, circa 8 % din încărcarea statică. De aceea influența sarcinii dinamice ΔP asupra grosimii minime δ_2 a stratului de lubrifiant va fi de asemenea redusă.

Într-adevăr să considerăm raza osiei $r = 60$ mm, unghiul de înfășurare al cuzinetului $\Theta = 120°$ și lățimea acestuia 240 mm ($\lambda = 2$). Diametrul roții fiind $D = 1$ m, la viteza de 26 km/oră rezultă viteza unghiulară de rotație a osiei $\Omega = 14{,}4$ rad/s și viscozitatea $\mu_1 = 0{,}0025$ kg. s/m².

Un calcul de verificare a funcționării sub sarcina constantă P_0, efectuat după metoda indicată în lucrarea [3], rezultă

$$\left.\begin{aligned} &\theta^* = 20° \;,\; \nu = 0{,}65 \;\; (\theta_2 = 84°{,}5) \\ &\zeta^* = \frac{P\;\delta_2^2}{4\mu_1\Omega r^4} = 0{,}0495,\; \delta_2 = 4{,}04\;\mu \\ &\phantom{\zeta^* = \frac{P\;\delta_2^2}{4\mu_1\Omega r^4}}\; e = 0{,}042 \text{ mm} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Din lucrarea [1] rezultă că efectul mișcării normale dintre fus și cuzinet poate fi neglijat și deci

$$\delta_2(t) = \frac{\sqrt{4\mu_1\Omega r^4\zeta^*}}{\sqrt{P(t)}} = \frac{3{,}04 \times 10^{-2}}{\sqrt{P(t)}} \text{ microni} \tag{22}$$

în care $P = P_0 + \Delta P$. Cu ajutorul acestei relații s-au calculat, pentru variația $\Delta P\,(t)$ considerată, variația grosimii minime a stratului de lubrifiant δ_2 în funcție de timp, reprezentată în diagrama *e* din figura 19. Această diagramă verifica afirmația făcută, și anume că deși rezultă grosimi δ_2 mai mici decît cele estimate printr-un calcul la sarcină statică, diferențele nu sînt totuși mari, ci de aproximativ 3 % adică egale cu diferența relativă în procente a sarcinii dinamice la puterea 1/2 : $\left(\frac{\Delta P}{P_0}\right)^{1/2}$ (vezi formula (22)). De altfel pentru sarcina maximă măsurată la această viteză, și anume la trecerea peste arc (fig. 10) rezultă $\Delta P_{max} \cong 600$ kg și o grosime minimă $\delta_2 = 3{,}8\;\mu$.

★

Din exemplul de mai sus rezultă că influența forțelor de inerție nu este mare. De asemenea atît pentru aprecierea influenței sarcinii dinamice asupra funcționării lagărelor cît și asupra altor organe, interesează nu atît forma variației $\Delta P(t)$, cît amplitudinea maximă a funcției $\Delta P(t)$ și frecvența variațiilor acestei funcții.

Pentru a evita operațiile de derivare, destul de laborioase în cazul studiului unui număr mare de măsurători, să observăm din figura 19 *a* și *e*, că frecvența funcției ΔP este alterată într-o măsură foarte mică de efectul forțelor de inerție. Pentru aprecierea influenței forțelor de inerție asupra maximii ΔP, să considerăm acoperitor că săgeata datorită sarcinii dinamice variază în funcție de timp după relația

$$y = y_{01} \sin \omega t \tag{23}$$

în care $\omega = 2\pi f$, iar pentru f vom considera valoarea $f = 3\ \text{sec}^{-1}$ ca fiind frecvența maximă observată în oscilograme, la viteze peste 50 km/oră (există în oscilograme și frecvențe de ordinul 6 perioade pe secundă, însă acestea au o amplitudine cu totul neînsemnată). Pentru y_{01} vom considera valoarea $y_{01} = 2$ cm care ar corespunde unei sarcini acoperitoare $\Delta P_{\max} = 400$ kg. În aceste condiții rezultă o accelerație maximă

$$\ddot{y}_{0\max} = y_{01}\,\omega^2 = 2 \times (2\pi \times 3)^2 = 710 \text{ cm/sec}^2 \cong 0{,}725 \text{ g} \qquad (24)$$

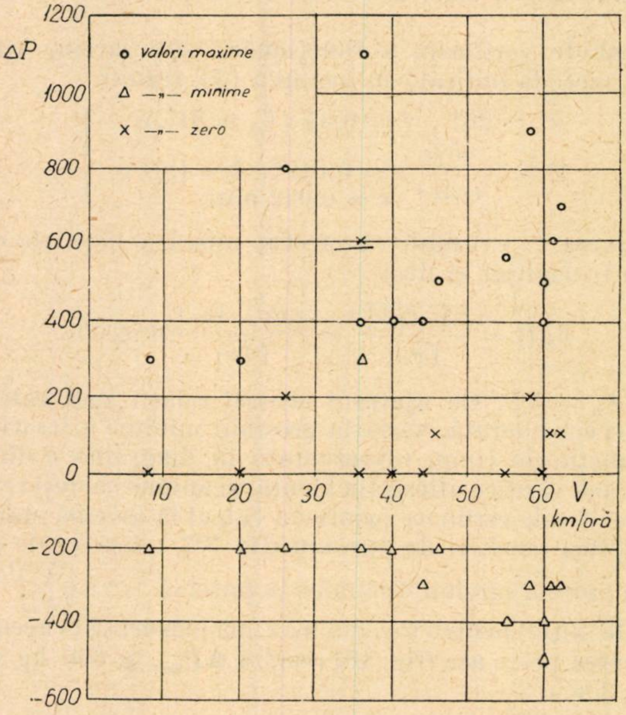


Fig. 20

sau a unei forțe de aproximativ 150 kg, sau, în sfîrșit, aproximativ 50% din $\Delta P - \Delta P_f$. În consecință se poate considera acoperitor

$$\Delta P_{\max} = k \frac{2W}{l-b}\, \sigma_{\max} + \Delta\, P_f \qquad (25)$$

cu $k = 1{,}5$.

Ținînd seama de aceste considerații, s-au calculat pe baza oscilogramelor obținute, (fig. 8—15), pentru diferite viteze, valorile ΔP_{max} și ΔP_{min}, reprezentate în figura 20 în funcție de viteza de deplasare V. Pe această diagramă s-a notat cu + linia de zero a sarcinii dinamice, care nu întotdeauna a coincis cu valoarea sarcinii statice P_0 (cauza principală fiind distanța ce există între linia de aplicare a tracțiunii și centrul de greutate a vagonului despre care s-a mai vorbit la începutul lucrării).

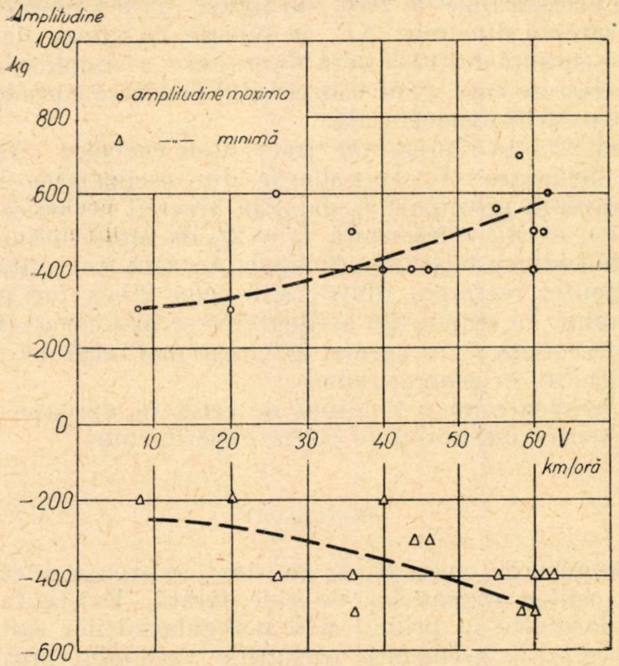

Amplitudine
kg
1000
800
600
400
200
0
-200
-400
-600
○ amplitudine maxima
△ —"— minimă
10
20
30
40
50
60 V
km/oră

Fig. 21

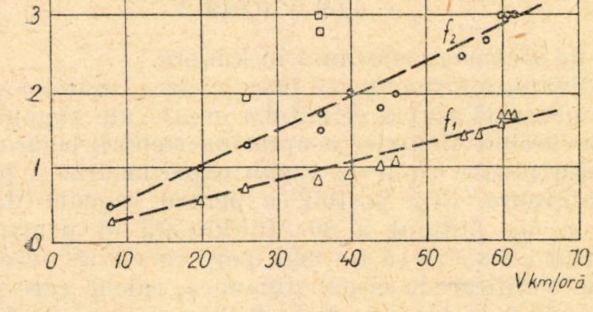

f
6
5
4
3
2
1
0
△ = f_1
○ = f_2
□ = f_3
f_3
f_2
f_1
0
10
20
30
40
50
60
70
V km/oră

Fig. 22

În funcţie de această linie de zero, în figura 21 s-a reprezentat variaţia amplitudinii sarcinii dinamice ΔP în funcţie de viteza de deplasare V. Se constată o tendinţă destul de netă de creştere a amplitudinii cu viteza de deplasare, creştere care, pentru intervalul de viteze considerat, urmează destul de bine o curbă exponenţială.

În figura 22 s-au reprezentat frecvenţele curbelor $\Delta P(t)$ în funcţie de viteza de deplasare V. Într-adevăr din oscilograme se constată că pe lîngă o frecvenţă principală f_1 datorită trecerii periodice peste rosturile dintre şine, există o frecvenţă $f_2 = 2f_1$ de amplitudine aproximativ 50% din amplitudinea mişcării principale. Această frecvenţă se datoreşte probabil influenţei reciproce dintre osiile celor 2 boghiuri precum şi oscilaţiilor vagonului. În sfîrşit, din oscilograme se mai constată şi existenţa unei a treia frecvenţe f_3 în special la viteze mai mari ($V > 40$ km/oră), însă de amplitudini în general reduse.

Aceste frecvenţe au o tendinţă de creştere aproape proporţională cu viteza V, pentru intervalul de viteze experimentat.

CONCLUZII

Din măsurătorile efectuate se constată existenţa unei sarcini dinamice asupra osiilor vagoanelor de cale ferată. Existenţa unor sarcini dinamice se datoreşte în primul rînd neregularităţilor căii (ace, rosturi dintre şine etc.); de asemenea oscilaţiile vagonului provoacă variaţii ale sarcinii dinamice care se suprapun peste variaţiile date de şocurile aplicate osiei de neregularităţile căii.

Amplitudinea maximă a sarcinii dinamice este relativ redusă, variind între 5—15% din sarcina statică, pentru măsurătorile efectuate şi creşte cu viteza de deplasare.

Frecvenţa sarcinii dinamice se compune dintr-o frecvenţă joasă f_1, datorită trecerii peste rosturile dintre şine, variind aproximativ liniar cu viteza, după relaţia

$$f_1 = 0{,}04 + 0{,}026\ V \tag{26}$$

viteza V fiind măsurată în km/oră, şi o frecvenţă f_2, aproximativ dublă faţă de prima, egală cu

$$f_2 = 0{,}09 + 0{,}046\ V \tag{27}$$

viteza V fiind de asemenea măsurată în km/oră.

Sarcina dinamică influenţează funcţionarea lagărelor şi de asemenea dă solicitări la oboseală asupra diferitelor organe ale vagonului.

Influenţa sarcinii dinamice asupra funcţionării lagărelor osiilor este redusă, cel puţin pentru tipul de vagon experimentat şi pentru vitezele de deplasare obţinute. Este posibil ca pentru vagoane de persoane la viteze mai mari, de ordinul a 80—120 km/oră şi pentru vagoane de marfă, ca această influenţă să fie mai mare în cît se necesite la proiectare un calcul de verificare la sarcini dinamice, calcul care poate fi făcut după metoda expusă în lucrarea [1]. Pentru aceasta ar fi însă necesar efectuarea de măsurători pentru aceste cazuri, care să dea indicații asupra sarcinii dinamice ce se produce, necesare calculului și proiectării.

★

Experiențele au fost efectuate în colaborare cu Secția Măsurători a Institutului de mecanică aplicată, de la care am avut concursul tehnicienilor C. Cazacu și Gh. Bădescu.

Primită la redacție la 24 aprilie 1957.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАГРУЗКИ НА ОСИ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫХ ВАГОНОВ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Даны результаты экспериментального определения нагрузки на оси железнодорожного вагона во время его передвижения. Измерения проводились при помощи датчиков с сопротивлением. Описывается монтажная схема, использованная аппаратура и полученные осциллограммы. Дан способ вычисления нагрузки на ось и описана работа подшипников оси под этой нагрузкой. Дается анализ полученных осциллограмм и отмечается влияние скорости передвижения на изменение во времени нагрузки на ось.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE LA CHARGE SUPPORTÉE PAR LES ESSIEUX DES WAGONS DE CHEMIN DE FER

(RÉSUMÉ)

Les auteurs présentent les résultats des études expérimentales faites en vue de déterminer les charges sur les essieux d'un wagon de chemin de fer pendant son déplacement. Les expériences ont été réalisées à l'aide des tensomètres résistifs. On présente le montage et les appareils utilisés, ainsi que les oscilogrammes obtenus. On montre ensuite la manière de calculer la charge sur les essieux et le fonctionnement des paliers, sous cette charge. Dans la dernière partie du travail on discute les oscilogrammes obtenus, en faisant ressortir l'influence de la vitesse du wagon sur la variation, en fonction du temps de charge des essieux.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Calculul lagărelor fără joc radial supuse la sarcini și vitez variabile.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 3, 1957, p. 789
2. * * * *Mașinostroenia*, vol. II.
3. V. N. Constantinescu, *Considerații asupra calculului lagărelor fără joc radial.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. V, nr. 3–4, 1954, p. 425.

ASUPRA ÎNREGISTRĂRII PE BANDĂ MAGNETICĂ A UNOR MĂRIMI MECANICE CU VARIAȚII „LENTE“

DE

D. PAVELESCU și TH. PANTELIMON

CU PRIVIRE LA STADIUL ACTUAL

Principiul înregistrării pe cale magnetică a frecvențelor sonore a fost descoperit de fizicianul danez Valdemar Powlsen de aproape 60 ani. Cu toate acestea, unele dificultăți teoretice și experimentale ivite apoi, a făcut ca această importantă problemă să evolueze destul de încet, marcîndu-se chiar de la început o stagnare de aproape două zeci de ani.

Cercetările ce s-au efectuat în diferite țări, au condus la unele rezultate mai importante, în deosebi în perioada 1927—1932 și mai ales în anul 1941. Atunci s-au pus bazele folosirii benzii magnetice și a capului magnetic de formă inelară ; de asemenea s-au introdus curenții de înaltă frecvență pentru polarizare și ștergere, mărindu-se dinamica înregistrării prin micșorarea zgomotului de fond. Mai ales însă în perioada ce s-a scurs după cel de al 2-lea război mondial, înregistrarea sunetului pe bandă magnetică a cunoscut un progres important.

În prezent, magnetofonul de laborator poate acoperi o bandă de frecvențe sonore cuprinsă între 30—15 000 Hz (și chiar pînă la 20 kHz), cu numai — 1 db distorsiuni de frecvență la o dinamică de 60 db și cu numai 2 % distorsiuni de neliniaritate la un semnal standard de 1 000 Hz ; s-a coborît viteza benzii de la 76,2 cm/s pînă la 4,5 cm/s*) și s-a reușit de asemenea reducerea gabaritului aparaturii. S-au realizat o serie de perfecționări în legătură cu înregistrarea frecvențelor sonore, utilizîndu-se magnetofonul în telegrafie, telefonie, dispecer, cinematografie etc. [5], [6], [10], [13], [14], [15], [16], [19], [27], [28], [30], [31] și [38].

---

*) Firma Telefunken GMBH a realizat recent magnetofoanele M 5 și M5M, care par a avea calități superioare.

În ultimii ani, în deosebi în S.U.A., Anglia, U.R.S.S., Germania, Franța și Italia, s-a încercat cu rezultate promițătoare, lărgirea domeniului de aplicație a înregistrărilor pe bandă magnetică. Astfel, spre exemplu s-a pus problema înregistrării magnetice a programelor de televiziune, atît cele alb-negru, cît și cele colorate. Din cauza dificultăților ce apar în cazul înregistrării unei benzi de frecvențe extrem de largi impusă de spectrul *video* (25 Hz – 6,5 MHz), pînă în prezent s-au obținut numai rezultate parțiale, problema fiind încă în stadiu de laborator*).

În afară de aceste laborioase cercetări (nepublicate decît schematic), menționăm că în ultimul timp au apărut în mod izolat și cîteva mențiuni și articole privind aplicarea înregistrării magnetice și în alte domenii**). Soluțiile găsite au fost condiționate de parametrii în cauză. Astfel spre exemplu, în Franța (1954) pentru măsurarea variației cîmpului magnetic terestru s-a realizat o instalație destul de ancombrantă (23 m lungime) [42].

Aplicarea înregistrării în toate domeniile, în care în ultimă instanță avem de-a face cu variația unor mărimi electrice, considerăm că este mult înlesnită de faptul că sînt deja studiate unele sisteme de captare și traducere a mărimilor mecanice în mărimi electrice [2], [7], [9], [23], [24], [32], [33], [34] și [36].

SCOPUL LUCRĂRII – AVANTAJELE METODEI

Față de posibilitățile largi pe care le poate oferi înregistrarea magnetică (comparativ cu celelalte metode de înregistrare folosite în prezent), se propune studierea și introducerea acestei metode pentru a îmbunătăți și ușura cercetările și măsurătorile necesare îndeosebi diferitelor sectoare ale mecanicii aplicate.

Se propune deci o metodă de înregistrare pe bandă magnetică a variației mărimilor mecanice ce pot fi traduse în mărimi electrice. Pentru ca această metodă să devină clasică, înlocuind vechile metode de înregistrare nu numai în cercetările de laborator, este necesar ca aparatura adecvată să fie relativ simplă, robustă, stabilă şi să permită erori de măsură în limite admisibile.

---

*) Se menționează :

— Rezultatele obținute de colectivul Dr. F. H. Olson (Centrul de cercetări David Sarnoff U.S.A.), demonstrația publică prezentată de laboratorul RCA la Princeton (New Jersey) în decembrie 1953 [15] [20], și [31].

— Comunicările prezentate la Congresul de la Paris 5–10 aprilie 1954 cu privire la sistemele laboratorului RCA și Bing Crosby în U.S.A., metoda Corporației AMPLEX-Redwoed City California și realizările laboratorului de electronică și fizică aplicată din Franța [8], [18], [20], [21], [39] și [40].

— Sistemele de înregistrare a benzii *video* ce se studiază în U.R.S.S. anterior anului 1954 [15] și [31].

— Recentele rezultate obținute de italianul Antonio Rubani cu privire la înregistrarea pe disc magnetic a programului de televiziune.

**) Față de lucrările publicate ce ne-au parvenit și pe care le indicăm în bibliografie, menționăm următoarele aplicații :

— măsurarea unor intervale de timp de ordinul milisecundelor [15] și [31].

— comanda automată a unor operații mecanice la mașini unelte [15], [17] și [31] ;

— studierea unor comutări sau a aplicării unor impulsuri ; înregistrări pe disc magnetic [15], [16], [25], [27], [28], [31], [35] și [38] ;

— aplicații în electrofiziologie [10], [11], [14] ;

— înregistrări geofizice și geomagnetice [3], [12] și [38].

Un prim domeniu de preocupare, ce formează obiectul principal al lucrării de faţă, ni-l oferă fenomenele ce au o variaţie lentă (0—20 Hz). Au fost abordate în primul rînd, fenomenele ce prezintă variaţiile cu frecvenţă joasă (adică gama 0,1—10 Hz).

Nu putem să nu menţionăm că, deşi între aceste limite întîlnim o gamă destul de mare de parametri mecanici, totuşi literatura de specialitate nu a dedicat pînă în prezent un studiu special destinat atît acestor frecvenţe joase, cît şi a celor infrajoase (0—0,1 Hz).

Pentru a ilustra domeniul vast al mărimilor mecanice cu variaţii de joasă frecvenţă, vom aminti doar cîteva cazuri.

— Astfel în studiile ce se fac asupra parametrilor cinematici şi dinamici ai mecanismelor şi organelor de maşini, întîlnim curent variaţii între 0,1—5 Hz ; de asemenea gama de vibraţii „lente'' întîlnite în cercetările clădirilor şi cadrelor, supuse acţiunilor seismice ; la studiul podurilor de cale ferată (linie simplă) cu deschideri între 18—110 m apar vibraţii (fundamentale) între 2—9 Hz ; vibraţiile la maşini şi fundaţii, variaţiile eforturilor în lagăre şi în diferite organe ale vehiculelor de cale ferată, ale maşinilor de foraj etc. evoluează tot în gama de frecvenţe joase ; variaţiile eforturilor pe aripa avioanelor în zbor, vibraţii pe corpul navelor (1—3 Hz), vibraţii aerodinamice şi ale motoarelor la bordul aeronavelor, pot fi studiate de asemenea în domeniul frecvenţelor joase.

În fond, studiile ce pot fi înlesnite cu ajutorul înregistrărilor pe bandă magnetică cuprind un domeniu mult mai vast. Astfel, studiile pot fi extinse şi la alte fenomene ce se traduc în mărimi electrice. Vor putea fi înregistrate şi studiate : instabilitatea dinamică a unui arbore cotit, modulul lui Joung (prin metoda acustică-dinamică) şi modulul transversal la solide, aprinderea la motoarele cu explozie, variaţiile de viteză în gaze (captor fiind termo-anemo-metru) etc. [4], [9], [11], [13], [15], [19], [26], [29], [31] şi [32].

Se înţelege de la sine că atît metoda, cît şi aparatura sînt deopotrivă aplicabile şi în afara cercetărilor din mecanica aplicată şi anume, acolo unde fenomenele variază şi se pot traduce în mărimi electrice variabile (cercetări în electrotehnică, în medicină etc.).

Pînă în ultimul timp, astfel de cercetări şi măsurătorile respective se făceau numai prin înregistrări pe film sau hîrtie fotosensibilă, de pe ecranul tubului catodic (osciloscop), sau variaţiile spotului luminos de pe oglinda oscilografului cu buclă ; uneori se foloseşte şi sistemul de scriere grafică pe bandă de hîrtie (metodele acestea sînt limitate de anumite frecvenţe).

Eliminarea dificultăţilor legate de inerţia aparaturii de citire sau mai ales de manipularea şi obţinerea imaginii pozitive de pe banda fotosensibilă formează doar o primă categorie care subliniază avantajele folosirii bandei magnetice. La aceste aspecte se mai adaugă în plus şi următoarele : posibilitatea permanentă de control optic a înregistrării, redarea imediată pe oscilograf sau proiectarea pe ecran, copierea benzii, păstrarea acesteia un termen destul de îndelungat, urmărirea unor fenomene de durată, posibilitatea de variere a vitezei (frecvenţei) la redare, studierea comodă a porţiunilor de bandă ce interesează şi refotografierea acestora etc. Doar simpla enumerare a acestor posibilităţi creează o imagine destul de grăitoare ce consacră metoda înregistrării pe bandă magnetică în tehnica măsurătorilor. Dacă la acestea toate adăugăm posibilitatea de a înregistra mai ales spectrul frecvenţelor infra-joase (0—0,1 Hz) şi a celor joase (0,1—10 Hz) atît metoda cît şi sistemul de înregistrare devin deosebit de utile.

SOLUŢIA ADOPTATĂ — INSTALAŢIE EXPERIMENTALĂ

Pentru a putea înregistra pe bandă magnetică în special un spectru de frecvenţe joase ce începe foarte aproape de 0 Hz şi se termină în general sub spectrul *audio*, este absolut necesar să recurgem la modularea unui semnal purtător de o frecvenţă constantă mult mai ridicată. Pot fi aplicate diferite sisteme de modulare (amplitudine, frecvenţă, fază sau prin impulsuri) [2], [7], [9], [23], [32], [33].

Pentru a se obţine o realizare relativ simplă, cu posibilităţile de adaptare şi control comode, s-a ales pentru început modulaţia în amplitudine a unei frecvenţe purtătoare fixe.

În acest caz

$$u = U_{\text{med}}\,[1 + mg(t)]\sin\omega_0 t,$$

unde

u = valoarea instantanee a tensiunii la ieşirea din modulator;
U_{med} = amplitudinea medie a tensiunii la ieşirea din modulator;
m = gradul de modulaţie $\left(m = \dfrac{U_{\max} - U_{\text{med}}}{U_{\text{med}}}\right)$;
$g(t)$ = funcţia care reprezintă procesul ce voim să-l înregistrăm;
ω_0 = pulsaţia purtătoarei sinusoidale;
Ω = pulsaţia fenomenului de înregistrat.

Menţionăm că în general fenomenele înregistrate nu au o variaţie sinusoidală

$$g(t) = \sin\Omega t.$$

Deci tensiunea semnului modulat în amplitudine va fi de forma

$$u = U_{\text{med}}\,[1 + m \textstyle\sum_{ai} \sin n\Omega\, t]\sin\omega_0\, t$$

relaţie ce se transformă uşor în

$$u = U_{\text{med}}\sin\omega_0 t + \frac{mai}{2}\,U_{\text{med}}\,[\cos(\omega_0 - n\,\Omega)\,t - \cos(\omega_0 + n\,\Omega)\,t]$$

indicînd pe lîngă purtătoare, existenţa benzilor de frecvenţă

$$\omega_0 - n\,\Omega \quad \text{şi} \quad \omega_0 + n\,\Omega\,.$$

Banda de frecvențe joase considerate (fundamentale) (0—10 Hz, cu extindere pînă la 20 Hz conduce la o lărgime maximă de bandă

$$\Delta\ \omega_{\max} = 140\ \text{Hz}.$$

Pentru ca demodularea să se facă cu minimum de distorsiuni pentru un grad de modulație convenabil, raportul Ω/ω_0 trebuie luat suficient de mic.

S-a ales o purtătoare fixă de 1 000 Hz *), care răspunde condiției pusă $\Omega/\omega_0 \ll 1$ mai ales pentru spectrul 0—10 Hz, soluție satisfăcătoare și pentru banda 0—20 Hz**).

În ceea ce privește aspectul cu privire la gradul de modulație, deși se impune

$$m \leqslant \frac{Z_m}{Z_0} \quad \text{și cum } Z_m \text{ scade cu raportul } \Omega/\omega_0, \text{ unde}$$

Z_m = impedanța în curent alternativ a grupului RC de detecție,
Z_0 = impedanța în curent continuu a grupului RC de detecție,

s-a ales totuși un grad de modulație mai mare ($m \sim 40\%$), pentru a evita necesitatea unor amplificări mari la redare, cauză serioasă de distorsiuni, și pentru a se reduce cît mai mult raportul dintre valoarea elementelor perturbatoare (zgomot de fond, nestabilități etc.) și semnal.

Pe linia prezentată mai sus s-a conceput o instalație cu celulele simplificate, avîndu-se în primul rînd în vedere posibilitățile ei de rezolvare în timp util și cu mijloacele locale existente.

Cu excepția „magnetofonului” și stabilizatorului feromagnetic, instalația folosită, pe care o prezentăm în schema bloc din figura 1, a fost realizată în cadrul Institutului de mecanică aplicată „Traian Vuia” al Academiei R.P.R.

Din examinarea figurii 1 rezultă principiul folosit. Astfel prin sistemul captor-traductor $C-T$, variațiile unei mărimi mecanice a sursei S, sînt transformate în variații a unei mărimi electrice, ce poate fi urmărită pe ecranul osciloscopului OS. Pentru fenomenele „lente” studiate, a fost necesară utilizarea unei baze de timp Bt exterioare osciloscopului OS, prin intermediul unui canal de amplificare în curent continuu a amplificatorului simetric A_{1-1}. Pentru înregistrarea pe bandă magnetică, modulăm (în modulatorul M) cu acest „semnal” în general nesinusoidal, de frecvență redusă, o frecvență purtătoare sinusoidală fixă (1 000 Hz) emisă de oscilatorul O, filtrată și stabilizată de amplificatorul separator AS. Cu același osciloscop urmărim rezultatul modulației. Avînd de-a face în cazul de față cu variația unei diferențe de potențial de ordinul unui volt, s-a atacat direct cu semnalul modulat capul de înregistrare C_{i-r} prin intermediul amplificatorului audio A_{2-1}, conţinut de trusa magnetofon M_g.

---

*) Utilizarea frecvenței Standard conduce de altfel și la alte avantaje cunoscute.

**) Cu instalația prevăzută s-au înregistrat și fenomene sinusoidale pînă la 50 Hz, însă în scopuri industriale, instalația fiind experimentală.

Magnetofonul folosit (tip BG 19—2 RFT) avînd cap magnetic comun pentru înregistrare şi redare, redarea se urmăreşte prin comutarea canalului respectiv.

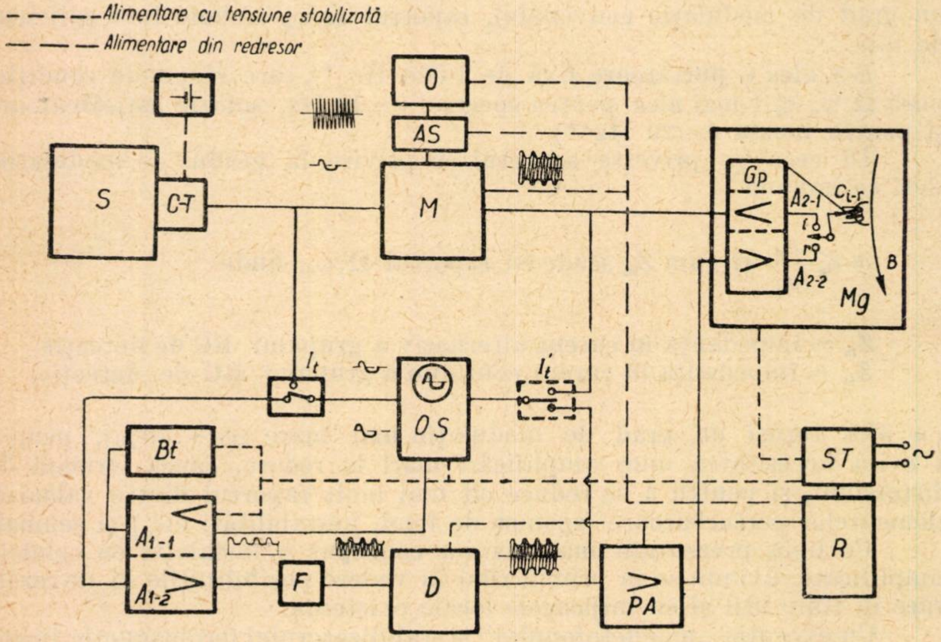

– – – – –Alimentare cu tensiune stabilizată
— — —Alimentare din redresor
S
C-T
O
AS
M
Gp
A2-1
Ci-r
i
r
A2-2
Mg
B
It
I't
OS
Bt
A1-1
A1-2
F
D
PA
ST
R

Fig. 1

Astfel, semnalul modulat cules de pe bandă (de amplitudine mică) este „ridicat'' succesiv de amplificatorul A_{2-2} (existent în acelaşi „magnetofon'' la înregistrare) şi de preamplificatorul audio *PA*. După demodulare (în *D*), filtrul *F* taie purtătoarea. Semnalul pur poate fi urmărit pe ecranul oscilografului, fiind „ridicat'' în prealabil de al 2-lea canal al amplificatorului de curent continuu simetric A_{1-2}.

Alurile semnalului iniţial cît şi a celui redat, apărute pe ecranul tubului catodic, se pot fotografia pentru comparare şi eventuală analiză sau determinare a distorsiunilor [1].

După cum rezultă din schema bloc (fig.1), s-a urmărit stabilizarea tensiunii de reţea la: baza de timp, osciloscop, amplificatorul A_{1-2}, magnetofon şi la redresorul comun grupului oscilator + modulator + preamplificator.

În cele ce urmează vom rezuma caracteristicile principale ale părţilor componente ansamblului schiţat mai sus, prezentat sub formă de schemă de principiu în figura 2 (canalul de înregistrare) şi figura 3 (canalul de redare).

SCHEMA CANALULUI ELECTRONIC DE ÎNREGISTRARE

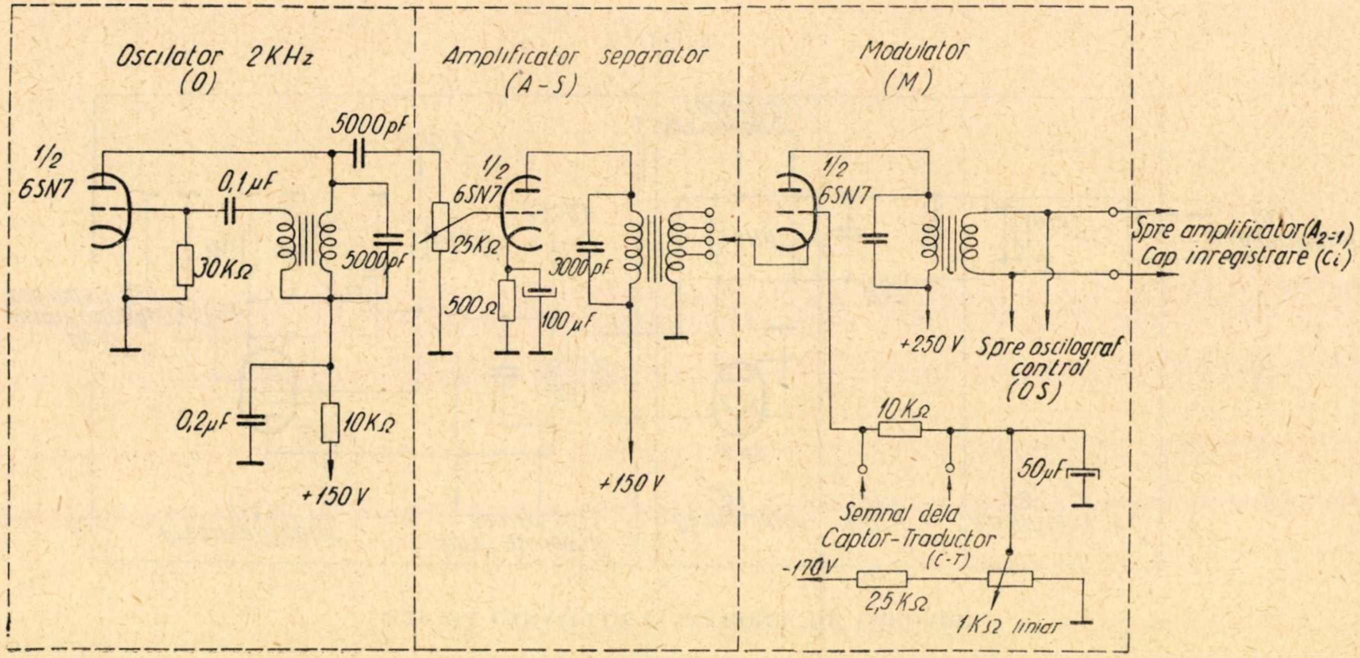

Oscilator 2KHz
(O)
Amplificator separator
(A-S)
Modulator
(M)
5000pF
1/2
6SN7
0,1μF
30KΩ
5000pF
0,2μF
10KΩ
+150 V
1/2
6SN7
25KΩ
3000pF
500Ω
100μF
+150 V
1/2
6SN7
Spre amplificator(A2-1)
Cap înregistrare (Ci)
+250 V
Spre oscilograf
control
(OS)
10KΩ
50μF
Semnal dela
Captor-Traductor
(C-T)
-170V
2,5KΩ
1KΩ liniar

Fig. 2

SCHEMA CANALULUI ELECTRONIC DE PREDARE

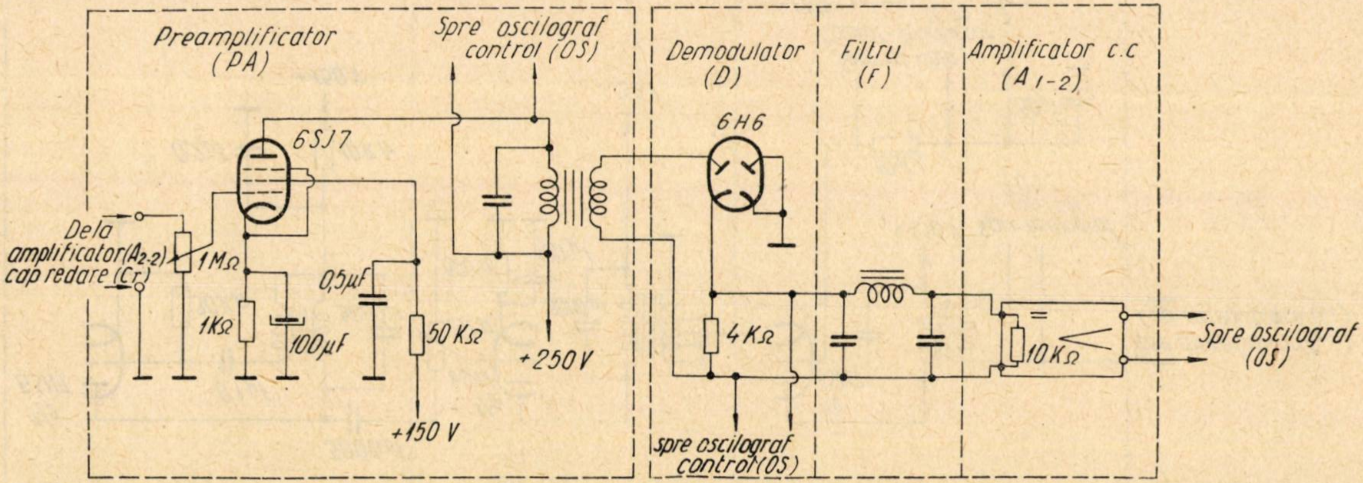

Preamplificator
(PA)
Spre oscilograf
control (OS)
Demodulator
(D)
Filtru
(F)
Amplificator c.c
(A 1-2)
6SJ7
6H6
De la
amplificator($A_{2\text{-}2}$)
cap redare (Cr)
1MΩ
1KΩ
100µF
0,5µF
50 KΩ
+150 V
+250V
4 KΩ
spre oscilograf
control (OS)
10 KΩ
Spre oscilograf
(OS)

Fig. 3

a. *Sistemul captor-traductor* (*C — T*). În cazul particular considerat [4], mişcarea capului unei biele pe o glisieră provoacă simultan, variaţia unei rezistenţe şi în ultimă instanţă a unei diferenţe de potenţial de maximum 1 V. S-a folosit deci un captor rezistiv (un fir de manganină de 0,35 mm ⊘ şi 500 mm lungime), în montaj potenţiometric în punte cu punct neutru fictiv, alimentat de la un acumulator de 2V. Contactul se ia printr-o lamelă de alamă ce alunecă pe un fir paralel cu primul.

b. *Baza de timp* (B_t). A fost utilizat un electromotor Siemens cu perii (20 W), perfect echilibrat alimentat în serie; cu un reostat se obţine o gamă largă de viteze. Prin demultiplicare mecanică în raportul 1/400, se comandă o rezistenţă de manganin (0,35 mm ∅) montată în reocord pe un disc izolant. La periferia discului o lamelă de bacfon culege de pe reocord variaţia de tensiune (maximum 2V curent continuu) în diagonala unei punţi cu nul fictiv exterior şi două rezistenţe chimice de cîte 30 Ω şi 0,25 W.

c. *Amplificatorul simetric de curent continuu* ($A_{1-1} - A_{1-2}$). Cele două canale sînt utilizate separat pentru baza de timp şi pentru amplificarea semnalului pur după demodulare. Caracteristicile amplificatorului sînt :

— amplificare de tensiune 480—500 x, cu ieşire simetrică ;
— impedanţă la ieşire 200 kΩ ;
— răspuns liniar de frecvenţă 0—500 Hz ;
— semnal maxim la intrare ± 0,5 V ;
— dispozitiv de corectare a focalizării ;
— alimentare de la reţeaua de curent alternativ 120 V, prin redresor propriu şi stabilizarea cu tuburi cu gaze.

Este echipat cu două pentode amplificatoare de tensiune cu pantă fixă. 6SJ7(6ж8). Aparatul dispune de o celulă redresoare proprie (două redresoare 6 ц 5 montate în dublor de tensiune), cu stabilizarea negativării şi a potenţialelor de ecran şi placă.

d. *Osciloscopul catodic* (*OS*). S-a folosit un osciloscop special construit în cadrul Institutului pentru studiul fenomenelor cu variaţie lentă, fiind prevăzut în acest scop cu un tub catodic cu mare persistenţă cu ecran de 13 cm Φ ; aparatul dispune de o bază de timp electronică proprie 1/20 — 2 Hz. S-a utilizat de asemenea şi un osciloscop RFT tip 1KO712, cu tub catodic fără persistenţă.

e. *Oscilatorul* (*O*). S-a construit un oscilator *LC* de 1W, pentru o frecvenţă sinusoidală fixă de 1 000 Hz (şi 2 000 Hz). Tensiunea de ieşire a fost luată de la priza de 2,5 V a secundarului transformatorului, prevăzut a se monta în catoda modulatorului. Aparatul este echipat cu o parte din dubla triodă amplificatoare de putere 6 N 7.

f. *Modulatorul* (*M*). El a fost realizat pentru a modula în amplitudine (pe catodă) frecvenţa purtătoare cu semnale de la 0—20 Hz, obţinîndu-se o modulaţie reglabilă pînă la maximum 100%. Modulatorul are ieşirea pe transformator (separator) şi este echipat cu o parte din dubla triodă amplificatoare de tensiune 6SN7 (6 H 8) folosită atît de modulator, cît şi de un amplificator (separator).

Punctul de funcţionare a fost stabilit prin măsurători ale tensiunii de ieşire (V_e) funcţie de semnalul la intrare (V_i) pentru diferite negativări, tensiunea anodică fiind 250 V. La negativarea de —20 V aleasă, prezentăm valorile din tablou (optime) pentru V_e şi V_i.

Tablou

V_i (volţi) curent continuu	– 0,5	– 0,25	0	+ 0,25	+0,5
V_e (volţi) (1 000 Hz)	5,35	6,4	7,5	8,7	9,9
Δ V_e (volţi)	1,05	1,1	1;2	1,2	–

Reglajul punctului de funcţionare se face cu un potenţiometru liniar de 2 kΩ (fig.2) .

g. *Amplificatorul-separator* (*AS*). Această celulă este necesară între oscilator şi modulator pentru a se putea varia uşor amplitudinea frecvenţei purtătoare şi pentru ca frecvenţa oscilatorului să fie cît mai stabilă.

h. *Magnetofonul* (M_g). A fost folosit echipamentul mecanic şi electronic al magnetofonului tip RFT BG-19-2, care pentru scopurile noastre s-a dovedit a fi un aparat cu calităţi electrice şi mecanice limitate, nefiind un aparat destinat măsurătorilor.

Principalele caracteristici ale acestui aparat sînt*) :

— Viteza de deplasare a benzii 19,05 cm/s ;
— Banda de frecvenţe redată liniar 60—7 000 Hz, cu o abatere de ± 5db ;
— Impedanţa la intrare circa 100 kΩ la 1 000 Hz ;
— Tensiune de intrare 25 V ;
— Tensiune de ieşire circa 500 m V pe o rezistenţă de 50 kΩ ;
— Nivelul zgomotului de fond 40 db ;
— Factorul de distorsiune de neliniaritate 6 % ;
— Puterea consumată circa 30 W ;
— Alimentare 220 V ; 50 Hz ;
— Timp de înregistrare 2 × 45 min.

În legătură cu acest aparat mai sînt de menţionat următoarele cu privire la :

Capul de înregistrare (C_i). Aparatul dispune de un cap de înregistrare construit pentru a imprima numai pe 1/2 de bandă ; prin comutare acelaşi cap devine cap de redare (C_r).

Amplificatorul-audio. Conţinut în aparat este prevăzut la înregistrare (A_{2-1}) cu o pentodă amplificatoare de tensiune cu pantă fixă (EF12).

La redare (A_{2-2}) se cuplează la (A_{2-1}) încă un tub EF12, asigurîndu-se la ieşire o tensiune de circa 500 m V pe rezistenţă de 50 Ω.

---

*) Indicaţii după prospect, care în unele cazuri nu se verifică.

Generatorul de polarizare (G_p). La înregistrare al 2-lea tub EF12 al amplificatorului, lucrează ca oscilator, cu circuitul anodic acordat, asigurînd curentul de frecvență superacustică, necesar polarizării. În acest magnetofon ştergerea imprimării se face cu ajutorul unui electromagnet separat alimentat la 220 V—50 Hz.

Banda magnetică. S-a folosit banda tip Agfa C de 6,35 mm lățime.

i. *Preamplificatorul audio* (*PA*). Se asigură cu o pentodă amplificatoare de tensiune cu pantă fixă 6SJ7 (6ж8), o amplificare în tensiune de 200 x, tensiunea la ieşire fiind circa 20 V, pentru un semnal la intrare de 0,1 V ; reglajul la intrare este posibil printr-un potențiometru logaritmic de 1 MΩ.

j. *Demodulatorul* (*D*). S-a folosit o dublă diodă 6H6, cu care se asigură o simplă detecție. Față de un semnal la intrare de 20 V maxim modulat 40—50%, la ieşire se obțin 8—10 V.

Etajele *O*, *M*, *PA* şi *D* s-au executat pe acelaşi saşiu, fiind separate prin blindaj de aluminiu.

S-a ales o schemă de preamplificare pe transformator şi de modulare pe impedanțe mici (fig. 3), din cauza impedanței reduse (10 kΩ) la intrarea amplificatorului de curent continuu construit prealabil pentru studierea parametrilor cinematici şi dinamici la mecanisme.

k. *Filtrul* (*F*). După demodulare a fost plasat un ,,trece în jos'' calibrat pentru a tăia purtătoarea. Trebuie menționat că amplificatorul (A_{1-2}) de curent continuu care urmează filtrului, dispune de un atenuator potențiometric propriu (10 V—1 V).

1. *Redresorul* (*R*). A fost realizat cu o dublă diodă redresoare 6ц5 (filtraj 2X16 μF şi şoc circa 10Hy) o celulă redresoare care poate debita 40 mA, stabilizarea fiind asigurată cu tuburi cu gaz ; CГ4 C (VR 150/40) CГ3 C (VR 100/40) şi CГ2C (VR 75/30).

m. *Stabilizatorul* (*St*). S-a folosit un stabilizator ferosaturat de 500 V A/la 220 V, tip TESLA.

În cazul în care tensiunea semnalului dat de $C-T$ este prea mică (de ordinul zecilor de milivolți), este necesar ca la înregistrare să se prevadă înainte de intrarea în modulator un mic preamplificator de curent continuu (A) şi de asemenea la ieşirea din modulator se va utiliza un amplificator *audio* (A_2).

Pentru controlul simultan al semnalelor de pe canalele de înregistrare şi redare s-a folosit un comutator (*I t* sau *I't*).

Aspectul fizic al ansamblului de înregistrare descris mai sus (schema bloc fig. 1) este prezentat în fotografia din figura 4.

REZULTATE — CONCLUZII — PERSPECTIVE

S-a realizat un singur canal de înregistrare-redare; pentru verificarea posibilităților sistemului conceput, mai întîi în gama frecvențelor joase, s-a tradus într-o tensiune electrică, deplasarea pe o glisieră a capului bielei unui mecanism. Instalația electronică realizată este o instalație experimentală.

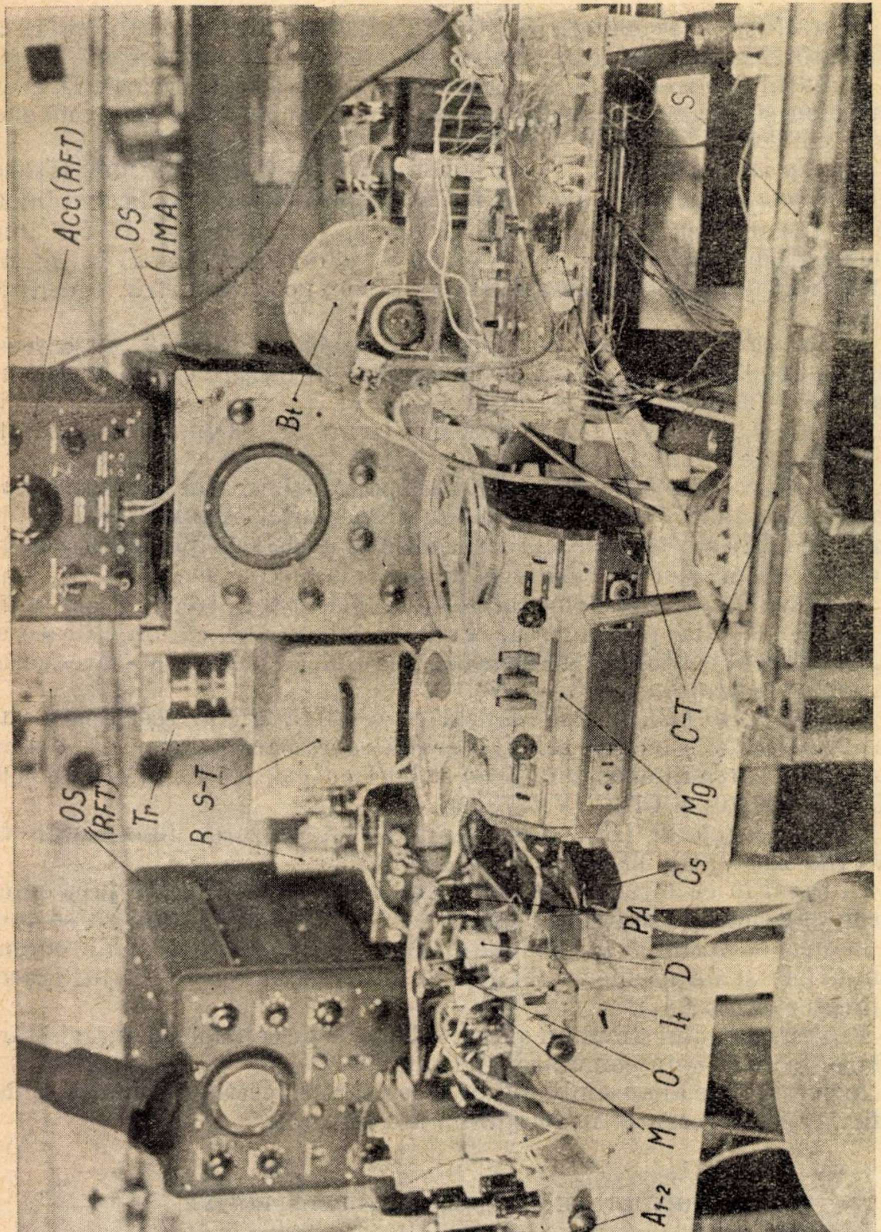

Acc (RFT)
OS (IMA)
Bt
S
OS (RFT)
Tr
R
S-T
Mg
C-T
Cs
PA
D
It
O
M
A1-2
A1-1

Fig. 4

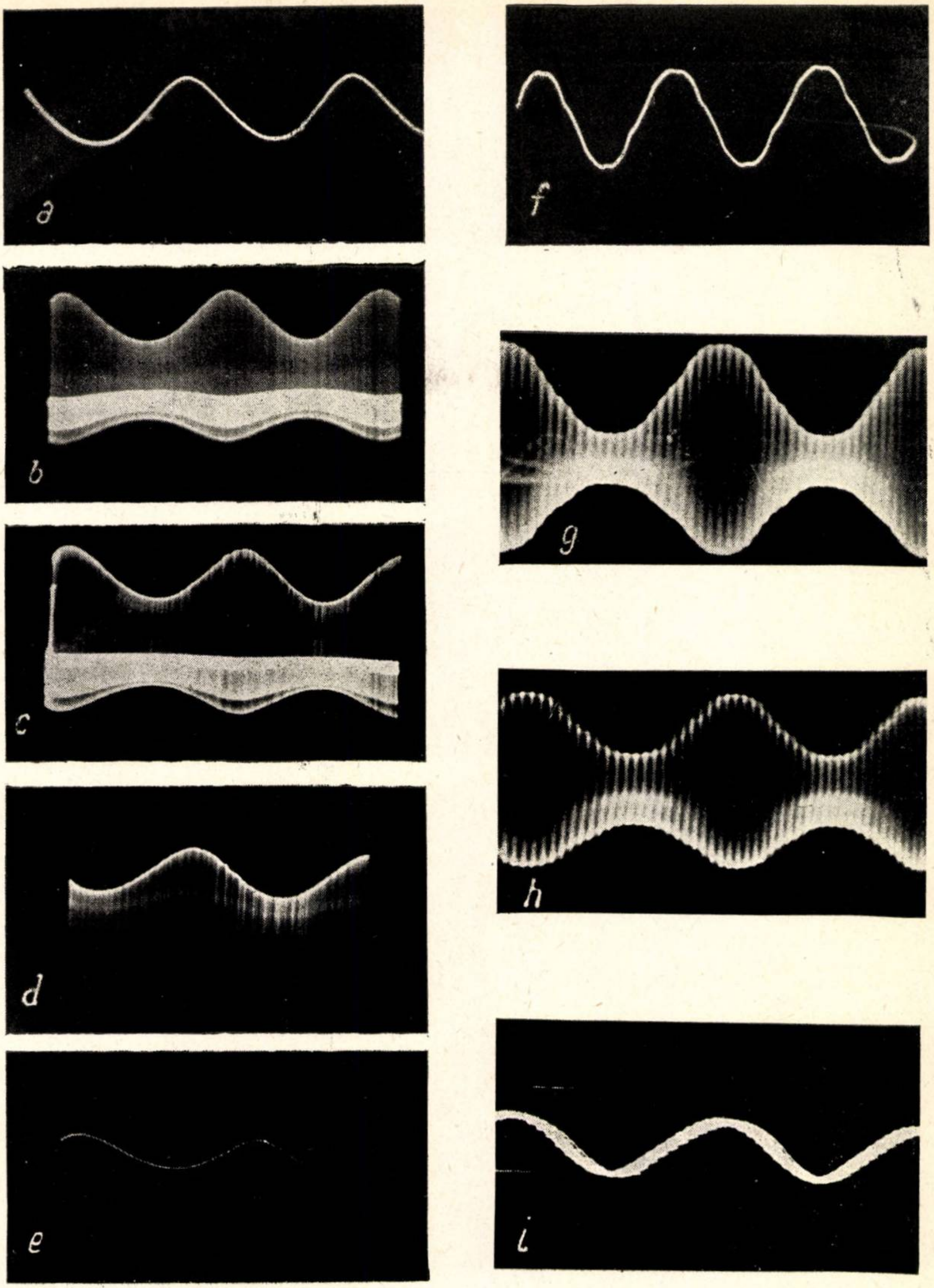


Fig. 5

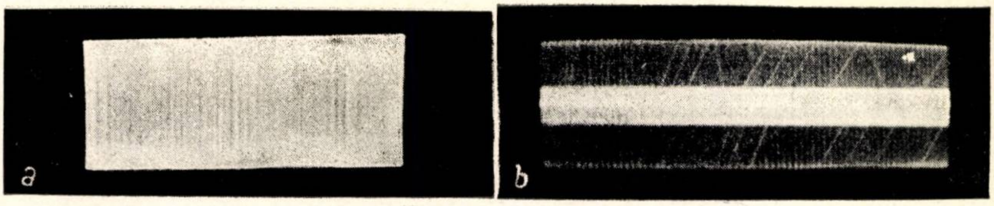


Fig. 6

În figura 5 *a* se prezintă forma tensiunii la ieșirea din traductor pentru o frecvență de 0,25 Hz, baza de timp folosită avînd 0,125 Hz. Tensiunea nu este perfect sinusoidală datorită raportului mic între lungimea bielei (1 100 mm) și cursa sa (500 mm). Cu această tensiune se modulează purtătoarea, rezultînd înfășurătoarea din figura 5 *b*.

În partea de jos a acestei figuri se constată armonice puternice datorită punctului de funcționare ales pentru modulație, în porțiunea neliniară a caracteristicii tubului modulator.

După înregistrarea pe bandă magnetică, la redarea fenomenului, regăsim în figura 5 *c* aceeași purtătoare modulată. Figura 5 *d* ne arată fenomenul după detecție ; se suprimă porțiunea cu distorsiuni prin conectarea convenabilă a sensurilor înfășurării secundare a transformatorului de cuplaj. După filtrare și amplificare în curent continuu, regăsim semnalul inițial (fig. 5 *e*).

S-au repetat înregistrările pentru fenomene cu diferite frecvențe în banda menționată.

Pentru o frecvență mai ridicată s-au obținut rezultate similare.

S-au verificat și posibilitățile de înregistrare în afara benzii propuse. Experimentîndu-se în cazul unei frecvențe de 50 Hz, un semnal luat de la rețeaua de curent alternativ prin intermediul unui transformator, s-au obținut oscilogramele din figurile 5 *f—i* ; s-a ales o bază de timp de 16,2/3 Hz sincronizată. Figura 5 *f* reprezintă semnalul la intrarea în modulator iar figurile 6 *g—i* reprezentînd ca și în cazul precedent diferite stadii ale purtătoarei pe traseu. După redare se recapătă semnalul inițial însă mai sinusoidal. Aceasta se datorește în special următorilor doi factori :

— frecvența purtătoare prea mică ($\Omega = 1\,000$ Hz).

— filtrul necorespunzător, cu tendința de a tăia frecvențele peste 100 Hz, deci și armonicele semnalului.

Trebuie arătat de asemenea chiar că semnalul purtător se distorsionează prin modulator. Astfel în figura 6 *a* se prezintă purtătoarea de 1 000 Hz la intrarea în modulator, o frecvență curată care la ieșirea din modulator (în absența semnalului) prezintă aspectul din figura 6 *b* datorită distorsiunilor introduse de funcționarea etajului în porțiunea neliniară. Sîntem de asemenea dezavantajați dacă analizăm cu o bază de timp de frecvență mai ridicată căci obținem alura unei purtătoare mai mult distorsionate.

Pentru verificarea metodei și a calității înregistrării s-a studiat reproducerea mișcării circulare a unui punct al unui mecanism. Descompunerea mișcării pe axa *OX* a fost redată de pe bandă (înregistrare anterioară), iar descompunerea mișcării pe axa *OY* fiind redată pe oscilograf direct de la traducătorul respectiv a mecanismului respectiv. Compunîndu-se astfel cele două variații sinusoidale a rezultat un cerc (fig. 7,) care nu s-ar fi putut obține dacă distorsiunile de frecvență și amplitudine ar fi depășit limitele admisibile.

Menționăm că pentru redarea traiectoriei inelare, s-au folosit atît pentru axa *OX* cît și pentru *OY*, tensiunile obținute de la traductori combinate cu corectori (care reduc considerabil distorsiunile provenite din cauza raportului mic între lungimea bielei și cursa) [4].

În legătură cu rezultatele obţinute se pot face următoarele observaţii şi concluzii ;

În urma aplicării sistemului prezentat, metoda se dovedeşte corespunzătoare scopului propus. În cazul unor frecvenţe mai mari a fost necesară ridicarea purtătoarei de la 1 000 Hz pentru a se satisface cît mai riguros condiţia $\Omega/\omega_0 \ll 1$ şi a se modifica corespunzător constanta de timp.

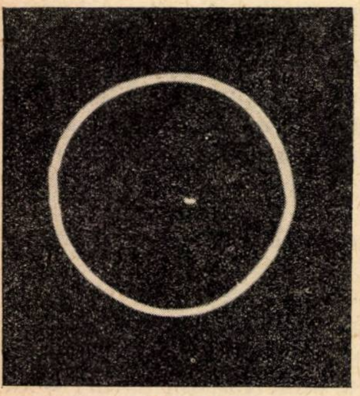


Fig. 7

Cercul prezentat în figura 7 este totuşi uşor distorsionat atît din cauza compensării electrice a erorilor mecanice (reduse de la circa 6 % la circa 1,5 %) cît şi din cauză că semnalul înregistrat este şi el uşor distorsionat în amplitudine.

Un alt aspect îl formează faptul că pe lîngă distorsiunile de amplitudine introduse de celulele neliniare, apar şi distorsiuni de frecvenţă datorită în special variaţiei vitezei benzii. În legătură cu aceasta arătăm că magnetofonul „RFT" folosit nu este un aparat de măsură, distorsionînd peste procentul indicat de prospect chiar de la 2 000 Hz în sus. De asemenea variaţiile periodice ale vitezii benzii cît şi viteza medie de deplasare depăşesc limitele admisibile (0,2 %) ajungînd chiar la 0,6 % ceea ce conduc la o distorsiune corespunzătoare.

Nu trebuie să neglijăm nivelul zgomotului de fond, care este destul de ridicat pentru un aparat de măsură.

Se constată de asemenea ca nepractic şi sursă de erori, existenţa unui singur cap magnetic, comun pentru înregistrare-redare şi deci comutarea respectivă ; sistemul acesta conduce la greutăţi de control şi lipsa unor corecţii corespunzătoare.

Atît rezultatele obţinute cît şi experienţa cîştigată pe baza sistemului prezentat creează următoarele posibilităţi de continuarea cercetărilor în acest domeniu :

1. Realizarea unei scheme bloc-unitare cu oscilator *RC* special, menţinînd modulaţia în amplitudine pentru înregistrările frecvenţelor joase însă executînd cuplajele celulelor prin grupuri *RC*.

2. Studierea comparativă a unor alte forme de modulaţie (frecvenţă, fază şi impulsuri de amplitudine) pentru a lărgi banda de frecvenţe înregistrabile cu distorsiuni minime.

3. Realizarea unui sistem de înregistrare-redare pe două canale cu două piste de 3 mm sau cu o singură pistă cu două frecvenţe purtătoare. Se va extinde în trepte gama de frecvenţe înregistrabile pînă la 20 kHz (modulaţie şi înregistrare directă).

Pentru controlul simultan al fenomenului înainte şi după înregistrare, se va folosi un comutator electronic cu posibilitate de comutare simultană pe cele două canale ale benzii ($I_t e$).

În figura 8 prezentăm schema bloc a sistemului pe care-l preconizăm care spre deosebire de sistemul realizat, prezentat în figura 1, comportă următoarele completări :

— Introducerea în canalul de înregistrare a unui amplificator adecvat de curent continuu (A_0) pentru cazul semnalelor de nivel redus.

— De asemenea un amplificator de curent alternativ (A_2) pentru ridicarea semnalelor modulate.

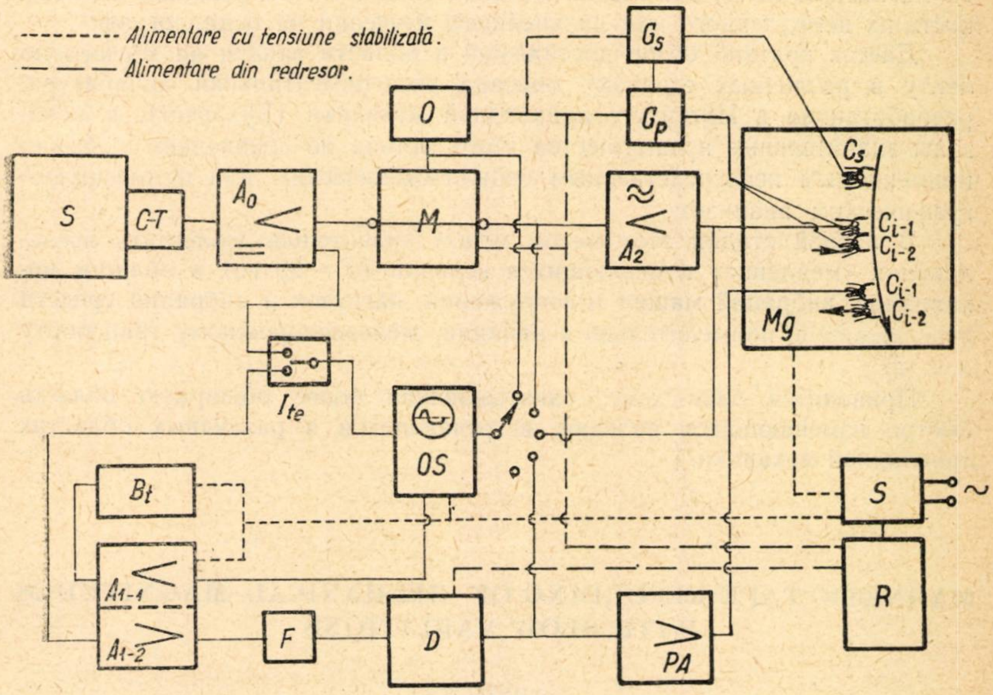

--------- Alimentare cu tensiune stabilizată.
— — — Alimentare din redresor.
G_s
G_p
O
S
C-T
A_0
=
M
≈
A_2
C_s
C_{i-1}
C_{i-2}
C_{i-1}
C_{i-2}
Mg
I_{te}
OS
B_t
S
~
R
A_{1-1}
A_{1-2}
F
D
PA

Fig. 8

— *Magnetofonul* va fi prevăzut după cum este normal cu cap de ștergere (C_s), alimentat de la un generator de frecvență înaltă (G_s) ; capetele de înregistrare (C_{i-1} și C_{i-2}), diferite de cele de redare, vor fi polarizate de un generator (G_p) separat de (G_s) și (A_2) ; sistemul cap magnetic - amplificator va fi corectat separat pentru cazurile înregistrate și redare.

Considerăm că cu ajutorul unei astfel de instalații pot fi fără nici o dificultate înregistrate (în gama frecvențelor preconizate) mărimile mecanice și electrice atît din domeniul cercetării mecanicii aplicate cît și din alte domenii.

Primită la redacție la 22 iunie 1957.

О ЗАПИСИ НА МАГНИТНУЮ ЛЕНТУ НЕКОТОРЫХ «МЕДЛЕННО» ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В качестве современного метода исследования приводится запись на магнитную ленту изменений механических величин, дающая возможность их немедленного или дальнейшего изучения на осциллографе.

Дается краткий обзор достижений в области записи на магнитную ленту в различных странах; описана экспериментальная аппаратура, разработанная в Институте прикладной механики (Бухарест), и показаны значительные преимущества этого метода по сравнению с обычно применяемым непосредственным осциллоскопическим или фотоосциллографическим анализом.

В первой стадии этот метод может значительно облегчить исследования «медленно» изменяющихся величин (0 — 20 гц) в области механизмов, вибраций машин и сооружений, нагрузок и вибраций средств передвижения, применительно к авиации, железнодорожному транспорту и т. п.

Приводится блок-схема, охватывающая более обширную область быстро изменяющихся явлений, встречающихся в различных областях прикладной механики.

MAGNETIC TAPE RECORDING OF MECHANICAL MAGNITUDES WITH SLOW VARIATIONS

(ABSTRACT)

A new research method is presented, consisting in recording the variations of mechanical magnitudes on a magnetic tape and allowing their immediate or future examination on an oscilloscope.

The progresses achieved abroad, in the field of tape recording, are also sketched; the experimental equipment developed at the Institute for Applied Mechanics is described and its remarkable advantages over the currently used direct oscilloscopic or photo-oscillographic method are outlined.

This method may considerably ease the scientific research of magnitudes with slow variations (0 — 20 c/s) in the field of machinery and vibrations, with applications to aviation, railway transport a.s.o.

Finally, a block schema is likewise presented in order to cover a larger range of rapidly varying phenomena met with in the various fields of applied mechanics.

BIBLIOGRAFIE

1. Antoniu Ion S., *Chestiuni speciale de electrotehnică.* Ed. Acad. R.P.R., Bucureşti, 1956, p. 173.
2. Aseev B. P., *Bazele radiotehnicii.* Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1952.
3. Begun S. J., *Magnetic tape improves geophysical recordings.* Electronics, ianuarie 1955, vol. 28, nr. 1, p. 152.
4. Bogdan R., Pelecudi Cr., Bugaevschi E. şi Calmaciuc L., *Studiu asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane.* Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 3, 1957, p. 663.
5. Burgov V. A., *Osnovi zapisi i vosproizvodenia zouka.* Gosizdat „Iskustvo", Moscova, 1954.
6. Burkhardt H., *Fachkunde für Elektroakustik.* Fachbuchverlag GMBH, Leipzig, 1953.
7. Cartianu Gh., *Bazele radiotehnicii.* Bucureşti, 1954 (curs litografiat).
8. Charlet R., *Enregistrement et reproduction sur support magnétique des fréquences supérieures à 100 kilohertz. Application aux organes de mémoire et à l'enregistrement des images de télévision.* Revue Générale de l'Electricité. Anul 40, iunie 1956, vol. 65, nr. 6, p. 359.
9. Daicik M. I., *Întrebuinţarea metodelor radiotehnice pentru înregistrarea fără perturbaţii în mai multe puncte a deformaţiilor, eforturilor şi vibraţiilor, pe maşinile în funcţiune. Măsurarea eforturilor şi a solicitărilor în organele de maşini.* I.D.T., Bucureşti, 1956, p. 49.
10. Daniel E. D., *A Flux-sensitive. Reproducing head for magnetic recording systems.* The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers PART B. iulie 1955, vol. 102, nr. 4, p. 442.
11. Donaldson P. E. K., *A magnetic tape recorder for electrophysiology.* Electronic Engineering, 1955, octombrie-decembrie, p. 543.
12. Dupouy G., *Enregistrements Géophysiques sur bande de magnétophone.* L'Onde Electrique, octombrie 1954, vol. XXXIV, nr. 331, p. 765.
13. Frayne John G. a Hallay Wolfe, *Elements of Sound Recording.* Ed. John Willey & S., New York, Chapman & Hall, London, 1950.
14. Gratian Warren J., *Magnetic-Tape Pick-up has D. C. response.* Electronics, septembrie 1954, vol. 27, nr. 9, p. 156.
15. Heckenast C. és Zsdanszky K., *Mágneses.* Hangrögzités. Müszaki könyvkiadó, Budapest, 1955.
16. Hoberman Max., *Magnetic recorder arrests transients.* Electronics, octombrie 1954, vol. 27, nr. 10, p. 178.
17. Hogan John W., *Magnetic tape controls machine tools.* Electronics, decembrie 1954, vol. 27, nr. 12, p. 144.
18. Kornel Otto, *Magnetic head has megacycle range.* Electronics, noiembrie 1956, vol. 29, nr. 11, p. 172.
19. Krasilnikov V. A., *Unde sonore.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
20. Mayer C. G., *Un système d'enregistrement et de reproduction des signaux de télévision,* L'Onde Electrique, octombrie 1954, vol. XXXIV, nr. 331, p. 760.
21. Mullin J. T., *Enregistrement magnétique des signaux Video.* L'Onde Electrique, octombrie 1954, vol. XXXIV, nr. 331, p. 765.
22. Nadler Morton, *Oscilograful catodic.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
23. Nicolau Edmond, *Măsurări în radiotehnică.* Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1955, vol. I.
24. * * * *Măsurări în radiotehnică.* Ed. energetică de stat, Bucureşti, 1956, vol. II.
25. Ofengenden R. G., *Magnitnaia zapisi elektriceskih impulsov.* Radiotehnica, 1955, nr. 11.
26. Pisarenko G. S. şi Vainberg D. V., *Vibraţii mecanice.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1956.
27. Raymond F. H., *Considérations sur l'enregistrement magnétique dans le domaine des machines à calculer.* L'Onde Electrique, februarie 1955, 45e année, nr. 335, p. 89.
28. Richter H., *Neue Anwendungen der Magnetbandtechnik.* Elektrotechnik, 1956, nr. 40, p. 2.
29. Rocard Y., *Dynamique Générale des Vibrations.* Masson & Cie, Paris, 1949.
30. Schiesser H., *Les nouveaux appareils d'enregistrement magnétique de son employés*

par les sociétés de radiodiffusion de la République Fédérale Allemande. L'Onde Electrique, octombrie 1954, vol. XXXIV, nr. 331, p. 782.

31. Silvestru P. și Alper M., *Inregistrarea magnetică și magnetofonul.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1957.
32. Strelkov S. P., *Introducerea în teoria oscilațiilor.* Ed. tehnică, București, 1954.
33. Tănăsescu T., *Circuite electronice I.* Ed. Instit. politehnic, București, 1952, caietul 1 (curs litografiat).
34. * * * *Circuite electronice I.* Ed. Instit. politehnic, București, 1952, caietul 2 (curs litografiat).
35. Thomasson D. W., *Recording low frequencies on magnetic tape.* Wireless World, noiembrie 1954, vol. 60, nr. 11, p. 548.
36. Turcin A. M., *Măsurarea electrică a mărimilor neelectrice.* Ed. tehnică, București, 1957.
37. Vonsovski S. V., *Teoria modernă a magnetismului.* Ed. tehnică, București, 1956.
38. * * * *Neue Geräte für die magnetische Schallspeicherung.* Elektronische Rundschau, iulie 1957, nr. 7, p. 201.
39. * * * *T. V. Programs on magnetic tape.* Radio & Television News, iulie 1956, p. 92.
40. * * * *Recording Television and Sound Signals on Magnetic Tape.* Electronic Engineering, iulie 1954, vol. XXVI, p. 292.

ELASTICITATE — REZISTENŢA MATERIALELOR

ASUPRA TORSIUNII UNOR BARE CILINDRICE

DE

L. HAMBURGER, FL. DINCĂ şi V. MANEA

Problema torsiunii barelor cilindrice, pentru care domeniul format de secţiunea normală poate fi reprezentat conform pe interiorul cercului unitate, a constituit obiectul mai multor lucrări. Dintre acestea menţionăm în legătură cu lucrarea de faţă, cîteva care tratează torsiunea barelor cilindrice, avînd secţiunea normală mărginită de două arce de cerc [1], [2] şi [3]. Funcţia de transformare conformă este aceea a lui Karman-Treftz care dă corespondenţa domeniilor interioare. Aceeaşi funcţie poate servi la reprezentarea interiorului unei clase largi de profile pe interiorul cercului unitar. Remarcăm că dificultăţile matematice ce apar folosind această funcţie de transformare, fac ca problema torsiunii acestor bare să rămînă practic nerezolvată (exemplul [2]).

De asemenea o lucrare recentă [4] tratează problema torsiunii unor bare a căror secţiune normală este un anumit profil, care însă nu poate satisface necesităţilor practice.

În cele ce urmează, vom prezenta un tip de profile înrudite cu cele de tip Karman-Treftz avînd unghiuri diferite la cele două borduri. Ca aplicaţie, vom obţine funcţia de torsiune pentru un caz particular.

În partea a doua se indică o metodă aproximativă grafo-analitică cu aplicabilitate la toate cazurile în care se cunoaşte funcţia de transformare conformă, şi care rezolvă operant problema torsiunii.

Redăm mai întîi rezultatele lui N.I. Mushelişvili de care ne vom folosi mai departe. Fie,

$$z = z(\zeta) \tag{a}$$

funcţia care transformă cercul unitar $|\zeta| \leqslant 1$ în domeniul ce reprezintă secţiunea normală a barei supusă la torsiune. Funcţia complexă de torsiune este dată de formula

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{z(\sigma)\overline{z(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\, d\sigma. \tag{b}$$

Prin γ s-a notat frontiera cercului unitar, prin σ un punct curent pe această frontieră, iar prin ζ un punct interior cercului unitar.

Rigiditatea este dată de formula

$$D = \mu\,(I + D_0) \tag{c}$$

unde μ este o constantă elastică, I momentul polar de inerţie al secţiunii profilului,

$$I = \frac{1}{4i}\int_{\gamma} \overline{z(\sigma)}^{2}\, z(\sigma)\, d\sigma, \tag{d}$$

iar D_0 este dat de formula

$$D_0 = -\frac{1}{4}\int_{\gamma} [f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}]\; d\,[z(\sigma)\,\overline{z(\sigma)}]. \tag{e}$$

Efortul complex este dat de

$$X_z - iY_z = \mu\,\tau\left[\frac{df}{d\zeta}\,\frac{1}{z'(\zeta)} - i\,\overline{z(\zeta)}\right], \tag{f}$$

X_z şi Y_z au semnificaţiile obişnuite în elasticitate, τ este unghiul unitar de răsucire care se obţine imediat, dacă se cunoaşte rigiditatea şi momentul care produce torsiunea.

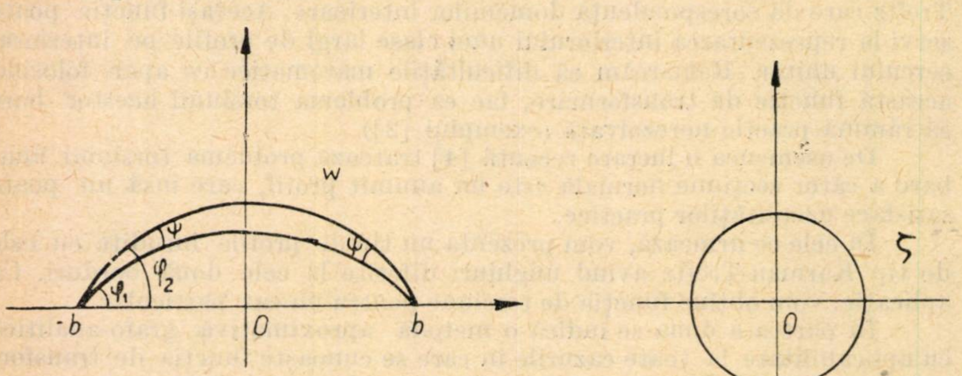


Fig. 1

I. Să considerăm funcţia care transformă conform interiorul cercului unitar în interiorul domeniului mărginit de două arce de cerc ce se intersectează sub unghiul ψ (fig. 1).

$$\frac{w + b}{w - b} = \alpha\left(\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}\right)^{\beta}, \tag{1}$$

unde b are semnificația din figura 1, iar

$$\alpha = e^{-\frac{3\varphi_2 - 5\varphi_1 - 2\pi}{2}},$$

$$\beta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} = \frac{\psi}{\pi}.$$

Să efectuăm succesiv transformările

$$u = w - b \tag{2}$$

$$z = u^{\frac{a\pi}{\psi}}$$

prima aduce originea în punctul de afixă (b) cea de-a doua modifică unghiul sub care se intersectează cele două cercuri în punctul corespunzător noii origini, tranformîndu-l într-un unghi de mărime $a\pi$ ($a < 2$), celălalt unghi rămînînd neschimbat. Reunind toate transformările (1), (2) se obține funcția :

$$z = C\,\frac{(1-\zeta)^a}{[\alpha\delta\,(1+\zeta)^\beta - (1-\zeta)^\beta]^{\frac{a}{\beta}}} \tag{3}$$

care realizează transformarea conformă a cercului $|\zeta| \leqslant 1$ pe interiorul unui domeniu avînd drept frontieră două curbe care se intersectează în două puncte distincte sub două unghiuri diferite (respectiv $\beta\pi$ și $\alpha\pi$).

În formula (3) C este o constantă care depinde de α și b și care este neesențială în cele ce urmează iar δ este o anumită rădăcină a unității, aleasă astfel încît $z(\zeta)$ să nu aibă poli în interiorul cercului unitar.

Dacă în particular, $a = 1$ formula (3) devine :

$$z = C\,\frac{1-\zeta}{[\alpha\delta\,(1+\zeta)^\beta - (1-\zeta)^\beta]^{\frac{1}{\beta}}} \tag{4}$$

această ultimă funcție realizînd transformarea conformă a interiorului cercului unitar pe interiorul unui profil care are unul din borduri rotunjit. Este evident că prin transformări asemănătoare se poate realiza ca și celălalt bord să fie rotunjit. În modul indicat se poate obține o categorie suficient de largă de profile pentru a aproxima destul de bine unele din profilele utilizate în practică.

În figura 2 sînt prezentate cîteva profile generate prin funcția (3).

Funcția complexă de torsiune în cazul în care funcția de transformare este (3) se poate scrie :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{\dfrac{(1-\sigma)^a}{[\alpha\delta\,(1+\zeta)^\beta - (1-\zeta)^\beta]^{\frac{a}{\beta}}} \cdot \dfrac{\left(1-\dfrac{1}{\sigma}\right)^a}{\left[\overline{\alpha\,\delta}\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)^\beta - \left(1-\dfrac{1}{\sigma}\right)^\beta\right]^{\frac{a}{\beta}}}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma \tag{5}$$

Se poate vedea imediat pe formula (5) unele din dificultățile efectuării integralei, dificultăți care provin atît din multiformitatea nucleului, cît și din greutatea de a găsi o primitivă pentru funcția de sub semnul integral. Însă, așa cum se va vedea ulterior, chiar în cazul în care aceste dificultăți au fost înlăturate, forma funcției (5) nu permite ușor ducerea problemei pînă la capăt pe această cale.

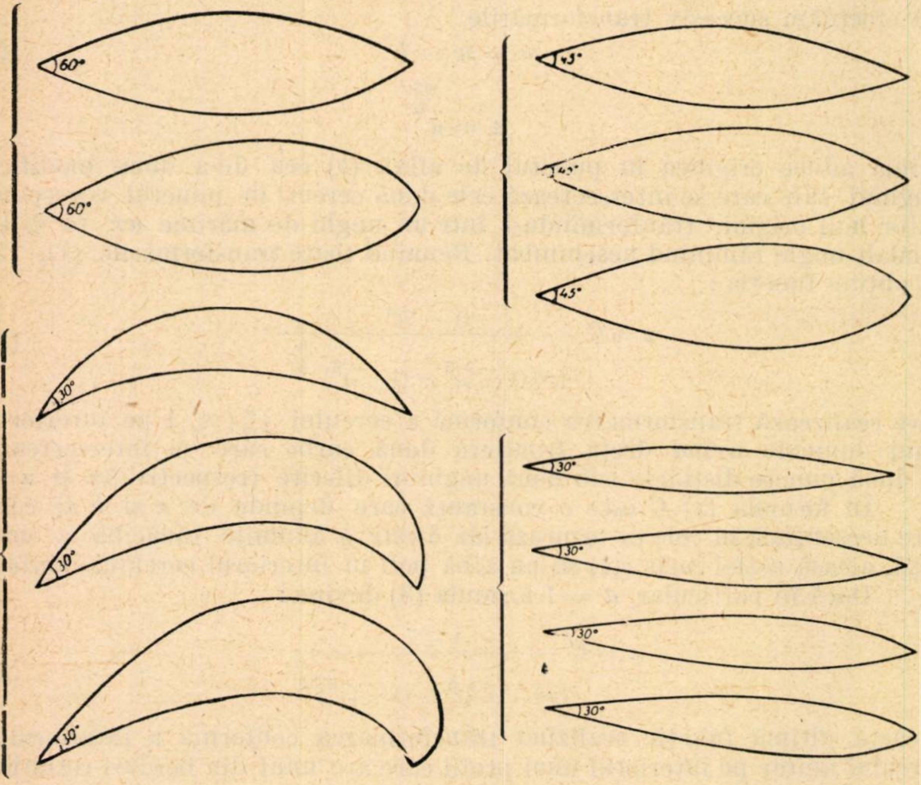


Fig. 2

Aplicație. Vom deduce funcția complexă de torsiune pentru o bară cilindrică a cărei curbă directoare a fost obținută prin formula (4) prin intermediul domeniului mărginit de două arce de cerc, ce se intersectează ortogonal.

Luînd $C = 1$ și $\delta = -1$ funcția de transformare devine

$$z = \frac{(1-\zeta)\,(1-\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta^2}. \tag{6}$$

Această funcție transformă cercul $|\zeta| \leqslant 1$ în interiorul profilului biconvex simetric din figura 3. Corespondența frontierelor este cea indicată în figură.

Pentru acest caz formula (5) devine :

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)\left(1-\sqrt{1-\sigma^2}\right)\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}\right)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma. \tag{7}$$

Descompunînd integrala precedentă obţinem

$$f(\zeta)=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma-\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma\right. \tag{8}$$

$$\left.-\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma+\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma.\right.$$

Calculăm prima integrală cu ajutorul teoremei reziduurilor faţă de interiorul cercului γ. Polii funcţiei de sub semnul integral (uniformă în $|\zeta|\leqslant 1$) fiind 0 şi ζ cu reziduurile $-\frac{1}{\zeta}$ şi $\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}$ avem

$$\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma=2\pi i\left[\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}-\frac{1}{\zeta}\right]. \tag{9}$$

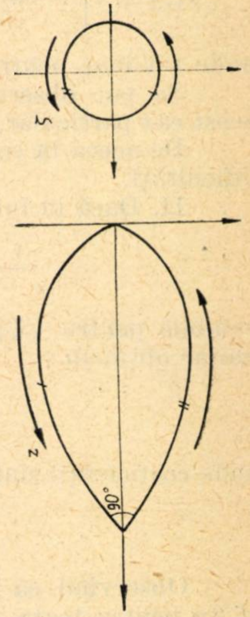


Fig. 3

Analog, pentru cea de-a doua integrală, polii funcţiei în interiorul cercului unitar fiind aceeaşi cu reziduurile $-\frac{1}{\zeta}$ şi $\frac{(1-\zeta)^2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ avem

$$\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\sigma^2}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma=2\pi i\left[\frac{(1-\zeta)^2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}-\frac{1}{\zeta}\right]. \tag{10}$$

Cea de-a treia integrală se calculează observînd că funcţia de sub semnul integral este uniformă în exteriorul cercului unitar, admiţînd ca pol simplu punctul de la infinit cu reziduul $[\zeta-2]$

$$\int_{\gamma}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma=2\pi i[\zeta-2]. \tag{11}$$

Ultima integrală se efectuează direct în modul următor :

$$I(\zeta)=\int_{+1}^{-1}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma+\int_{-1}^{+1}\frac{(1-\sigma)^2\sqrt{1-\sigma^2}\sqrt{1-\frac{1}{\sigma^2}}}{\sigma(\sigma-\zeta)}\,d\sigma.$$

Făcînd în cea de-a doua integrală schimbarea de variabilă $\sigma = -\acute{\sigma}$ avem

$$I(\zeta) = i\left[\frac{2(\zeta^2 - 1)}{\pi\zeta} + \frac{(1-\zeta^2)(1-\zeta)^2}{\pi\zeta^2} L \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right. \tag{12}$$

Ținînd seama de rezultatele precedente în expresia (7) obținem :

$$f(\zeta) = i\left[\frac{(1-\zeta)^2\sqrt{1-\zeta^2}-1}{\zeta} + \frac{2(\zeta^2-1)}{\pi\zeta} + \frac{(1-\zeta^2)(1-\zeta)^2}{\pi\zeta^2} L \frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right], \tag{13}$$

unde s-a luat pentru logaritm determinarea care se anulează în origine.

Se pot observa însă dificultățile de calcul ce apar chiar pentru acest caz particular.

De aceea în cele ce urmează vom indica o cale care să evite aceste dificultăți.

II. Dacă în funcția complexă de torsiune (b) înlocuim

$$\frac{1}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{\sigma}\left(1 + \frac{\zeta}{\sigma} + \ldots + \frac{\zeta^n}{\sigma^n} + \ldots\right) \tag{14}$$

valabilă pentru $|\zeta| < 1$, σ fiind un punct curent pe frontiera cercului unitar obținem :

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} C_n\zeta^n, \tag{15}$$

unde coeficienții sînt dați de

$$C_n = \int_\gamma \frac{|z|^2\, d\sigma}{\sigma^{n+1}}. \tag{16}$$

Observînd că $|z(\theta)|^2$ este o funcție continuă de θ pentru $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ pentru toate cazurile ce apar în problema torsiunii barelor cilindrice, ea îndeplinind în orice caz condițiile lui Dirichlet pentru a putea fi desvoltată în serie Fourier, avem :

$$|z(\theta)|^2 = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta. \tag{17}$$

Deoarece $|z(\theta)|^2$ este o funcție continuă și netedă pe porțiuni în intervalul $[0,2\pi]$ cu $|z(0)|^2 = z|(2\pi)|^2$ seria (17) converge absolut și uniform în $[0,2\pi]$. De asemenea seria

$$\sum_{1}^{\infty} |\alpha_n| + |\beta_n| \tag{18}$$

este convergentă.

Introducînd (17) în (16) și ținînd seama că pe cercul unitar

$$\sigma = e^{i\theta}$$

$$d\sigma = ie^{i\theta}\, d\theta$$

cît și de proprietatea de ortogonalitate a funcțiilor trigonometrice obținem :

$$C_n = \pi(\beta_n + i\alpha_n). \tag{19}$$

Funcția complexă de torsiune se poate scrie:

$$f(\zeta) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}(\beta_n + i\alpha_n)\zeta^n. \qquad (20)$$

Seria din membrul doi fiind absolut și uniform convergentă pentru $|\zeta| \leqslant 1$ în baza convergenței seriei (18) care este o majorantă a seriei (20).

Pentru calculul rigidității trebuie să calculăm separat D_0 și I. Avem pentru I*)

$$D_0 = -\frac{1}{4}\int_{\gamma}[f(\sigma) + \overline{f(\sigma)}]\frac{d|z|^2}{d\theta}\,d\theta \qquad (21)$$

ținînd seama că

$$f(\sigma) + \overline{f(\sigma)} = 2\,\mathrm{Real}\,[f(\sigma)] = \sum_{1}^{\infty}(\beta_n \cos n\theta - \alpha_n \sin n\theta)$$

și

$$\frac{d|z|^2}{d\theta} = \sum n(\beta_n \cos n\theta - \alpha_n \sin n\theta)$$

obținem

$$D_0 = -\frac{\pi}{4}\sum_{1}^{\infty} n(\alpha_n^2 + \beta_n^2). \qquad (22)$$

Valoarea lui I se obține imediat punînd

$$Z = |z|\,e^{i\Theta}$$

cu

$$dz = (d|z| + i|z|\,d\Theta)\,e^{i\Theta}$$

$$\Theta = \arg z$$

avem

$$I = \frac{1}{4i}\int_{\Gamma}|z|^3(d|z| + i|z|\,d\Theta) = \frac{1}{4}\int_{\Gamma}|z|^4\,d\Theta \qquad (23)$$

prima integrală fiind nulă din cauza uniformității funcției $|z|$. În integrarea de mai sus Γ este imaginea lui γ prin (a).

Aplicație. Dăm mai jos schema de calcul pentru cazul în care frontiera secțiunii transversale se reprezintă pe cerc cu ajutorul funcțiunii

$$Z = C\frac{(1-\zeta)^a}{[\alpha\delta(1+\zeta)^\beta - (1-\zeta)^\beta]^{\frac{a}{\beta}}}. \qquad (a')$$

Așa cum am arătat anterior, această funcție transformă cercul unitar într-un profil avînd la unul din borduri unghiul $a\pi$, iar la celălalt

---

*) Integrala (21) există totdeauna deoarece funcția de integrat este sau mărginită sau are singularități integrabile. Prin introducerea seriilor Fourier corespunzătoare integrarea se poate efectua termen cu termen chiar în cazul seriilor divergente datorită completitudinii sistemului trigonometric.

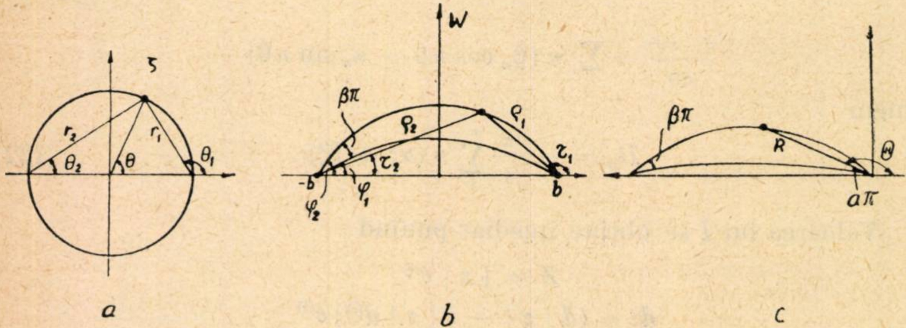
$\beta\pi$, prin intermediul domeniului mărginit de două arce de cerc ce se intersectează în două puncte reale şi distincte, sub unghiul $\beta\pi$.

Din funcţiile de transformare se deduc următoarele relaţii (vezi fig. 4)

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\beta} = \operatorname{tg}^{\beta} \frac{\theta}{2}, \tag{b'}$$

$$R = \zeta_1^{\frac{a}{\beta}}, \tag{c'}$$

$$\theta = \frac{a}{\beta} \tau_1. \tag{d'}$$


ζ
r_2
r_1
θ_2
θ
θ_1
W
$\beta\pi$
ρ_2
ρ_1
τ_2
τ_1
-b
b
φ_2
φ_1
$\beta\pi$
R
Θ
$a\pi$

a b c

Fig. 4

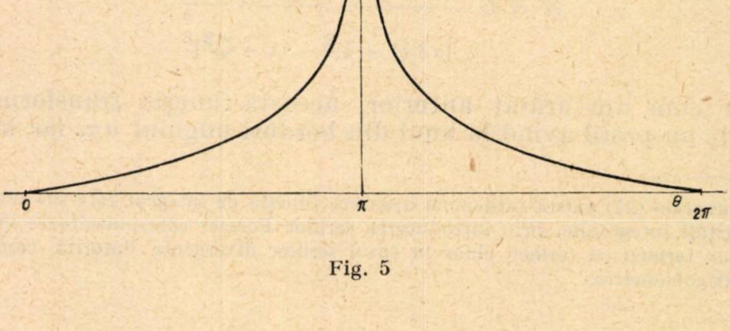


Fig. 5

Dîndu-ne profilul din planul w mărginit de cele două arce de cerc care se intersectează sub un unghi dat se poate pune în corespondență R și cu θ pentru un număr suficient de puncte astfel încît să se poată reprezenta grafic funcția

$$|Z|^2 = R^2(\theta) \tag{e'}$$

Pe graficul acestei funcții se pot obține printr-un procedeu oarecare coeficienții Fourier. Pentru profilul biconvex simetric avînd la bordul de fugă unghiul egal cu $\frac{\pi}{2}$ și coarda de 10 cm se obține graficul din figura 5.

Coeficienții Fourier calculați cu ajutorul analizorului armonic sînt :

$$\alpha_1 = -19 \qquad \alpha_2 = 8{,}4 \qquad \alpha_3 = -6$$

$$\alpha_4 = 4{,}9 \qquad \alpha_5 = -3{,}6$$

$$\beta_n = 0 \text{ pentru orice } n.$$

Funcția complexă de torsiune este :

$$f(\zeta) = i\,[-9{,}5\,\zeta + 4{,}23\,\zeta^2 - 3{,}0\,\zeta^3 + $$
$$+ 2{,}45\,\zeta^4 - 1{,}8\,\zeta^5 + \ldots].$$

Petru D_0 se obține :

$$D_0 = -\pi.191 \text{ cm}^4.$$

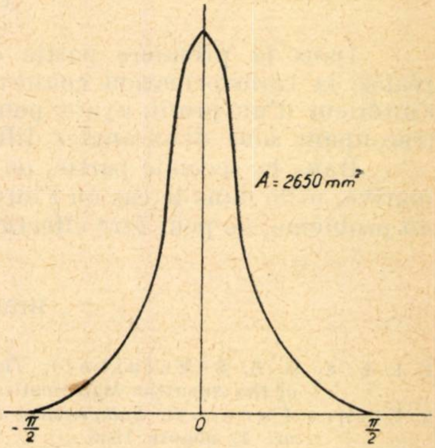


Fig. 6

I se obține conform formulei (23) prin reprezentarea grafică a funcției $R^4(\Theta)$ (fig. 6) în intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ și planimetrare.

Se obține astfel :

$$I = 736\ \pi \text{ cm}^4$$

deci

$$D = \mu\ 545\ \pi \text{ cm}^4.$$

Primită la redacție la 20 iulie 1957.

О КРУЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В первой части настоящей работы строится функция, конформно преображающая внутренность унитарного круга на внутренности профиля, имеющего в качестве границ две гладкие кривые, пересекающиеся под двумя различными углами.

Во второй части указан приближенный метод расчета для случая, когда интеграл Шварца, дающий решение задачи, не может быть вычислен в замкнутом виде.

SUR LA TORSION DE CERTAINES BARRES CYLINDRIQUES

(RÉSUMÉ)

Dans la première partie du travail, on construit la fonction qui réalise la transformation conforme de l'intérieur du cercle unitaire sur l'intérieur d'un profil, ayant pour frontière deux courbes lisses, qui s'entrecoupent sous deux angles différents.

Dans la seconde partie, on indique une méthode de calcul approximative, utile dans le cas ou l'intégrale de Schwartz, donnant la solution du problème, ne peut être effectuée sous forme fermée.

BIBLIOGRAFIE

1. I. S. a. E. S. Sokolnikoff, *Torsion of Regions Bounded by Circulars Arcs.* Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 44, 1938, p. 384—387.
2. Ettore Funaioli, *Sulla torsione di prismi a Sezione lenticolae.* L'Aerotecnica, vol. 36, nr. 4, august 1956.
3. W. J. Carter a. J. B. Oliphint, *Torsion of a circular Shaft With Diametrically Opposite Flat Sides.* Journal of Applied Mechanics, vol. 19, nr. 3, septembrie 1952.
4. Jan Polasek i Lasislav Spacek, *Prispevek k vypoctu momentu tuhosti v kranceni a strediska smyku lopatkovych profilu.* Rosprovy-Cehoslovenske Akadema Ved Rada Tehniskych Ved, Rocnik, 66, 1956, Sesist, 1.
5. N. I. Mushelisvili, Necotorîe Osnovnîe zadaci matematicescoi teorii uprugosti, Moskva, 1949.
6. Sokolnikoff, Mathematical theory of Elasticita Mc. Graw-Hill Book Company, 1946.

ASUPRA UNOR PROBLEME SPAȚIALE ALE TEORIEI ELASTICITĂȚII

DE

PETRE P. TEODORESCU

1. Urmărind o rezolvare în eforturi a problemelor spațiale ale teoriei elasticității, am arătat recent [11] cum se poate reprezenta starea de tensiune și starea de deformație a unui corp cu ajutorul a trei funcții biarmonice.

Eforturile unitare sînt date de relațiile¹)

$$\sigma_x = \Delta F_x - \frac{3}{2+\mu}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{1}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{3}{2+\mu}\,\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} + \frac{3\mu}{2(2+\mu)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\iint \Delta F\,dydz + $$

$$+ \frac{1}{2}\Delta\left(\int\frac{\partial F_y}{\partial z}dy + \int\frac{\partial F_z}{\partial y}dz\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[F_{xy}(x,y) - F_{zx}(z,x)\right], \tag{1'}$$

iar deplasările de

$$\frac{E}{1+\mu}u = \Delta\int\left(F_x - \frac{3\mu}{2+\mu}F\right)dx - \frac{3}{2+\mu}\,\frac{\partial F}{\partial x} + 2\bar{F}_{yz}(y,z) + f_{yz}(y,z) +$$

$$+ \frac{E}{1+\mu}\left(-y\,\omega^0_{xy} + z\,\omega^0_{zx} + u_0\right), \tag{2}$$

unde E este modulul de elasticitate longitudinală, μ coeficientul lui Poisson, iar funcțiile F_x, F_y, F_z sînt biarmonice

$$\Delta\Delta F_x = \Delta\Delta F_y = \Delta\Delta F_z = 0, \tag{3}$$

---

¹) Celelalte relații se deduc prin permutări circulare.

funcțiile F_{yz}, F_{zx}, F_{xy} sînt armonice

$$\Delta F_{yz}(y,z) = \Delta F_{zx}(z,x) = \Delta F_{xy}(x,y) = 0, \tag{4}$$

funcțiile $f_{yz}(y,z)$, $f_{zx}(z,x)$, $f_{xy}(x,y)$ sînt integrale particulare ale sistemului de ecuații cu variabile separate

$$\frac{\partial f_{zx}(z,x)}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial y} =$$

$$= \frac{3\mu}{2+\mu}\,\Delta\left(\int \frac{\partial F}{\partial z}\,dy + \int \frac{\partial F}{\partial y}\,dz + \iint \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,dy dz\right), \tag{5}$$

funcțiile $\overline{F}_{yz}(y,z)$, $\overline{F}_{zx}(z,x)$, $\overline{F}_{xy}(x,y)$ sînt conjugate armonice ale funcțiilor $F_{yz}(y,z)$, $F_{zx}(z,x)$, $F_{xy}(x,y)$ și am introdus notația

$$F = \frac{1}{3}(F_x + F_y + F_z). \tag{6}$$

Constantele u_0, v_0, w_0; $\overset{0}{\omega}_{yz}$, $\overset{0}{\omega}_{zx}$, $\overset{0}{\omega}_{xy}$ sînt deplasările, respectiv rotirile corpului, considerat ca un rigid, și se determină prin condițiile de rezemare.

2. De asemenea am arătat [11] că starea de tensiune și starea de deformație a unui corp elastic se pot reprezenta și numai cu ajutorul unor funcții armonice.

Eforturile unitare vor fi date de relațiile¹)

$$\sigma_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} - \frac{1}{2(2+\mu)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \tag{7}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{1}{2(2+\mu)}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y\,\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi_y}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial y}\right) +$$

$$+ \frac{\mu}{2(2+\mu)}\iint \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\,dy dz + \frac{\partial}{\partial x}\left[F_{xy}(x,y) - F_{zx}(z,x)\right] \tag{7'}$$

și deplasările de

$$\frac{E}{1+\mu}u = \Phi_x - \frac{1}{2(2+\mu)}\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\mu}{2+\mu}\int \Psi\,dx + 2\overline{F}_{yz}(y,z) + f_{yz}(y,z) +$$

$$+ \frac{E}{1+\mu}\left(-y\omega^0_{xy} + z\omega^0_{zx} + u_0\right), \tag{8}$$

unde

$$\Phi = x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z + \Phi_0, \tag{9}$$

funcțiile Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_0 fiind armonice

$$\Delta\Phi_x = \Delta\Phi_y = \Delta\Phi_z = \Delta\Phi_0 = 0, \tag{10}$$

---

¹) Celelalte relații se deduc prin permutări circulare.

și unde am notat

$$\Psi = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z}. \qquad (11)$$

Funcțiile $f_{yz}(y,z)$, $f_{zx}(z,x)$, $f_{xy}(x,y)$ sînt date de sistemul de ecuații cu variabile separate

$$\frac{\partial f_{zx}(z,x)}{\partial z} + \frac{\partial f_{xy}(x,y)}{\partial y} =$$

$$= \frac{\mu}{2+\mu}\left(\int \frac{\partial \Psi}{\partial z}\, dy + \int \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dz + \iint \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\, dy\, dz\right). \qquad (12)$$

După cum au arătat recent R. A. Eubanks și E. Sternberg [2], cu excepția cazului în care $\mu = 1/4$, una din aceste funcții poate fi exprimată în raport cu celelalte sau poate fi luată egală cu zero (de pildă $\Phi_0 = 0$), după cum este mai convenabil din punct de vedere al calculului. Deci starea de solicitare a corpului este în întregime determinată cu ajutorul a trei funcții armonice.

Trebuie să menționăm de asemenea lucrarea lui G. Fichera [3], care arată că nu se poate reprezenta starea de tensiune și starea de deformație numai cu ajutorul unei singure funcții de eforturi.

3. La aceste reprezentări, care ne permit să determinăm starea de solicitare într-un punct oarecare al unui corp oarecare, trebuie să adăugăm condițiile pe contur, care ne permit să ne referim la un corp anumit și la o solicitare anumită; la studiul local făcut trebuie să adăugăm un studiu global al corpului elastic.

a) Condițiile pe contur se vor pune în eforturi (prima problemă fundamentală a teoriei elasticității), sub forma

$$p_{nx} = \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy} \cos(n,y) + \tau_{zx} \cos(n,z), \qquad (13)$$

unde (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}) este intensitatea sarcinii exterioare pe un element de arie de normală exterioară $\overline{n}$.

b) În deplasări (a doua problemă fundamentală a teoriei elasticității), punem condițiile[1] sub forma

$$u = u_n;\ v = v_n;\ w = w_n, \qquad (14)$$

unde deplasarea (u_n, v_n, w_n) a elementului de arie de normală exterioară $\overline{n}$ este dată de legătura cu celelalte elemente de construcție.

c) De asemenea (și acest lucru este mai frecvent decît cazul *b*)) se pot pune condiții în eforturi pe unele porțiuni de contur și condiții în deplasări pe alte porțiuni (problema mixtă).

---

[1] Aceste condiții sînt diferite de condițiile de rezemare ale corpului, care se pun în puncte, pentru determinarea celor 6 constante corespunzătoare mișcării ca un corp rigid.

Pentru cazul *b*) se pot folosi cu succes şi reprezentările (o rezolvare în deplasări a problemei) date de B.G. Galerkin [4], P.F. Papkovici [7] şi H. Neuber [6], redate împreună cu alte reprezentări şi în excelentul articol de sinteză al lui K. Marguerre [5].

4. Dacă între funcţiile de eforturi F_x, F_y, F_z există anumite relaţii, obţinem reprezentări particulare mai simple, care pot fi foarte folositoare în unele cazuri.

Dintre relaţiile care pot avea loc între aceste funcţii, cităm — ca mai interesante — pe următoarele

$$F_x = F_y = F_z = F, \tag{15}$$

$$F_z = F_1;\ F_x = F_y = F_2, \tag{16}$$

$$F_z = F_1;\ F_x = F_y = 0, \tag{17}$$

$$F_z = F_1;\ F_x = -F_y = F_2, \tag{18}$$

$$F_x = F_1;\ F_y = F_2;\ F_z = 0, \tag{19}$$

$$F_x + F_y + F_z = 0. \tag{20}$$

De pildă, cu ajutorul unor funcţii de eforturi între care există relaţiile (18), s-a putut rezolva problema semispaţiului elastic acţionat pe planul de separaţie de sarcini periodice pe două direcţii [13].

Cazul în care funcţiile verifică relaţia (20) atrage după sine condiţia că suma eforturilor unitare normale este nulă, ceea ce corespunde la un corp elastic incompresibil (tensiunile şi deformaţiile specifice sînt date de un tensor sferic), caz analog cu cel studiat de noi pentru problema plană [10].

5. Dacă se folosesc reprezentările de la punctul 2, avem de determinat trei funcţii armonice, pentru care se dau 3 condiţii într-un punct oarecare de pe contur. În acest caz cele trei funcţii sînt univoc determinate, pentru un domeniu simplu conex, dacă sarcinile de pe cnotur îşi fac echilibru[1]).

Folosind reprezentările de la punctul 1, trebuie să determinăm trei funcţii biarmonice, pentru care se dau 3 condiţii într-un punct oarecare de pe contur, ceea ce este echivalent cu determinarea a 6 funcţii armonice avînd date aceleaşi condiţii pe contur; această reprezentare nu mai este univocă. Totuşi teorema lui Kirchhoff ne asigură (în anumite condiţii, destul de largi din punct de vedere practic) că soluţia problemei (starea de tensiune şi starea de deformaţie) este unică, chiar dacă corespunde la grupe de funcţii de eforturi diferite.

De asemenea funcţiile armonice de două variabile F_{yz}, F_{zx}, F_{xy}, care se pot lua eventual egale cu zero, considerăm că sînt folositoare la punerea condiţiilor pe contur. Într-adevăr ele apar numai în expresiile (1′) ale eforturilor unitare tangenţiale şi pot corecta neîndeplinirea unor anumite condiţii la limită de către acestea.

---

[1]) Nu cunoaştem vreo demonstraţie a acestui rezultat; este foarte probabil însă că este adevărat, prin analogie cu problema plană.

Faptul că mulţimea integralelor ecuaţiei biarmonice include mulţimea integralelor ecuaţiei armonice face ca atunci cînd avem de determinat anumiţi parametri arbitrari, prin condiţiile pe contur date, să obţinem un număr mai mare de ecuaţii liniare de rezolvat, decît numărul necunoscutelor. Considerăm că acesta este un avantaj al metodei de calcul, deoarece ne permite o mai uşoară determinare a funcţiilor de eforturi, eventual într-o formă mai simplă[1]).

6. În ceea ce priveşte structura funcţiilor pe care le folosim, E. Almansi a arătat [1] că putem reprezenta în mod univoc o funcţie biarmonică sub forma

$$F(x,y,z) = \varphi(x,y,z) + [a + bx + cy + dz + e(x^2+y^2+z^2)]\psi(x,y,z), \tag{21}$$

unde $\varphi(x,y,z)$ şi $\psi(x,y,z)$ sînt funcţii armonice

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = 0, \tag{22}$$

constantele b, c, d, e neputînd fi simultan nule[2]).

Această observaţie ne permite să calculăm mai uşor diverse funcţii biarmonice particulare, utile pentru aplicaţii practice.

7. O primă categorie de integrale particulare este formată de polinoamele biarmonice.

Se verifică cu uşurinţă că următoarele monoame sînt funcţii armonice

$$\text{const}\,;\ x,\ y,\ z,\,;\ xy,\ yz,\ zx\,;\ xyz. \tag{23}$$

Plecînd de la funcţiile armonice de gradele 2, 3, 4 şi 5 şi aplicînd în mod convenabil relaţia (21), găsim următoarele monoame biarmonice

$$x^2,\ y^2,\ z^2;\ x^3,\ y^3,\ z^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^2z,\ yz^2,\ z^2x,\ zx^2;\ x^3y,\ xy^3,\ y^3z,\ yz^3,\ z^3x,\ zx^3,\ xyz^2,\ yzx^2,\ zxy^2;\ xyz^3,\ yzx^3,\ zxy^3. \tag{24}$$

Putem obţine forma generală a celorlalte polinoame armonice, pornind de la forma generală a unui polinom omogen de gradul n şi punînd condiţia ca acest polinom să fie armonic.

Scrim astfel

$$P_n(x,y,z) = \sum_{i+j+k=n} A_{ijk}\, x^i\, y^j\, z^k\,, \tag{25}$$

unde toţi indicii sînt pozitivi sau cel puţin egali cu zero.

Remarcăm că pentru i fix avem $j + k = n - i$ şi corespund $(n - i + 1)$ coeficienţi diferiţi. Făcînd pe i să ia toate valorile posibile, găsim numărul total al coeficienţilor de determinat

$$(n + 1) + n + (n - 1) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}. \tag{26}$$

---

[1]) Ca exemplu se poate vedea lucrarea [13].

[2]) Pentru ca funcţia să fie numai biarmonică.

Punînd condiția ca acest polinom să fie biarmonic, obținem

$$\sum_{i+j+k=n} A_{ijk}[i(i-1)x^{i-2}y^j z^k + j(j-1)x^i y^{j-2} z^k + k(k-1)x^i y^j z^{k-2}] = 0. \quad (27)$$

Făcînd schimbări de indici pentru al doilea și al treilea termen din paranteză, mai putem scrie

$$\sum_{i+j+k=n} [i(i-1)A_{ijk} + (j+2)(j+1)A_{i-2.j+2.k} + \\ + (k+2)(k+1)A_{i-2.j.k+2}]\, x^{i-2} y^j z^k = 0. \quad (27')$$

Acest polinom este identic nul dacă toți coeficienții lui sînt nuli. Făcînd încă o schimbare de indici, găsim că între cei $\frac{1}{2}(n+2)(n+1)$ coeficienți trebuie să existe relațiile

$$(i+2)(i+1)A_{i+2.j.k} + (j+2)(j+1)A_{i.j+2.k} + \\ + (k+2)(k+1)A_{i.j.k+2} = 0, \quad (28)$$

unde $i + j + k = n - 2$, deci $\frac{1}{2}n(n-1)$ relații.

Un polinom armonic omogen de gradul n va depinde deci de $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = 2n + 1$ constante arbitrare[1]). Putem să luăm drept constante arbitrare coeficienții

$$\begin{matrix} A_{00n}, & A_{0.1.n-1}, \ldots, & A_{0.n-1.1}, & A_{0n0} \\ A_{1,0.n-1}, & A_{1.1.n-2}, \ldots, & A_{1.n-2.1}, & A_{1.n-1.0} \end{matrix} \quad (29)$$

cei din primul rînd fiind în număr de $(n+1)$, ceilalți în număr de n.

Ceilalți coeficienți se pot obține în funcție de aceștia, din aproape în aproape, cu ajutorul relațiilor (28).

Dacă n este un număr cu soț, polinomul P_n poate să fie par în raport cu toate cele trei variabile și putem lua constantele arbitrare

$$A_{00n}, \; A_{0.2.n-2}, \ldots, A_{0.n-2.2}, \; A_{0n0}, \quad (30)$$

în număr de $\left(\frac{1}{2}n + 1\right)$, sau poate fi par numai în raport cu o variabilă și impar în raport cu celelalte variabile și luăm constantele arbitrare

$$\begin{matrix} A_{0.1.n-1}, & A_{0.3.n-3}, \ldots, & A_{0.n-3.3}, & A_{0.n-1.1} \\ A_{1.0.n-1}, & A_{1.2.n-3}, \ldots, & A_{1.n-4.3}, & A_{1.n-2.1} \\ A_{1.1.n-2}, & A_{1.3.n-4}, \ldots, & A_{1.n-3.2}, & A_{1.n-1.0}; \end{matrix} \quad (30')$$

fiecare șir cuprinzînd cîte $\frac{1}{2}n$ constante.

---

[1]) Deci există cel mult $(2n + 1)$ polinoame armonice omogene de gradul n, liniar independente.

În mod analog, dacă n este un număr fără soț, polinomul P_n poate să fie impar în raport cu toate cele trei variabile şi putem lua constantele arbitrare

$$A_{1.1.n-2},\quad A_{1.3.n-4.}\ \ldots,\quad A_{1.n-4.3},\quad A_{1.n-2.1} \tag{31}$$

în număr de $\frac{1}{2}(n-1)$, sau poate fi impar numai în raport cu o variabilă şi par în raport cu celelalte variabile şi luăm constantele arbitrare

$$\begin{array}{llll} A_{1.0.n-1}, & A_{1.2.n-3}, \ldots, & A_{1.n-3.2}, & A_{1.n-1.0} \\ A_{0.1.n-1}, & A_{0.3.n-3}, \ldots, & A_{0.n-2.2}, & A_{0n0} \\ A_{00n}, & A_{0.2.n-2}, \ldots, & A_{0.n-3.3}, & A_{0.n-1.1}, \end{array} \tag{31'}$$

fiecare şir cuprinzînd cîte $\frac{1}{2}(n+1)$ constante.

Aceste observații ne ajută în practică la obținerea diferitelor polinoame particulare, pentru care ştim cîte constante avem la dispoziție pentru îndeplinirea condițiilor pe contur.

Putem obține diferitele polinoame biarmonice, pornind de la rezultatele de mai sus şi folosind relația (21), unde luăm $\varphi = P_n$ şi $\psi = P_{n-2}$, polinoame armonice şi $a = b = c = d = 0$, iar $e = 1$.

În felul acesta putem afirma că un polinom biarmonic omogen de gradul n depinde de $(2n+1) + [2(n-2)+1] = 4n - 2$ constante arbitrare, pe care le putem alege după aceleaşi considerente ca şi în cazul polinomului armonic.

Dacă polinomul biarmonic P_n are o anumită paritate în raport cu variabilele sale şi polinoamele armonice componente au aceeaşi paritate. Bazați pe această observație şi procedînd ca mai sus putem enunța următoarele rezultate :

Dacă n este un număr cu soț, polinomul P_n se descompune într-un polinom par în raport cu toate cele trei variabile, care depinde de $(n+1)$ constante arbitrare, şi în trei polinoame pare numai în raport cu o variabilă şi impare în raport cu celelalte variabile, care depind fiecare de $(n-1)$ constante arbitrare.

De asemenea dacă n este un număr fără soț, polinomul P_n se descompune într-un polinom impar în raport cu toate cele trei variabile, care depinde de $(n-2)$ constante arbitrare, şi în trei polinoame impare în raport cu o variabilă şi pare în raport cu celelalte variabile, care depind fiecare de n constante arbitrare.

8. În cazul cînd corpul admite un plan de simetrie geometrică şi mecanică (din punct de vedere al rezemării), se pot face simplificări considerabile în calcul ; se ia planul de simetrie ca plan de coordonate (fie acesta planul xOy).

Orice caz de încărcare se poate descompune în două cazuri : unul simetric în raport cu acest plan şi unul antisimetric în raport cu acelaşi plan ; starea de tensiune şi starea de deformație trebuie să se bucure de aceleaşi proprietăți.

În cazul unei simetrii în raport cu planul xOy, eforturile unitare normale σ_x, σ_y, σ_z şi efortul unitar tangenţial τ_{xy} sînt funcţii pare în raport cu z, iar eforturile unitare tangenţiale τ_{yz}, τ_{zx} sînt funcţii impare în raport cu această variabilă; deplasările u şi v vor fi funcţii pare în raport cu z iar deplasarea w va fi o funcţie impară. Rezultă că cele trei funcţii biarmonice, F_x, F_y, F_z trebuie să fie pare în raport cu z; de asemenea funcţiile de două variabile F_{yz}, F_{zx}, trebuie să fie impare în raport cu z. De asemenea funcţiile armonice Φ_0, Φ_x, Φ_y sînt pare în raport cu z iar funcţia Φ_z este impară în raport cu această variabilă. În cazul unei antisimetrii în raport cu planul xOy, paritatea va fi inversă.

Dacă alegem funcţiile de eforturi ţinînd seama de aceste proprietăţi, este suficient să punem condiţiile pe o singură parte a conturului; pe partea simetrică cu aceasta ele vor fi îndeplinite simultan.

De asemenea, dacă corpul admite două sau trei plane de simetrie, alegem aceste plane ca plane de coordonate. Orice caz de încărcare poate fi descompus în 8 cazuri, după proprietăţile de simetrie şi antisimetrie în raport cu cele 3 plane. Problemele pot fi studiate separat, pentru fiecare caz de încărcare component în parte, obţinîndu-se apoi rezultatul final prin suprapunerea efectelor. În cazul polinoamelor armonice şi biarmonice am arătat pe larg proprietăţile de paritate şi imparitate ale funcţiilor, ca aplicaţie pentru cazurile de paritate şi imparitate considerate mai sus.

Rezultatele date de noi pentru polinoame armonice şi polinoame biarmonice pot fi folosite la rezolvarea problemelor spaţiale prin metode elementare. Se pot astfel rezolva unele probleme, folosind polinoame de grad cît mai mic, punînd eventual condiţii globale pe unele părţi ale conturului şi folosind principiul lui B. de St. Venant. Putem de asemenea extinde la probleme spaţiale metoda condiţiilor pe contur într-un număr finit de puncte, metodă pe care noi am apliacat-o în cazul problemei plane a teoriei elasticităţii [9].

9. Bazaţi pe consideraţiile precedente, vom relua ca exemplu aşa-numitele probleme elementare ale teoriei elasticităţii — probleme în care ecuaţiile de continuitate ale lui B. de St. Venant sînt identic verificate, deoarece componentele tensorului tensiune şi ale tensorului deformaţie specifică sînt funcţii liniare de coordonatele punctului. Aceste probleme se găsesc studiate în diverse cărţi de teoria elasticităţii, de pildă în ultimul volum de Timoshenko şi Goodier [14]. Noi le redăm pentru a arăta metoda unitară prin care pot fi obţinute rezultatele cu ajutorul funcţiilor de eforturi.

Vom considera o bară dreaptă, de secţiune constantă A; luăm axa barei ca axă Oz, iar origina O o luăm în planul de simetrie geometrică xOy.

Dacă bara este supusă la o întindere sau o compresiune simplă singurul efort unitar diferit de zero este

$$\sigma_z = \frac{N}{A}, \qquad (32)$$

unde N este forța axială. În acest caz putem lua funcțiile de eforturi

$$F_x = F_y = 0\,; \quad F_z = \frac{2+\mu}{2(1+\mu)}\,\frac{N}{A}\,z^2 \tag{33}$$

aceasta constituind una din reprezentările posibile (cea mai simplă) cu ajutorul a trei funcții biarmonice.

Dacă bara este supusă la întindere sau compresiune din greutate proprie, apare un singur efort unitar diferit de zero

$$\sigma_z = \gamma(l \mp z), \tag{34}$$

unde $2l$ este lungimea barei, γ este greutatea specifică și se ia semnul $(-)$ sau $(+)$ după cum este vorba de o întindere (bara verticală prinsă la capătul de sus) sau de o compresiune (bara verticală rezemată pe capătul de jos). Axa Oz s-a considerat îndreptată după direcția gravitații. Putem alege funcțiile de eforturi

$$F_x = F_y = 0\,; \quad F_z = \frac{2+\mu}{6(1+\mu)}\,\gamma z^2\,(3l \mp z). \tag{35}$$

Acest rezultat se obține prin descompunerea în două cazuri componente, unul simetric în raport cu planul xOy și unul antisimetric în raport cu acest plan.

Dacă bara este supusă la o încovoiere simplă, avînd vectorul moment îndreptat după axa Ox, rezultă efortul unitar normal

$$\sigma_z = -\frac{M}{I}\,y, \tag{36}$$

unde M este momentul încovoietor pe secțiune, iar I este momentul de inerție al secțiunii transversale în raport cu axa Ox. Corespund funcțiile de eforturi

$$F_x = 0\,; \quad F_y = -\frac{2+\mu}{6(1+\mu)}\,\frac{M}{I}\,y^3 + \frac{M}{2I}\,yz^2\,; F_z = -\frac{M}{2I}\,yz^2\,. \tag{37}$$

Am găsit aceste funcții alegînd o reprezentare de forma

$$F_x = 0\,;\ F_y = Ay^3 + Byz^2\,;\ F_z = Cy^3 + Dyz^2, \tag{38}$$

care este pară în raport cu z (simetrie în raport cu planul xOy) și care ne dă eforturile unitare menționate mai sus.

În toate cazurile considerate mai sus am luat

$$F_{yz} = F_{zx} = F_{xy} = 0. \tag{39}$$

Dacă bara are o secțiune circulară și este supusă la răsucire simplă, apar eforturile unitare tangențiale

$$\tau_{zx} = -\frac{M_t}{I_p}\,y\,; \quad \tau_{zy} = \frac{M_t}{I_p}\,x, \tag{40}$$

unde M_t este momentul de răsucire, iar I_p este momentul de inerție polar al secțiunii transversale. În acest caz putem să luăm funcțiile de eforturi

$$F_x = F_y = F_z = 0 \tag{41}$$

şi starea de tensiune va fi dată numai de funcțiile de două variabile

$$F_{yz} = -\frac{M_t}{2I_p}(y^2 - z^2); \quad F_{zx} = \frac{M_t}{2I_p}(z^2 - x^2); \; F_{xy} = 0. \tag{42}$$

O altă problemă elementară clasică este cea a unui corp oarecare, supus la o presiune uniformă din toate părțile (presiune hidrostatică). Apar numai eforturi unitaie normale egale între ele

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p, \tag{43}$$

unde p este intensitatea presiunii hidrostatice. Putem folosi funcțiile de eforturi

$$F_x = -\frac{2+\mu}{2(1+\mu)}px^2; \quad F_y = -\frac{2+\mu}{2(1+\mu)}py^2; \quad F_z = -\frac{2+\mu}{2(1+\mu)}pz^2. \tag{44}$$

Se poate efectua un studiu al stărilor de tensiune pe care le reprezintă diferite polinoame biarmonice particulare, începînd cu monoamele biarmonice. Pentru aceasta se poate alege un corp particular de formă paralelipipedică (un bloc care poate fi considerat ca o placă foarte groasă). Un asemenea studiu prezintă interes pentru a ne putea da seama de modul în care se obțin rezultatele prin suprapunerea efectelor, din diverse cazuri particulare.

10. În unele cazuri putem folosi diferite integrale particulare cunoscute ale ecuației lui Laplace. Putem admite astfel că

$$\Phi(x,y,z) = \Phi(x^2 + y^2 + z^2) = \Phi(u) \tag{45}$$

ceea ce ne conduce la

$$\frac{1}{2}\Delta\Phi = \frac{d}{du}\left[\Phi + 2u\frac{d\Phi}{du}\right] = 0 \tag{46}$$

şi găsim funcțiile armonice $1/\sqrt{u}$ şi const. Prin multiplicare cu $u = x^2 + y^2 + z^2$, găsim funcțiile biarmonice $\sqrt{u}$ şi u. Notînd distanța polară $\sqrt{u} = R$ putem folosi aceste integrale în cazul unei simetrii sferice (în raport cu un pol).

Putem obține analog şi alte integrale particulare, admițînd alte relații între cele trei variabile.

11. O metodă deosebit de fructuoasă în rezultate este cea a lui Fourier de calcul cu ajutorul unor funcții, produse de funcții de cîte o singură variabilă. Se ştie că putem alege astfel o funcție de forma

$$\Phi(x,y,z) = \varphi(x,y)\psi(z) \tag{47}$$

și obținem

$$\Delta\Phi(x,y,z) = \psi(z)\,\Delta\varphi(x,y)+\varphi(x,y)\,\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} = 0, \tag{48}$$

ceea ce ne conduce la ecuațiile

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + k^2\psi(z) = 0, \tag{49}$$

$$(\Delta \mp k^2)\varphi(x,y) = 0.$$

Prima ecuație ne dă funcții trigonometrice sau hiperbolice, iar a doua ecuație ne dă funcții metaarmonice.

Dacă procedăm și cu a doua ecuație în mod analog, găsim integrale particulare de forma

$$\begin{aligned} &\sin\alpha x \sin\beta y\, e^{\pm\gamma z}\ ; \qquad && \sin\alpha x \sin\beta y \,\mathrm{sh}\,\gamma z, \\ &e^{\pm\alpha x}\, e^{\pm\beta y} \sin\gamma z\ ; \qquad && \mathrm{sh}\,\alpha x\, \mathrm{sh}\,\beta y \sin\gamma z, \end{aligned} \tag{50}$$

unde

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \tag{51}$$

Alte funcții armonice se obțin înlocuind unele linii ,,sin'' prin ,,cos'' sau ,,sh'' prin ,,ch'' sau schimbînd rolul variabilelor între ele.

Folosind formula (21), obținem de asemenea funcții biarmonice importante pentru aplicații practice, mai interesant fiind cazul în care $a = e = 0$.

Pentru a studia problema spațiului infinit sau a semispațiului infinit putem folosi aceste integrale particulare care cuprind exponențiale. Prin suprapunerea efectelor, obținem serii Fourier, pe care le folosim în cazul unor sarcini periodice, sau integrale Fourier, pe care le folosim în cazul unor sarcini locale. Se poate vedea, de pildă, studiul întreprins [13] de noi în cazul semispațiului elastic acționat pe planul de separație de sarcini periodice pe două direcții.

O altă problemă importantă, cazul plăcii groase, infinită în planul său, poate fi studiată cu ajutorul integralelor particulare de mai sus, care cuprind linii hiperbolice. Metoda de calcul care trebuie aplicată este analoagă cu cea de la grinzi pereți pe o infinitate de reazeme și finite ca înălțime sau cu cea din cazul benzii plane, solicitată de sarcini locale. Pentru aceasta se poate cerceta de pildă lucrarea [8].

O problemă mai complicată din punct de vedere al calculului este cea în care placa infinită în planul ei (stratul elastic) devine mărginită într-o direcție; obținem astfel succesiv semistratul, banda, semibanda și paralelipipedul elastic (placa groasă propriu-zisă, cu o singură deschidere). Pentru aceste cazuri se pot extinde în spațiu metodele de calcul date de noi [8], [12] în cazul grinzii perete cu o singură deschidere.

În toate aceste cazuri se pot folosi cu succes proprietățile de simetrie și antisimetrie, asupra cărora am insistat mai sus.

12. Formularea indicată pentru problema spațială a elasticității poate fi folosită și în alte cazuri, de pildă răsucirea simplă a unei bare

de secțiune oarecare sau încovoierea cu forfecare a unei asemenea bare sau problema plană a teoriei elasticității, permițîndu-ne să studiem aproximația cu care se atacă în mod obișnuit aceste probleme.

În general considerăm că această formulare ne dă o metodă unitară de a ataca diverse probleme particulare, care se rezolvă în mod obișnuit pe căi specifice fiecăreia din ele.

Primită la redacție la 11 februarie 1957.

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Дается выраженное в усилиях решение пространственной задачи. Указывается, что напряжения даны соотношениями (1) и (1'), (7) и (7'), а составляющие перемещения имеют вид (2) или (8) с (3), (4), (5) и (6) ; (9), (10), (11) и (12). Граничные задачи даны соотношениями (13) и (14). Рассмотрены преимущества и недостатки различных представлений.

Исследован общий вид гармонических и бигармонических многочленов ; дано несколько примеров простейших пространственных задач.

Рассматривается также применение рядов Фурье, в частности для случая, когда тело ограничено плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Такая постановка дает унитарный метод для решения пространственных задач теории упругости.

ABOUT SOME SPACE PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

(ABSTRACT)

A solution in stresses for the space problem is presented. It is shown that the stresses are generally given by (1) and (1'), (7) and (7') and the components of displacement are given under the form (2) and (8) with (3), (4), (5) and (6), (9), (10), (11) and (12). The boundary-value problems are determined by (13) and (14). The advantages and disadvantages of the different representations are marked out.

The general forms of harmonical and biharmonical polynoms are studied ; the author deals out some examples from the elementary space problems.

The applications of Fourier series are also shown, especially if the body is bounded by planes which are parallel to the coordinate planes. This formulation gives a unitary method of solution for the space problems of the theory of elasticity.

BIBLIOGRAFIE

1. Almansi E., *Sull'integrazione dell'Equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$. Ann. di Matem., 1898, s. III, t. II, p. 1.
2. Eubanks R. A. a. Sternberg E., *On the Completeness of the Boussinesq-Papkovich Stress Functions.* Journal of Rat Mech and Analysis, 1956, vol. 5, nr. 5, p. 735.
3. Fichera G., *Sull'esistenza delle funzioni potenziali nei problemi della Fisica-matematica.* Atti della Accad. naz. dei Lincei, 1947, s. VIII, vol. II, p. 527.
4. Galerkin B. G., *Contribution à la solution générale du problème de la théorie de l'élasticité dans le cas de trois dimensions.* C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, 1930, vol. 190, nr. 18, p. 1047.
5. Marguerre K., *Ansätze zur Lösung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.* ZAMM, 1955, vol. 35, nr. 6/7, p. 242.
6. Neuber H., *Ein neuer Ansatz zur Lösung räumlicher Probleme der Elastizitätstheorie. Der Hohlkegel unter Einzellast als Beispiel.* ZAMM, 1934, vol. 14, nr. 4, p. 203.
7. Papkovici P. F., *Solution générale des équations différentielles fondamentales d'élasticité, exprimée par trois fonctions harmoniques.* C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, 1932, vol. 195, p. 754.
8. Teodorescu P. P., *Calculul grinzilor pereți cu o singură deschidere în caz general de rezemare și încărcare.* Ed. Min. Înv. București, 1955.
9. — *O metodă de aproximare a condițiilor pe contur în cazul problemei plane a elasticității.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VII, nr. 3, p. 655, 1956.
10. — *Quelques considérations concernant le problème plan de la théorie de l'élasticité.* Bull. Math., t. I, nr. 3, 1957.
11. — *Sur une solution générale du problème en espace de la théorie de l'élasticité.* Comptes Rend. IX-ème Congrès Intern. de Méc. Appl., Bruxelles, 1956, t. V.
12. — *Asupra calculului grinzilor pereți cu o singură deschidere.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 1, p. 115 și nr. 2, p. 451, 1957.
13. — *Asupra calculului semispațiului elastic sub acțiunea unor sarcini periodice.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, 1957, t. VIII, nr. 3, p. 831, 1957.
14. Timoshenko S. a. Goodier J. N., *Theory of elasticity.* Mc. Graw Hill, ed. II, 1952.

ELASTICITATE — REZISTENȚA MATERIALELOR

ASUPRA UTILIZĂRII TRANSFORMĂRILOR CONFORME ÎN PROBLEMA PLANĂ A ELASTICITĂȚII PENTRU DOMENII DUBLU CONEXE

DE

L. SOLOMON și D. DRĂGHICESCU

Deși studiul unui domeniu elastic plan multiplu-conex nu introduce dificultăți principiale noi în comparație cu cazul domeniului simplu-conex, totuși rezolvarea efectivă a problemei e mult mai complicată. Această complicare e legată de dificultatea practică a reprezentării conforme a domeniilor multiplu-conexe, pe domenii canonice (de tipul planului cu tăieturi, de exemplu) — reprezentare indispensabilă în cadrul aplicării, de pildă, a metodei lui N.I. Mushelișvili. Dealtfel, nici în cazul domeniilor canonice, soluțiile nu sînt mai la îndemînă.

Ecuațiile funcționale ale lui Șerman (vezi [1]) nu pretind cunoașterea funcției de reprezentare, permit studiul teoretic al soluției, dar ni se par prea greoaie pentru aplicații practice.

Pentru cazul domeniilor elastice mărginite dublu-conexe există o demonstrație a lui S.L. Sobolev (vezi [2]), care dovedește convergența algoritmului alternant de tipul algoritmului lui Schwartz în planul fizic. Nedispunînd de articolul amintit, nu știm dacă utilizarea reprezentării conforme nu alterează rezultatul.

În lucrarea de față ne-am propus, conform unei sugestii a lui Mushelișvili (vezi [1], §89) să utilizăm algoritmul alternant pentru cazul domeniilor mărginite dublu-conexe, construind cu ajutorul acestui algoritm și cu ajutorul metodei reprezentării conforme o soluție prin aproximații succesive.

§ 1. Ideea procedeului este următoarea.

Fie în planul z un domeniu dublu conex S limitat de curbele L_0 și L_1.

Vom nota cu S_0^+ porțiunea mărginită a planului, limitată de curba L_0, și cu S_0^- complementara ei (inclusiv punctul de la infinit). Analog vom nota cu S_1^+ porţiunea mărginită a planului, limitată de L_1, şi cu S_1^- complementara sa (inclusiv punctul de infinit).

Avem evident

$$S = S_1^- \cap S_0^+.$$

Vom folosi semnul ,,tildă'' pentru a nota funcţiile din planul fizic; transformatele lor prin una oarecare din transformările conforme, ce duc domeniile S_0^+ sau S_1^- în cercul unitar γ din planul ζ, le vom nota cu aceleaşi litere, fără semnul ,,tildă''. Vom nota cu indicii 0 şi 1 la dreapta, mărimile relative la conturele L_0 respectiv L_1 sau la domeniile pe care aceste conture le definesc, şi cu indicii 1, 2, 3 etc., la stînga, termenii succesivi ai aproximaţiilor sau funcţiile ce slujesc la construirea lor.

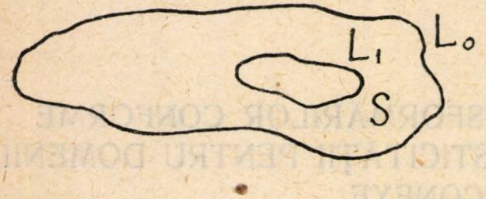


Fig. 1

Vom nota cu $\widetilde{\varphi}(z)$ şi $\widetilde{\psi}(z)$ cele două funcţii ale lui Mushelişvili care caracterizează starea elastică a domeniului S.

Se ştie că dacă $\widetilde{U}$ este funcţia lui Airy a unei probleme plane oarecare, avem:

$$\widetilde{f}_{(x,y)} = \widetilde{F}_{(z,\bar{z})} = \frac{\partial \widetilde{U}}{\partial x} + i\,\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial y} = \widetilde{\varphi}_{(z)} + z\overline{\widetilde{\varphi}'_{(z)}} + \overline{\widetilde{\psi}_{(z)}}\,, \tag{1.1}$$

unde

$$\widetilde{f} = i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds \tag{1.2}$$

(X_n, Y_n fiind componentele tensiunii pe elementul de normală $\bar{n}$, iar s fiind o abscisă curbilinie).

Cu alte cuvinte, $\widetilde{f}$ caracterizează sarcina pe un arc oarecare al domeniului, inclusiv pe frontieră.

Fie atunci dată funcţia $\widetilde{f}_0$, funcţie de punct pe L_0, care caracterizează sarcina exterioară dată pe componenta L_0 a frontierii; şi analog fie dată funcţia $\widetilde{f}_1$, caracterizînd sarcina pe componenta L_1 a frontierii.

Drept primă aproximaţie, vom căuta soluţia pentru domeniul simplu-conex şi mărginit S_0^+, cu datele $\widetilde{f}_0$ pe L_0.

În acest scop, vom căuta funcţia

$$z = \omega_0(\zeta), \tag{1.3}$$

care reprezintă domeniul S_0^+ pe interiorul cercului unitate γ din planul ζ (pe circumferinţa lui γ notăm $\zeta = \sigma$). Apoi, vom înlocui

$$\widetilde{f}_0(x,y) = \widetilde{F}_0(z,\bar{z}) = \widetilde{F}_0[\omega_0(\zeta),\ \overline{\omega_0(\zeta)}] = F_0(\zeta,\bar{\zeta}) \tag{1.4}$$

(așadar, o funcție cunoscută în planul ζ), și vom căuta soluția problemei la limită

$$ {}_1\varphi(\sigma) + \frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}}\,\overline{{}_1\varphi'(\sigma)} + {}_1\overline{\psi(\sigma)} = {}_1F. \qquad \text{pe } \gamma, \tag{1.5} $$

unde ω_0 e o funcție cunoscută, iar ${}_1F = F_0(\sigma,\bar\sigma)$ pe γ.

Această problemă are în general, după cum se știe, o soluție unică.

Fie acum că am construit funcțiile ${}_1\varphi(\zeta)$ și ${}_1\psi(\zeta)$.

Pe conturul L_1 aceste funcții conduc, prin intermediul formulelor (1.1), la o sarcină diferită de sarcina $\tilde f_1$ impusă.

Pentru a construi al doilea termen al aproximației, procedăm după cum urmează :

Calculăm inversa ω_0^{-1} a transformării ω_0

$$ \zeta = \omega_0^{-1}(z). \tag{1.6} $$

Introducînd expresia ei în ${}_1\varphi(\zeta)$ și ${}_1\psi(\zeta)$, obținem

$$ {}_1\varphi[\omega_0^{-1}(z)] = {}_1\tilde\varphi(z) $$

și

$$ {}_1\psi[\omega_0^{-1}](z)] = {}_1\tilde\psi(z). \tag{1.7} $$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Putem deci construi acum expresia

$$ {}_1\tilde\varphi(z) + \overline{z\,{}_1\tilde\varphi'(z)} + \overline{{}_1\tilde\psi(z)}\,\Big|_{L_1} = {}_1\tilde F(z,\bar z)\,\Big|_{L_1}. \tag{1.8} $$

Să rezolvăm acum problema stării elastice a domeniului simplu-conex și nemărginit S_1^- cu datele ${}_2\tilde f = \tilde f_1 - {}_1\tilde F(z,\bar z)\,|_{L_1}$ cunoscute pe L_1.

Pentru aceasta, vom căuta funcția

$$ z = \omega_1(\zeta) \tag{1.9} $$

care reprezintă domeniul S_1^- pe interiorul aceluiași cerc unitate γ din planul ζ, vom transcrie datele în ζ cu ajutorul funcției $\omega_1(\zeta)$, și vom ajunge din nou la o problemă care poate fi ușor rezolvată. Obținem astfel al doilea termen al aproximației pentru problema noastră.

Se vede ușor că de data aceasta conturul interior L_1 suportă încărcarea dată $\tilde f_1$, în timp ce pe conturul L_0 ea este alterată.

Al treilea termen al aproximației, construit după aceeași tehnică, va corecta sarcina dată pe L_0, alterînd-o din nou pe L_1, și așa mai departe.

Se pun două întrebări :

1° Cum procedăm pentru a ne asigura, fără calcule greoaie, care să introducă ecuațiile conturelor L_0 și L_1 în planul z, că ne găsim în calculele noastre tocmai pe aceste conture ?

Aceasta se realizează conducînd permanent calculul în planul ζ și luînd aci $\zeta = \sigma$, $\bar\zeta = \frac{1}{\sigma}$, ceea ce ne asigură că, după cum avem de a face cu funcțiile ω_0 sau ω_1 ne aflăm exact pe conturele L_0 respectiv L_1.

2° Nu există oare riscul ca termenii succesivi ai aproximaţiilor să se anihileze reciproc?

Să remarcăm că, spre deosebire de cazul domeniului mărginit, soluţia pentru domeniul nemărginit nu este unic determinată prin darea funcţiilor $\widetilde{f}_i$. Manevrînd în chip convenabil cu valoarea tensiunilor la infinit pentru domeniul S_1^-, putem evita acest pericol, fiind totodată siguri că, dacă şirul aproximaţiilor succesive e convergent, el converge către unica soluţie a problemei (căci domeniul S e mărginit şi deci e valabilă teorema de unicitate).

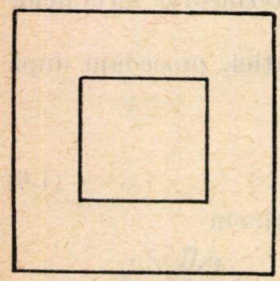


Fig. 2

§ 2. Ca ilustrare a procedeului propus am ales cazul unui domeniu S cuprins între două pătrate concentrice cu laturi paralele, de lungime 2 respectiv 4.

Soluţii pentru reprezentarea unui astfel de domeniu pe coroana circulară (ceea ce ar permite găsirea unei soluţii exacte a problemei) sînt cunoscute (vezi de ex. [3] p. 190), dar simpla examinare a formulelor date acolo arată imposibilitatea utilizării lor în calculul practic.

Căutînd o soluţie aproximativă a reprezentării conforme a acestui domeniu pe coroana circulară prin metoda reducerii la o ecuaţie integrală (vezi [4],§§34, 37) ne-am convins din nou de dificultăţile de calcul extrem de mari pe care le impune o astfel de reprezentare.

Dealtfel, tocmai aceste dificultăţi ne-au condus să renunţăm la utilizarea metodei directe a lui Mushelişvili, şi să folosim procedeul alternant.

Menţionăm aici că pătratul este o figură a cărei reprezentare conformă pe cerc, realizată formal cu multă uşurinţă prin integrala Schwarz-Christoffel, se dovedeşte în realitate a fi mai puţin comodă decît pare la început. În [1] se citează astfel de reprezentări (vezi § 89), dar numai pentru domeniul nemărginit exterior pătratului, pentru care dezvoltarea în serie Taylor a integralei Schwarz-Christoffel e rapid convergentă, şi fără a se remarca dificultăţile legate de aspectul transformării inverse. Articolele lui S. G. Mihlin şi D. I. Şerman citate în [1] şi [4] nu ne-au stat la îndemînă, iar în cartea lui Mihlin [4] (citată în [1] drept cuprinzînd rezultatele cele mai noi relativ la utilizarea procedeului alternant) e dat numai în cazul domeniului mărginit de două cercuri (excentrice), caz care nu face apel la reprezentarea conformă şi nu ne scoate din planul fizic.

În sfîrşit, [5] se ocupă (pornind de la aceeaşi indicaţie a lui Mushelişvili asupra folosirii primilor termeni din dezvoltarea în serie a integralei lui Schwarz-Christoffel) fie de domenii simplu-conexe nemărginite, fie de domenii cu componente circulare ale frontierii.

Fie deci domeniul considerat în figura 2 şi fie componenta L_0 a frontierei supusă unei sarcini de tip hidrostatic de intensitate p, iar componenta L_1 liberă de tensiuni. În acest caz, soluţia problemei pentru domeniul S_0^+ cu tensiunile date pe L_0 este simplă şi bine cunoscută (vezi [1], § 41a)

Anume, chiar fără a mai reduce problema la o problemă pentru cerc, se obține:

$$ {}_1\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{2}pz\,, \quad {}_1\tilde{\psi}(z) = 0 \tag{2.1} $$

ceea ce va constitui prima aproximație a soluției.

Prin urmare vom avea

$$ {}_1\tilde{F}(z, \bar{z})\,|_{L_1} = {}_1\tilde{\varphi}(z) + z_1\,\overline{\tilde{\varphi}'(z)} + \overline{{}_1\tilde{\psi}(z)}\,|_{L_1} = pz\,|_{L_1}. \tag{2.2} $$

Întrucît prin ipoteză am luat $\tilde{f}_1(x, y) = 0$, trebuie să construim acum soluția pentru S_1^- cu datele ${}_2\tilde{f} = -pz\,|_{L_1}$ pe L_1, și cu date necunoscute deocamdată la infinit.

Funcția care-l reprezintă pe S_1^- pe cercul unitar γ este (vezi [1], § 89)

$$ z = \omega_1(\zeta) = -A_1 \int_1^{\zeta} \frac{\sqrt{1+t^4}}{t^2}\,dt, \tag{2.3} $$

unde constanta A_1 din fața semnului integrală determină mărimea laturei pătratului. Dezvoltarea în serie Taylor a acestei funcții e rapid convergentă și de aceea vom reține în primă aproximație

$$ z = A_1\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\sigma}\zeta^3\right), \tag{2.4} $$

unde $A_1 = 1{,}1827$.

Rapiditatea convergenței acestei serii ne e arătată în [1], p. 350, prin figuri care reprezintă imaginea cercului unitar γ prin intermediul unor funcțiuni-sume parțiale ale dezvoltării în serie a integralei (2.3).

Se știe că în acest caz ecuația funcțională a lui Mushelișvili care rezolvă problema are o soluție ce se capătă prin mijloace elementare.

Anume, avem de rezolvat ecuația integrală

$$ \varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f\,d\sigma}{\sigma-\zeta} \tag{2.5} $$

(vezi [1], § 84).

Dacă domeniul pentru care se rezolvă problema este mărginit, atunci $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$ sînt funcții olomorfe în interiorul cercului γ, iar f e sarcina dată pe frontieră, transcrisă pe frontiera lui γ. Dacă însă domeniul e nemărginit, atunci în $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$ vor apare termeni singulari în origină, iar expresia lui f va trebui modificată într-un anume mod. Atît termenul singular din $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$ cît și termenii care-l modifică pe f depind de rezultanta sarcinii date pe L_1, și de valoarea tensiunilor la infinit.

Anume, avem:

$$ \varphi(\zeta) = \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \frac{\Gamma A_1}{\zeta} + \varphi_0(\zeta), $$

$$ \psi(\zeta) = -\frac{\varkappa(X - iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\ln\zeta + \frac{\Gamma' A_2}{\zeta} + \psi_0(\zeta), $$

unde φ_0 și ψ_0 sînt olomorfe,

$\vec{R}$ (X, Y) e rezultanta forțelor aplicate pe contur, iar

$$\Gamma = \overline{\Gamma} = \frac{X_x^\infty + Y_y^\infty}{4}$$

$\Gamma' = \dfrac{Y_y^\infty + X_x^\infty}{2} + iX_y^\infty$ $(X_x, Y_y, X_y = Y_x$ fiind componentele tensiunii)

iar $\varkappa$ — o constantă a materialului care se exprimă în funcție de constantele lui Lamé după cum urmează :

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

Dar sarcina caracterizată de funcția $-pz\,|_{L_1}$ are în mod evident rezultanta nulă pe L_1, întrucît această funcție este o funcție uniformă de punct pe frontieră. Dacă vom alege, ceea ce e la latitudinea noastră, tensiunile nule la infinit pentru problema domeniului S_1^-, urmează că $\varphi(\zeta)$ și $\psi(\zeta)$ vor fi funcții olomorfe în cercul γ și că f nu va fi alterat.

Prin urmare, în baza acestor raționamente, ecuația (2.5) va deveni :

$$_2\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega_1(\sigma)}{\overline{\omega_1'(\sigma)}}\,\frac{\overline{_2\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-pz\,|_{L_1}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma, \tag{2.6}$$

unde z trebuie înlocuit cu $\omega_1(\zeta)$ și unde

$$_2\varphi(\zeta) = \sum_0^\infty a_k\zeta^k \tag{2.7}$$

Un calcul simplu ne dă acum

$$\frac{\omega_1(\sigma)}{\overline{\omega_1'(\sigma)}} = \frac{\omega_1(\zeta)}{\overline{\omega}_1'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\Bigg|_{\zeta=\sigma} = \frac{\frac{1}{6}\zeta^5-\zeta}{\zeta^4+\frac{1}{2}}\Bigg|_{\zeta=\sigma}, \tag{2.8}$$

unde bara de deasupra simbolului funcțional înseamnă înlocuirea coeficienților (nu și a variabilei) cu cantitatea complex conjugată. (În cazul nostru, ω_1 are coeficienți reali).

Pentru a găsi valoarea primei integrale din (2. 6) vom scrie :

$$\frac{\omega_1(\zeta)}{\overline{\omega}_1'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\,{}_2\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\frac{1}{6}\zeta^5-\zeta}{\zeta^4+\frac{1}{2}}\sum_1^\infty k\overline{a}_k\frac{1}{\zeta^{k-1}} = \left(\frac{1}{6}\zeta - \frac{13}{12}\frac{1}{\zeta^3} + \ldots\right)\sum_1^\infty k\overline{a}_k\frac{1}{\zeta^{k-1}} =$$

$$= \frac{\overline{a}_1}{6}\zeta + \frac{\overline{a}_2}{3} + O\left(\frac{1}{\zeta}\right),$$

unde $O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ e o funcție olomorfă pentru $|\zeta| > 1$ și care tinde spre zero o dată cu $\frac{1}{\zeta}$.

Dacă luăm acum $\zeta = \sigma$, deducem imediat

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\omega_1(\sigma)}{\overline{\omega'_{1}(\sigma)}}\,\frac{\overline{{}_2\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{\bar{a}_1}{6}\zeta + \frac{\bar{a}_2}{3}. \tag{2.9}$$

Să calculăm cea de-a doua integrală din (2.6).
Vom avea :

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{-pz|_{L_1}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{A_1 p\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\sigma}\zeta^3\right)\Big|_{L_1}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = -\frac{A_1 p}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{6}\sigma^3}{\sigma-\zeta}\,d\sigma.$$

Aci avem :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma-\zeta)} = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{\zeta}\int_{\gamma}\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{1}{\zeta}\int_{\gamma}\frac{d\sigma}{\sigma}\right] = \frac{1}{2\zeta\pi i}\Big[\ln(\sigma-\zeta) - \ln\sigma\Big]_{\gamma} = 0$$

întrucît $|\zeta| < 1$,

și apoi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\sigma^3}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \zeta^3,$$

de unde

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{-pz|_{L_1}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{A_1 p}{6}\zeta^3. \tag{2.10}$$

Ecuația (2.6) devine deci

$${}_2\varphi(\zeta) + \frac{\bar{a}_1}{6}\zeta + \frac{\bar{a}_2}{3} = \frac{A_1 p}{6}\zeta^3 \tag{2.11}$$

sau încă

$$a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \ldots + \frac{\bar{a}_1}{6}\zeta + \frac{\bar{a}_2}{3} = \frac{A_1 p}{6}\zeta^3. \tag{2.12}$$

Întrucît rezolvăm o problemă în tensiuni, avem $a_0 = 0$, de unde și $a_2 = 0$.

Mai departe avem $a_1 + \frac{\bar{a}_1}{6} = 0$, ceea ce dă evident $a_1 = 0$. Ceilalți coeficienți a_k sînt de asemenea nuli, în afară de a_3 care are valoarea $a_3 = \frac{A_1 p}{6}$.

Prin urmare am găsit

$${}_2\varphi(\zeta) = \frac{A_1 p}{6}\zeta^3 = 0{,}1971\,p\zeta^3. \tag{2.13}$$

Pentru determinarea lui ψ (ζ), dispunem de relaţia

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f(\sigma)}\, d\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) - \overline{\varphi(0)} \tag{2.14}$$

(vezi [1], § 84, unde trebuie ţinut seama de faptul că $a_1 = a_2 = 0$). În cazul nostru, integrala din formulă devine

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{-p\,\overline{\omega_1(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\, d\sigma = -\frac{A_1 p}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sigma - \frac{1}{6\sigma^3}}{\sigma-\zeta}\, d\sigma.$$

Întrucît $\frac{1}{\sigma^3}$ e valoarea pe cerc a funcţiei $\frac{1}{\zeta^3}$, olomorfă în exteriorul cercului, inclusiv în punctul de la infinit, integrala corespunzătoare ei e nulă şi obţinem

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{-p\omega_1(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\, d\sigma = -A_1 p\zeta. \tag{2.15}$$

Cel de-al doilea termen din (2.14) devine în cazul nostru

$$-\frac{\omega_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega_1'(\zeta)}\,{}_2\varphi'(\zeta).$$

Avem deci

$$-\frac{\omega_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega_1'(\zeta)} = -\frac{\zeta - \frac{1}{6\zeta^3}}{-\frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{2}\zeta^2} = -\frac{\frac{1}{6}\zeta - \zeta^5}{+\frac{1}{2}\zeta^6 + \zeta^2}$$

şi

$${}_2\varphi'(\zeta) = \frac{A_1 p}{2}\zeta^2,$$

de unde

$$-\frac{\omega_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega_1'(\zeta)}\,{}_2\varphi'(\zeta) = -\frac{\frac{1}{6}\zeta - \zeta^5}{\frac{1}{2}\zeta^4 + 1}\,\frac{A_1 p}{2} = A_1 p\,\zeta\,\frac{\zeta^4 - \frac{1}{6}}{\zeta^4 + 2}. \tag{2. 16}$$

Întrucît avem ${}_2\varphi(0) = 0$, formula (2.14) dă acum :

$${}_2\psi(\zeta) = -A_1 p\,\zeta + A_1 p\,\zeta\,\frac{\zeta^4 - \frac{1}{6}}{\zeta^4 + 2} = -A_1 p\,\zeta\left[1 - \frac{\zeta^4 - \frac{1}{6}}{\zeta^4 + 2}\right]$$

adică

$$ {}_2\psi(\zeta) = -\frac{13}{6} A_1\, p\, \frac{\zeta}{\zeta^4+2} \tag{2.17} $$

sau încă

$$ {}_2\psi(\zeta) = p\,[-1{,}28115\,\zeta + 0{,}64058\,\zeta^5 - 0{,}32029\,\zeta^9 + 0{,}16014\,\zeta^{13}]. $$

Cu aceasta, a doua aproximație este construită.

Observație : dacă am alege $X_x^\infty = Y_y^\infty = p$, $X_y^\infty = 0$, atunci termenul al doilea al aproximației ar fi egal și de semn contrar cu cel dintîi, adică s-ar întîmpla tocmai fenomenul a cărui apariție am prevenit-o în § 1.

§ 3. Calculul celei de-a treia aproximații prezintă unele dificultăți în plus față de cel al aproximației a doua. Toate aproximațiile ce urmează pot fi însă obținute după modelul dat aci pentru aproximația a treia.

Să considerăm funcțiile

$$ {}_2\varphi(\zeta) = \frac{A_1\, p}{6}\zeta^3 \tag{3.1} $$

$$ {}_2\psi(\zeta) = -\frac{13}{6} A_1\, p\, \frac{\zeta}{\zeta^4+2} $$

ambele funcții olomorfe în interiorul cercului unitar γ.

Să revenim la funcțiile lui Mushelișvili din planul z. Pentru aceasta, vom calcula inversa transformării ω_1 și vom găsi

$$ \zeta = \overset{-1}{\omega_1}(z) = A_1\left(\frac{1}{z} - 0{,}3261\,\frac{1}{z^5}\right). \tag{3.2} $$

Notăm aici că convergența acestei dezvoltări în serie este cu mult mai puțin satisfăcătoare decît cea a dezvoltării (2.3), și că se pune problema găsirii — printr-o metodă variațională, sau cu ajutorul teoremei corespondenței frontierelor —, a unei funcții care să îndeplinească mai bine necesitățile calculului.

Ținînd seama de (3.2) în formulele (3.1) și introducînd valoarea coeficientului A_1, obținem după calcule elementare

$$ {}_2\widetilde{\varphi}(z) = {}_2\varphi[\zeta(z)] = p\left[\frac{0{,}3261}{z^3} - \frac{0{,}31902}{z^7} + \frac{0{,}10403}{z^{11}} - \frac{0{,}01131}{z^{15}} + \dots\right] \tag{3.3} $$

$$ {}_2\widetilde{\psi}(z) = {}_2\psi\,[\zeta(z)] = p\left[-\frac{1{,}51534}{z} + \frac{1{,}9766}{z^{75}} - \frac{3{,}8674}{z^9} + \frac{7{,}25163}{z^{13}}\dots\right] \tag{3.4} $$

ambele olomorfe în $\overline{S_1}$ (cu rezerve datorite observației de mai sus).

Să construim acum funcția

$$ {}_2\widetilde{F}(z\,\bar{z})\Big|\,L_0 = {}_2\widetilde{\varphi}(z) + z\,\overline{{}_2\widetilde{\varphi}'(z)} + \overline{{}_2\widetilde{\psi}(z)}\Big|_{L_0}. \tag{3.5} $$

Pentru a ne asigura că ceea ce calculăm este tocmai valoarea acestei funcții pe conturul L_0, vom înlocui pe z cu ajutorul funcției care dă reprezentarea conformă a lui S_0^+ pe interiorul lui γ, adică

$$z = \omega_0(\zeta) = A_0\int_0^{\zeta} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = A_0\left[\zeta - \frac{1}{10}\zeta^5 + \frac{1}{24}\zeta^9 - \frac{5}{208}\zeta^{13} + \dots\right] \tag{3.6}$$

(vezi [5], cap. V, § 6).

Am reținut aci 4 termeni în dezvoltarea tayloriană, întrucît convergența integralei din (3.6) e mult mai lentă decît a celei din (2.3). Pentru pătratul cu latura 4 vom căpăta un coeficient A_0 apropiat de valoarea 2,16 (mai exact, 2,156 ; vom reține totuși valoarea 2,16 adică vom considera un pătrat de latură puțin mai mare ca 4).

O dată această înlocuire efectuată, vom pune $\zeta = \sigma$ și $\bar{\zeta} = \frac{1}{\sigma}$ și cu aceasta vom căpăta valoarea funcției ${}_2F\ (\zeta,\bar{\zeta})$ pe cercul γ.

Pentru aceasta, mai trebuie să găsim expresia funcției

$${}_2\widetilde{\varphi}'(z) = p\left[-\frac{0{,}9783}{z^4} + \frac{2{,}23314}{z^8} - \frac{1{,}14433}{z^{12}} + \dots\right]. \tag{3.7}$$

Ne-am oprit aici la termenul în z^{-12} întrucît, după cum se va vedea, coeficienții ce intervin în puterile mari ale lui z sînt extrem de mici.

Avem acum pe rînd :

$$\frac{1}{z} = \frac{0{,}46296}{\zeta} + 0{,}046296\,\zeta^3 - 0{,}01466\,\zeta^7 + 0{,}00773\,\zeta^{11} + \dots$$

$$\frac{1}{z^3} = \frac{0{,}09923}{\zeta^3} + 0{,}02977\,\zeta - 0{,}00645\,\zeta^5 + 0{,}00318\,\zeta^9 + 0{,}0012\,\zeta^{13} + \dots$$

$$\frac{1}{z^4} = \frac{0{,}04594}{\zeta^4} + 0{,}01838 - 0{,}00306\,\zeta^4 + 0{,}00150\,\zeta^8 + 0{,}00103\,\zeta^{12} + \dots$$

$$\frac{1}{z^5} = \frac{0{,}02127}{\zeta^5} + \frac{0{,}01063}{\zeta} - 0{,}00124\,\zeta^3 + 0{,}00063\,\zeta^7 + 0{,}00073\,\zeta^{11} + \dots.$$

$$\frac{1}{z^7} = \frac{0{,}00456}{\zeta^7} + \frac{0{,}00319}{\zeta^3} - 0{,}00005\,\zeta + 0{,}00007\,\zeta^5 + 0{,}00028\,\zeta^9 + \dots$$

$$\frac{1}{z^8} = \frac{0{,}00211}{\zeta^8} + \frac{0{,}00169}{\zeta^4} + 0{,}00006 + 0{,}00003\,\zeta^4 + 0{,}00016\,\zeta^8 + \\ + 0{,}0000152\,\zeta^{12} + \dots$$

$$\frac{1}{z^9} = \frac{0{,}000977}{\zeta^9} + \frac{0{,}00088}{\zeta^5} + \frac{0{,}00007}{\zeta} + 0{,}00001\,\zeta^3 - 0{,}000019\,\zeta^7 - \\ - 0{,}000023\,\zeta^{11} + \dots$$

$$\frac{1}{z^{11}} = \frac{0,00021}{\zeta^{11}} + \frac{0,00023}{\zeta^{7}} + \frac{0,000047}{\zeta^{3}} + 0,00001\,\zeta + 0,00002\,\zeta^{5} + \\ + 0,000006\,\zeta^{9} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^{12}} = \frac{0,000097}{\zeta^{12}} + \frac{0,000116}{\zeta^{8}} + \frac{0,000027}{\zeta^{4}} + 0,000011\,\zeta^{4} + 0,0000047\,\zeta^{8} + \ldots$$

$$\frac{1}{z^{13}} = \frac{0,000045}{\zeta^{13}} + \frac{0,000058}{\zeta^{9}} + \frac{0,000017}{\zeta^{5}} + 0,0000065\,\zeta^{3} + \\ + 0,000002\,\zeta^{7} + 0,0000013\,\zeta^{11}.$$

Dacă luăm aici $\zeta = \sigma$, $\overline{\zeta} = \frac{1}{\sigma}$ atunci formulele (3.3), (3.4) și (3.7) dau, după calcule elementare

$$_{2}\widetilde{\varphi}[z]\Big|_{L_0} = p\left[\frac{0,00002}{\sigma^{11}} - \frac{0,00143}{\sigma^{7}} + \frac{0,03135}{\sigma^{3}} + 0,00973\,\sigma - \right. \\ \left. - 0,00212\,\sigma^{5} + 0,00095\,\sigma^{9} + 0,00039\,\sigma^{13}\right].$$

$$_{2}\overline{\widetilde{\varphi}'[z]}\Big|_{L_0} = p\left[- 0,00011\,\sigma^{12} + 0,00458\,\sigma^{8} - 0,04120\,\sigma^{4} - 0,01785 + \right. \\ \left. + \frac{0,00305}{\sigma^{4}} - \frac{0,00110}{\sigma^{8}} - \frac{0,00098}{\sigma^{12}}\right]$$

$$_{2}\overline{\widetilde{\varphi}[z]}\Big|_{L_0} = p\left[0,00033\,\sigma^{13} - 0,00336\,\sigma^{9} + 0,03876\,\sigma^{5} - 0,68070\,\sigma - \right. \\ \left. - \frac{0,07259}{\sigma^{3}} + \frac{0,02354}{\sigma^{7}} - \frac{0,01017}{\sigma^{11}}\right].$$

Introducînd aceste expresii în (3.5) și ținînd seama de (3.6) obținem (vezi și raționamentul de după (2.2)):

$$_{3}f(\sigma) = - {}_{2}\widetilde{F}\,(z, \overline{z})\Big|_{L_0} = p\left[0,71024\,\sigma + 0,04816\,\sigma^{5} - 0,01461\,\sigma^{9} + \right. \\ \left. + 0,00329\,\sigma^{13} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right] \tag{3.8}$$

și

$$_{3}\overline{f(\sigma)} = p\left[0,03449\,\sigma^{3} - 0,01994\,\sigma^{7} + 0,1227\,\sigma^{11} + \right. \\ \left. + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right] \tag{3.9}$$

unde $O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$ este valoarea pentru $\zeta = \sigma$ a funcției $O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, olomorfă în exteriorul cercului unitar γ și care tinde la zero o dată cu $\frac{1}{\zeta}$.

Pentru a găsi expresia lui ${}_3\varphi(\zeta)$, avem acum de rezolvat ecuația integrală (2.5) care se va scrie

$$
{}_3\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}}\,\frac{\overline{{}_3\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta}\,d\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{{}_3f(\sigma)}{\sigma-\zeta}\,d\sigma\,. \tag{3.10}
$$

Un calcul simplu ne dă:

$$
\frac{\omega_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega_0'(\zeta)} = \frac{\frac{1}{\zeta} - \frac{0{,}1}{\zeta^5} + \frac{0{,}04167}{\zeta^9} - \frac{0{,}02404}{\zeta^{13}}}{1 - 0{,}5\zeta^4 + 0{,}37503\zeta^8 - 0{,}3125\,\zeta^{12}} =
$$

$$
= \zeta^{-13}\,[\,-0{,}02404 + 0{,}02965\,\zeta^4 - 0{,}07616\,\zeta^8 + 0{,}94329\,\zeta^{12} +
$$

$$
+ 0{,}50947\,\zeta^{16} - 0{,}12280\,\zeta^{20} + 0{,}04402\,\zeta^{24}\,].
$$

Schimbînd aici ζ cu $\frac{1}{\zeta}$, vom avea expresia

$$
\frac{\omega_0(\zeta)}{\omega_0'\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = -\,0{,}02404\,\zeta^{13} + 0{,}02965\,\zeta^9 - 0{,}07616\,\zeta^5 + 0{,}94329\,\zeta +
$$

$$
+ O\left(\frac{1}{\zeta}\right), \tag{3.11}
$$

unde $O\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ este o funcție olomorfă pentru $|\,\zeta\,| > 1$ și care tinde spre zero o dată cu $\frac{1}{\zeta}$.

Evident că avem:

$$
\frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}} = \frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega}_0'\left(\frac{1}{\sigma}\right)} = \frac{\omega_0(\zeta)}{\omega_0'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\Bigg|_{\zeta=\sigma}
$$

întrucît coeficienții funcției $\omega_0(\zeta)$ sînt reali.

Dacă ținem seama că ${}_3\varphi(\zeta)$ e o funcție olomorfă în interiorul cercului unitar γ (întrucît avem de a face cu cazul domeniului S_0^+, care e mărginit), vom lua

$$
{}_3\varphi(\zeta) = \sum_0^\infty a_k\,\zeta^k\,. \tag{3.12}
$$

Prin urmare, putem scrie acum

$$
\frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'(\sigma)}}\,\overline{{}_3\varphi'(\sigma)} = \Big[\,-\,0{,}02404\;\sigma^{13} + 0{,}02965\;\sigma^9 - 0{,}07616\;\sigma^5 +
$$

$$
+ 0{,}94329\;\sigma + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)\Big]\cdot\left[\bar{a}_1 + \frac{2\bar{a}_2}{\sigma} + \ldots + \frac{13\,\bar{a}_{13}}{\sigma^{12}}\right] =
$$

$$
\begin{aligned}
&= (1,88658\ \bar{a}_2 - 0,45697\ \bar{a}_6 + 0,29647\ \bar{a}_{10} - 0,33654\ \bar{a}_{14}) + \\
&+ (0,94329\ \bar{a}_1 - 0,38081\ \bar{a}_5 + 0,26683\ \bar{a}_9 - 0,31250\ \bar{a}_{13})\ \sigma + \\
&+ (-0,30465\ \bar{a}_4 + 0,23718\ \bar{a}_8 - 0,28846\ \bar{a}_{12})\ \sigma^2 + \\
&+ (-0,22849\ \bar{a}_3 + 0,20753\ \bar{a}_7 - 0,26442\ \bar{a}_{11})\ \sigma^3 + \\
&+ (-0,15232\ \bar{a}_2 + 0,17788\ \bar{a}_6 - 0,24038\ \bar{a}_{10})\ \sigma^4 + \\
&+ (-0,07616\ \bar{a}_1 + 0,14824\ \bar{a}_5 - 0,21635\ \bar{a}_9)\ \sigma^5 + \\
&+ (0,11859\ \bar{a}_4 - 0,19231\ \bar{a}_8)\sigma^6 + (0,08894\ \bar{a}_3 - 0,16827\bar{a}_7)\sigma^7 + \\
&+ (0,05929\ \bar{a}_2 - 0,14423\ \bar{a}_6)\ \sigma^8 + (0,02965\ \bar{a}_1 - 0,12019\ \bar{a}_5)\sigma^9 \\
&- 0,09615\ \bar{a}_4\ \sigma^{10} - 0,07212\ \bar{a}_3\ \sigma^{11} - 0,04807\bar{a}_2\ \sigma^{12} - 0,02404\bar{a}_1\ \sigma^{13} \\
&+ O\left(\frac{1}{\sigma}\right).
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

Notînd cu K_i coeficientul termenului în σ_i din (3.13) această relație se va scrie sub forma

$$
\frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'}(\sigma)}\ \overline{{}_3\varphi'(\sigma)} = \sum_{i=0}^{13} K_i\ \sigma_i + O\left(\frac{1}{\sigma}\right). \tag{3.14}
$$

Integrînd pe circumferința lui γ căpătăm imediat (compară cu (2.9))

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\omega_0(\sigma)}{\overline{\omega_0'}(\sigma)}\ \frac{\overline{{}_3\varphi'(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\, d\sigma = \sum_{i=0}^{13} K_i\ \zeta^i\ ;\ |\zeta| < 1. \tag{3.15}
$$

În ce privește membrul drept al ecuației (3.10), el are în virtutea lui (3.8) valoarea

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{{}_3f(\sigma)}{\sigma - \zeta}\, d\sigma = p\Big[0,71024\ \zeta + 0,04816\ \zeta^5 - 0,01461\ \zeta^9 +
+ 0,00329\ \zeta^{13}\Big]. \tag{3.16}
$$

În consecință ecuația (3.10) devine

$$
\sum_{i=0}^{\infty} a_i\ \zeta^i + \sum_{i=0}^{13} K_i\ \zeta^i = p\Big[0,71024\ \zeta + 0,04816\ \zeta^5 - 0,01461\ \zeta^9 +
+ 0,00329\,\zeta^{13}\Big] \tag{3.17}
$$

ceea ce permite să scriem prin identificare un sistem de 13 ecuații liniare cu 13 necunoscute complexe. Să remarcăm că din condiția ${}_3\varphi(0) = 0$, adică $a_0 = 0$, rezultă imediat $K_0 = 0$, ceea ce dă o ecuație pentru determinarea lui a_{14} în funcție de a_2, a_6 și a_{10}.

Vom avea:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I})\, a_1 + 0{,}94329\, \bar{a}_1 - 0{,}38081\, \bar{a}_5 + 0{,}26683\, \bar{a}_9 - 0{,}31250\, \bar{a}_{13} = \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0{,}71024\, p \\
&(\mathrm{II})\, a_2 - 0{,}30465\, \bar{a}_4 + 0{,}23718\, \bar{a}_8 - 0{,}28846\, \bar{a}_{12} = 0 \\
&(\mathrm{III})\, a_3 - 0{,}22849\, \bar{a}_3 + 0{,}20753\, a_7 - 0{,}26442\, \bar{a}_{11} = 0 \\
&(\mathrm{IV})\, a_4 - 0{,}15232\, \bar{a}_2 + 0{,}17788\, \bar{a}_6 - 0{,}24038\, \bar{a}_{10} = 0 \\
&(\mathrm{V})\, a_5 - 0{,}07616\, \bar{a}_1 + 0{,}14824\, \bar{a}_5 - 0{,}21635\, \bar{a}_9 = 0{,}04816\, p \\
&(\mathrm{VI})\, a_6 + 0{,}11859\, \bar{a}_4 - 0{,}19231\, \bar{a}_8 = 0 \\
&(\mathrm{VII})\, a_7 + 0{,}08894\, \bar{a}_3 - 0{,}16827\, \bar{a}_7 = 0 \\
&(\mathrm{VIII})\, a_8 + 0{,}05929\, \bar{a}_2 - 0{,}14423\, \bar{a}_6 = 0 \\
&(\mathrm{IX})\, a_9 + + 0{,}02965\, \bar{a}_1 - 0{,}12019\, \bar{a}_5 = - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 0{,}01461\, p \\
&(\mathrm{X})\, a_{10} - 0{,}09615\, \bar{a}_4 = 0 \\
&(\mathrm{XI})\, a_{11} - 0{,}07212\, \bar{a}_3 = 0 \\
&(\mathrm{XII})\, a_{12} - 0{,}04808\, \bar{a}_2 = 0 \\
&(\mathrm{XIII})\, a_{13} - 0{,}02404\, \bar{a}_1 = 0{,}00329\, p
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

Dacă în acest sistem vom pune $a_k = \alpha_k + i\,\beta_k$, și vom separa părțile reale de cele imaginare, vom obține pentru cele 13 necunoscute β_k un sistem omogen de 13 ecuații, a cărui soluție este $\beta_k = 0$ ($k = 1, 2 \ldots, 13$).

Prin urmare, vom avea $a_k = \bar{a}_k = \alpha_k$, deci un sistem liniar de 13 ecuații cu 13 necunoscute reale.

În mod vizibil ecuațiile (III), (VII) și (XI) formează un sistem omogen de 3 ecuații pentru cele 3 necunoscute a_3, a_7, și a_{11}. De aici se deduce că $a_3 = a_7 = a_{11} = 0$.

Ecuațiile (II), (IV), (VI), (VIII), (X) și (XII) formează un sistem omogen de 6 ecuații pentru cele 6 necunoscute a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10} și a_{12}. De aici deducem așadar, că, $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = a_{12} = 0$, și prin urmare și $a_{14} = 0$.

Ne rămîne de rezolvat sistemul format din ecuațiile (I), (V), (IX) și (XIII), adică un sistem de 4 ecuații, neomogen, în cele 4 necunoscute a_1, a_5, a_9 și a_{13}.

Sistemul se va scrie acum

$$
\left.
\begin{aligned}
1{,}94329\, a_1 - 0{,}38081 a_5 + 0{,}26683 a_9 - 0{,}3125\, a_{13} &= 0{,}71024\ p \\
- 0{,}07616\, a_1 + 1{,}14824\, a_5 - 0{,}21635\, a_9 &= 0{,}04816\ p \\
0{,}02965\, a_1 - 0{,}12019\, a_5 + a_9 &= - 0{,}01461\ p \\
- 0{,}02404\, a_1 + a_{13} &= 0{,}00329\ p
\end{aligned}
\right\}
\tag{3.19}
$$

și va da după calcule simple

$$\begin{aligned} a_1 &= 0{,}38252\ p \\ a_5 &= 0{,}06387\ p \\ a_9 &= -\ 0{,}01827\ p \\ a_{13} &= 0{,}01249\ p \end{aligned}$$

Prin urmare termenul al treilea al aproximației va fi :

$$_3\varphi(\zeta) = p\ [0{,}38252\,\zeta + 0{,}06387\ \zeta^5 - 0{,}01827\ \zeta^9 + 0{,}01249\ \zeta^{13}]. \quad (3.20)$$

Trecînd la calculul lui $_3\psi(\zeta)$ vom folosi formula

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{f}\,d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\,\varphi'(\zeta) + \sum_1^n \frac{\overline{K_i}}{\zeta^i} - \overline{\varphi(0)} \quad (3.21)$$

(un caz particular al ei îl constituie (2.14)).

Integrala din formulă va da în virtutea lui (3.9)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\overline{_3f(\sigma)}}{\sigma - \zeta}\,d\sigma = p\ [0{,}03449\ \zeta^3 - 0{,}01994\ \zeta^7 + 0{,}01227\ \zeta^{11}]. \quad (3.22)$$

Cel de al doilea termen din (3.21) devine acum, în virtutea lui (3.6), (3.11) și (3.20), și deoarece ω_0 are coeficienți reali :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega_0'(\zeta)}\ {}_3\varphi'(\zeta) &= p\left[-\frac{0{,}02404}{\zeta^{13}} + \frac{0{,}02965}{\zeta^9} - \frac{0{,}07616}{\zeta^5} + \frac{0{,}94329}{\zeta}\right. \\ &\left. + 0{,}50947\ \zeta^3 - 0{,}12280\ \zeta^7 + 0{,}04402\ \zeta^{11} + \dots\right]\cdot \\ &\cdot\left[0{,}38252 + 0{,}31935\ \zeta^4 - 0{,}16453\ \zeta^8 + 0{,}16237\,\zeta^{12}\right] = \\ &= p\left[-\frac{0{,}00920}{\zeta^{13}} + \frac{0{,}00367}{\zeta^9} - \frac{0{,}01570}{\zeta^5} + \frac{0{,}32773}{\zeta} + \right. \\ &\left. + 0{,}51346\ \zeta^3 - 0{,}05613\ \zeta^7 + 0{,}04696\ \zeta^{11} + \dots\right]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Termenii polari din (3.23) trebuie să dispară, întrucît $_3\psi(\zeta)$ trebuie să fie o funcție olomorfă pentru $|\zeta| < 1$.

Din analiza sistemului (3.18) deducem imediat că singurii coeficienți K_i nenuli sînt K_1, K_5, K_9 și K_{13}.

Introducînd valorile lui a_1, a_5, a_9 și a_{13} în (3.19) căpătăm ușor

$$K_1 = 0{,}71024 \; p - a_1 = 0{,}32772 \; p$$

$$K_5 = 0{,}04816 \; p - a_5 = -0{,}01571 \; p$$

$$K_9 = -0{,}01461 - a_9 = 0{,}00366 \; p$$

$$K_{13} = 0{,}00329 \; p - a_{13} = -0{,}00920 \; p.$$

Prin urmare, (3.21) ne dă acum

$$
\begin{aligned}
{}_3\psi(\zeta) = p \, & [0{,}03449 \; \zeta^3 - 0{,}01994 \; \zeta^7 + 0{,}01227 \; \zeta^{11}] \\
& - p\Big[-\frac{0{,}00920}{\zeta^{13}} + \frac{0{,}00367}{\zeta^9} - \frac{0{,}01570}{\zeta^5} + \frac{0{,}32773}{\zeta} + \\
& + 0{,}51346 \; \zeta^3 - 0{,}05613 \; \zeta^7 + 0{,}04696 \, \zeta^{11} + \ldots\Big] \\
& + p\left[\frac{0{,}32772}{\zeta} - \frac{0{,}01571}{\zeta^5} \quad \frac{0{,}00366}{\zeta^9} - \frac{0{,}00920}{\zeta^{13}}\right],
\end{aligned}
$$

de unde

$$ {}_3\psi(\zeta) = p \, [-0{,}47897 \; \zeta^3 + 0{,}03619 \; \zeta^7 - 0{,}03469 \; \zeta^{11}] \tag{3.24}$$

Cu aceasta a fost calculat cel de-al treilea termen al aproximației.

§4. Dacă ținem seama de formulele primei aproximații (2.1) și de reprezentarea (3.6) obținem:

$$ {}_1\varphi(\zeta) = p \, [1{,}08 \; \zeta - 0{,}108 \; \zeta^5 + 0{,}045 \; \zeta^9 - 0{,}02596 \; \zeta^{13}].$$

$$ {}_1\psi(\zeta) = 0$$

Întrucît am căutat termenul al doilea al aproximației ca soluție a unei probleme cu datele $-pz|_{L1}$ pentru S_3^-, e clar că aproximația doua se obține adunînd la primul termen pe cel de-al doilea, ceea ce face ca pe conturul L_1 suma tensiunilor să se anuleze. Vom avea deci drept a doua aproximație

$$
\begin{aligned}
{}_1\varphi(\zeta) + {}_2\varphi(\zeta) = p \, & [1{,}08 \; \zeta + 0{,}1971 \, \zeta^3 - 0{,}108 \; \zeta^5 + 0{,}045 \, \zeta^9 - \\
& - 0{,}02596 \; \zeta^{13}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_1\psi(\zeta) + {}_2\psi(\zeta) = p \, & [-1{,}28115 \; \zeta + 0{,}64058 \; \zeta^5 + 0{,}32029 \; \zeta^9 + \\
& + 0{,}16014 \, \zeta^{13}.
\end{aligned}
$$

Tensiunile calculate pe L_0 conform acestor expresii vor fi diferite de presiunea hidrostatică dată, în timp ce tensiunile pe L_1 vor rezulta nule.

Pentru a corija valoarea tensiunilor de pe L_0 am introdus al treilea termen al aproximației, egal și de semn contrar pe L_0 cu tensiunile perturbatoare datorate celui de-al doilea termen al aproximației. Așadar, pentru a avea a treia aproximaţie, trebuie de asemenea să adunăm cel de-al treilea termen, căpătînd deci

$$
\begin{aligned}
{}_1\varphi(\zeta) + {}_2\varphi(\zeta) + {}_3\varphi(\zeta) = p\ [&1{,}46252\ \zeta + 0{,}1971\ \zeta^3 - 0{,}04413\ \zeta^5 + \\
&+ 0{,}02673\ \zeta^9 - 0{,}01347\ \zeta^{13}] \\
{}_1\psi(\zeta) + {}_2\psi(\zeta) + {}_3\psi(\zeta) = p\ [&-1{,}28115\ \zeta - 0{,}47897\ \zeta^3 + 0{,}64058\ \zeta^5 + \\
&+ 0{,}03619\ \zeta^7 + 0{,}32029\ \zeta^9 - 0{,}03469\ \zeta^{11} + 0{,}16014\ \zeta^{13}]
\end{aligned}
$$

Aproximaţiile de ordin superior se calculează după tehnica din § 3. Obţinerea acestor aproximaţii nu ni se pare utilă atîta timp cît nu sînt elucidate problemele legate de convergenţa seriilor tayloriene pentru funcţiile $\omega_1^{-1}(\zeta)$ şi $\omega_0^1(\zeta)$ (notăm aici că $\omega_0^{-1}(\zeta)$ are o dezvoltare rapid convergentă).

Calculul nu se complică principial în cazul altor domenii dublu conexe, sau a altor sarcini pe frontieră. E evident că aceeaşi metodă poate fi folosită şi pentru studiul problemelor în deplasări.

Problema — de importanţă practică — a panourilor dreptunghiulare cu un gol dreptunghiular, nu oferă nici o dificultate în plus faţă de cazul tratat aici.

Primită la redacţie la 15 iulie 1957.

О ПРИМЕНЕНИИ КОНФОРМНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

При решении плоской задачи теории упругости для ограниченных двухсвязных областей в данной работе применяется чередующийся алгорифм типа обобщенного алгорифма Шварца.

Этот алгорифм приводит к построению функций Мусхелишвили путем последовательных приближений. Приближения нечетного порядка являются решениями плоской задачи упругости для внутренней по отношению к внешней границе односвязной области с корректированными предыдущими приближениями четного порядка граничными условиями, а приближения четного порядка являются решениями для внешней по отношению к внутренней границе неограниченной односвязной области с корректированными предыдущими приближениями нечетного порядка граничными условиями.

В качестве граничных условий для вычисления приближений первого и второго порядка берутся данные задачи на границе.

В качестве примера приводится расчет для области, ограниченной двумя концентричными квадратами, со сторонами, равными соответственно 2 и 4.

Этот метод можно применять без изменений и для двухсвязной области, ограниченной двумя квадратами, а также можно распространить на многосвязные области.

SUR L'EMPLOI DES TRANSFORMATIONS CONFORMES DANS LE PROBLÈME PLAN DE L'ÉLASTICITÉ POUR DES DOMAINES DOUBLEMENT CONNEXES

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on emploie pour la solution du problème plan de l'élasticité pour les domaines bornés doublement-connexes, un algorithme alternant, ressemblant à celui de Schwarz généralisé.

Cet algorithme conduit à la construction des fonctions de Moushélichvilli par approximations succesives. Les approximations impaires sont les solutions du problème pour le domaine simplement-connexe, intérieur à la frontière extérieure, avec les conditions aux limites corrigées par les approximations paires précédentes; les approximations paires sont les solutions pour le domaine infini simplement-connexe, extérieur à la frontière intérieure, avec les conditions à la limite corrigées par les approximations impaires précédentes.

Comme conditions à la limite, nécessaires pour le calcul des deux premières approximations, on a pris les données du problème.

Pour illustrer le procédé, on a calculé les trois premières approximations du problème élastique plan pour le domaine compris entre deux carrés concentriques ayant les cotés 4, respectivement 2.

On peut appliquer sans restrictions le procédé même pour le domaine compris entre deux rectangles et il est susceptible d'être appliqué pour les domaines à connexion multiple.

BIBLIOGRAFIE

1. N. I. Mushelișvili, *Nekotorîie osnovnîie zadaci matematiceskoi teorii uprugosti.* Moscova, 1954.
2. S. L. Sobolev, *Algorifm Svarța v teorii uprugosti.* D. A. N. SSSR, t. IV (XIII), nr. 6, 1936.
3. N. I. Ahiezer, *Elementî teorii ellipticeskih funkții.* Moscova-Leningrad, 1948.
4. S. G. Mihlin, *Integralnîie uravnenia.* Moscova-Leningrad, 1949.
5. G. N. Savin, *Konțentrația napriajenii okolo otverstii.* Moscova-Leningrad, 1951.
6. L. V. Kantorovici, V. I. Krîlov, *Priblijonnîie metodî vîsșevo analiza.* Moscova-Leningrad, 1950.

CERCETĂRI CU PRIVIRE LA INTRODUCEREA UNUI NOU MATERIAL PENTRU MODELE ÎN FOTOELASTICITATE: DINOX F 110

DE

M. ARCAN, F. STOENESCU și R. MIHAIL

1. Una din problemele cele mai importante de care se lovesc cercetările din domeniul fotoelasticității este cea a materialului pentru modele. Istoricul dezvoltării acestui domeniu dovedește că evoluția fotoelasticimetriei merge în pas cu cea a maselor plastice optic-active.

Chiar pentru problemele plane de elasticitate, care necesită modele simple, există încă în practica acestor lucrări dificultăți mari datorite, curgerii lente, optice și mecanice, accentuate.

În ce privește unele probleme care necesită modele compuse cum sînt elementele spațiale din construcții formate din panouri și planșee aferente sau, diafragmele de rigidizare, studiul acestora nu este posibil pe baza materialelor utilizate pînă acum (rășini formaldehidice) deoarece nu se pot realiza prin lipire modele suficient de rezistente la încercări.

Pornind de la aceste necesități am ajuns pe baza cercetărilor executate în laboratoarele ICECHIM și I. M. A. la realizarea unui material optic activ de sensibilitatea celor mai bune materiale cunoscute pînă în prezent și avînd în plus proprietăți de curgere lentă, optică și mecanică, redusă precum și posibilitatea realizării de modele compuse folosind un adesiv din același material. Materialul plastic obținut este o rășină epoxidică și a fost denumită : Dinox F 110.

Trebuie subliniat faptul că acest tip de rășină este corespunzător produsului elvețian Araldit B, cu deosebirea că transparența materialului obținut de autori este mult îmbunătățită ceea ce pentru lucrările de fotoelasticitate este extrem de important.

2. În cele ce urmează vom da unele date în legătură cu obținerea masei plastice Dinox F 110.

Din punct de vedere chimic, rășinile epoxidice sînt polimeri sintetici care conțin în moleculă gruparea epoxi.

$-CH_2-\underline{CH-CH_2-O}$. Aceste rășini se obțin prin condensarea difenilolpropanului cu glicerindiclorhidrină.

Rezultatul condensării este un material termoplastic cu greutate moleculară ce poate varia între 300 — 5000, în funcție de condițiile de lucru.

Rășinile epoxidice termoplaste au structură liniară ; ele se caracterizează prin punct de înmuiere și conținut în grupe epoxi.

Dinox F 110 este o rășină cu *p. i* $\simeq$ 55 și $\approx$ 15 % grupe epoxi.

Trecerea la structura tridimensională se face cu ajutorul unor agenți de întărire, care pot fi amine, anhidride de acizi dicarboxilici etc.

Polimerul cu structură tridimensională este termorigid și insolubil.

Pentru întărirea rășinei Dinox F 110 se utilizează anhidridă ftalică (punct de topire = 130,8°).

Cantitatea de anhidridă ftalică se poate varia în limite largi — între 10 — 35 părți (în greutate) anhidridă pentru 100 părți rășină, ceea ce conduce [1] la unele modificări în proprietățile polimerilor rezultați.

Întărirea se face la temperaturi cuprinse între 100 — 200°C, în timp variind între 24 — 2 ore, în funcție de regimul de temperatură ales.

3. Obținerea plăcilor prin turnarea și întărirea polimerului Dinox F 110 comportă mai multe faze și anume :

a) Pregătirea matriței. Cercetările prezentate în acest articol s-au făcut pe plăci de 5,5 mm grosime. Pentru obținerea lor s-a utilizat o matriță formată din 2 plăci de alamă cromată cu distanțiere mobile, avînd dimensiunile 250 × 320 mm.

Pregătirea matriței constă în degresarea perfectă a plăcilor, ungerea lor cu un agent de demulare și asamblarea pieselor cu ajutorul unor șuruburi.

Dintre agenții de demulare încercați s-au obținut rezultate satisfăcătoare cu lacuri de silicon cu uscare la cald (cca 6 ore la 200°) precum și cu soluție 2% de parafină în tetraclorură de carbon.

b) Pregătirea materialului pentru turnare. Rășina Dinox F 110 se încălzește la 130°C și se adaugă anhidridă ftalică, în proporție de 30 părți agent de întărire pentru 100 părți rășină Dinox F 110.

Pentru omogeneizarea amestecului și pentru a obține o viscozitate potrivită turnării în matriță este necesar ca amestecul să se mențină la temperatura de 130°C timp de 20 — 30 min agitînd din cînd în cînd.

c) Turnarea. Materialul încălzit la 130°C se toarnă încet, de la mică înălțime, în matrița încălzită la 130°C, apoi se introduce matrița într-un termostat, unde se realizează temperatura constantă, necesară întăririi.

Pentru studiul de față întărirea s-a făcut în următoarele condiții :

Tabloul nr. 1

Denumirea grupei de epruvete	A	B	C	D
Temperatura în °C	100	130	170	200
Timpul în ore	24	11	5	2

După terminarea întăririi, se răcește matrița lent în circa 8 ore.

d) Tratamentul termic ulterior. Placa obținută după desfacerea matriței prezintă uneori tensiuni interne.

Pentru detensionare am aplicat următorul tratament : pe o placă perfect plană se așază placa de Dinox F 110 și se introduce în termostat.

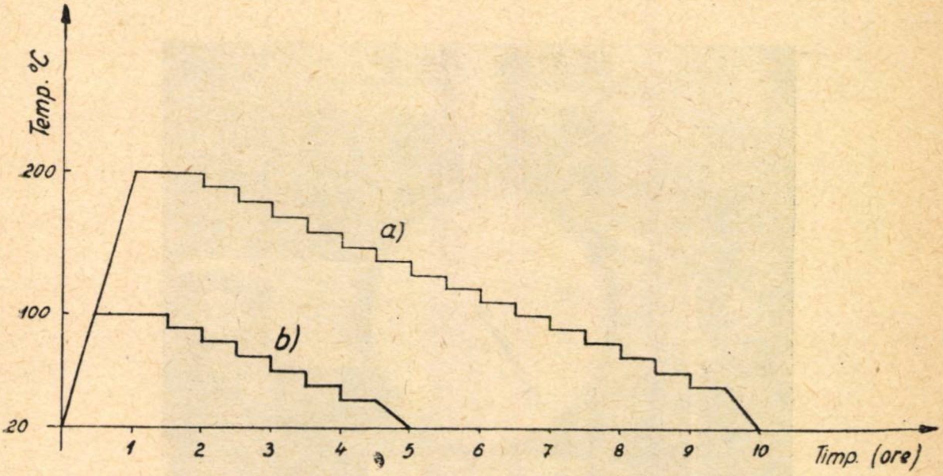


Fig. 1

Se încălzește pînă la 200°C se menține o oră la această temperatură și apoi se răcește lent, în circa 8 ore (fig. 1 *a*).

În cazul care se întîmplă curent, al unor tensiuni interne reduse (plăci care prezintă în lumină polarizată mai puțin de o bandă izocromată) am aplicat următorul tratament termic (fig. 1 *b*).

Placa de Dinox F 110 se încălzește în termostat pînă la 100°C și apoi se răcește lent.

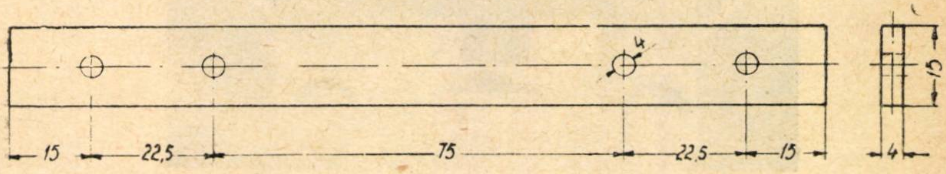


Fig. 2

4. Cercetările pentru determinarea principalelor proprietăți opticomecanice au urmărit să stabilească :

— Influența temperaturii și timpului în care se face întărirea rășinii asupra a doi parametri : valoarea benzii materialului $\tau_{0.1}$ (constanta fotoelastică a acestuia) și modulul de elasticitate *E*.

— Tratamentul termic optim pentru îmbunătăţirea proprietăţilor optico-mecanice ale plăcilor.

— Cifrele caracteristice mecanice mai importante.

Să urmărim pe rînd cele 3 aspecte cercetate :

4. 1. Am examinat cele 4 grupuri de epruvete din tabloul nr. 1, cărora le-am aplicat tratamentul termic pentru detensionare după figura 1 *a*.

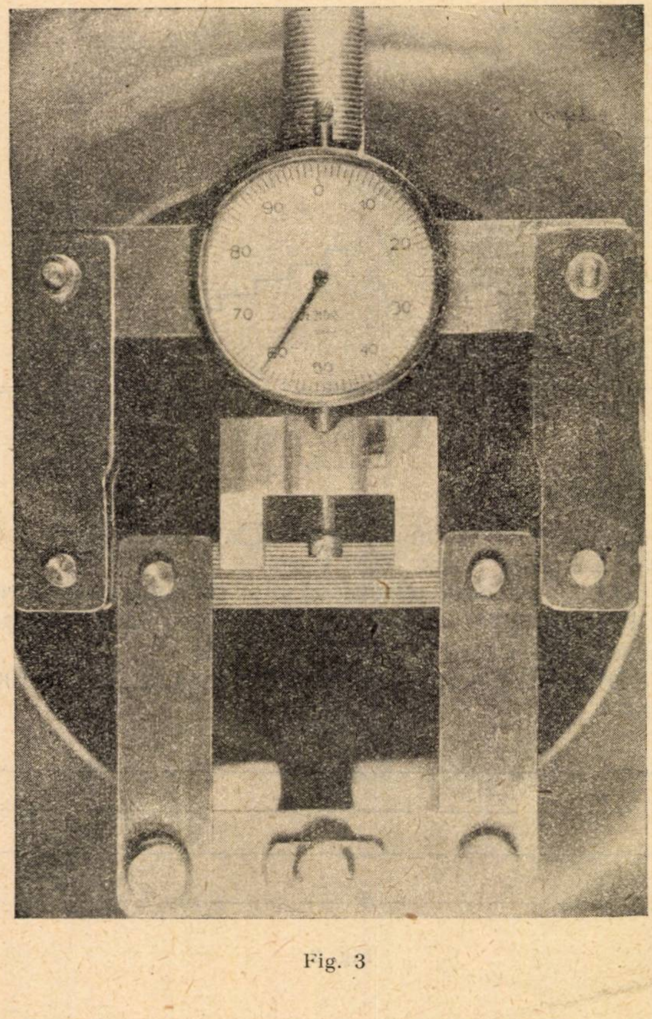


Fig. 3

Au fost folosite epruvete de etalonare la încovoiere curată (fig.2) solicitate cu ajutorul dispozitivului din figura 3. Un dispozitiv de măsurarea săgeţilor format dintr-un călăreţ montat pe epruveta studiată şi un comparator (vizibil tot pe fig. 3) poate să dea pentru măsurarea săgeţilor valorile modulului de elasticitate. Două repere trasate la 1,5 mm de feţele superioară şi inferioară a epruvetei, permit o citire exactă a ordinului de bandă în punctul respectiv. Determinarea valorii benzii materialului s-a făcut cu lumină de sodiu

$$\lambda = 0{,}589\ \mu .$$

Am ales ca timp de citire a săgeţilor şi a ordinului de bandă în dreptu reperelor 10 minute de la încărcare.

Valorile modulului de elasticitate au fost calculate [1] cu formula

$$E = \frac{M \cdot R_0}{I}\ \mathrm{kg/cm^2}\ ,$$

unde

M este momentul încovoietor, I momentul de inerţie al secţiunii

şi $R_0 = \frac{e^2}{8f}$,

în care f este săgeata, iar e este distanţa dintre reperele între care s-a măsurat f.

În aceste condiţii, au fost obţinute datele cuprinse în tabloul nr. 2 pentru cele 4 grupuri de epruvete studiate.

Tabloul nr. 2

Grupa de epruvete	Vol. benzii mat· $\tau_{0,1}$ kg/cm^2/cm	Modul de Elast. E kg/cm^2	Cifra de performanţă $E/2\ \tau_{0,1}$	OBSERVAŢII
A	5,33	32 500	3 050	Curgerea lentă optică redusă : 0,2 benzi în primele 10′ pentru o tensiune de $\sigma = 100$ kg/cm^2 În următoarele 10′ : 0,2 benzi şi apoi curgere lentă care rămîne practic neobservabilă.
B	5,00	32 000	3 200	
C	5,60	34 000	3 040	
D	5,00	34 000	3 400	
Valori medii	5,25	33 000	3 150	
Valori obţinute de alţi cercetători (1)	5,20	35 000	3 360	Datele au fost culese la 2′ dela încărcare.
(2)	5,25	30 000	2 860	Nu se arată timpul la citirea datelor

Din datele cuprinse în tabloul nr. 2 rezultă că valorile medii obținute sînt apropiate de cele prezentate de diverşi autori pentru o masă plastică de acelaşi tip.

În ce priveşte datele cu privire la curgerea lentă optică acestea sînt prezentate la coloana observații numai cu titlu informativ și urmează a fi verificate în lucrările ulterioare ale laboratorului nostru. Aceste date nu pot fi comparate cu altele din literatură întrucît nu există studii publicate.

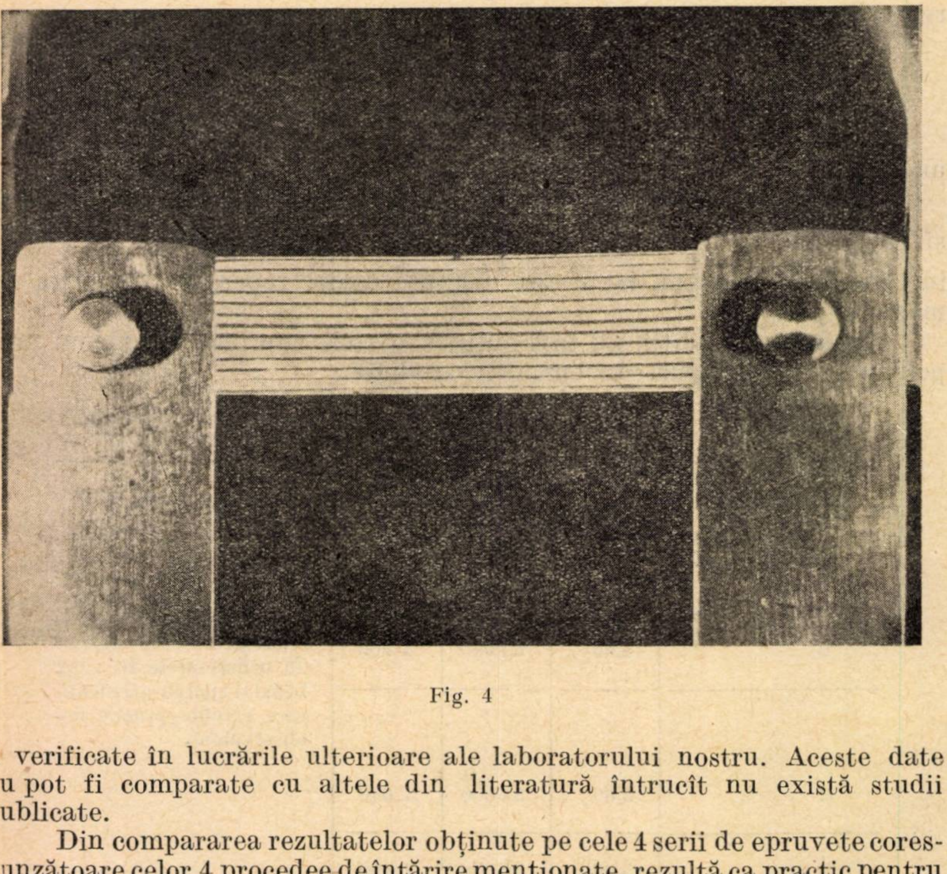


Fig. 4

Din compararea rezultatelor obținute pe cele 4 serii de epruvete corespunzătoare celor 4 procedee de întărire menționate, rezultă ca practic pentru condițiile de referire alese nu există diferențe între proprietățile studiate ; aceasta înseamnă că practic condițiile de întărire studiate conduc la acelaşi material.

Așadar, putem alege drept condiții de întărire a rășinii Dinox F 110 oricare din procedeele cercetate mai sus. Ne vom fixa la temperatura de 100°C și timpul de 24 ore drept condiții de întărire din următoarele motive :

— culoarea rășinii Dinox F 110 se intensifică o dată cu creșterea temperaturii ;

— temperaturile ridicate favorizează apariția de tensiuni interne remanente, deoarece la întărire contracția rășinii crește o dată cu temperatura de întărire.

— După cum se știe [1] reacția dintre rășina epoxidică și anhidrida ftalică este exotermă. Prin întărire la 100°C, se poate prelua mult mai ușor căldura rezultată din reacție, ceea ce duce la menținerei mai constantă a temperaturii de întărire, deci la evitarea apariție tensiunilor interne remanente.

Rezultă de asemenea din cifrele arătate că materialul prezintă o bună sensibilitate optică și că este corespunzător pentru obținerea izocromatelor ; avînd în vedere curgerea lentă, optică și mecanică, redusă, pe care am observat-o în decursul încercărilor, reese că putem considera și din acest punct de vedere că materialul obținut este superior fenol-formaldehidelor întrebuințate pînă în prezent.

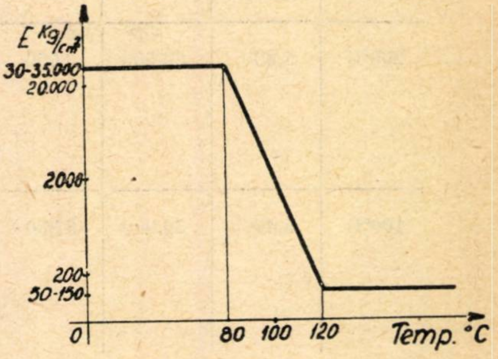


Fig. 5

Pentru comparație, dăm datele stabilite în laboratorul nostru, cu privire la rășina fenolformaldehidică cehoslovacă Juralit, după un tratament termic pentru detensionare de tipul reprezentat în figura 1 însă cu palierul la 115° :

$$\tau_{0,1} = 5{,}5 \text{ kg/cm}^2; \; E = 33\,000 \text{ kg/cm}^2; \; E/2\tau_{0,1} = 3000;$$

curgerea lentă (pentru $\sigma \simeq 100$ kg/cm²) circa 0,9 benzi în 30′.

Revenind la Dinox F 110, precizăm de asemenea că materialul prezintă o bună proporționalitate pînă la sarcini relativ mari, între tensiuni și ordine de bandă.

Un defect al acestui material ca și al celorlalte materiale de aceeași sensibilitate optică este așa-numitul efect de margine : apariția unor tensiuni pe conturul modelului la cîteva ore de la prelucrarea sa. Păstrarea în exicator îmbunătățește acest fenomen dar nu-l elimină complet.

4.2. Am arătat mai sus că pentru îmbunătățirea proprietății opticomecanice am folosit două tratamente termice. Fixarea condițiilor de tratare s-a făcut ținînd seama de comportarea rășinii epoxidice descrisă în [1] ; în figura 5 se dă schema variației modulului de elasticitate în funcție de temperatură ; se pot deosebi 3 domenii :

— sub 80°C, modulul de elasticitate se menține la 30 — 35 000 kg/cm² ;
— peste 120°C ” ” ” este redus la 50 — 150 kg/cm² ;
— între 80 și 120°C prezintă un salt între valorile de mai sus.

Am ales temperaturile de 100 și 200°C, pentru a ne situa pe de o parte la o valoare a modulului de elasticitate de circa 2 000 kg/cm²(de 15 ori mai mică decît valoarea la temperatura camerii) și pe de altă parte la valoarea minimă a acestui modul (50 — 150 kg/cm²)

Ținînd seama de argumentele prezentate la punctul 4.1 am ales, procedeul de întărire corespunzător grupei de epruvete A. Am cercetat deci efectul celor 2 tratamente termice ulterioare pe aceste epruvete. Au fost obținute rezultatele (pe baza unor citiri la 10′ de la încărcare) din tabloul nr. 3.

Tabloul nr. 3

TRATAMENT TERMIC	Valoarea benzii materialului $\tau_{0,1}$ kg/cm²/cm	Modulul de Elast E kg/cm²	Cifra de performanță $E/2\ \tau_{0,1}$	Obs. curgere lentă pt. $\sigma \approx 100$ kg/cm²	Alte observații
200°C	5,33	32 500	3 050	În 10′→0,2 benzi; în urm. 10′ → 0,2 benzi apoi neobservabilă	Se elimină tensiunile termice remanente și defectele de supr.
100°C	5,40	36 000	3 330	În 10′→0,15 benzi ; în urm. 10′—0,10 benzi apoi neobservabilă	Se elimină tens. termice.

Se observă că tratamentul termic de 100°C față de cel de 200°C duce la o creștere cu circa 10 % a cifrei de performanță a materialului și la o micșorare importantă a curgerii lente.

4.3. Cifrele caracteristice mecanice mai importante au fost obținute pe epruvete pentru încercarea la întindere (fig. 6) de tipul T C 61 propus de I. S. O. (Organizația internațională de standardizare) ; viteza de creștere a sarcinei a fost de 30 mm/minut.

Datele obținute pentru materialul realizat conform epruvetelor din grupa A și un tratament termic ulterior de 100°C (fig. 6) sînt următoarele :

— limita de proporționalitate $\sigma_p = 460$ kg/cm² și
$\varepsilon_p = 1{,}55\,\%$; $E = 30\,000$ kg/cm²
— rezistența la rupere $\sigma_r = 850$ kg/cm² și
$\varepsilon_r = 5\,\%$.

Se observă că modulul de elasticitate la întindere rezultă mai mic decît cel provenit din încercările de încovoiere. De asemenea a fost obținută cifra reprezentînd duritatea Brinell, după GOST 4670/49, cu o bilă de 5 mm diametru, cu greutatea de 250 kg, aplicată timp de 30″ ; citirea s-a făcut la 10′ după ridicarea sarcinei :

Valoarea medie = 2 300 kg/cm².

S-a observat că nu există deosebire între duritatea la suprafața plăcii și cea din interior așa cum se întîmplă la fenol-formaldehide.

5. Plăcile obținute au fost utilizate pentru realizarea unor modele compuse, în planuri perpendiculare.

Astfel, au fost obținute modele de diafragme de clădiri cu părți din planșeele aferente, precum și panouri cu părți din planșeele corespunzătoare. Lipirea lor s-a făcut cu adeziv Dinox 0,40, și se observă că nu apar tensiuni locale în zonele de contact; rezultatele încercărilor dovedesc o foarte bună comportare a modelelor; conlucrarea lor este bine asigurată şi se poate considera că tehnica modelelor compuse corespunzătoare unor structuri spaţiale ne stă la dispoziţie.

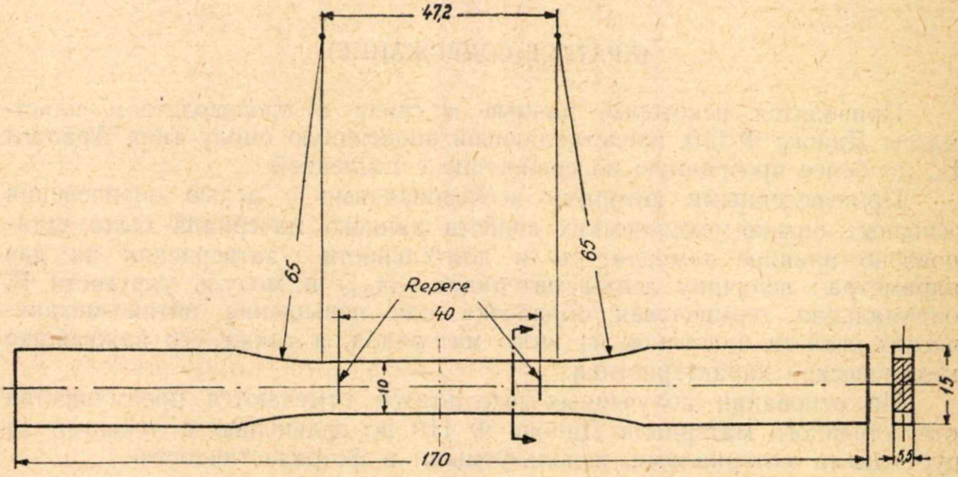


Fig. 6

6. În concluzie, voi da cîteva date comparative.

Procedeul urmat ca şi modul de întărire şi de tratare termică ulterioară, ne-a condus la realizarea unui material care prezintă avantaje deosebite:

— Valoarea benzii materialului ($\tau_{0,1}$) mai mică decît a materialului considerat drept cel mai bun, BT 61 893 (deci sensibilitatea mai ridicată):

$$5{,}4 \text{ faţă de } 7{,}7 \text{ kg/cm}^2\text{/cm.}$$

— Cifra de performanţă mai mare:

3 330 faţă de 2 800

— Curgerea lentă şi efectul de margine de acelaşi ordin de mărime.

— Timpul de polimerizare: o zi faţă de 45—60 zile.

— Se poate realiza în ţară. O staţie-pilot mică pentru nevoile de început ale industriei electrotehnice va asigura şi necesităţile în domeniul fotoelasticităţii, urmînd ca pentru acestea din urmă să se facă operaţiile suplimentare de purificare corespunzătoare trecerii de la Dinox 110 la Dinox F 110.

Primită la redacţie la 8 iulie 1957.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПО ВНЕДРЕНИЮ НОВОГО МАТЕРИАЛА ДИНОКС Ф-110

ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ В ОБЛАСТИ ФОТОЭЛАСТИЧНОСТИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Приводятся некоторые данные в связи с производством пластмассы Динокс Ф-110, представляющей эпоксидную смолу типа Аралдит Б., но более прозрачную по сравнению с последней.

Произведенными авторами исследованиями с целью определения основных оптико-механических свойств данного материала было установлено влияние температуры и длительности затвердения на два параметра: величину ленты материала ($\tau_{0.1}$) и модуль упругости E, оптимальная термическая обработка для повышения оптико-механических свойств пластинок из этого материала, а также его важнейшие механические характеристики.

На основании полученных результатов отмечаются преимущества отечественного материала Динокс Ф 110 по сравнению с лучшими зарубежными материалами, используемыми в фотоэластичности.

RECHERCHES SUR L'INTRODUCTION D'UN NOUVEAU MATÉRIEL POUR MAQUETTES EN PHOTOÉLASTICITÉ : DINOX F 110

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, les auteurs présentent les données concernant la production de la masse plastique, Dinox F 110 — une résine époxydique du même type que le produit Araldite B, mais ayant, par rapport à ce dernier, une transparence améliorée.

Les recherches effectuées par les auteurs pour déterminer les principales propriétés optico-mécaniques ont établi que :

L'influence de la température et de la durée pendant laquelle se fait le durcissement, sur les deux paramètres suivants : la valeur de la bande du matériel ($\tau_{0.1}$) et le module d'élasticité E ; le traitement thermique optimum pour l'amélioration des propriétés optiques-mécaniques des plaques, ainsi que les chiffres caractéristiques mécaniques les plus importants.

On montre que toutes les données obtenues situe le matériel Dinox F 110, produit dans notre pays, dans une position avantageuse par rapport aux meilleurs matériaux étrangers, utilisés en photoélasticité.

BIBLIOGRAFIE

1. R. V. Baud, H. H. Racke, *Die Elastischen und spannungsoptischen Eigenschaften von Araldit—Giessharz B bei 20°C und 150°C in Anhängigkeit von der Härtermenge.* Schweitzer Archiv, aug. 1955, p. 257.

2. H. Spooner, L. D. Mc Connell, *An ethoxylene resin for photoelastic work.* British Journal of Applied Physics, vol. 4, no. 6, iunie 1953, p. 181.

3. N. I. Prigorovschi, *Materiale optic active, transparente pentru modele plane şi spaţiale.* Din culegerea de articole : Metoda polarizării optice pentru studiul tensiunilor. Edit. Acad. de Ştiinţe URSS, Moscova, 1956.

4. F. Stoenescu, R. Mihail, *Răşini epoxidice.* Revista de chimie, t. VIII, nr. 4, aprilie 1957.

DEFORMAȚII LA O CONSOLĂ ÎNCASTRATĂ ÎNTR-UN MEDIU ELASTIC

DE

EDUARD NICOLAU

Într-o lucrare anterioară [1] în care se prezentau rezultatele cercetărilor făcute cu ajutorul fotoelasticimetriei asupra unor console încastrate într-un mediu elastic se demonstra existența unor puncte singulare, plasate în anumite poziții pe axa de simetrie longitudinală.

Se arăta cu acest prilej că un factor deosebit de important, care determină poziția punctelor singulare și în special a celui din apropierea „secțiunii de încastrare" este lungimea relativă a consolei adică raportul $\frac{l}{h}$.

În lucrarea de față se prezintă pentru valori ale raportului $\frac{l}{h}$ cuprinse între 4 și 1 inclusiv, deformațiile reale ale planului median (fibra elastică din rezistența materialelor) și se compară cu deformațiile ce rezultă din formulele indicate pentru acest caz în teoria elasticității. Se obține de aici o corespondență între poziția punctului singular, determinată experimental prin fotoelasticimetrie și deformația reală.

Condițiile experimentării. Cercetarea a fost efectuată cu ajutorul fotoelasticimetriei pe modele din juralit pentru obținerea izocromaticelor și din plexiglas, pentru izocline. Schema modelului este indicată în figura 1 iar dispozitivul de încărcare în figura 2.

După cum se vede, consola încastrată este decupată din aceeași placă cu mediul de încastrare, realizîndu-se astfel un anumit raport între rigiditatea consolei și aceea a mediului care depinde de raportul dimensiunilor celor două zone adică $\frac{h}{H}$.

Lungimile relative ale consolelor considerate în calcul au fost 4, 3, 2, 1,5 și 1,0. Metoda de lucru utilizată a constat în evaluarea eforturilor unitare atît în consolă cît și în mediul de încastrare, în special în preajma acestei zone de încastrare. Pe baza elementelor obținute experimental izocromatice (fig. 3) și izocline (fig. 4) s-au evaluat tensiunile în secțiunile

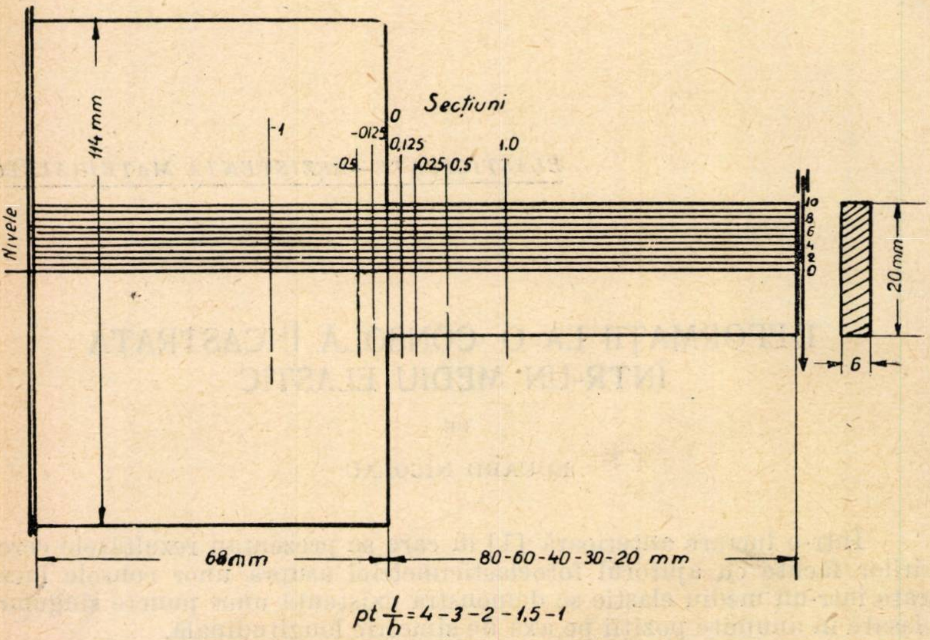

Secțiuni
0
-1
-0125
0,125
1.0
-0.5
0.25
0.5
Nivele
114 mm
10
8
6
4
2
0
20mm
6
68mm
80-60-40-30-20 mm
pt $\frac{l}{h}$ = 4-3-2-1,5-1

Fig. 1. — Consola încastrată. Schema modelului folosit.

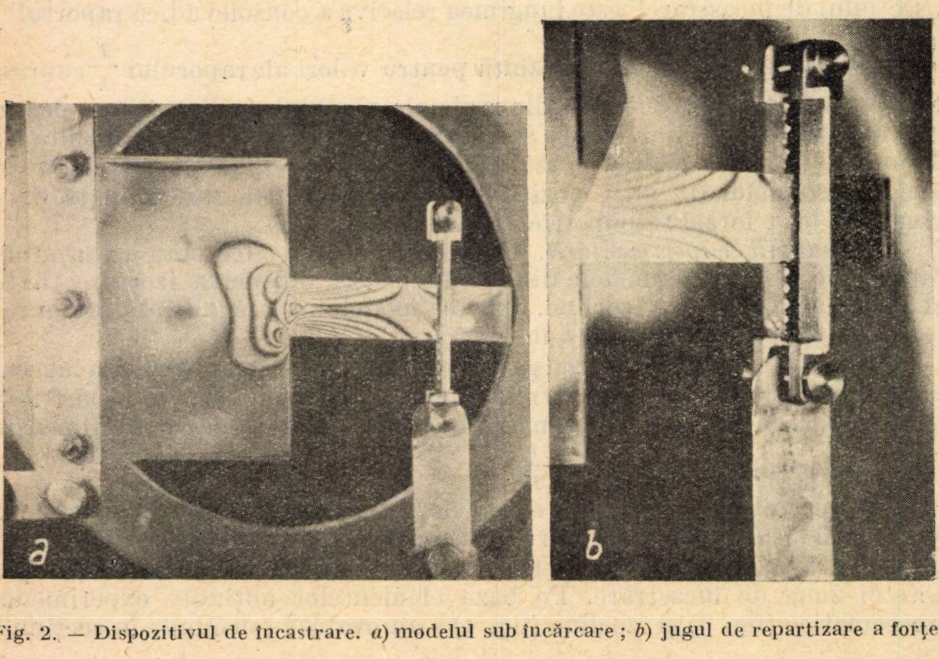


Fig. 2. — Dispozitivul de încastrare. *a*) modelul sub încărcare ; *b*) jugul de repartizare a forței.

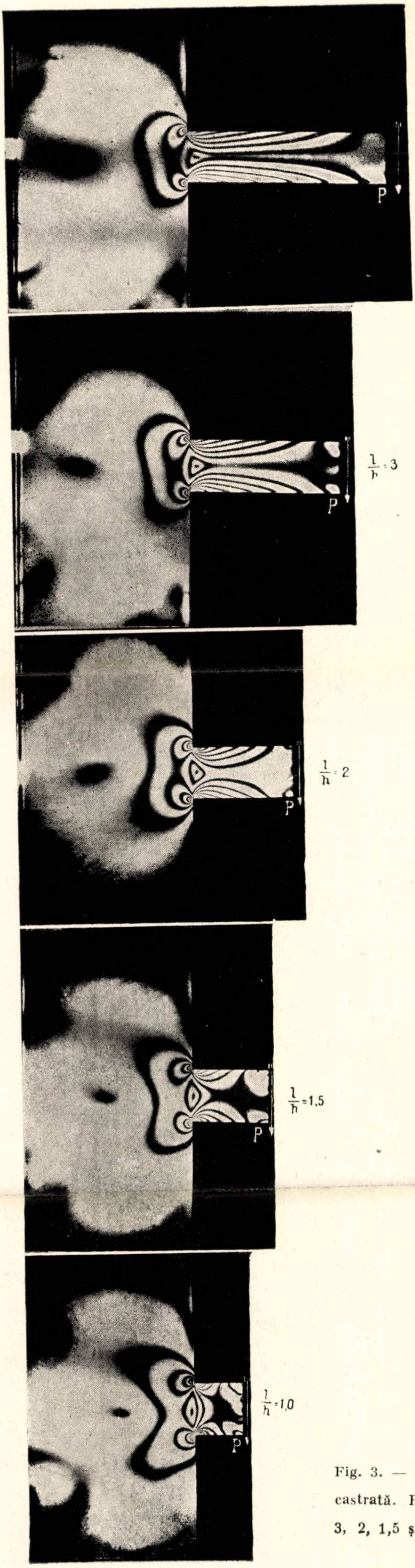

$\frac{l}{h}=4$
P
$\frac{l}{h}=3$
P
$\frac{l}{h}=2$
P
$\frac{l}{h}=1,5$
P
$\frac{l}{h}=1,0$
P

Fig. 3. — Izocromatice la consola încastrată. Raportul $\frac{l}{h}$ are valorile 4, 3, 2, 1,5 şi 1,0.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848

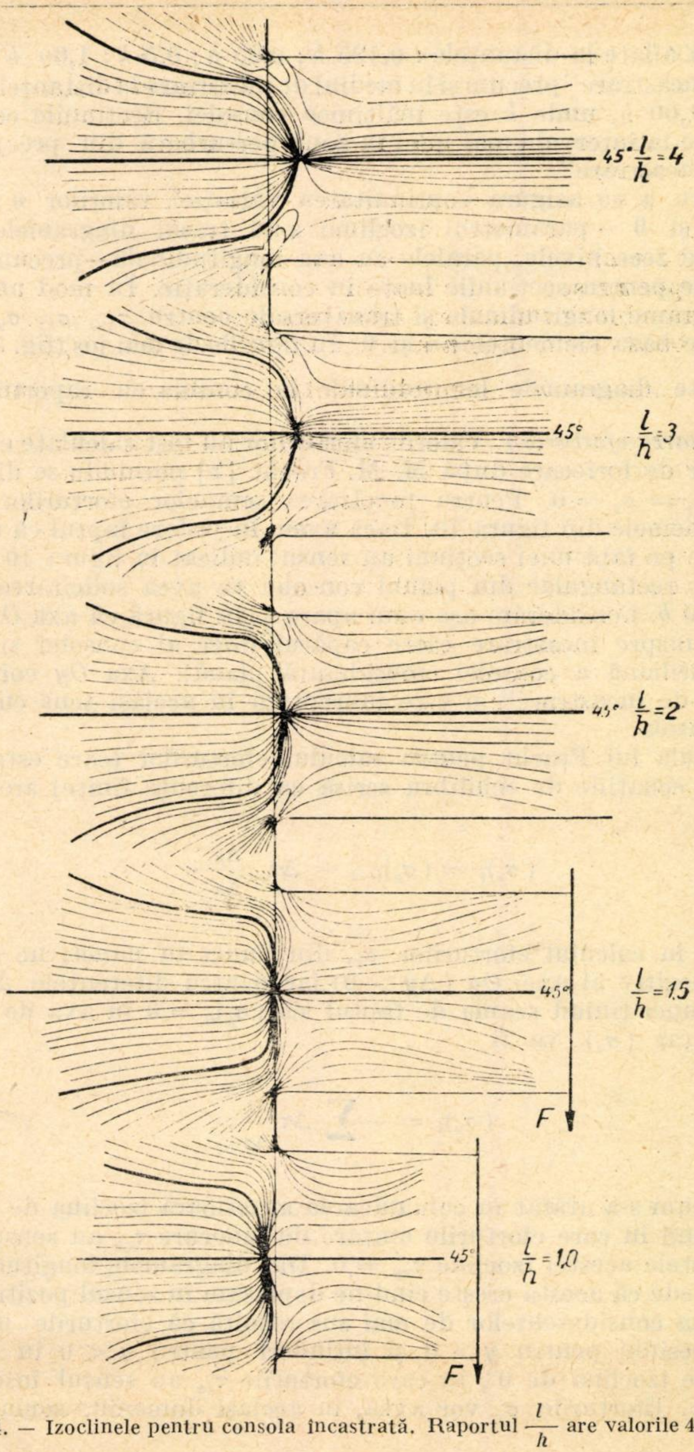

45°
$\frac{l}{h}=4$
45°
$\frac{l}{h}=3$
45°
$\frac{l}{h}=2$
45°
$\frac{l}{h}=1{,}5$
F
45°
$\frac{l}{h}=1{,}0$
F

Fig. 4. — Izoclinele pentru consola încastrată. Raportul $\frac{l}{h}$ are valorile 4,3,2,1,5 și 1,0.

din consolă aflate la distanțele : 0,125 h; 0,25 h; 0,5 h; 1,00 h de „secțiunea de încastrare" precum și în mediul de încastrare la distanțele 0,125 h; 0,25 h și 1,00 h, unde h este înălțimea consolei. Secțiunile considerate sînt dispuse la intervale mai mici în zona perturbată din preajma „secțiunii de încastrare".

Pentru a se asigura continuitatea variației valorilor n — ordinul de bandă și θ — parametrul izoclinei s-au trasat diagramele longitudinale — pe zece nivele, paralele cu axa longitudinală—precum și cele transversale pentru secțiunile luate în considerație. În mod analog s-au trasat diagrame longitudinale și transversale pentru τ_{xy}, σ_x, σ_y, σ_1 și σ_2 evaluate pe baza elementelor n și θ. În figurile de mai jos (fig. 5, 6, 7,8,9) sînt arătate diagramele longitudinale la consola cu raportul $\frac{l}{h} = 4$.

Evaluarea eforturilor. Valorile eforturilor au fost calculate cu metoda diferențelor de forfecare după M. M. Frocht [2] pornindu-se din axa de simetrie $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Pentru precizarea semnelor eforturilor ne vom referi la schemele din figura 10. Dacă avem în vedere faptul că tensiunile de lunecare pe fața unei secțiuni au sensul indicat în figura 10 *a*, atunci un element rectangular din planul consolei va avea solicitarea indicată în figura 10 *b*. Considerăm așa cum apare și în figură că axa Ox este îndreptată dinspre încastrare către capătul liber al consolei și coincide cu fibra mediană a consolei (considerată plană). Axa Oy coincide cu „secțiunea de încastrare" și este îndreptată în același sens cu forța ce solicită consola.

Formula lui Frocht pentru calculul eforturilor (care este de fapt una dintre ecuațiile de echilibru scrisă cu diferențe finite) are expresia

$$(\sigma_y)_i = (\sigma_y)_{i-1} - \Delta\tau_{xy}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Dacă în calculul eforturilor σ_y, din punct în punct, ne deplasăm în sensul pozitiv al axei Oy ($\Delta y > 0$) iar pentru diferențele $\Delta\tau_{xy}$ luăm $\Delta x > 0$ atunci ținînd seama de faptul că $(\sigma_y)_0 = 0$ în axa de simetrie, efortul unitar $(\sigma_y)_i$ va fi

$$(\sigma_y)_i = -\sum \Delta\tau\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{2}$$

Așa cum s-a arătat în comunicarea anterioară izoclina de 0° separă două domenii în care eforturile unitare de lunecare τ_{xy} au sensuri opuse iar în punctele acestei izocline $\tau_{xy} = 0$. Din diagramele longitudinale ale lui τ_{xy} se vede că acesta crește cînd ne deplasăm în sensul pozitiv al axei Ox. Pe baza considerentelor de mai sus rezultă că eforturile unitare σ_y sînt compresiuni pentru $y > 0$ și întinderi pentru $y < 0$ în domeniul mărginit de izoclina de 0°, în care eforturile τ_{xy} au sensul însemnat în figura 10 *b*. Eforturile σ_x vor avea, în același domeniu, semnul lui σ_y

ceea ce se poate vedea imediat din condiția de echilibru de momente

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot y \cdot dx = P\,(l - x). \tag{3}$$

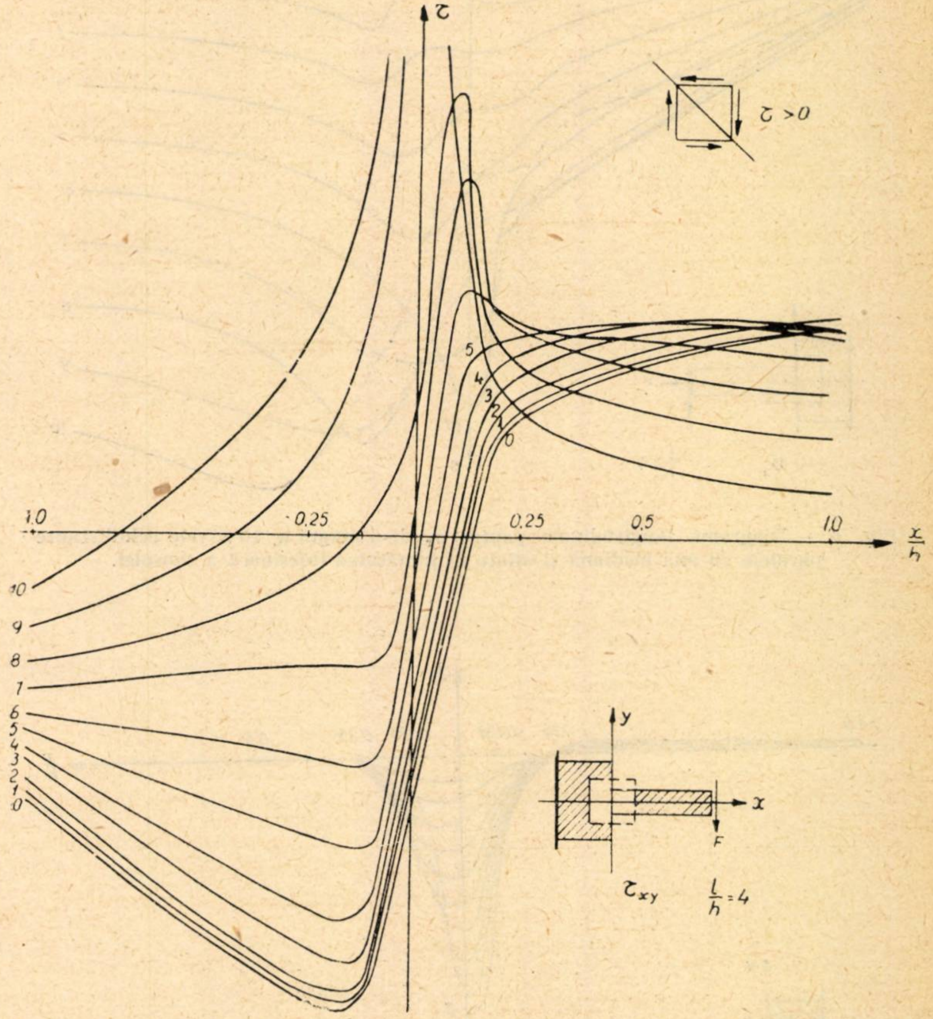


Fig. 5. — Diagrame longitudinale pentru τ_{xy} de-a lungul a 10 nivele echidistante paralele cu axa mediană.

În interiorul izoclinei de 0° eforturile σ_y, în general, își schimbă semnul.

Cunoscîndu-se astfel în fiecare punct eforturile σ_y și τ_{xy} se pot calcula din relațiile cunoscute și celelalte valori pentru σ_x, σ_1 și σ_2. Aceste calcule

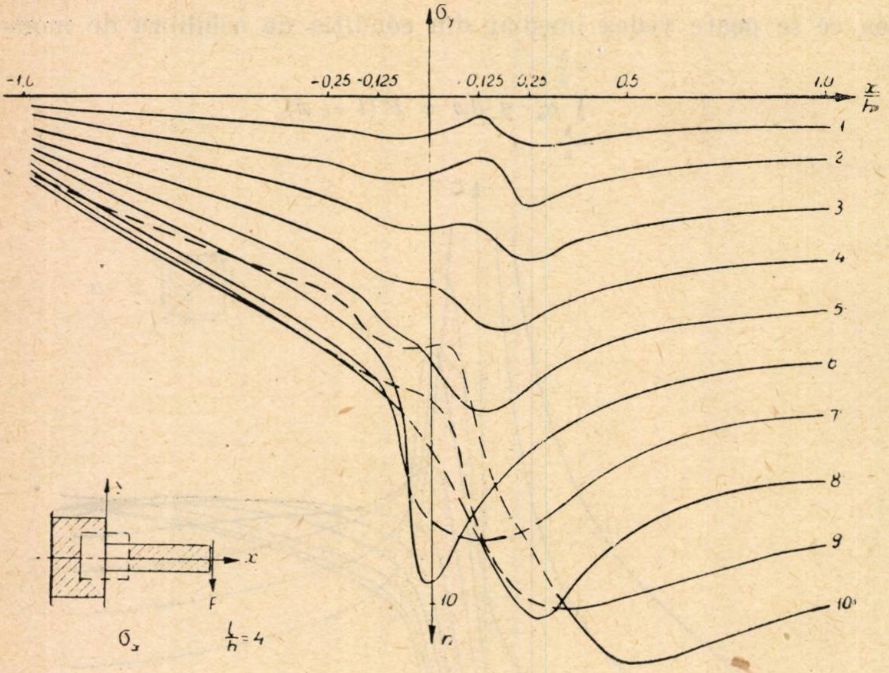


Fig. 6. — Diagrame longitudinale pentru σ_x de-a lungul a 10 nivele echidistante paralele cu axa mediană și aflate în jumătatea inferioară a consolei.

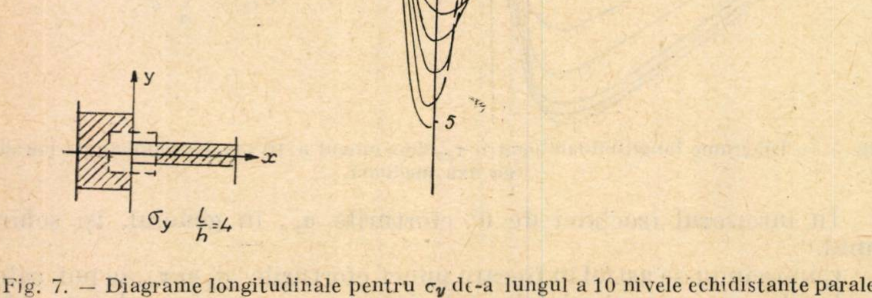


Fig. 7. — Diagrame longitudinale pentru σ_y de-a lungul a 10 nivele echidistante paralele cu axa mediană și aflate în jumătatea inferioară a consolei.

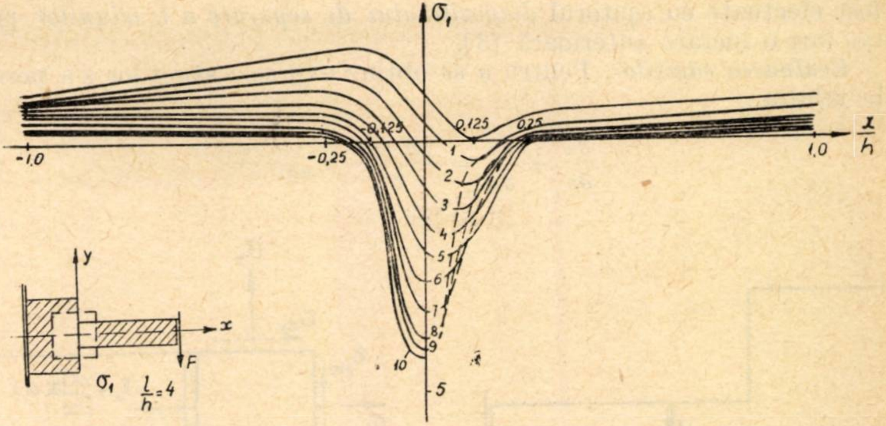


Fig. 8. — Diagrame longitudinale pentru σ_1 de-a lungul a 10 nivele echidistante paralele cu axa mediană și aflate în jumătatea inferioară a consolei.

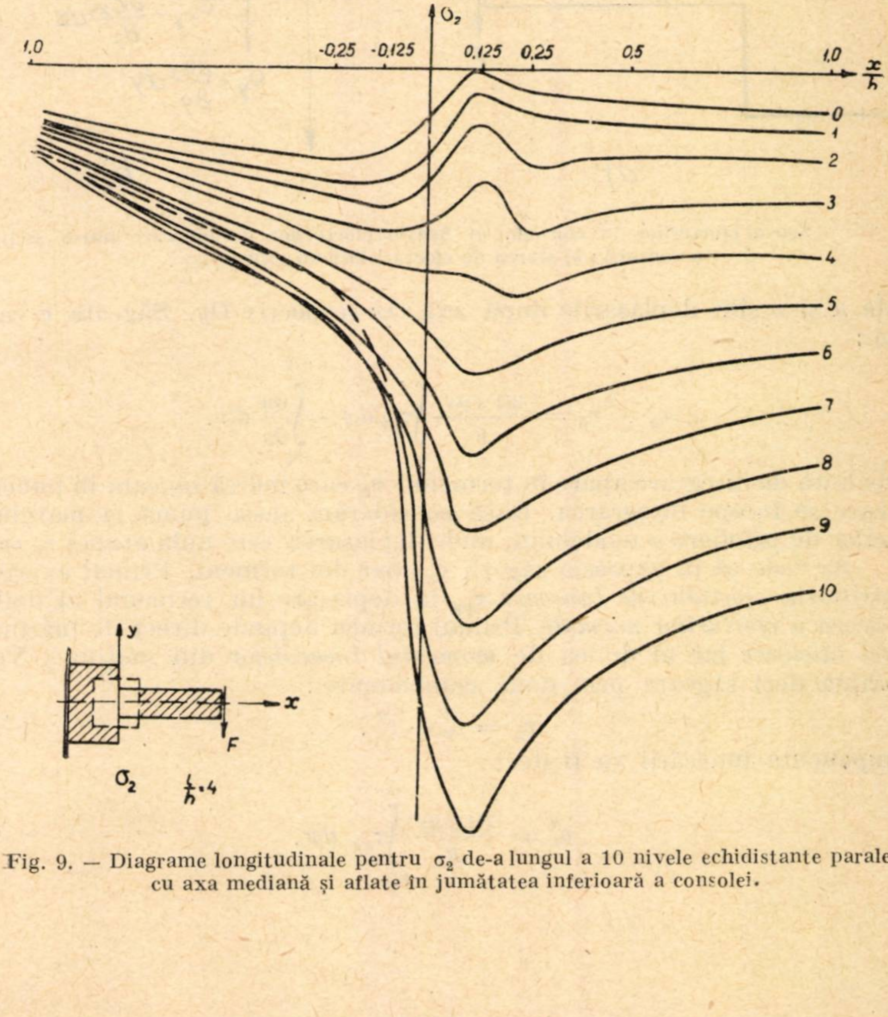


Fig. 9. — Diagrame longitudinale pentru σ_2 de-a lungul a 10 nivele echidistante paralele cu axa mediană și aflate în jumătatea inferioară a consolei.

au fost efectuate cu ajutorul *dispozitivului de separare a tensiunilor* prezentat într-o lucrare anterioară [3].

Evaluarea săgeților. Pentru a se obține expresia săgeților s-a pornit de la relația

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}, \tag{4}$$

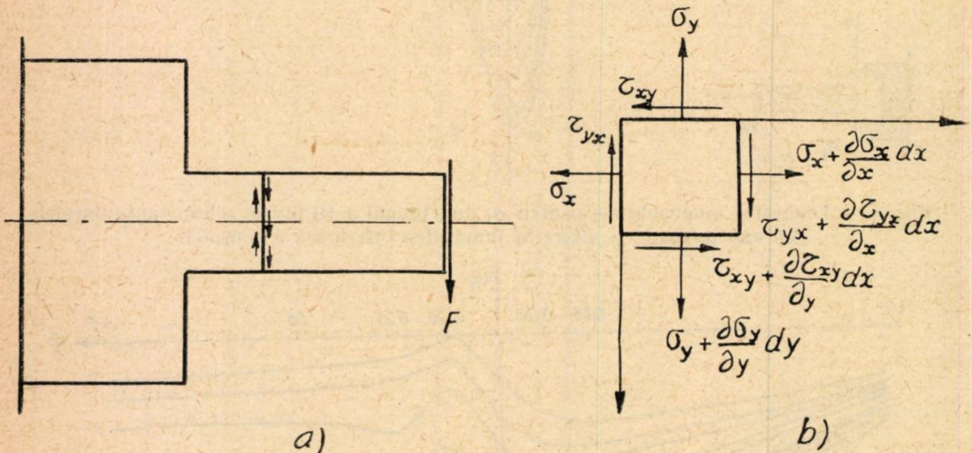


Fig. 10. — Sensul eforturilor în consolă. *a*) Sensul eforturilor de lunecare într-o secțiune a consolei ; *b*) starea de eforturi într-un element.

unde u și v sînt deplasările după axa Ox respectiv Oy. Săgeata v va fi deci :

$$v_x - v_0 = \frac{2(1+\mu)}{E}\int_{x_0}^{x}\tau_{xy}\,dx - \int_{x_0}^{x}\frac{\partial u}{\partial y}\,dx. \tag{5}$$

Constanta de integrare apare în termenul v_0 care indică săgeata în punctul în care se începe integrarea. Dacă considerăm acest punct la marginea plăcilor de prindere a modelului, unde deplasarea este nulă atunci $v_0 = 0$.

Se vede că în expresia săgeții v_x apar doi termeni. Primul exprimă contribuția *efortului de lunecare* τ_{xy} la deplasare, iar termenul al doilea pe aceea a *eforturilor normale*. Primul termen depinde direct de mărimea *forței tăietoare* iar al doilea de *momentul încovoietor* din secțiune. Vom exprima deci săgeata prin două componente :

$$v_x = v_x^{\tau} + v_x^{\sigma}. \tag{6}$$

Componenta lunecării va fi deci

$$v_x^{\tau} = \frac{2(1+\mu)}{E}\int_{x_0}^{x}\tau_{xy}\,dx. \tag{7}$$

Avînd diagramele longitudinale ale eforturilor τ_{xy} integrala reprezintă aria curbei τ_{xy} de-a lungul axei Ox începînd din secţiunea de prindere a modelului şi pînă în punctul în care se calculează deplasarea valorilor v_x^{τ}. Aproximativ aceeaşi valoare se poate obţine şi scriind expresia lui v_x^{τ} în diferenţe finite

$$v_{x_k}^{\tau} = \frac{2(1+\mu)}{E} \Delta x \sum_{i=1}^{k} (\tau_{xy})_i , \tag{8}$$

unde Δx este intervalul constant la care se măsoară $(\tau_{xy})_i$ pe diagrama lui τ_{xy}.

Pentru a o face accesibilă calculului, componenta încovoierii

$$v_x^{\tau} = - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y} \, dx \tag{9}$$

va fi transformată ţinîndu-se seama de relaţia

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \, \sigma_y) , \tag{10}$$

care prin integrare devine

$$u = \frac{1}{E} \int \sigma_x \, dx - \frac{\mu}{E} \int \sigma_y \, dx - f(y) , \tag{11}$$

unde $f(y)$ este o funcţie arbitrară numai de y şi care va fi determinată ulterior. De aici rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{E} \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx - \frac{\mu}{E} \int \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx - f'(y) . \tag{12}$$

Deplasarea datorită încovoierii va fi deci

$$v_x^{\sigma} = - \frac{1}{E} \int dx \int \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dx + \frac{\mu}{E} \int dx \int \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dx + x f_1(y) , \tag{13}$$

unde

$$f_1(y) = f'(y).$$

Utilizînd transformarea

$$\int_{x_0}^{x_k} dx \int F(x) \, dx = \int_{x_0}^{x_k} (x_k - x) F(x) \, dx \tag{14}$$

căpătăm pentru expresia deplasării v_x^σ expresia

$$v_{x_k}^\sigma = -\frac{1}{E}\int_{x_0}^{x_k}(x_k - x)\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\,dx + \frac{\mu}{E}\int_{x_0}^{x_k}(x_k - x)\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dx + x_k f_1(y) \tag{15}$$

sau

$$v_{x_k}^\sigma = -\frac{x_k}{E}\int_{x_0}^{x_k}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\,dx + \frac{1}{E}\int_{x_0}^{x_k} x\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\,dx + \frac{\mu}{E}\,x_k\int_{x_0}^{x_k}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dx - \frac{\mu}{E}\int_{x_0}^{x_k} x\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dx + x f_1(y). \tag{16}$$

Deoarece s-a calculat deplasarea pe verticală pentru fibra mediană în expresia (12) $f_1(y) = \text{const}$. Cum pentru $x = 0$, $v_x^\sigma = 0$ rezultă că această constantă este nulă.

Pentru σ_x şi σ_y s-au trasat diagrame longitudinale pe 10 nivele echidistante ale unei jumătăţi din înălţimea consolei, la intervale de $\frac{1}{20}h$. Ţinînd seama de cele spuse mai sus cu privire la $f_1(y)$ şi scriind relaţia (16) cu diferenţe finite, căpătăm

$$\begin{aligned} v_{x_k}^\sigma = &-\frac{x_k}{E}\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\Delta\sigma_{x_i}}{\Delta y}\,\Delta x + \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{i=k} x_i\frac{\Delta\sigma_{x_i}}{\Delta y}\,\Delta x + \\ &+\frac{\mu}{E}\,x_k\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\Delta\sigma_{y_i}}{\Delta y}\,\Delta x - \frac{\mu}{E}\sum_{i=1}^{i=k} x_i\frac{\Delta\sigma_{y_i}}{\Delta y}\,\Delta x. \end{aligned} \tag{17}$$

Aici $\Delta y = \frac{h}{10}$ dacă pentru fibra mediană luăm nivelul superior şi inferior al fîşiei mediane. Notînd eforturile pe aceste nivele cu $\sigma_x^{(1)}$ şi $\sigma_y^{(1)}$ vom avea

$$\frac{\Delta\sigma_x}{\Delta y} = \frac{10}{h}\,2\,\sigma_x^{(1)} \qquad \text{şi} \qquad \frac{\Delta\sigma_y}{\Delta y} = \frac{10}{h}\,2\,\sigma_y^{(1)}. \tag{18}$$

Intervalul Δx s-a luat constant şi deci relaţia (17) devine după transformările ce rezultă din cele de mai sus

$$\begin{aligned} v_x^\sigma = &-\frac{x}{E}\,\Delta x\frac{20}{h}\sum_i \sigma_{x_i}^{(1)} + \frac{1}{E}\,\Delta x\frac{20}{h}\sum x_i\,\sigma_{x_i}^{(1)} + \frac{\mu}{E}\,x\,\Delta x\frac{20}{h}\sum\cdot\,\sigma_{y_i}^{(1)} - \\ &-\frac{\mu}{E}\,\Delta x\frac{20}{h}\sum x_i\cdot\,\sigma_{y_i}^{(1)}. \end{aligned} \tag{19}$$

sau în sfîrşit

$$v_x^\sigma = -\,C_1^\sigma\Big[x\Omega_x - \mathfrak{M}_x\Big] + C_2^\sigma\Big[x\Omega_y - \mathfrak{M}_y\Big] \tag{20}$$

în care s-a notat

$$C_1^{\sigma} = \frac{20}{Eh}\,\Delta x\,, \quad C_2^{\sigma} = \frac{20\,\mu}{Eh}\,\Delta x\,, \quad \begin{matrix} \Omega_x = \sum \sigma_{x_i}^{(1)} & \Omega_y = \sum \sigma_{y_i}^{(1)} \\ \mathfrak{M}_x = \sum x_i\,\sigma_{xi}^{(1)} & \mathfrak{M}_y = \sum x_i\,\sigma_{y_i}^{(1)} \end{matrix}\,. \qquad (21)$$

Se dă mai jos tabloul săgeților detaliat după contribuțiile separate ale eforturilor σ_x, σ_y și τ_{xy}. Sînt date de asemenea în diagramele din figura 11 alura fibrei medii deformate separat,de către fiecare dintre eforturile, precum și deformația totală. În cazurile studiate s-a luat intervalul $\Delta x = 5$ mm, $E = 3 \cdot 10^4$ și $\mu = 0{,}33$.

Din examenul tablourilor de valori nr. 1 și nr. 2 se poate constata că termenul principal ce alcătuiește valoarea săgeții este cel dat de momentul încovoietor prin intermediul efortului unitar σ_x iar termenii corespunzători eforturilor unitare σ_y și τ_{xy} sînt mult mai mici. După cum se vede eforturile unitare σ_y contribuie la amplificarea săgeților.

Mai interesantă este contribuția efortului unitar de lunecare. Diagramele ne arată că între punctele singulare și în general în zona secțiunii de încastrare efortul unitar τ_{xy} diminuează săgeata provocată de încovoiere. Se vede de asemenea că această contribuție negativă la alcătuirea deformației verticale este cu atît mai importantă cu cît lungimea relativă a consolei este mai mare și deci cu cît punctul singular ce caracterizează raportul $\frac{1}{h}$ este în consolă, mai depărtat de „secțiunea de încastrare”. Rezultă din compararea valorilor că, cu cît consola este mai scurtă, contribuția eforturilor de lunecare devine mai importantă în raport cu acea a eforturilor normale provocate de încovoiere. Astfel, la săgeata maximă din capătul consolei, pentru lungimea relativă $\frac{1}{h} = 4$ săgeata din lunecare reprezintă mai puțin decît 0,7% din săgeata dată numai de încovoiere în timp ce ea reprezintă 19% în cazul raportului $\frac{l}{h} = 1$. Se evidențiază o dată mai mult importanța lunecărilor la deformația consolelor scurte.

Un alt element important al deformației provocate de lunecare este panta fibrei deformate. În diagramele din figura 11 forța exterioară a fost astfel aleasă încît momentul încovoietor în secțiunea de încastrare să fie același pentru toate rapoartele $\frac{l}{h}$ de la 4 pînă la 1. Se poate vedea aici că panta crește — pentru același moment de încastrare, cînd lungimea relativă $\frac{l}{h}$ scade. Se poate însă constata că diferența de nivel între punctul cel mai coborît al fibrei deformate din lunecare și vîrful cocoașei din zona de încastrare este același. Rezultă deci că această diferență de nivel depinde de momentul de încastrare și nu de lungimea relativă. În același timp, variația pantei depinde de forța tăietoare, care pentru a produce același moment de încastrare diferă pentru fiecare lungime relativă $\frac{l}{h}$. Pe baza acelorași date experimentale s-au putut determina săgețile în cazul aceleiași forțe încărcătoare (tăietoare). Diagramele fibrei

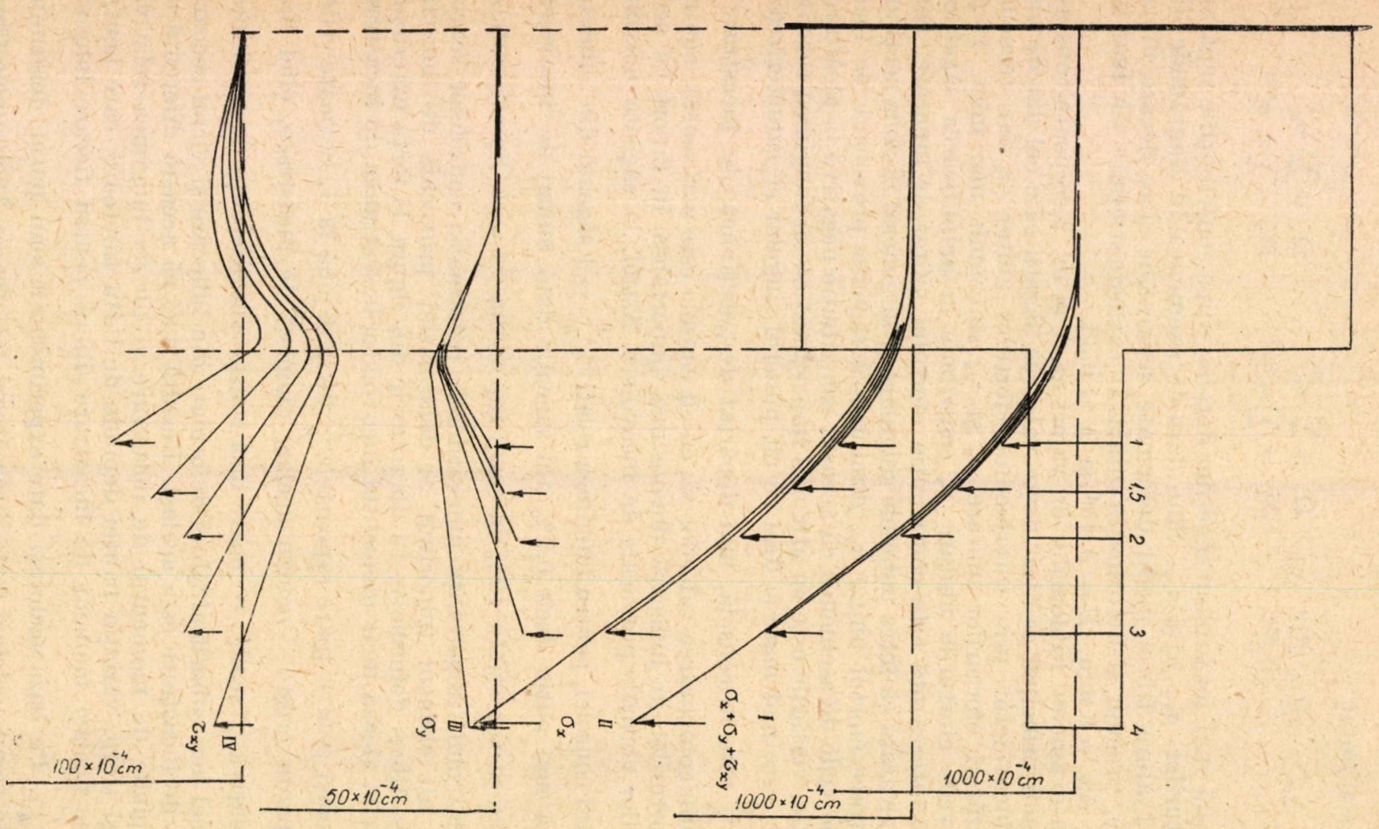


Fig. 11. — Fibra medie deformată. Deformaţia totală şi contribuţia fiecărui efort în parte. Sînt tratate cazurile lungimilor relative $\frac{l}{h}$ = 4, 3, 2, 1, 5 şi 1, 0 cu încărcări ce produc acelaşi moment încovoietor în ,,secţiunea de încastrare''.

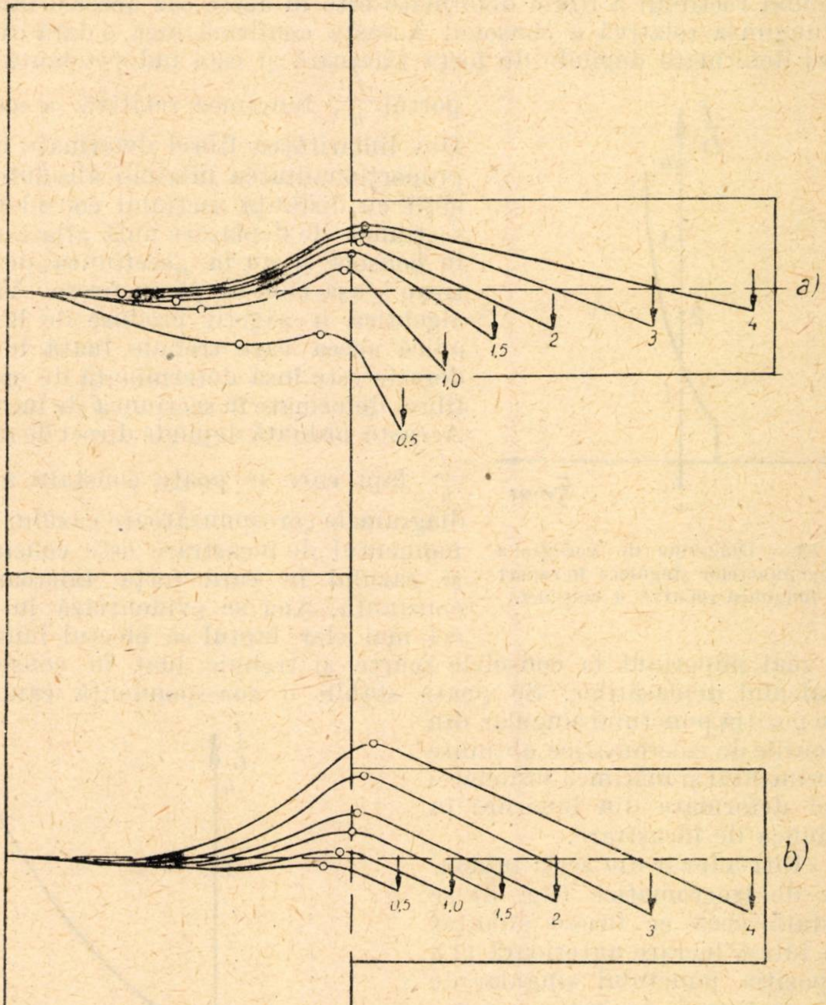

a)
0,5
1,0
1,5
2
3
4
b)
0,5
1,0
1,5
2
3
4

Fig. 12. — Fibra medie deformată din lunecări pentru $\frac{l}{h}=4, 3, 2, 1{,}5$ şi 1. *a*) pentru cazul aceluiași moment încovoietor în „secțiunea de încastrare" ; *b*) pentru aceeași forță tăietoare.

deformate de lunecări sînt date în figura 12 şi se poate vedea că panta porţiunii rectilinii a fibrei deformate este în acest caz aceeaşi indiferent de lungimea relativă a consolei. Aceasta confirmă încă o dată că panta fibrei deformate depinde de forţa tăietoare şi este independentă de raportul $\frac{l}{h}$, lungimea relativă a consolei. Din liniaritatea fibrei deformate decurge proporţionalitatea mărimii absolute a săgeţii cu distanţa secţiunii considerate de secţiunea de deplasare nulă aflată undeva în consolă şi *nu* în „secţiunea de încastrare", aşa cum ar părea firesc. Valoarea algebrică a săgeţii produse de lunecare, adică aceea care trebuie luată în consideraţie este însă determinată de ordonata fibrei deformate în secţiunea de încastrare. Această ordontă depinde direct de raportul $\frac{l}{h}$ fapt care se poate constata atît din diagramele corespunzătoare cazului în care momentul de încastrare este constant cît şi cazului în care forţa tăietoare este constantă. Aici se evidenţiază în modul cel mai clar faptul că efectul lunecărilor este mai important la consolele scurte şi trebuie luat în consideraţie la calculul deplasărilor. Se poate stabili o corespondenţă cantitativă între poziţia punctului singular din tablourile de izocromatice obţinute experimental şi mărimea ordonatei fibrei deformate din lunecare în secţiunea de încastrare.

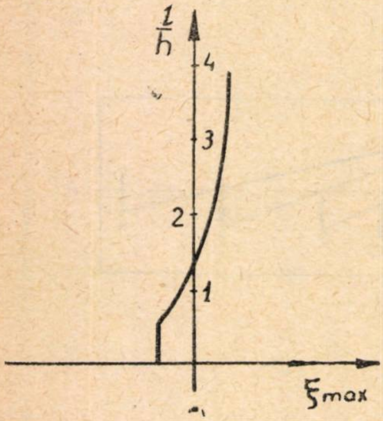


Fig. 13. — Diagrama de variaţie a poziţiei punctelor singulare în raport cu lungimea relativă a consolei.

Într-adevăr din seria tablourilor de izocromatice (fig. 3) se constată, ceea ce fusese enunţat deja într-o lucrare anterioară [1], că poziţia punctului singular de lîngă secţiunea de încastrare variază cu raportul $\frac{l}{h}$.

Diagrama din figura 13 arată că poziţia punctului singular depinde aproximativ parabolic de lungimea relativă a consolei $\frac{l}{h}$. Dacă reprezentăm, tot în funcţie de $\frac{l}{h}$ şi ordonata maximă din preajma secţiunilor de încastrare a fibrei deformate din lunecare (fig.14) capătăm tot o parabolă. Rezultă că se

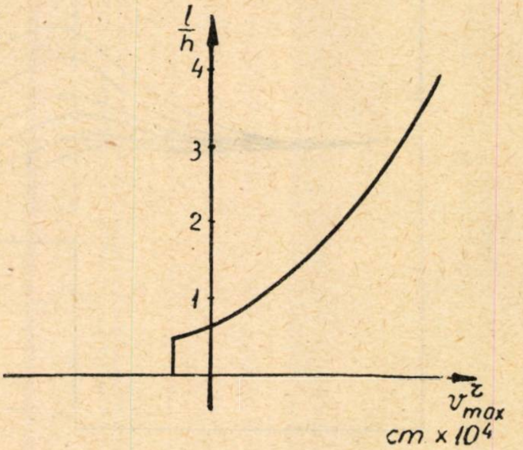


Fig. 14. — Diagrama de variaţie a ordonatei maxime a fibrei deformate din lunecare în funcţie de lungimea relativă a consolei.

poate stabili o corespondență liniară între abscisa punctului singular și mărimea deformației de lunecare din secțiunea de încastrare, deci cu săgeata în orice punct, dacă momentul de încastrare este același. Întradevăr din figura 13 rezultă că

$$\frac{l}{h} - C_1 = K_1(\xi + \xi_0)^2, \tag{22}$$

unde ξ este abscisa punctului singular măsurată din dreptul „secțiunii de încastrare'', C_1 este valoarea raportului $\frac{l}{h}$ pentru care izoclina de 0° se reduce la un punct, cele două puncte singulare se apropie pînă la suprapunere iar domeniul de $\tau_{xy}<0$ dispare. În cazurile tratate $C_1 = \left(\frac{l}{h}\right) \cong 0,5$. Valoarea ξ_0 din paranteză reprezintă abscisa celor două puncte singulare în cazul raportului $\frac{l}{h} = C_1$, cînd ele coincid.

Din diagrama din figura 14 rezultă că :

$$\frac{l}{h} - C_1 = K_2\,(v^{\tau}_{\max})^2, \tag{23}$$

unde $(v^{\tau}_{\max})$ este săgeata maximă în încastrare a fibrei deformate prin lunecare. Coeficienții K_1 și K_2 sînt constante—pentru același moment în încastrare. Din relațiile (22) și (23) rezultă că

$$v^{\tau}_{\max} = C_2\,(\xi + \xi_0) \tag{24}$$

unde $C_2 = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$ și ξ_0 sînt constante.

Se știe că poziția punctelor singulare este independentă de mărimea forțelor într-un sistem dat de solicitare dacă intensitățile lor relative rămîn constante, sau altfel spus dacă rezultanta forțelor active a cărei mărime poate varia, rămîne mereu pe aceeași axă. Aceasta se explică prin faptul că distribuția de eforturi rămîne mereu aceeași, variind în același sens și în același raport cu forțele, doar mărimea absolută a eforturilor unitare. Poziția punctelor singulare, unde $\sigma_1 = \sigma_2$, dintr-un corp elastic, solicitat, depinde de structura sistemului de forțe și de configurația geometrică a corpului.

În cazul de față, fiind vorba de o singură forță aplicată în același mod la capătul unei console, poziția punctelor singulare va depinde exclusiv de lungimea relativă a consolei adică de raportul $\frac{l}{h}$, ceeace s-a verificat experimental [1].

Săgeata $v^{\tau}_{\max}$ depinde însă în mod evident — după cum rezultă din relația (7) — de mărimea eforturilor de lunecare și de constantele fizice ale materialului. Aceste elemente vor intra deci în alcătuirea constantei C_2 din relația (24). Prin intermediul lui τ_{xy} va intra deci și mărimea forței de la capătul consolei. Cum τ_{xy} este proporțional cu mărimea forței, mărimea săgeții va avea expresia

$$v^{\tau}_{\max} = C_3 P (\xi + \xi_0). \tag{25}$$

Săgeata într-un punct oarecare al consolei, aflat la distanța ξ de secțiunea de încastrare, va avea atunci expresia

$$v^{\tau} = v^{\tau}_{\max} - \operatorname{tg} \alpha \cdot x, \tag{26}$$

în conformitate cu figura (15).

Așa cum s-a arătat mai sus, panta porțiunii rectilinii depinde numai de forța tăietoare și deci ținînd seama și de (25) relația (26) devine

$$v^{\tau} = P [C_4 x - C_3 (\xi + \xi_0)]. \tag{27}$$

Se va vedea mai departe că pe baza relației (27) se poate introduce un factor de corecție în formulele referitoare la consola încastrată din teoria elasticității.

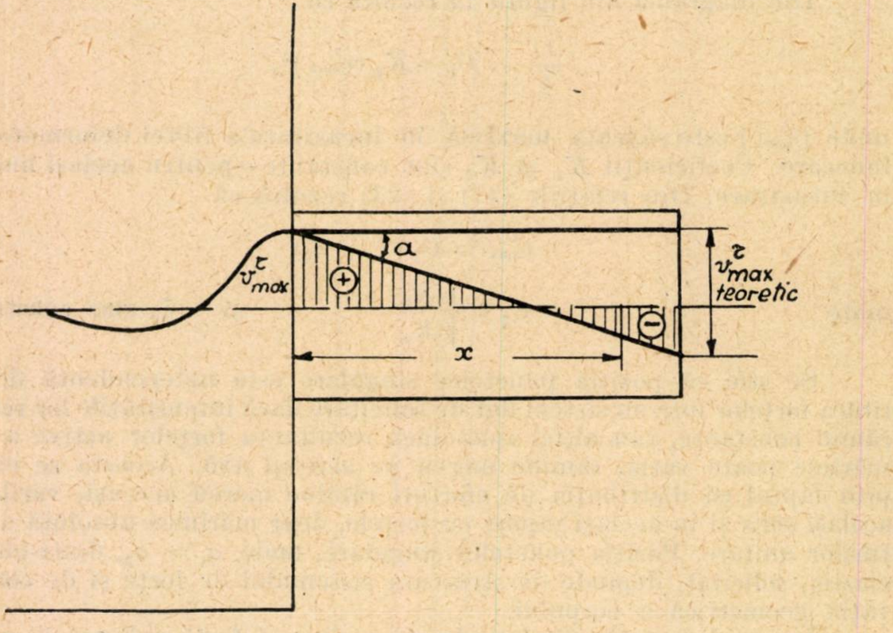


Fig. 15. — Determinarea deformației din lunecare într-un punct oarecare al consolei.

Vom compara acum expresia obținută pentru v^{τ} în relația (27) și cea corespunzătoare din teoria elasticității [4]. Se știe că pentru obținerea expresiei săgeții fibrei medii deformate la o consolă plană se face sau ipoteza că un element al fibrei medii din secțiunea de încastrare nu se rotește sau aceea că un element al secțiunii de încastrare nu se rotește.

În primul caz se obține

$$v_I = \frac{P\cdot x^2\cdot(3\,l - x)}{6\,EI}, \tag{28}$$

iar în al doilea caz

$$v_{II} = \frac{P\,x^2\,(3\,l - x)}{6\,EI} + \frac{3\cdot P\cdot x}{2\,G\cdot b\cdot h}. \tag{29}$$

Primul caz corespunde celui studiat în rezistența materialelor. Cel de-al doilea cuprinde prin primul termen al săgeții contribuția momentului încovoietor și prin cel de-al doilea aceea a forței tăietoare.

Dacă vom considera numai termenul al doilea

$$v^{\tau}_{II} = \frac{3\cdot P\cdot x}{2\,G\cdot b\cdot h}, \tag{30}$$

în care înlocuim

$P\cdot l = M$, momentul de încastrare

$\frac{x}{l} = x_1$, abscisa relativă

pentru $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$

obținem

$$v^{\tau}_{II} = \frac{3\,M}{2\,G\cdot b\cdot h}\,x_1. \tag{31}$$

Vedem că în cazul aceluiași moment de încastrare pentru orice valoare a lungimii relative a consolei săgeata depinde liniar de ordonata relativă și, în particular, săgeata maximă, pentru $x_1 = 1$ este o constantă.

$$v^{\tau}_{II\,\max} = \frac{3\,M}{2\,G\cdot b\cdot h} = \text{const. pentru } M \text{ const.} \tag{32}$$

(menționăm că în experiențele făcute, pentru variația lungimii relative a consolei s-a păstrat constantă înălțimea h a consolei și s-a variat doar lungimea).

Așa cum rezultă din tabloul nr. 3 în care sînt trecute valorile săgeților calculate cu ajutorul formulei de mai sus pentru aceleași cazuri studiate prin fotoelasticimetrie în lucrarea de față, săgeata maximă — la capătul consolei — are o valoare sensibile egală cu proiecția verticală a porțiunii rectilinii a fibrei deformate din diagramele date în figura 11 pentru v^{τ}. Comparînd cele două serii de diagrame (fig.11 și fig. 16) primele obținute experimental și celelalte obținute prin formula de mai sus, se constată că singura lor diferență importantă constă în faptul că cele experimentale sînt translatate pe verticală cu mărimea $v^{\tau}_{\max}$.

Rezultă de aici că expresia (30) trebuie corectată, adăugînd termenul de translație. Din (27) și (30) rezultă că

$$v^{\tau}_{\text{real}} = \frac{3\cdot P}{2\,G\cdot b\cdot h}\,x - C_3\cdot P:(\xi + \xi_0)\,; \tag{33}$$

Tabloul nr. 1

Deplasări pe verticală ale fibrei mediane la consola încastrată într-un mediu elastic cu diferite lungimi relative, toate avînd acelaşi moment încovoietor în secţiunea de încastrare *)

Secţiunea nr. **)	I $\frac{l}{h}=4$				II $\frac{l}{h}=3$				III $\frac{l}{h}=2$				IV $\frac{l}{h}=1{,}5$				V $\frac{l}{h}=1{,}0$			
	$v^{\sigma}x$	$v^{\sigma}y$	$v^{\tau}xy$	v_{I}	$v^{\sigma}x$	v^{σ_3}	$v^{\tau}xy$	v_{II}	$v^{\sigma}x$	$v^{\sigma}y$	$v^{\tau}xy$	v_{III}	$v^{\sigma}x$	$v^{\sigma}y$	$v^{\tau}xy$	v_{IV}	$v^{\sigma}y$	$v^{\sigma}y$	$v^{\tau}xy$	v_{V}
0			−1	−1			−1	−1			−1	−1			−2	−2			−2	−2
1			−1	−1			−2	−2			−2	−2			−3	−3			−5	−5
3	−1		−2	−3	−2		−3	−5	−1		−4	−5	−1		−6	−7	−1		−9	−10
5	−5		−1	−6	−5		−3	−8	−4		−5	−9	−3		−8	−11	−3		−13	−16
7	−8	−1	+2	−7	−8	−1	0	−9	−7	−1	−3	−11	−5	−1	−8	−14	−5	−1	−14	−20
9	−19	−4	+9	−14	−16	−4	+6	−14	−11	−4	+3	−12	−9	−4	−3	−16	−12	−4	−11	−27
11	−44	−8	+24	−28	−34	−7	+21	−20	−25	−8	+16	−17	−20	−8	+10	−18	−25	−8	+1	−32
13	−102	−13	+39	−76	−93	−11	+34	−7	−66	−12	+28	−50	−61	−11	+19	−53	−64	−13	+4	−73
15	−213	−14	+35	−192	−198	−9	+26	−181	−162	−8	+16	−154	−152	−8	+1	−159	−150	−8	−25	−183
17	−371	−12	+28	−355	−352	−6	+15	−343	−309	−4	+2	−311	−311	−4	−18	−333	−290	−2	−55	−347
19	−564	−11	+22	−553	−539	−3	+5	−537	−481	0	−12	−493	−473	+1	−37	−509				
21	−782	−10	+15	−777	−759	−1	−6	−766	−679	+4	−26	−701								
23	−1055	−9	+8	−1056	−1012	+2	−16	−994												
25	−1291	−8	+1	−1298	−1264	+5	−25	−1284												
27	−1365	−7	−5	−1577																
29	−1830	−6	−12	−1848																

---

*) Deplasările sînt date în cm × 10^4.

**) Secţiunile de calcul sînt luate la interval de 5 mm, adică 0,25 h. Secţiunea 13 este „secţiunea de încastrare".

Tabloul nr. 2

Deplasări pe verticală ale fibrei mediane la consola încastrată într-un mediu elastic cu diferite lungimi relative, toate avînd aceleași forțe tăietoare în secțiunea de încastrare *)

Secțiunea nr. **)	I $\frac{l}{h}=4$				II $\frac{l}{h}=3$				III $\frac{l}{h}=2$				IV $\frac{l}{h}=1{,}5$				V $\frac{l}{h}=1{,}0$			
	v^{σ}_{x}	v^{σ}_{y}	v^{τ}	v_{I}	v^{σ}_{x}	v^{σ}_{y}	v^{τ}	v_{II}	v^{σ}_{x}	v^{σ}_{y}	v^{τ}	v_{III}	v^{σ}_{x}	v^{σ}_{y}	v^{τ}	v_{IV}	v^{σ}_{x}	v^{σ}_{y}	v^{τ}	v_{V}
0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0		0	0	0			
1	− 1		− 4	− 5	− 2		− 6	− 8	− 1		− 5	− 6	− 1		− 6	− 5	0		− 5	− 5
3	− 4		− 7	− 11	− 6		− 9	− 15	− 2		− 9	− 11	− 2		−10	− 12	− 1		− 9	− 10
5	− 19	0	− 4	− 23	− 15		− 9	− 24	− 8		−11	− 19	− 5		−13	− 18	− 3		−13	− 16
7	− 33	− 4	+ 8	− 29	− 25	− 3	− 1	− 29	− 14	− 2	− 7	− 23	− 8	− 1	−12	− 21	− 5	− 1	−14	− 20
9	− 77	−14	+ 38	− 53	− 49	−11	+ 18	− 42	− 23	− 7	+ 5	− 25	− 14	− 6	− 4	− 24	− 12	− 4	−11	− 27
11	− 178	−33	+ 99	− 111	− 105	−22	+ 64	− 63	− 52	−17	+34	− 35	− 32	−14	+16	− 30	− 25	− 8	+ 1	− 32
13	− 412	−51	+158	− 305	− 286	−33	+105	− 214	− 137	−24	+58	− 103	− 97	−17	+29	− 85	− 64	− 13	+ 4	− 73
15	− 861	−57	+142	− 776	− 608	−29	+ 81	− 556	− 337	−16	+34	− 319	−241	−12	+ 2	−251	−150	− 8	−25	−183
17	−1500	−49	+115	−1434	−1082	−19	+ 47	−1054	− 642	− 9	+ 4	− 647	−494	− 6	−29	−529	−290	−290	−55	−347
19	−2280	−45	+ 87	−2238	−1658	−10	+ 15	−1653	−1000	0	−25	−1025	−753	+ 2	−59	−814				
21	−3160	−40	+ 60	−3140	−2340	− 2	− 17	−2359	−1430	+ 8	−54	−1476								
23	−4260	−36	+ 33	−4263	−3115	+ 6	− 48	−3157												
25	−5220	−32	+ 6	−5246	−3890	+16	− 78	−3952												
27	−6325	−28	− 22	−6375																
29	−7390	−23	− 49	−7462																

---

*) Deplasările sînt data în cm $\times 10^4$.

**) Secțiunile de calcul sînt luate la interval de 5 mm, adică 0,25 h. Secțiunea 13 este „secțiunea de încastrare".

Tabloul nr. 3

Deplasări pe verticală calculate cu formula

$$v = \frac{Px^2(3l-x)}{6\,EI} + \frac{3Px}{2Gbh}$$

Secțiunea nr. *)	I $\frac{l}{h}=4$			II $\frac{l}{h}=3$			III $\frac{l}{h}=2$			IV $\frac{l}{h}=1{,}5$			V $\frac{l}{h}=1{,}0$		
	v^{σ}	v^{τ}	v^0_{I}	v^{σ}	v^{τ}	v^0_{II}	v^{σ}	v^{τ}	v^0_{III}	v^{σ}	v^{τ}	v^0_{IV}	v^{σ}	v^{τ}	v^0_{V}
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	23	8	31	23	11	23	22	16	38	21	21	42	20	32	52
17	89	16	105	86	21	107	81	32	113	75	43	118	65	64	129
19	191	24	215	181	32	213	164	48	212	145	64	209			
21	323	32	355	301	43	344	258	64	322						
23	478	40	518	436	53	489									
25	653	48	601	580	64	644									
27	840	56	896												
29	1032	64	1096												

*) Notația secțiunilor este făcută la fel ca în tablourile nr. 1 și 2 pentru comparație.

constanta C_3 poate fi determinată din datele experimentale și are dimensiunea F^{-1}. Din (24) rezultă că $C_3 \cdot P$ este invariant și deci ar fi mai indicat să se scrie expresia săgeții astfel

$$v^{\tau}_{\text{real}} = \frac{3\,P}{2\,G\cdot b\cdot h}\,x - C_2\,(\xi + \xi_0), \qquad (34)$$

unde $C_2 = \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}$,

iar K_1 și K_2 sînt parametrii parabolelor (22) și (23) determinate experimental. În cazul nostru $K_1 = 16\ \text{mm}^{-2}$, $K_2 = 22\ \text{mm}^{-2}$ și deci $C_2 = 0{,}824$. De sigur că aceste constante depind de constantele fizice ale materialului și de rigiditatea mediului de încastrare.

În cazul consolelor fără racordări ca cele studiate aici, mărimea $(\xi + \xi_0)$ poate fi înlocuită cu valoarea ei în funcţie de lungimea relativă $\frac{l}{h}$ în conformitate cu relaţia (22) sau (23). În acest caz expresia (34) devine

$$v^{\tau}_{\text{real}} = \frac{3\,P}{2\,G \cdot b \cdot h}\,x - C_5 \sqrt{\frac{l}{h} - C_1}\,, \tag{35}$$

unde $C_5 = \frac{1}{\sqrt{K_2}}$.

Această relaţie ne dă valoarea cea mai apropiată de realitate pentru săgeata produsă de lunecare cu condiţia cunoaşterii constantei C_5 respectiv K_2. Experienţe cu diferite materiale ar putea să ne dea valoarea constantei sub forma

$$C_5 = \frac{C_6}{G \cdot b} = C_6\,\frac{2\,(1 + \mu)}{E \cdot b}\,, \tag{36}$$

unde C_6 este independentă de constantele elastice şi nu are dimensiuni.

Avantajul expresiei (34) constă în faptul că ea este valabilă pentru orice fel de console simetrice nu numai la cele fără racordări căci poziţia punctelor singulare se poate determina fotoelastic, cu uşurinţă.

Menţionăm că formula săgeţii indicată mai sus (34) sau (35) mai reprezintă totuşi o anumită aproximaţie. Într-adevăr din diagramele fibrelor mediane deformate din pricina lunecării se vede că vîrful cocoaşei este însoţit de o convexitate care modifică întrucîtva panta. Pe de altă parte vîrful cocoaşei şi deci ordonata maximă nu se găseşte chiar în „secţiunea de încastrare" ci mai în consolă sau mai în interiorul mediului de încastrare, după cum raportul $\frac{l}{h}$ este mai mare sau mai mic decît 1,5. De asemenea expresia nu este valabilă pentru valori ale raportului $\frac{l}{h} < C_1$ cînd termenul aditiv devine imaginar. Pentru domeniul de variaţie al lungimii relative a consolei în care

$$0 \leqslant \frac{l}{h} < C_1$$

trebuie efectuat un studiu aparte iar condiţiile de experimentare trebuiesc adaptate în consecinţă dat fiind apropierea secţiunii de încastrare de linia de acţiune a forţei exterioare. Din încercările preliminare făcute pentru raportul $\frac{l}{h} = 0{,}5$ se pare că termenul (30) este aici prea mic şi trebuie *corectat în plus.*

Pe baza rezultatelor experimentale obţinute se poate proceda şi la o corectare a termenului ce compune săgeata şi care este determinat de încovoiere. Într-adevăr este dată în figura 16 diagrama diferenţelor dintre săgeata obţinută prin determinările experimentale şi cea obţinută cu

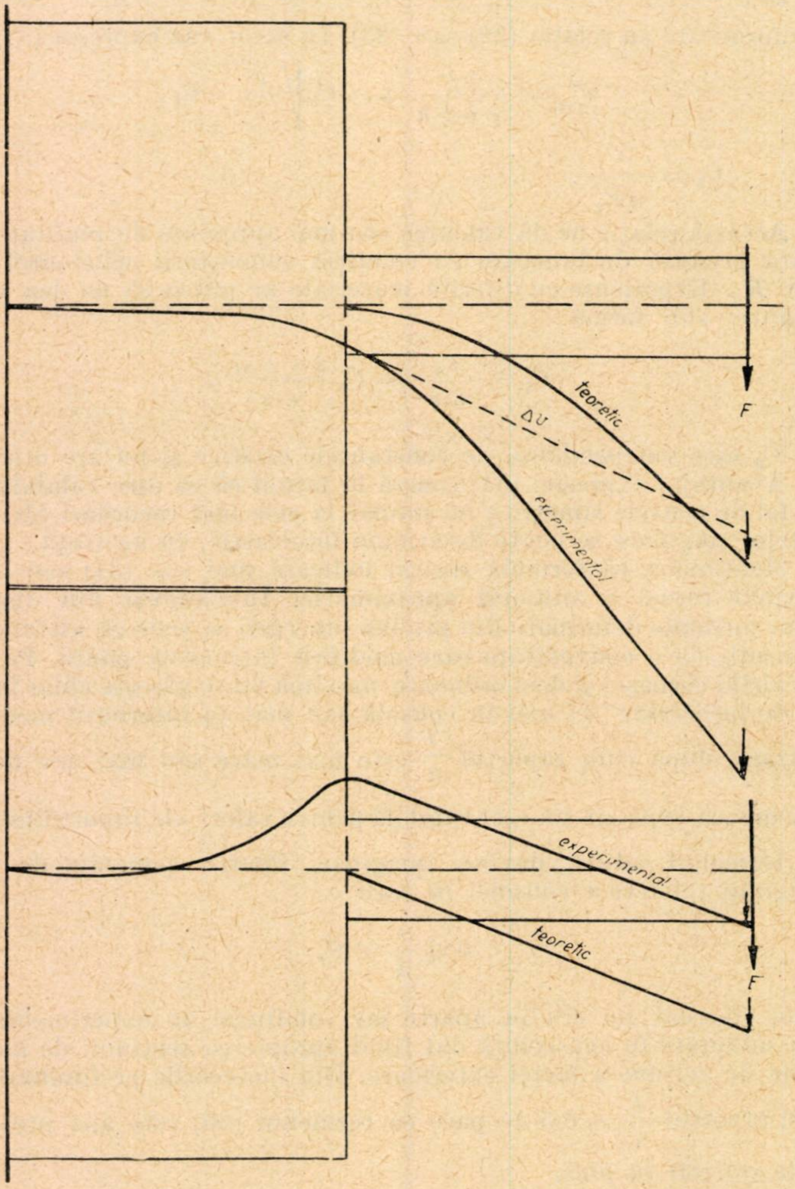

teoretic
F
Δv
experimental
experimental
teoretic
F

Fig. 16. — Comparaţie între fibra medie deformată obţinută experimental şi cea dedusă pe cale teoretică.

formula (28). Se vede că aceste diferențe au o variație liniară. Rezultă deci că săgeata reală produsă de încovoiere va avea expresia

$$v^{\sigma}_{\text{real}} = \frac{P\cdot x^{2}\cdot(3\,l - x)}{6\,EI} + C_{7}\,(x_{0} + x), \tag{37}$$

unde C_7 este un coeficient fără dimensiune. Ca și în cazul lunecărilor acest coeficient poate fi evaluat din determinările experimentale.

Termenul suplimentar introdus mai sus corespunde unei rotații în încastrare și desigur că mărimea lui va depinde de constantele elastice ale mediului de încastrare. Din compararea tablourilor nr. 1 și 2 se poate vedea că această rotație a încastrării este aceeași — la moment de încastrare constant — și deci independentă de lungimea relativă a consolei sau separat, de forța tăietoare.

Făcîndu-se diferențele între săgețile reale și cele calculate cu expresia (28) s-a constatat că la toate valorile $\frac{l}{h}$ considerate, coeficientul C_7 era aproximativ constant. Rezultă deci că mărimea momentului de încastrare și constantele elastice ale mediului vor determina mărimea constantei C_7.

CONCLUZII

În lucrarea de față se studiază cu ajutorul fotoelasticimetriei deformațiile la o consolă încastrată într-un mediu elastic cu aceleași constante elastice ca și ale consolei — consola și mediul de încastrare alcătuind un tot unitar — și încărcată cu o forță uniform repartizată pe marginea de la capătul consolei.

Pe baza datelor experimentale, se determină cu deosebire în zona așa numitei „secțiuni de încastrare", eforturile unitare și, cu ajutorul lor, prin intermediul unei formule corespunzătoare acestui scop și prezentate aici, se evaluează deformația pe care o suferă fibra mediană.

Determinîndu-se contribuțiile fiecărui efort în parte la deformația pe verticală se studiază influența pe care o au asupra deformației : momentul încovoietor, forța tăietoare și lungimea relativă a consolei și apoi se compară valorile obținute pe baza datelor experimentale cu cele ce se obțin cu ajutorul formulelor corespunzătoare din teoria elasticității.

Din cele prezentate mai sus, se desprind o serie de concluzii, dintre care mai importante sînt următoarele :

1. La deformarea consolei studiate contribuția cea mai importantă o au eforturile normale paralele cu direcția axei consolei (σ_x). Totuși, și celelalte eforturi normale (σ_y) perpendiculare pe axa consolei, precum și mai ales eforturile unitare tangențiale (σ_{xy}) contribuie și ele într-o măsură însemnată la deformare.

2. Deformarea produsă de eforturile σ_x cuprind ca un prim termen expresia săgeții cunoscute din rezistența materialelor, la care se mai adaugă un al doilea termen, amplificator, ce exprimă rotația din încastrare, datorită elasticității mediului de încastrare. Această rotație, nu depinde

separat de lungimea consolei, sau de mărimea forței tăietoare ci de produsul lor, sau mai simplu exprimat de momentul încovoetor în „secțiunea de încastrare” și de constantele elastice ale mediului.

3. Eforturile unitare normale σ_y contribuie în general la amplificarea săgeții. Contribuția lor este importantă mai ales în zona încastrării, unde — pentru același moment de încastrare — ea are aceeași valoare indiferent de lungimea consolei. Contribuția sa procentuală — în zona încastrării — în raport cu aceea a efortului σ_x atinge 20% la $\frac{l}{h} = 1$. Efectul său la capătul liber al consolei este neglijabil fiind sub 1%.

4. Eforturile unitare tangențiale τ_{xy}, *micșorează* deformația produsă de eforturile unitare normale în zona „secțiunii de încastrare” atît în consolă cît și în mediul de încastrare. Această reducere este cuprinsă între 30—40% din deformația dată de σ_x în cazurile considerate. La capătul liber această amplificare variază cu $\frac{l}{h}$ de la 0,7% pentru $\frac{l}{h} = 4$ pînă la 19% pentru $\frac{l}{h} = 1$.

Contribuția negativă — de micșorare a săgeții — favorabilă din punct de vedere practic, depinde de lungimea relativă a consolei, $\frac{l}{h}$ este cu atît mai importantă cu cît $\frac{l}{h}$ este mai mare. Cînd există această contribuție negativă la deformație, adică pentru $\frac{l}{h} > 0{,}5-0{,}7$ contribuția lunecărilor este mai mică decît aceea ce rezultă din formula dată în teoria elasticității care este deci acoperitoare. Pentru $\frac{l}{h} < 0{,}5-0{,}7$ contribuția lunecărilor este mai mare decît aceea dată de formula menționată, care dă valori inferioare celor reale.

Micșorarea provocată de lunecări în deplasarea pe verticală, este maximă în punctul singular, în jurul căruia există o zonă de maxim cu variații mici. Cînd punctul singular se găsește în consolă — pentru $\frac{l}{h} > 1{,}5$ — aceasta are un efect favorabil din punct de vedere practic asupra deformației consolei, ceea ce nu mai este cazul pentru $\frac{l}{h} < 1{,}5$. Cînd valoarea maximă a micșorării nu este în consolă ci în mediul de încastrare și are o importanță mai redusă.

De aceea, poziția punctelor singulare are o deosebită importanță cu privire la comportarea consolelor la deformare și caracterizează lungimea relativă a ei din acest punct de vedere.

5. Expresia deformației consolei dată în lucrare, ameliorează formula existentă în teoria elasticității pentru cazurile studiate, deoarece ține seama atît de rotația din încastrare, cît și de contribuția reală a lunecărilor.

Primită la redacție la 13 iulie 1957.

ДЕФОРМАЦИИ ЗАЩЕМЛЕННОЙ В УПРУГОЙ СРЕДЕ КОНСОЛИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Исследуются при помощи фотоэластометрии деформации консоли, защемленной в упругую среду, обладающую теми же постоянными упругости, что и консоль (консоль и среда защемления представляют единое целое), и равномерно нагруженной на краю у конца консоли.

На основании экспериментальных данных определяются единичные усилия, в особенности в зоне так называемого «сечения защемления», и при помощи этих усилий посредством приведенной здесь формулы вычисляются деформации среднего волокна консоли.

Определяется степень участия каждого усилия в отдельности в деформации по вертикали, рассматривается оказываемое на деформацию влияние изгибающего момента, срезывающей силы и относительной длины консоли, и сравниваются величины, полученные на основании экспериментальных данных, с величинами, вычисленными при помощи соответствующих формул из теории упругости.

Приводится улучшенная по сравнению с формулой из теории упругости формула для вычисления деформации рассматриваемой консоли.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — Защемленная консоль. Схема использованной модели.

Рис. 2. — Способ защемления. *a* — загруженная модель; *b* — распределение нагрузки.

Рис. 3. — Изохроматические линии у защемленной консоли. Отношение $\frac{l}{h}$ имеет значение 4, 3, 2, 1,5 и 1.

Рис. 4. — Изоклины для защемленной консоли. Отношение $\frac{l}{h}$ имеет значения 4, 3, 2, 1,5 и 1.

Рис. 5. — Продольные диаграммы для τ_{xy} вдоль 10 равноотстоящих уровней параллельных средней оси.

Рис. 6. — Продольные диаграммы для σ_x здоль 10 равноотстоящих уровней, параллельных средней оси и находящихся в нижней половине консоли.

Рис. 7. — Продольные диаграммы для σ_y вдоль 10 равноотстоящих уровней, параллельных средней оси и находящихся в нижней половине консоли.

Рис. 8. — Продольные диаграммы для σ_1 вдоль 10 равноотстоящих уровней, параллельных средней оси и находящихся в нижней половине консоли.

Рис. 9. — Продольные диаграммы для σ_2 вдоль 10 равноотстоящих уровней, параллельных средней оси и находящихся в нижней половине консоли.

Рис. 10. — Направление усилий в консоли. *a* — направление сдвигающих усилий в сечении консоли; *b* — состояние напряжения в одном элементе.

Рис. 11. — Среднее деформированное волокно. Общая деформация и степень участия в ней каждого усилия в отдельности. Рассмотрены случаи различной относительной длины $\frac{l}{h}$ = 4, 3, 2, 1,5 и 1 с нагрузками, создающими один и тот же изгибающий момент в «сечении защемления».

Рис. 12. — Среднее деформированное от сдвига волокно для $\frac{l}{h}$ = 4, 3, 2, 1,5 и 1. *a* — при одном и том же изгибающем моменте в «сечении защемления»; *b* — при одной и той же срезывающей силе.

Рис. 13. — Диаграмма изменений положения отдельных точек в соответствии с относительной длиной консоли.

Рис. 14. — Диаграмма изменений максимальной ординаты деформированного от сдвига волокна в зависимости от относительной длины консоли.

Рис. 15. — Определение деформации от сдвига в какой-либо точке консоли.

Рис. 16. — Сравнение между деформированным средним волокном, полученным опытным путем, и вычисленным теоретически.

DÉFORMATION D'UNE CONSOLE ENCASTRÉE DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE

(RÉSUMÉ)

Dans ce travail, on étudie à l'aide de la photoélasticimétrie, les déformations d'une console encastrée dans un milieu élastique, qui ont les mêmes constantes élastiques que la console — la console et le milieu élastique constituant un tout unitaire — et chargée d'une force uniformément répartie sur les bords de l'extrémité libre de la console.

En vertu des données expérimentales on détermine, en particulier dans la zone dite «section d'encastrement», les efforts unitaires et, à l'aide de ceux-ci, par l'intermédiaire d'une formule adéquate et qu'on présente ici, on évalue les déformations subies par la fibre médiane.

Ayant déterminé les contributions partielles de chaque effort, à la déformation sur la verticale, on étudie l'influence qu'ont sur la déformation : le moment fléchissant, l'effort tranchant et la longueur relative de la console ; on compare ensuite les valeurs obtenues en raison des données expérimentales, avec celles qu'on obtient à l'aide des formules respectives de la théorie de l'élasticité.

En conclusion, on présente une formule améliorée, par rapport à celle de la théorie de l'élasticité, pour évaluer la déformation de la console étudiée.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — Console encastrée. Schéma du modèle utilisé.

Fig. 2. — Dispositif d'encastrement. *a*) modèle sous charge ; *b*) joug de répartition de la force.

Fig. 3. — Isochromatiques de la console encastrée. Le rapport $\frac{l}{h}$ a comme valeurs 4, 3, 2, 1,5, et 1,0.

Fig. 4. — Isoclines de la console encastrée. Le rapport $\frac{l}{h}$ a comme valeurs 4, 3, 2, 1,5 et 1.

Fig. 5. — Diagrammes longitudinaux pour τ_{xy} le long de 10 niveaux équidistants, parallèles à l'axe médian.

Fig. 6. — Diagrammes longitudinaux pour σ_x le long de 10 niveaux équidistants, parallèles à l'axe médian et se trouvant dans la moitié inférieure de la console.

Fig. 7. — Diagrammes longitudinaux pour σ_y le long de 10 niveaux équidistants, parallèles à l'axe médian et se trouvant dans la moitié inférieure de la console.

Fig. 8. — Diagrammes longitudinaux pour σ_1 le long de 10 niveaux équidistants parallèles à l'axe médian et se trouvant dans la moitié inférieure de la console.

Fig. 9. — Diagrammes longitudinaux pour σ_2 le long de 10 niveaux équidistants, parallèles à l'axe médian et se trouvant dans la moitié inférieure de la console.

Fig. 10. — Sens des efforts dans la console. *a*) sens des efforts de glissement dans une section de la console ; *b*) état des efforts dans un élément.

Fig. 11. — Fibre moyenne déformée. Déformation totale et contribution partielle de chaque effort. Sont traités les cas des longueurs relatives $\frac{l}{h} = 4, 3, 2, 1{,}5$ et 1,0 pour des charges qui provoquent le même moment fléchissant dans la „section d'encastrement".

Fig. 12. — Fibre moyenne déformée par glissements pour $\frac{l}{h} = 4, 3, 2, 1{,}5$ et 1. : *a*) pour le cas du même moment fléchissant dans la „section d'encastrement" ; *b*) le même effort tranchant.

Fig. 13. — Diagramme de variation de la position des points singuliers par rapport à la longueur relative de la console.

Fig. 14. — Diagramme de variation de l'ordonnée maximum de la fibre déformée par glissement en fonction de la longueur relative de la console.

Fig. 15. — Détermination de la déformation par glissement dans un point quelconque de la console.

Fig. 16. — Comparaison entre la fibre moyenne déformée, obtenue expérimentalement et celle déduite par voie théorique.

BIBLIOGRAFIE

1. Eduard Nicolau, *Cu privire la influența unui mediu de încastrare elastic, asupra distribuției tensiunilor într-o consolă încastrată.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, 1957, p. 525.
2. M. M. Frocht, *Photoelasticity*, John Willey, New York, 1941, vol I.
3. M. Arcan și Ed. Nicolau, *Metodă grafică pentru separarea tensiunilor principale în fotoelasticitate.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VI, nr. 3—4, 1955, p. **391.**
4. S. P. Timoshenko, *Theory of elasticity.* Mc. Graw-Hill, New York, 1934.

ELASTICITATE—REZISTENȚA MATERIALELOR

O METODĂ PENTRU CALCULUL ÎNVELITORILOR CILINDRICE DE SECȚIUNE CIRCULARĂ CU ORTOTROPIE DE MATERIAL

DE

CRISTIAN STĂNESCU și VIOREL VISARION

1. INTRODUCERE

În cele ce urmează ne propunem să dăm o metodă pentru calculul învelitorilor cilindrice de secțiune circulară luînd în considerare ortotropia de material.

Procedeul expus se bazează pe determinarea unei funcții complexe de tensiune din care se obțin, prin operații elementare, eforturile și deplasările.

În acest scop este utilizată analogia statico-geometrică extinsă într-o lucrare anterioară [1] pentru învelitorile elastice subțiri cu ortotropie de material.

Metoda expusă acoperă toate domeniile de utilizare a cilindrilor și permite, în particular, studiul cilindrilor decupați după generatoare.

2. CONSIDERENTE GEOMETRICE. NOTAȚII

Vom considera că suprafața mediană este un cilindru circular de ecuație

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

R fiind raza de curbură a secțiunii circulare (fig.1).

Referim suprafața mediană la un sistem de coordonate intrinseci α, β

$$x = R\cos\frac{\alpha}{R}, \qquad y = R\sin\frac{\alpha}{R},$$

$$z = \beta$$

liniile $\beta = ct.$ fiind cercuri obținute prin secțiunea dreaptă a cilindrului, iar liniile $\alpha = ct.$ generatoare. Se poate arăta cu ușurință că cele două familii de curbe coordonate α, β sînt de curbură principală.

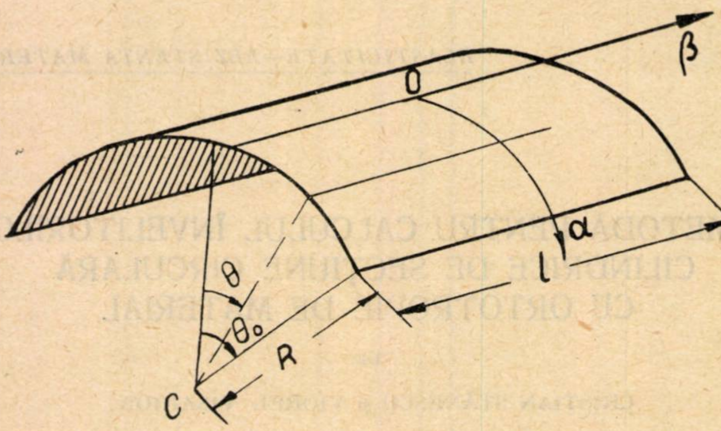


Fig. 1

Este interesant de remarcat că liniile $\alpha = ct.$ sînt și linii asimptotice, fapt ce imprimă proprietăți speciale învelitorilor cilindrice, care au o

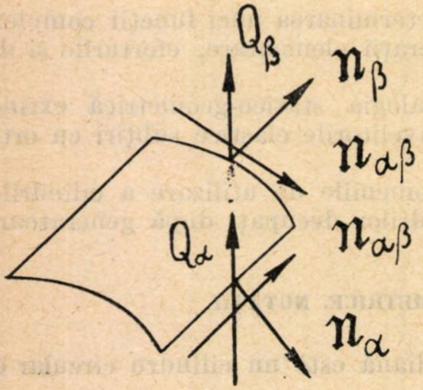


Fig. 2

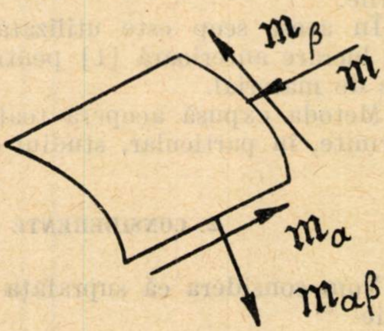


Fig. 3

porțiune de contur coincizînd sau fiind numai tangentă la una din generatoare.

În cele ce urmează au fost folosite următoarele notații (fig. 1, 2, 3)

$2h$ — grosimea învelitorii,

l — lungimea învelitorii,

$\theta = \frac{\alpha}{R}$ — unghiul la centru, definind poziția unui punct curent al suprafeței mediane,

E_α, E_β, G — moduli de elasticitate,

μ_α, μ_β — coeficienții de contracție transversală pe direcțiile β și α,

k — constantă adimensională definită prin relația :

$$G = k \frac{\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{2\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right)},$$

$\mathcal{N}_\alpha, \mathcal{N}_\beta$ — forțe axiale,

$\mathcal{N}_{\alpha\beta}, \mathcal{N}_{\beta\alpha}$ — forțe de lunecare,

Q_α, Q_β — forțe tăietoare,

$\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta$ — momente încovoietoare,

$\mathcal{M}_{\beta\alpha}, \mathcal{M}_{\beta\alpha}$ — momente de răsucire,

$(X, Y, -Z)$ — componentele sarcinii exterioare,

$U\,(u, v, -w)$ — vectorul deplasării elastice,

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — alungirile relative ale suprafeței mediane după direcțiile α și β,

ω — deformație unghiulară a suprafeței mediane,

χ_1, χ_2 — deformații de încovoiere,

τ — deformația de torsiune,

$C = \varphi + i\psi$ — funcția complexă de tensiune.

În cursul calculului apar anumite expresii constante, care au fost notate astfel

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l},$$

$$c_3 = \frac{h}{\sqrt{3\left(1 - \mu_\alpha \mu_\beta\right)}},$$

$$c_1 = c_3 \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}},$$

$$c_2 = c_3 \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}},$$

$$\rho_1 = \frac{1}{k}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right) + k\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right),$$

$$\rho_2 = \frac{1}{k}\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right) - k\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right),$$

$$\eta = \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta} - \frac{\rho_2}{2},$$

$$A_n = -\left(\rho_1 \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} - \frac{1}{R^2 \lambda_n^2}\right),$$

$$B_n = \left(\sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} - \frac{\rho_1}{2} \cdot \frac{1}{R^2 \lambda_n^2}\right) \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}},$$

$$C_n = \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} \cdot \frac{1}{R c_3 \lambda_n^2},$$

$$D = 2\eta \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}},$$

$$E_n = \frac{D}{2 R^2 \lambda_n^2}.$$

3. ECUAŢII. EFORTURI COMPLEXE

Scriind ecuaţiile de proiecţie de forţe şi de momente în lungul liniilor α, β şi a normalei la suprafaţa mediană, rezultă sistemul de ecuaţii de echilibru :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{N}_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{N}_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - \frac{Q_\alpha}{R} + X = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{N}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{N}_\beta}{\partial \alpha} + Y = 0,\\
&\frac{\mathcal{N}_\alpha}{R} + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial Q_\beta}{\partial \beta} + Z = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{M}_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} - \frac{\partial \mathcal{M}_\beta}{\partial \beta} + Q_\beta = 0,\\
&\frac{\partial \mathcal{M}_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\beta\alpha}}{\partial \beta} - Q_\alpha = 0,\\
&\mathcal{N}_{\alpha\beta} + \mathcal{N}_{\beta\alpha} = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

căruia îi ataşăm ecuaţia suplimentară [2] sub forma :

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} + \mathfrak{M}_{\beta\alpha} = 0. \tag{3.2}$$

Ecuaţiilor (3.1) şi (3.2) le asociem sistemul ecuaţiilor de continuitate a deformaţiei obţinute prin particularizare din cel general, dat în lucrarea [2].

Exprimînd deformaţiile în funcţie de eforturi cu ajutorul legii lui Hooke, în forma dată în lucrarea [1], se obţin ecuaţiile de continuitatea deformaţiei în eforturi

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-\frac{3}{2h^3 E_\beta}(\mathfrak{M}_\beta - \mu_\beta \mathfrak{M}_\alpha)\right] - \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{3\left(1 + \sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}\right)\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{2k\sqrt{E_\alpha E_\beta}\, h^3}\right] + \frac{\zeta_2}{R} = 0,$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[-\frac{3\left(1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right)\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{2k\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,h^3}\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[-\frac{3}{2h^3E_\alpha}\left(\mathfrak{M}_\alpha-\mu_\alpha\mathfrak{M}_\beta\right)\right]=0,\\
\frac{1}{R}\left[-\frac{3}{2h^3E_\beta}\left(\mathfrak{M}_\beta-\mu_\beta\mathfrak{M}_\alpha\right)\right]-\frac{\partial\zeta_2}{\partial\alpha}+\frac{\partial\zeta_1}{\partial\beta}=0, \qquad (3.3)\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{\left(1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right)\mathfrak{N}_{\alpha\beta}}{2k\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,h}\right]-\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{1}{2hE_\alpha}\left(\mathfrak{N}_\alpha-\mu_\alpha\mathfrak{N}_\beta\right)\right]+\zeta_1=0,\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{1}{2hE_\beta}\left(\mathfrak{N}_\beta-\mu_\beta\mathfrak{N}_\alpha\right)\right]-\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\left(1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right)\mathfrak{N}_{\alpha\beta}}{2k\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,h}\right]+\zeta_2=0.
\end{gathered}
$$

Analogia statico-geometrică [1] ne sugerează introducerea următoarelor eforturi complexe

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha&=\mathfrak{N}_\alpha+\frac{i}{c_1}\cdot\frac{\mathfrak{M}_\beta-\mu_\beta\mathfrak{M}_\alpha}{1-\mu_\alpha\mu_\beta},\\
\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta&=\mathfrak{N}_\beta+\frac{i}{c_2}\cdot\frac{\mathfrak{M}_\alpha-\mu_\alpha\mathfrak{M}_\beta}{1-\mu_\alpha\mu_\beta},\\
\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}&=\mathfrak{N}_{\alpha\beta}+\frac{i}{c_3k}\cdot\frac{\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}}, \qquad (3.4)\\
\widetilde{Q}_\alpha&=Q_\alpha+i\,2c_3h\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,\zeta_2,\\
\widetilde{Q}_\beta&=Q_\beta-i\,2c_3h\sqrt{E_\alpha E_\beta}\,\zeta_1,
\end{aligned}
$$

precum și a următoarelor eforturi complexe complementare

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha&=\mathfrak{M}_\alpha-ic_2\left(\mathfrak{N}_\beta-\mu_\beta\mathfrak{N}_\alpha\right),\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta&=\mathfrak{M}_\beta-ic_1\left(\mathfrak{N}_\alpha-\mu_\alpha\mathfrak{N}_\beta\right), \qquad (3.5)\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}&=\mathfrak{M}_{\alpha\beta}-ic_3\frac{1+\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}}{k}\mathfrak{N}_{\alpha\beta},
\end{aligned}
$$

care sînt invariate *) de anologia statico-geometrică pentru învelitori ortotrope.

Eforturile complexe complementare nu sînt independente, ele putînd fi exprimate în funcție de eforturile (3.4) prin relațiile

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha&=-ic_2\left(\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta-\mu_\beta\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_\alpha\right), \quad {}^{**)}\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta&=-ic_1\left(\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha-\mu_\alpha\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_\beta\right), \qquad (3.6)\\
\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}&=-\frac{ic_3}{2}\left(\rho_1\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}+\rho_2\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_{\alpha\beta}\right).
\end{aligned}
$$

---

*) Aceste eforturi transpuse prin „dicționarul” stabilit de analogie și **utilizînd legea** lui Hooke se reproduc amplificate cu coeficienți constanți.

**) $\bar{\widetilde{\mathfrak{N}}}_\alpha$ este conjugatul lui $\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha$.

Eforturi complexe pentru cazul izotrop au fost utilizate de V. V. Novojilov în lucrarea [3].

Amplificînd ecuaţiile sistemului (3.3) cu

$$-i\frac{2h^2\sqrt{E_\alpha E_\beta}}{\sqrt{3(1-\mu_\alpha\mu_\beta)}}$$

adunîndu-le cu ecuaţiile de echilibru (3.1) şi utilizînd eforturile introduse anterior, se obţine următorul sistem de ecuaţii :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\frac{\widetilde{Q}_\alpha}{R}+X=0,\\
&\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta}{\partial\beta}+Y=0,\\
&\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{R}+\frac{\partial\widetilde{Q}_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{Q}_\beta}{\partial\beta}+Z=0,\\
&\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta}{\partial\beta}+\widetilde{Q}_\beta=0,\\
&\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\widetilde{Q}_\alpha=0.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

Se observă, după cum indică analogia statico-geometrică că acest sistem este identic ca formă cu sistemul ecuaţiilor de echilibru (3.1).

4. FUNCŢIA DE TENSIUNE. EXPRESIILE EFORTURILOR

Eliminînd eforturile complexe $\widetilde{Q}_\alpha$, $\widetilde{Q}_\beta$ cu ajutorul ultimelor două ecuaţii din sistemul (3.7) se obţine sistemul :

$$\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right)+X=0,\tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}+\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta}{\partial\beta}+Y=0,\tag{4.2}$$

$$\frac{\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha}{R}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_\alpha}{\partial\alpha}-\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_\beta}{\partial\beta}-\frac{\partial\widetilde{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha}\right)+Z=0.\tag{4.3}$$

Ecuaţia (4.2) este satisfăcută identic, prin introducerea unei funcţii complexe $C(\alpha,\beta)$, după cum urmează :

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_{\alpha\beta}=-\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha\partial\beta}\tag{4.4}$$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_\beta=\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}-\int Y d\beta\,.\tag{4.5}$$

Utilizînd ecuația (4.1) și relațiile (3.6), (4.4), (4.5) se obține, cu precizia proprie teoriei învelitorilor elastice subțiri *), următoarea expresie pentru $\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha$

$$\widetilde{\mathfrak{N}}_\alpha = \left(1 - i\,\frac{c_3\rho_1}{2R}\right)\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} + i\,\frac{c_3\eta}{R}\,\frac{\partial^2\overline{C}}{\partial\beta^2} - i\,\frac{c_2}{R}\,\frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2} + \\ + \frac{ic_2}{R}\int Y d\beta - \left(1 + i\,\frac{c_2\mu_\beta}{R}\right)\int X d\alpha. \tag{4.6}$$

În modul acesta ecuațiile (4.1) și (4.2) sînt identic verificate. Ecuația pe care trebuie să o satisfacă funcția C, se obține introducînd în (4.3) eforturile complexe (4.4), (4.5) și (4.6). Rezultă astfel

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 C}{\partial\beta^2} - \frac{ic_3}{R}\left\{PC - 2\eta\,\frac{\partial^4\overline{C}}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{1}{R^2}\left[QC - \eta\,\frac{\partial^2\overline{C}}{\partial\beta^2}\right]\right\} = \\ = -\frac{Z}{R} + \frac{1}{R^2}\left(1 + i\,\frac{c_2\mu_\beta}{R}\right)\int X d\alpha - i\,\frac{c_2}{R^3}\int Y d\beta - \\ - \frac{i}{R}\left[c_1\int\frac{\partial^2 X}{\partial\beta^2}\,d\alpha + c_2\int\frac{\partial^2 Y}{\partial\alpha^2}\,d\beta - c_3\sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\left(\frac{\partial X}{\partial\alpha} + \frac{\partial Y}{\partial\beta}\right)\right] \tag{4.7}$$

unde P și Q sînt operatorii diferențiali avînd forma

$$P = \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + \rho_1\,\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\cdot\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}, \\ Q = \frac{\rho_1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}. \tag{4.8}$$

Se pot deduce acum expresiile forțelor și momentelor în funcție de $\varphi = Re\ C$ și $\psi = Im\ C$. Este suficient să utilizăm relațiile (4.4), (4.5), (4.6) precum și relațiile (3.4) de definiție a eforturilor complexe.

În modul acesta, prin operații elementare, se ajunge la următorul rezultat

$$\mathfrak{N}_\alpha = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + \frac{c_3}{R}\left(\frac{\rho_1}{2} + \eta\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{c_2}{R}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} - \int X d\alpha \tag{4.9}$$

$$\mathfrak{N}_\beta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} - \int Y d\beta \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{N}_{\alpha\beta} = -\,\mathfrak{N}_{\beta\alpha} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} \tag{4.11}$$

$$\mathfrak{M}_\alpha = c_1\mu_\alpha M + c_2 N \tag{4.12}$$

$$\mathfrak{M}_\beta = c_1 M + c_2\mu_\beta N \tag{4.13}$$

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = -\,\mathfrak{M}_{\beta\alpha} = -\,c_3 k\left(1 - \sqrt{\mu_\alpha\mu_\beta}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha\,\partial\beta}, \tag{4.14}$$

---

*) Neglijînd termenii de ordinul $\frac{h^2}{R^2}$ față de 1.

unde

$$M = \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} + \frac{c_3}{R}\left(\eta - \frac{\rho_1}{2}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} - \frac{c_2}{R}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \frac{c_2}{R}\int Y d\beta - \frac{c_2\mu_\beta}{R}\int X d\alpha, \tag{4.15}$$

$$N = \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}. \tag{4.16}$$

Mai sînt necesare, în scrierea condițiilor la limită, forțele tăietoare generalizate. Ele sînt date de

$$R_\alpha = Q_\alpha + \frac{\partial\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial\beta} = c_1\mu_\alpha\frac{\partial M}{\partial\alpha} + c_2\frac{\partial N}{\partial\alpha}, \tag{4.17}$$

$$R_\beta = Q_\beta + \frac{\partial\mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial\alpha} = c_1\frac{\partial M}{\partial\beta} + c_2\mu_\beta\frac{\partial N}{\partial\beta}. \tag{4.18}$$

5. ÎNVELITORI CILINDRICE REZEMATE PE TIMPANE, DECUPATE DUPĂ GENERATOARE

Vom rezolva ecuația (4.7), în primul rînd, pentru cazul învelitorilor rezemate la capete $\left(\text{pentru } \beta = \pm\frac{l}{2}\right)$ pe timpane. Timpanul are rigiditate foarte mare în planul lui ceea ce conduce la

$$u = 0, \quad w = 0 \qquad \text{pentru } \beta = \pm\frac{l}{2}.$$

Pe de altă parte, timpanul este foarte flexibil transversal; el nu poate împiedeca deplasări și rotiri în plane perpendiculare pe el. Se obțin astfel încă două condiții și anume:

$$\mathfrak{M}_\beta = 0, \quad \mathfrak{N}_\beta = 0 \qquad \text{pentru } \beta = \pm\frac{l}{2}.$$

Cele două grupe de condiții sînt satisfăcute automat dacă se consideră pentru C o dezvoltare de forma

$$C = \varphi + i\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos(\lambda_n\beta) f_n(\lambda_n\alpha) + L_n(\lambda_n\alpha)\cos(\lambda_n\beta)\right], \tag{5.1}$$

unde
$L_n(\lambda_n\alpha)\cos(\lambda_n\beta)$ este o soluție particulară a ecuației (4.7) neomogene, cu partea dreaptă dezvoltată în serie Fourier.

Într-adevăr, în baza formulelor anterioare se observă că u, w, $\mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{N}_\beta$ se exprimă în funcție de $\cos(\lambda_n\beta)$, care se anulează pentru $\beta = \pm\frac{l}{2}$.

În cele ce urmează, pentru a deduce soluția generală a ecuației omogene, vom considera C de forma*)

$$\widetilde{C} = \cos(\lambda_n\beta) f_n(\lambda_n\alpha)$$

---

*) Considerațiile care urmează au loc pentru a n — a armonică a dezvoltării (5.1). În cele ce urmează, prin $\widetilde{C} = \widetilde{\varphi} + i\,\widetilde{\psi}$ se înțelege soluția ecuației omogene ($X = Y = Z = 0$).

Notînd

$$f_n(\lambda_n \alpha) = \Phi_n(\lambda_n \alpha) + i\Psi_n(\lambda_n \alpha) \tag{5.2}$$

ecuația (4.7), omogenă, conduce la următorul sistem de două ecuații diferențiale cu coeficienți constanți

$$\begin{aligned} &\Phi_n^{IV} + (A_n + D)\,\Phi_n^{II} + (B_n + E_n)\,\Phi_n + C_n\Psi_n = 0,\\ &\Psi_n^{IV} + (A_n - D)\,\Psi_n^{II} + (B_n - E_n)\,\Psi_n - C_n\,\Phi_n = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, încercînd soluții de forma :

$$\Phi_n(\lambda_n \alpha) = e^{(\lambda_n \alpha) r}\,; \quad \Psi_n(\lambda_n \alpha) = S_n\,e^{(\lambda_n \alpha) r}$$

se obține

$$\begin{aligned} &r^4 + (A_n + D)\,r^2 + (B_n + E_n) + C_n S_n = 0,\\ &S_n\,[r^4 + (A_n - D)\,r^2 + (B_n - E_n)] - C_n = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Condiția de compatibilitate a acestui sistem conduce la o ecuație de gradul 8 pentru r*). Fie $r_j (j = 1,2 \dots 8)$ rădăcinile sale. Ele sînt de forma

$$\begin{aligned} r_{1.2} &= \pm(a_1 + i\,b_1)\\ r_{3.4} &= \pm(a_1 - i\,b_1)\\ r_{5.6} &= \pm(a_2 + i\,b_2)\\ r_{7.8} &= \pm(a_2 - i\,b_2) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Oricare din ecuațiile (5.4) determină constanta complexă $S_n = S_n^1 + i\,S_n^2$ și după cum se remarcă pentru două rădăcini r_j de semne contrare constantele S_n sînt egale, iar pentru două rădăcini r_j conjugate, constantele S_n sînt de asemenea conjugate.

Această remarcă este sintetizată în tabloul nr. 1.

Tabloul nr. 1

r_j	$S_n^1 + i\,S_n^2$
$r_1 = a_1 + i\,b_1$	$S_{n1}^1 + i\,S_{n1}^2$
$r_2 = -a_1 - i b_1$	
$r_3 = a_1 - i\,b_1$	$S_{n1}^1 - i\,S_{n1}^2$
$r_4 = -a_1 + i\,b_1$	
$r_5 = a_2 + i\,b_2$	$S_{n2}^1 + i\,S_{n2}^2$
$r_6 = -a_2 - i\,b_2$	
$r_7 = a_2 - i\,b_2$	$S_{n2}^1 - i\,S_{n2}^2$
$r_8 = -a_2 + i\,b_2$	

---

*) După cum se observă ușor prin notația $r^2 = t$, ecuația se reduce la una de gradul 4.

În continuare, se utilizează proprietăţile cu privire la soluţia generală a unui sistem liniar, pentru a deduce expresiile funcţiilor $\Phi_n(\lambda_n \alpha)$ şi $\Psi_n(\lambda_n \alpha)$, care sînt reale.

Rezultă final funcţia complexă de tensiune corespunzătoare problemei omogene

$$\widetilde{U} = \widetilde{\varphi} + i\widetilde{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n \beta)\,[\Phi_n(\lambda_n \alpha) + i\Psi_n(\lambda_n \alpha)],$$

unde

$$\begin{aligned}\Phi_n(\lambda_n \alpha) = {} & \mathcal{A}_n \operatorname{ch} \lambda_n a_1 \alpha \cos \lambda_n b_1 \alpha + \mathcal{B}_n \operatorname{sh} \lambda a_1 \alpha \sin \lambda_n b_1 \alpha + \\ & + \mathcal{C}_n \operatorname{ch} \lambda_n a_2 \alpha \cos \lambda_n b_2 \alpha + \mathcal{D}_n \operatorname{sh} \lambda_n a_2 \alpha \sin \lambda_n b_2 \alpha + \\ & + \mathcal{E}_n \operatorname{ch} \lambda_n a_1 \alpha \sin \lambda_n b_1 \alpha + \mathcal{F}_n \operatorname{sh} \lambda_n a_1 \alpha \cos \lambda_n b_1 \alpha + \\ & + \mathcal{G}_n \operatorname{ch} \lambda_n a_2 \alpha \sin \lambda_n b_2 \alpha + \mathcal{H}_n \operatorname{sh} \lambda_n a_2 \alpha \cos \lambda_n b_2 \alpha \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\Psi_n(\lambda_n \alpha) = {} & (\mathcal{A}_n S_{n1}^1 + \mathcal{B}_n S_{n1}^2) \operatorname{ch} \lambda_n a_1 \alpha \cos \lambda_n b_1 \alpha + (\mathcal{B}_n S_{n1}^1 - \\ & - \mathcal{A}_n S_{n1}^2) \operatorname{sh} \lambda_n a_1 \alpha \sin \lambda_n b_1 \alpha + (\mathcal{C}_n S_{n2}^1 + \mathcal{D}_n S_{n2}^2) \operatorname{ch} \lambda_n a_2 \alpha \cos \lambda_n b_2 \alpha + \\ & + (\mathcal{D}_n S_{n2}^1 - \mathcal{C}_n S_{n2}^2) \operatorname{sh} \lambda_n a_2 \alpha \sin \lambda_n b_2 \alpha + (\mathcal{E}_n S_{n1}^1 - \\ & - \mathcal{F}_n S_{n1}^2) \operatorname{ch} \lambda_n a_1 \alpha \sin \lambda_n b_1 \alpha + (\mathcal{F}_n S_{n1}^1 + \mathcal{E}_n S_{n1}^2) \operatorname{sh} \lambda_n a_1 \alpha \cos \lambda_n b_1 \alpha + \\ & + (\mathcal{G}_n S_{n2}^1 - \mathcal{H}_n S_{n2}^2) \operatorname{ch} \lambda_n a_2 \alpha \sin \lambda_n b_2 \alpha + (\mathcal{H}_n S_{n2}^1 + \\ & + \mathcal{G}_n S_{n2}^2) \operatorname{sh} \lambda_n a_2 \alpha \cos \lambda_n b_2 \alpha. \end{aligned}$$

Se observă că dispunem de opt constante arbitrare pentru fiecare termen al descompunerii în serie Fourier. Aceste constante sînt suficiente punerii a cîte patru condiţii de margine pe fiecare din cele două generatoare de margine.

Expresiile deplasărilor se pot obţine uşor în acest caz. Ele sînt necesare pe de o parte, pentru a obţine o imagine asupra modului cum se deformează învelitoarea, pe de altă parte, pentru scrierea condiţiilor de margine cînd acestea sînt formulate în deplasări.

Scriind deplasările sub forma

$$\begin{aligned} u &= \sum u_n(\lambda_n \alpha) \cos(\lambda_n \beta), \\ v &= \sum v_n(\lambda_n \alpha) \sin(\lambda_n \beta), \\ w &= \sum w_n(\lambda_n \alpha) \cos(\lambda_n \beta) \end{aligned} \tag{5.7}$$

şi pornind de la relaţiile geometrice

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \beta}; \qquad \omega = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial u}{\partial \beta}; \qquad \chi_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}$$

se ajunge la

$$u_n(\lambda_n \alpha) = \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \frac{1}{2hE_\alpha}\left[\frac{\partial \mathfrak{N}_{\beta n}}{\partial \alpha} - \mu_\beta \frac{\partial \mathfrak{N}_{\alpha n}}{\partial \alpha}\right] - \frac{1+\sqrt{\mu_\alpha \mu_\beta}}{\lambda_n k h \sqrt{E_\alpha E_\beta}} \mathfrak{N}_{\alpha\beta n}$$

$$v_n(\lambda_n \alpha) = \frac{1}{\lambda_n} \frac{1}{2hE_\beta}(\mathfrak{N}_{\beta n} - \mu_\beta \mathfrak{N}_{\alpha n})$$

$$w_n(\lambda_n \alpha) = \frac{1}{\lambda_n^2} \cdot \frac{3}{2h^3 E_\beta}(\mathfrak{M}_{\beta n} - \mu_\beta \mathfrak{M}_{\alpha n})$$

unde prin $\mathfrak{N}_{\alpha n}$, $\mathfrak{N}_{\beta n}$, $\mathfrak{M}_{\alpha n}$, $\mathfrak{M}_{\beta n}$ s-a notat partea funcții numai de α a celei de a n — a armonică a lui $\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\beta$, $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{M}_\beta$. Expresiile lor se pot deduce din relațiile (4.9),...., (4.14).

6. EXEMPLU DE CALCUL

Metoda expusă o vom aplica la calculul unui cilindru solicitat de o sarcină exterioară normală pe învelitoare

$$Z = p \cos(\lambda_1 \beta) \tag{6.1}$$

unde p este o mărime constantă.

În urma calculului vom obține diagramele eforturilor și deplasărilor suprafeței mediane.

Caracteristicele geometrice sînt :

— lungimea învelitorii $l = 3{,}14$ m,

— raza suprafeței mediane $R = 1{,}5$ m,

— unghiul la centrul al generatoarelor de margine

$$\theta_0 = 45°,$$

— grosimea învelitorii : $2\ h = 0{,}02\ m$.

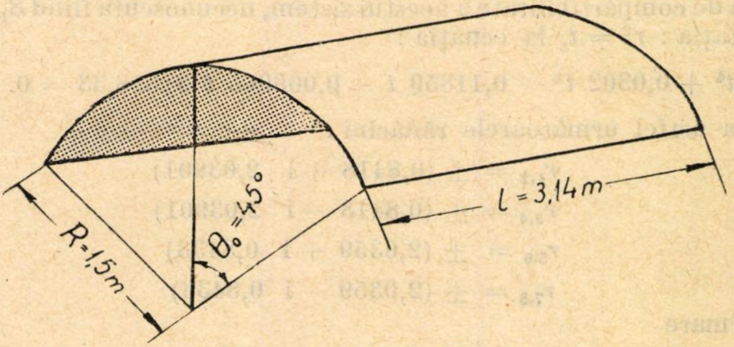


Fig. 4

Învelitoarea este considerată cu marginele libere și simetrică față de generatoarea de creștet (fig. 4).

Caracteristicele elastice. Considerăm învelitoarea confecționată din lemn de pin, avînd următoarele caracteristici*)

$$E_\alpha = 1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2 \qquad E_\beta = 0{,}042 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\mu_\alpha = 0{,}2381 \qquad \mu_\beta = 0{,}01$$

$$G = 0{,}075 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

Rezultă

$k = 0{,}768$

$\lambda_n = n$

$c_3 = 0{,}00578$ m

$c_2 = 0{,}02821$ m

$c_1 = 0{,}001185$ m

$\rho_1 = 2{,}095$; $\rho_2 = 0{,}633$; $\eta = -0{,}2677$.

Datorită solicitării speciale (6.1), avem de considerat numai prima armonică.

În consecință:

$\lambda_1 = 1$

$A_1 = 0{,}0151$

$B_1 = -0{,}05339$

$C_1 = 23{,}629$

$D = -0{,}1097$

$E_1 = -0{,}02438$

Sistemul (5.4) devine

$$r^4 - 0{,}0946\, r^2 - 0{,}07777 + 23{,}629\, S_1 = 0, \tag{6.2}$$

$$-23{,}629 + (r^4 + 0{,}1248\, r^2 - 0{,}02901)\, S_1 = 0.$$

Condiția de compartibilitate a acestui sistem, necunoscuta fiind S_1, conduce prin notația: $r^2 = t$, la ecuația:

$$t^4 + 0{,}0302\, t^3 - 0{,}11859\, t - 0{,}006965\, t + 558{,}33 = 0.$$

Se obțin astfel următoarele rădăcini:

$$r_{1.2} = \pm (0{,}8418 + \mathrm{i}\ 2{,}03901)$$

$$r_{3.4} = \pm (0{,}8418 - \mathrm{i}\ 2{,}03901)$$

$$r_{5.6} = \pm (2{,}0359 + \mathrm{i}\ 0{,}8433)$$

$$r_{7.8} = \pm (2{,}0359 - \mathrm{i}\ 0{,}8433)$$

Prin urmare

$$a_1 = 0{,}8418;\ b_1 = 2{,}03901,$$

$$a_2 = 2{,}0359;\ b_2 = 0{,}8433. \tag{6,3}$$

---

*) $E_\alpha \mu_\beta = E_\beta \mu_\alpha$.

Cu aceste valori se deduc din (6.2)

$$S_{11}^{1} = -0{,}01518\,; \quad S_{12}^{2} = 1{,}0159,$$

$$S_{12}^{1} = 0{,}017\,; \quad S_{12}^{2} = -0{,}9842.$$

În baza formulelor (5.6) funcția complexă de tensiune este determinată de

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} &= (\mathcal{A}\,\mathrm{ch}\, a_1\alpha \cos b_1\alpha + \mathfrak{B}\,\mathrm{sh}\, a_1\alpha \sin b_1\alpha + \\ &\quad + \mathfrak{C}\,\mathrm{ch}\, a_2\alpha \cos b_2\alpha + \mathfrak{D}\,\mathrm{sh}\, a_2\alpha \sin b_2\alpha) \cos\beta \\ \widetilde{\psi} &= [(-0{,}01518\,\mathcal{A} + 1{,}0159\,\mathfrak{B})\,\mathrm{ch}\, a_1\alpha \cos b_1\alpha + \\ &\quad + (-0{,}01518\,\mathfrak{B} - 1{,}0159\,\mathcal{A})\,\mathrm{sh}\, a_1\alpha \sin b_1\alpha + \\ &\quad + (0{,}017\,\mathfrak{C} - 0{,}9842\,\mathfrak{D})\,\mathrm{ch}\, a_2\alpha \cos b_2\alpha + \\ &\quad + (0{,}017\,\mathfrak{D} + 0{,}9842\,\mathfrak{C})\,\mathrm{sh}\, a_2\alpha \sin b_2\alpha] \cos\beta\end{aligned} \tag{6.4}$$

celelalte constante fiind nule datorită simetriei problemei.

În sfîrșit pentru a obține funcția complexă de tensiune corespunzătoare solicitării exterioare (6.1) vom determina o soluție particulară a ecuației (4.7), neomogene.

Încercînd o soluție de forma :

$$C = q \cos\beta \quad (q \text{ constantă complexă})$$

se obține :

$$-\frac{q}{R} - i c_3 \left\{ 0{,}2049\, q + \frac{1}{R^2}[-1{,}0475\, q - 0{,}2677\, \bar{q}] \right\} = -p$$

care conduce la următoarea valoare pentru q

$$q = (1{,}5 + 0{,}00495\, i)\, p.$$

În consecință, funcția complexă de tensiune este

$$\begin{aligned}\varphi &= \widetilde{\varphi} + 1{,}5\, p \cos\beta \\ \psi &= \widetilde{\psi} + 0{,}00495\, p \cos\beta\end{aligned} \tag{6.5}$$

unde φ și $\widetilde{\psi}$ sînt definiți prin relațiile (6.4)

Rămîn să fie satisfăcute condițiile pe marginile libere ale cilindrului ceea ce determină constantele $\mathcal{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$.

Aceste condiții se exprimă analitic astfel

$$\mathfrak{N}_\alpha = 0\,; \quad \mathfrak{M}_\alpha = 0\,; \quad \mathfrak{N}_{\alpha\beta} = 0\,; \quad Q_\alpha + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial\beta} = 0 \tag{6.6}$$

Problema care rămîne este aceea a transcrierii acestor condiții într-un sistem de ecuații, liniar, avînd ca necunoscute constantele amintite mai sus.

Calculul necesar stabilirii acestor ecuaţii se simplifică considerabil prin utilizarea următoarei scheme, în care se dau derivatele expresiilor de forma

$$\mathrm{ch}\,\lambda a_j a_{,}\,\alpha \cos \lambda b_j\,\alpha, \quad (j = 1{,}2)$$

pentru diferite valori ale lui α.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha) = K_{j1}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha\cos\lambda b_j\,\alpha - \\
&\qquad - K_{j2}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\,\alpha \\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\,\alpha) = K_{j1}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha\sin\lambda b_j\,\alpha + \\
&\qquad + K_{j2}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha \\
&\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha) = K_{j3}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha\cos\lambda b_j\,\alpha - \\
&\qquad - K_{j4}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\,\alpha \qquad\qquad (6.7)\\
&\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}(\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\alpha) = K_{j3}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha\sin\lambda b_j\,\alpha + \\
&\qquad + K_{j4}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha \\
&\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}(\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha) = K_{j5}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha\cos\lambda b_j\,\alpha - \\
&\qquad - K_{j6}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\,\alpha \\
&\frac{\partial^3}{\partial\alpha^3}(\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \sin\lambda b_j\alpha) = K_{j5}\,\mathrm{ch}\,\lambda a_j\,\alpha\sin\lambda b_j\,\alpha + \\
&\qquad + K_{j6}\,\mathrm{sh}\,\lambda a_j\,\alpha \cos\lambda b_j\,\alpha
\end{aligned}$$

unde

$$K_{j1} = \lambda a_j\,;\; K_{j2} = \lambda b_j\,;\; K_{j3} = \lambda^2(a_j^2 - b_j^2)\,;\; K_{j4} = 2\,\lambda^2\,a_j\,b_j \qquad (6.8)$$

$$K_{j5} = \lambda^3 a_j(a_j^2 - 3\,b_j^2)\,;\; K_{j6} = \lambda^3 b_j(3\,a_j^2 - b_j^2).$$

Întrucît vom calcula eforturile şi deplasările pentru valorile 0°, 15°, 30°, 45° ale lui θ , sînt necesare următoarele tablouri de valori :

Tabloul nr. 2

	$j = 1$	$j = 2$
K_{j1}	0,8418	2,0359
K_{j2}	2,0390	0,8433
K_{j3}	− 3,4489	3,4337
K_{j4}	3,4328	3,4338
K_{j5}	− 9,9029	4,0948
K_{j6}	− 4,1426	9,8864

(6.8.1.)

Tabloul nr. 3

($\theta° = 0°$; $\alpha = 0$)

	$j = 1$		$j = 2$	
$\mathrm{sh}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$ $\mathrm{ch}\, c_j \alpha \sin b_j \alpha$	0	0	0	0
$\mathrm{ch}\, c_j \alpha \cos b_j \alpha$ $\mathrm{sh}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$	1	0	1	0
	$\mathrm{ch}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$	$\mathrm{sh}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$	$\mathrm{ch}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$	$\mathrm{sh}\, c_j \alpha \sin b_j \alpha$
$\frac{\partial}{\partial \alpha}$	0	0	0	0
$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$	−3,4489	3,4328	3,4237	3,4338
$\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}$	0	0	0	0

(6.7.1.)

Tabloul nr. 4

($\theta = 15°$; $\alpha = 0,3927$ m)

	$j = 1$		$j = 2$	
$\mathrm{sh}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$ $\mathrm{ch}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$	0,2343	0,7574	0,8392	0,4347
$\mathrm{ch}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$ $\mathrm{sh}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$	0,7346	0,2416	1,2644	0,2885
	$\mathrm{ch}\, c_j \alpha \cos b_j \alpha$	$\mathrm{sh}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$	$\mathrm{ch}\, a_j \alpha \cos b_j \alpha$	$\mathrm{sh}\, a_j \alpha \sin b_j \alpha$
$\frac{\partial}{\partial \alpha}$	−1,3471	1,1153	1,3419	1,5927
$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$	−3,3630	1,6884	3,3509	5,3323
$\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}$	0,8174	−8,4711	−0,8612	10,0767

(6.7.4.)

Tabloul nr. 5

($\theta = 30°$; $\alpha = 0{,}7854$ m)

	$j = 1$		$j = 2$	
sh $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$ ch $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	$-0{,}2174$	$1{,}2260$	$1{,}8713$	$1{,}5835$
ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$ sh $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	$-0{,}3753$	$0{,}7100$	$2{,}0307$	$1{,}4593$
$\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$	ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$	ch $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$	sh $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$
	$-2{,}6828$	$0{,}5887$	$2{,}4744$	$4{,}8019$
$\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$	$-1{,}1429$	$-3{,}7370$	$1{,}9619$	$11{,}9838$
$\dfrac{\partial^3}{\partial \alpha^3}$	$7{,}2317$	$-11{,}2403$	$-7{,}9925$	$24{,}9845$

(6.7.3.)

Tabloul nr. 6

($\theta = 45°$; $\alpha = 1{,}1775$ m)

	$j = 1$		$j = 2$	
sh $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$ ch $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	$-0{,}8573$	$1{,}0343$	$3{,}0267$	$4{,}6427$
ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$ sh $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	$-1{,}1312$	$0{,}7839$	$3{,}0271$	$4{,}6419$
$\dfrac{\partial}{\partial \alpha}$	ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$	sh $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$	ch $a_j \alpha$ cos $b_j \alpha$	sh $a_j \alpha$ sin $b_j \alpha$
	$-2{,}8306$	$-0{,}8773$	$2{,}2469$	$12{,}0045$
$\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$	$1{,}2104$	$-6{,}5868$	$-5{,}5452$	$26{,}3334$
$\dfrac{\partial^3}{\partial \alpha^3}$	$12{,}7745$	$-6{,}6903$	$-33{,}5059$	$48{,}9341$

(6.7.4.)

Utilizînd datele din tabloul nr. 6 condițiile la limită (6.6) conduc la sistemul :

$$\begin{aligned}
-1{,}2591\,\mathcal{A} + 0{,}7554\,\mathfrak{B} + 2{,}5552\,\mathcal{C} + 4{,}5221\,\mathfrak{D} &= -1{,}5\,p\,,\\
6{,}6806\,\mathcal{A} + 1{,}3425\,\mathfrak{B} + 25{,}7781\,\mathcal{C} + 5{,}9296\,\mathfrak{D} &= 0\,,\\
-2{,}8306\,\mathcal{A} - 0{,}8773\,\mathfrak{B} + 2{,}2469\,\mathcal{C} + 12{,}0045\,\mathfrak{D} &= 0\,,\\
6{,}2011\,\mathcal{A} + 12{,}3282\,\mathfrak{B} + 45{,}1295\,\mathcal{C} + 31{,}1135\,\mathfrak{D} &= 0\,,
\end{aligned}$$

care rezolvat conduce la :

$\mathcal{A} = 1{,}8582\,p\ ;\ \mathfrak{B} = -0{,}1052\,p\ ;\ \mathcal{C} = -0{,}6009\,p$

$\mathfrak{D} = 0{,}5429\,p.$

astfel că:

$$\begin{aligned}\varphi = {} & (1{,}8582 \operatorname{ch} a_1 \alpha \cos b_1 \alpha - 0{,}1052 \operatorname{sh} a_1\alpha \sin b_1\alpha - \\ & - 0{,}6009 \operatorname{ch} a_2 \alpha \cos b_2 \alpha + 0{,}5429 \operatorname{sh} a_2 \alpha \sin b_2 \alpha)\, p \cos \beta + 1{,}5\, p \cos \beta \\ \psi = {} & (- 0{,}1351 \operatorname{ch} a_1 \alpha \cos b_1 \alpha - 1{,}8861 \operatorname{sh} a_1 \alpha \sin b_1 \alpha - \\ & - 0{,}5445 \operatorname{ch} a_2 \alpha \cos b_2 \alpha - 0{,}5822 \operatorname{sh} a_2 \alpha \sin b_2 \alpha)p \cos \beta + \\ & + 0{,}00495\, p \cos \beta,\end{aligned} \tag{6.9}$$

în care a_j, b_j ($j = 1, 2$) sînt daţi de (6.3).

Cu ajutorul datelor din tablourile nr. 3,4,5 şi 6 şi a soluţiei (6.9) se obţine tabloul nr. 7 care dă valorile derivatelor, în diverse puncte, ale lui φ şi ψ.

Tabloul nr. 7

($\beta = 0°$)

θ	0°	15°	30°	45°
φ	2,7573 p	2,2364 p	0,2997 p	0,017 p
ψ	−0,6747 p	−1,4065 p	−3,2388 p	−5,6715 p
$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$	0	−2,5621 p	−3,9271 p	0
$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}$	0	−3,5796 p	−4,8909 p	−6,1753 p
$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}$	−6,9689 p	−5,5454 p	3,5965 p	20,5706 p
$\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}$	−9,8775 p	−7,6593 p	−0,8424 p	−0,052 p

(6.10)

În baza rezultatelor tabloului nr. 7 şi a formulelor anterioare rezultă următoarele diagrame pentru eforturi şi deplasări.

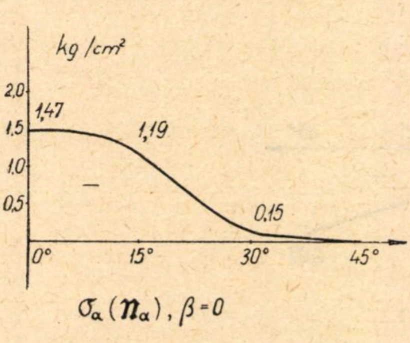


Diagrama 1

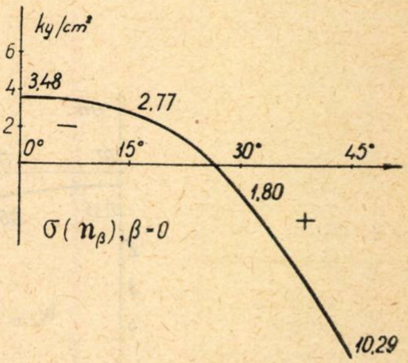


Diagrama 2

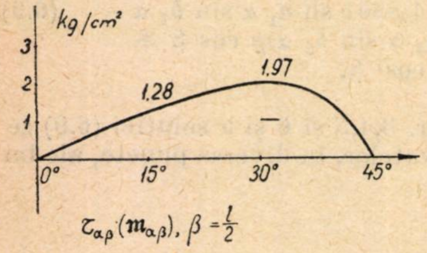


Diagrama 3

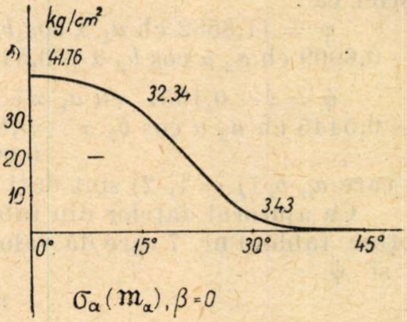


Diagrama 4

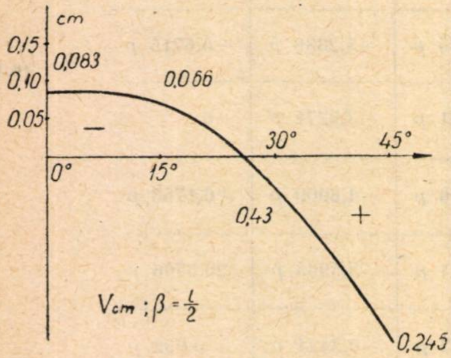


Diagrama 5

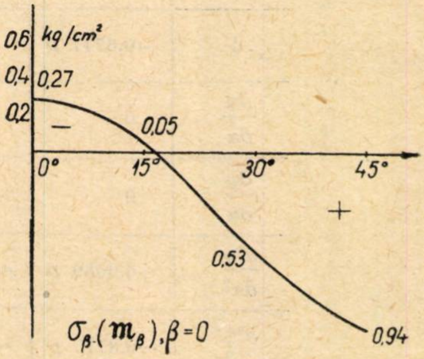


Diagrama 6

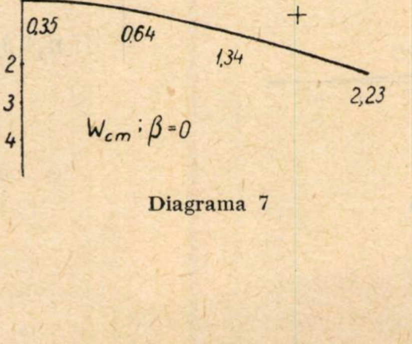


Diagrama 7

7. ÎNVELITORI CILINDRICE REZEMATE PE PATRU TIMPANE

În acest caz condițiile de margine, identice în lungul celor patru, margini, sînt satisfăcute automat prin considerarea unei funcțiuni de tensiune de forma

$$C = \varphi + i\,\psi = \sum_{m,\,n}\sum c_{mn} \cos(\lambda_{1m}\,\alpha) \cos(\lambda_{2n}\beta), \tag{7.1}$$

unde

$$c_{mn} = \varphi_{mn} + i\,\psi_{mn}\ (\varphi_{mn},\ \psi_{mn}\ \text{— constante reale})$$

$$\lambda_{1m} = \frac{m\pi}{l_1},$$

$$\lambda_{2n} = \frac{n\pi}{l_2}$$

l_1 și l_2 avînd semnificațiile din figura 5.

Introducînd expresia (7.1) în ecuația (4.7) rezultă următorul sistem pentru φ_{mn} și ψ_{mn}:

$$-\frac{\lambda_{2n}^2}{R^2}\varphi_{mn} + (a_{mn} + b_{mn})\,\psi_{mn} = \frac{A_{mn}}{R}; \quad (a_{mn} - b_{mn})\,\varphi_{mn} - \frac{\lambda_{2n}^2}{R^2}\psi_{mn} = \frac{B_{mn}}{R}$$

unde

a_{mn}, b_{mn} sînt constante definite prin:

$$a_{mn} = \frac{c_3}{R}\left(2\,\lambda_{1m}^2 - \frac{1}{R^2}\right)\eta\,\lambda_{2n}^2 \tag{7.2}$$

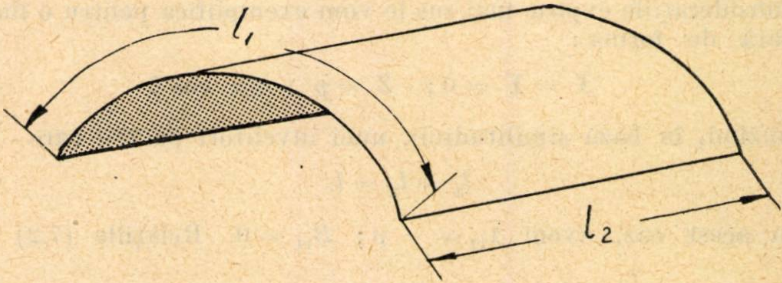


Fig. 5

$$b_{mn} = \frac{c_3}{R}\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\lambda_{1m}^4 + \rho_1\lambda_{1m}^2\lambda_{2n}^2 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\,\lambda_{2n}^4\right) - \frac{1}{R^2}\left(\frac{\rho_1}{2}\lambda_{2n}^2 + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\,\lambda_{1m}^2\right)\right],$$

iar A_{mn}, B_{mn} sînt coeficienții dezvoltării în serie Fourier sub forma

$$\frac{1}{R}\sum_{m,}\sum_{n}(A_{mn} + i\,B_{mn})\cos(\lambda_{1m}\,\alpha)\cos(\lambda_{2n}\,\beta)$$

a membrului drept al ecuației (4.7).

Rezultă

$$\varphi_{m\,n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\dfrac{\lambda_{2n}^2}{R^2} A_{m\,n} + (a_{m\,n} + b_{m\,n}) B_{m\,n}}{a_{m\,n}^2 - b_{m\,n}^2 - \dfrac{\lambda_{2n}^4}{R^4}},$$

$$\psi_{m\,n} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\dfrac{\lambda_{2n}^2}{R^2} B_{m\,n} + (a_{m\,n} - b_{m\,n}) A_{m\,n}}{a_{m\,n}^2 - b_{m\,n}^2 - \dfrac{\lambda_{2n}^4}{R^4}}.$$

Observînd că $a_{m\,n}^2 - b_{m\,n}^2$ se poate neglija față de $\frac{\lambda_{2n}^4}{R^4}$ eroarea fiind de ordinul $\frac{b^2}{R^2}$ față de 1, se obține :

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{m\,n} &= -\frac{R^3}{\lambda_{2n}^4}\left[\frac{\lambda_{2n}^2}{R^2} A_{m\,n} + (a_{m\,n} + b_{m\,n}) B_{m\,n}\right] \\ \psi_{m\,n} &= -\frac{R^3}{\lambda_{2n}^4}\left[\frac{\lambda_{2n}^2}{R^2} B_{m\,n} + (a_{mn} - b_{m\,n}) A_{m\,n}\right] \end{aligned}\right\} \quad (7.3)$$

În modul acesta soluția problemei este determinată, iar calculul eforturilor se poate face cu ajutorul formulelor (4.9) ... (4.14).

Considerațiile expuse mai sus le vom exemplifica pentru o încărcare exterioară de forma :

$$X = Y = 0\,; \quad Z = p \cos\alpha \cos\beta$$

corespunzînd, în baza similitudinii, unei învelitori pentru care

$$l_1 = l_2 = l.$$

În acest caz, avem $A_{11} = -p$; $B_{11} = 0$. Relațiile (7.2) capătă forma

$$a_{11} = \frac{c_3}{R}\left(2 - \frac{1}{R^2}\right)\eta$$

$$b_{11} = \frac{c_3}{R}\left[\left(\sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} + \rho_1 + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}\right) - \frac{1}{R^2}\left(\frac{\rho_1}{2} + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}\right)\right].$$

Considerînd $R = 1{,}5$ și constantele elastice egale cu cele luate în exemplul anterior, rezultă

$a_{11} = -0{,}0016049$

$b_{11} = 0{,}017529$

iar relațiile (7.3) conduc la:

$$\varphi = p\ R \cos\alpha \cos\beta \qquad (7.4)$$

$$\psi = -0{,}01913\ p\ R^3 \cos\alpha \cos\beta.$$

Rezultă pentru eforturi următoarele valori

$$\mathfrak{N}_\alpha = -1{,}4986\ p \cos\alpha \cos\beta$$
$$\mathfrak{N}_\beta = -1{,}5\ p \cos\alpha \cos\beta$$
$$\mathfrak{M}_\alpha = 0{,}00185\ p \cos\alpha \cos\beta$$
$$\mathfrak{M}_\beta = 0{,}0001372\ p \cos\alpha \cos\beta$$

cantitățile intermediare M și N, date de (4.15) și (4.16), avînd în acest caz valorile:

$$M = 0{,}10039\ p \cos\alpha \cos\beta\ ;\ N = 0{,}06458\ p \cos\alpha \cos\beta$$

Rezultatele obținute mai sus vor fi comparate cu cele care se obțin considerînd învelitoarea izotropă cu:

$$\mu = \sqrt{\mu_\alpha\,\mu_\beta} = 0{,}04879$$

În acest caz

$$a_{11} = 0$$

$$b_{11} = \frac{c_3}{R}\left(4 - \frac{2}{R^2}\right) = -0{,}01199$$

iar formulele (7.3) conduc la:

$$\varphi = p\ R \cos\alpha \cos\beta$$

$$\psi = -0{,}01199\ p\ R^3 \cos\alpha \cos\beta$$

Rezultă pentru eforturi, care se obțin particularizînd formulele (4.9)...(4.14) pentru cazul izotrop, următoarele valori:

$$\mathfrak{N}_\alpha = -1{,}4997\ p \cos\alpha \cos\beta\ ;\ \mathfrak{N}_\beta = -1{,}5\ p \cos\alpha \cos\beta$$

$$\mathfrak{M}_\alpha = 0{,}0002486\ p \cos\alpha \cos\beta\ ;\ \mathfrak{M}_\beta = 0{,}0003122\ p \cos\alpha \cos\beta$$

cantitățile intermediare M și N avînd valorile

$$M = 0{,}05203\ p \cos\alpha \cos\beta\ ;\ N = 0{,}04047\ p \cos\alpha \cos\beta$$

Luînd $p = 1$ kg/cm², rezultă pentru eforturi unitare tabloul comparativ.

Tabloul nr. 8

	σ_α $(\mathfrak{N}_\alpha)$	σ_β $(\mathfrak{N}_\beta)$	σ_α $(\mathfrak{M}_\alpha)$	σ_β $(\mathfrak{M}_\beta)$
izotrop	−74,99	−75,00	3,73	4,68
ortotrop	−74,93	−75,00	27,75	2,06

Se observă că efortul unitar maxim de compresiune este în cazul izotrop

$$\sigma_{\alpha} = -78{,}72 \text{ kg/cm}^2$$

iar pentru cazul ortotrop el are valoarea

$$\sigma_{\alpha} = -102{,}68 \text{ kg/cm}^2.$$

Neglijarea ortotropiei modifică sensibil rezultatele conducînd în acest caz la erori de circa 30%.

În concluzie, aproximaţia care se face de obicei calculînd o învelitoare ortotropă ca una izotropă, prin considerarea unor module de elasticitate medii, nu este acoperitoare, eforturile reale depăşind pe cele calculate.

Primită la redacţie la 25 iulie 1957.

МЕТОД РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С ОРТОТРОПИЕЙ МАТЕРИАЛА

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Излагается метод расчета цилиндрических покрытий круглого сечения с ортотропией материала.

Этот метод основан на введении комплексной функции напряжения $C = \varphi + i\,\psi$, из которой путем элементарных расчетов получаются усилия и перемещения.

Для этой цели использована статически-геометрическая аналогия, которую авторы в одной из своих более ранних работ распространили на случай упругих тонких покрытий с ортотропией материала.

Исследование дополнено примерами расчета.

UNE MÉTHODE DE CALCUL DES ENVELOPPES CYLINDRIQUES DE SECTION CIRCULAIRE ET À ORTHOTROPIE DE MATÉRIEL

(RÉSUMÉ)

Les auteurs donnent dans ce travail une méthode pour le calcul des enveloppes cylindriques, de section circulaire et à orthotropie de matériel.

Le procédé exposé est basé sur l'introduction d'une fonction complexe de tension $C = \varphi + i\,\psi$, dont on déduit, par des opérations élémentaires, les efforts et les déplacements.

A ces fins, on utilise l'analogie statique-géometrique que les auteurs ont étendue dans un travail antérieur, aux enveloppes élastiques minces à orthotropie de matériel.

L'étude est complétée par des exemples de calcul.

BIBLIOGRAFIE

1. Viorel Visarion și Cristian Stănescu, *Extinderea analogiei statico-geometrice pentru învelitorile elastice subțiri cu ortotropie de material.* Comunicările Academiei R. P. R., t. VII, nr. 3, martie 1957.
2. A. L. Goldenweizer, *Teoria uprughih tonkih obolocek.* Gostehizdat, Moscova, 1953.
3. V. V. Novojilov, *Teoria tonkih obolocek.* Sudpromghiz, Moscova-Leningrad, 1951.

PRECIZĂRI ÎN LEGĂTURĂ CU APLICAREA FORMULEI LUI GEIGER LA CALCULUL PRIMEI FRECVENȚE PROPRII DE VIBRAȚIE ALE CLĂDIRILOR ÎN CADRE

DE

MIHAIL IFRIM

Cunoscuta formula a lui Geiger pentru calculul primei frecvențe proprii de vibrație se referă la sistemele elastice avînd un singur grad de libertate, şi are forma

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Z_{st}}}, \tag{1}$$

unde

ω — frecvența circulară ;
Z_{st} — săgeata statică corespunzătoare sarcinei $F = Mg$;
g — accelerația gravitației.

Teoretic formula (1) se deduce aplicînd principiul lui D'Alembert pentru sistemul oscilant din figura 1.

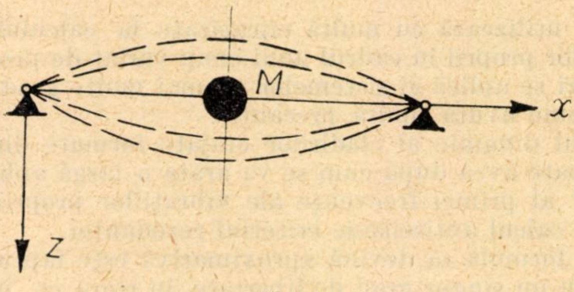


Fig. 1

Prin integrarea ecuației

$$k Z = -M \frac{d^2 Z}{dt^2}$$

rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} =$$

$$= \sqrt{\frac{g}{Z_{st}}}, \left(Z_{st} = \frac{F}{k} \right)$$

(k fiind un coeficient de rigiditate al barei la încovoiere).

Se poate constata însă că aceeaşi formulă se obține aplicînd principiul conservării energiei în cazul oscilațiilor (*Rayleigh*). Scriind egalitatea dintre energiile potențială și cinetică maxime se obţine expresia frecvenţei

$$\omega^2 = g \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i Z_i^2},$$

unde s-a notat cu

F_i — forţa aplicată în punctul i al sistemului pe direcţia oscilaţiilor ;
Z_i — deplasarea corespunzătoare punctului i.

Aplicînd pentru sistemul din figura 1 relaţia de mai sus se obţine imediat expresia frecvenţei (1).

Este de remarcat faptul că tratarea aceluiaşi caz prin metoda Vianello-Stodola conduce la rezultatul anterior.

După cum se cunoaşte, valoarea frecvenţei proprii de vibraţie din treapta j de aproximare se determină cu ajutorul relaţiei

$$\omega_j^2 = \frac{Z_j}{Z_{j+1}},$$

aici Z_j reprezintă deplasarea maximă corespunzătoare treptei j de aproximare, iar Z_{j+1} este deplasarea maximă corespunzătoare treptei $j + 1$.

Se dă grinzii din figura 1 iniţial o deplasare arbitrară $Z_1 = Z_0$ (constant). Dacă se încarcă sistemul cu sarcina MZ_1 se va obţine o deplasare $Z_2 = (MZ_1)/k$. În continuare se va lua ca sarcină valoarea MZ_2 şi se va obţine deplasarea $Z_3 = (MZ_2)/k$, ş. a. m. d. La o încărcare MZ_j se va obţine deplasarea $Z_{j+1} = (MZ_j)/k$.

Se observă următoarea egalitate

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_3} = \frac{Z_3}{Z_4} = \ldots = \frac{Z_j}{Z_{j+1}} = \frac{k}{M}$$

şi deci

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Z_{st}}} \qquad (F = gM = k Z_{st})$$

Se regăseşte astfel din nou expresia (1).

De aici rezultă că expresia lui Geiger reprezintă o particularizare a aplicării principiului conservării energiei, precum şi valoarea frecvenţei oscilaţiilor proprii în prima etapă de aproximare în metoda Vianello-Stodola. De fapt, procedeului Vianello-Stodola considerat în prima etapă de aproximare i se poate da o interpretare energetică precisă.

Deseori expresia (1) se utilizează cu multă eficacitate la calculul primei frecvențe ale oscilațiilor proprii în cadrul unui cîmp variat de probleme. Aceeași formulă uneori se aplică și sistemelor cu mai multe grade de libertate în care caz trebuie avută multă precauție.

Referindu-ne la calculul dinamic al clădirilor etajate formate din cadre elastice, formula (1) poate avea după cum se va arăta o largă aplicare la calculul aproximativ al primei frecvențe ale vibrațiilor proprii, atunci cînd se ia ca bază de calcul antiseismic criteriul rezonanței.

Ceeace face ca această formulă să devină aproximativă este faptul că ea se referă la sistemele cu un singur grad de libertate, în timp ce în realitate avem de a face cu un sistem cu mai multe grade de libertate.

Se constată, și acest lucru este verificat, că folosirea expresiei (1) la calculul primei frecvențe proprii și pentru sistemele cu mai multe grade de libertate, poate constitui o bază de calcul satisfăcătoare.

În acest caz Z_{st} va reprezenta deplasarea statică maximă a sistemului încărcat cu sarcinile F_i aplicate static pe direcția oscilațiilor. Prin urmare, formula (1) se va scrie

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{Z_{st}^{\max}}}. \tag{2}$$

Față de alte expresii aproximative și cu caracter practic această formulă conține două elemente superioare: caracteristicile elastice ale sistemului (traduse prin deplasarea $Z_{st}^{\max}$) și factorul dinamic, g.

Se va examina prin prisma formulei lui Geiger oscilațiile proprii ale clădirilor constituite din cadre etajate (fig. 2) în următoarele ipoteze:

— masele concentrate la nivelul fiecărui etaj;

— clădirea încastrată într-o fundație pe un teren rigid;

— oscilațiile clădirii sînt numai transversale (orizontale);

— cadrele au riglele de rigiditate infinită și stîlpii elastici.

Pentru cadrele de tipul celui din figura 2 în expresia (2) deplasarea maximă se ia chiar deplasarea ultimului etaj rezultată din încărcarea cadrului cu sarcinile F_i lateral (pe direcția oscilațiilor) și anume:

$$Z_{st}^{\max} = Z_n.$$

Este evident că prin această săgeată se introduce influența maselor situate în diferite puncte și cu diverse intensități*).

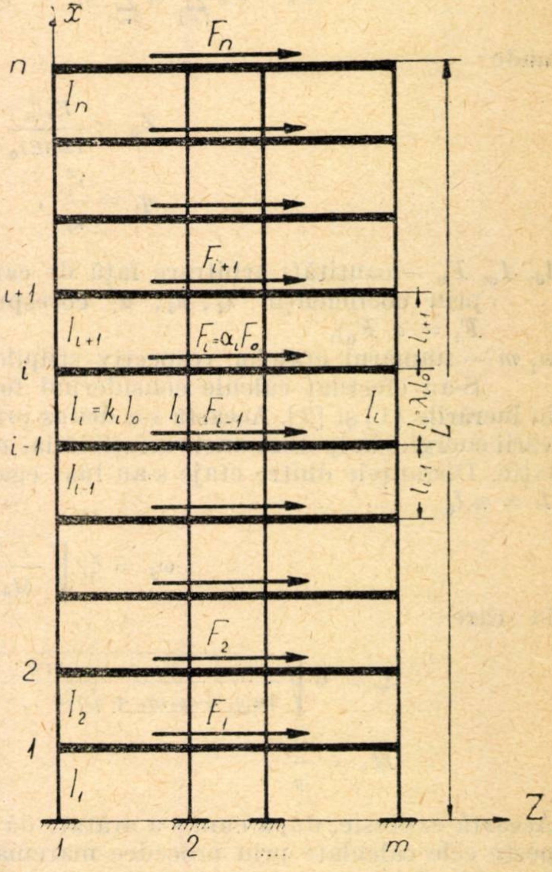


Fig. 2

Aceasta face ca expresia lui Geiger să fie uneori superioară altor formule date prin coduri.

---

*) Se pot reduce teoretic sistemele cu mai multe grade de libertate la un sistem cu un singur grad de libertate, calculîndu-se pe bază de echivalență energetică o masă redusă a sistemului, fiind posibilă folosirea directă a formulei (1). Acest lucru este destul de dificil în cazul considerat.

În cele ce urmează se va stabili mărimea abaterilor pe care le produce utilizarea expresiei (2) în calculul primei frecvențe ale oscilațiilor proprii a cadrelor etajate.

Unul din neajunsurile aplicării formulei (2), mai cu seamă în cazul cadrelor cu un număr ridicat de nivele, l-ar constitui aprecierea deplasării maxime Z_n de la caz la caz. În lucrarea [1] s-a stabilit pentru calculul deplasărilor laterale ale cadrelor în ipotezele expuse mai sus următoarea expresie:

$$Z_n = Z_0 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{i} q_j \qquad (i = 1,2 \ldots n), \qquad (3$$

unde

$$Z_0 = \frac{F_0 l_0^3}{12 m E I_0},$$

$$q_j = \frac{\lambda_j^3}{k_j},$$

l_0, I_0, F_0 — cantități arbitrare față de care se raportează valorile l_i, I_i, F_i prin coeficienții λ_i, k_i, α_i corespunzători ($l_i = \lambda_i l_0$; $I_i = k_i I_0$; $F_i = \alpha_i F_0$),

n, m — numărul etajelor respectiv stîlpilor.

S-au efectuat calcule considerînd formula frecvenței (ω_I) obținută în lucrările [1] și [2]. Aceasta s-a dedus prin aplicarea principiului conservării energiei în ipoteza unei variații liniar e a primului mod normal de oscilație. Distanțele dintre etaje s-au luat egale, adică $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = 1$, iar $L = n.l_0$

$$\omega_I = \xi_I \sqrt{\frac{E I_0}{M_0 l_0^3}}, \qquad (4)$$

în care

$$\xi_I = 6 \sqrt{\frac{m n}{[\alpha_1 q_1 + \alpha_2 (q_1 + q_2) + \ldots + \alpha_n (q_1 + \ldots q_n)]}}, \qquad (5)$$

$$M_0 = \frac{F_0}{g}.$$

Această expresie, după cum s-a arătat, dă valori în jurul a 3 % mai mari peste cele calculate prin procedee matematice exacte. Făcînd o serie de transformări se poate exprima formula (4) funcție de formula lui Geiger cu ajutorul unui coeficient de corecție η care pune în evidență abaterile formulei

$$\omega_I = \eta \, \omega_{GEIGER} \qquad (6)$$

unde

$$\eta = \sqrt{\frac{3n}{2n + 1}}$$

În tabloul nr. 1 sînt date valorile coeficientului de corecție.

Tabloul nr. 1

n	$\eta = \sqrt{\frac{3n}{2n+1}}$	ε	η_r
1	1,000	0,0	1,000
2	1,096	9,6	1,088
3	1,135	13,5	1,123
4	1,155	15,5	1,138
5	1,168	16,8	1,150
6	1,177	17,7	1,160
7	1,184	18,4	1,164
8	1,189	18,9	1,167
9	1,194	19,4	1,169
10	1,196	19,6	1,171
11	1,198	19,8	1,172
12	1,200	20,0	1,173
13	1,202	20,2	1,174
14	1,204	20,4	1,175
15	1,205	20,5	.
16	1,206	20,6	.
17	1,207	20,7	.
18	1,208	20,8	.
19	1,209	20,9	.
20	1,210	21,0	.

Dacă se ia ca bază de discuție formula (4), se poate constata că expresia (2) aproximează în minus valoarea frecvenței, întrucît totdeauna $\eta > 1$ pentru $n > 1$. Evident, pentru $n = 1$ și $\eta = 1$, deoarece sîntem în cazul unui sistem cu un singur grad de libertate. Rezultă eroarea

$$\varepsilon = \frac{\omega_G - \omega_I}{\omega_G} 100\,\% = 100\,(1 - \eta)\,\%\,,$$

care este trecută în tabloul nr. 1 și reprezentată în figura 3. Se observă că eroarea ε pentru $n \gg 10$ se plafonează la $\varepsilon \simeq 20\,\%$ (cînd $n = \infty$, $\varepsilon = 22{,}8$).

Întrucît corecțiile (η) s-au calculat față de expresia (4) care la rîndul ei dă valori cu 1 — 3 % mai mari decît cele calculate prin metode exacte (creșterea aproximării corespunde creșterii lui n) se propun în tabloul nr. 1 valorile aproximativ reale ale corecțiilor (η_r) raportate la valoarea exactă a primei frecvențe. Formula de calcul va fi

$$\omega_1 = \eta_r \sqrt{\frac{g}{Zn}}\,. \tag{7}$$

Frecvențele superioare se pot calcula informativ cu relația $\omega_r = (2r-1)\omega_1$, unde r reprezintă ordinul frecvenței de vibrație, iar modurile normale de vibrație după expresia aproximativă dată de M. G. Salvadori [3].

Cînd clădirea este încastrată într-o fundație pe un teren tasabil calculele se conduc similar, ținînd seama de modificările ce survin în expresia deplasărilor [1].

Aplicarea formulei lui Geiger în calculul primei frecvențe proprii de vibrație ale cadrelor etajate poate rămîne mai departe utilă din punct de vedere practic, ținînd seama de expresia deplasărilor [3] și de abaterile (η_r) din tabloul nr. 1 în baza ipotezelor stabilite. În același timp atît formula (7) corectată, cît și expresia (4) prin simplitatea lor se axează pe linia formulărilor obținute de I. L. Korcinski [4], M. G. Salvadori [3], A. W. Anderson[5) etc.

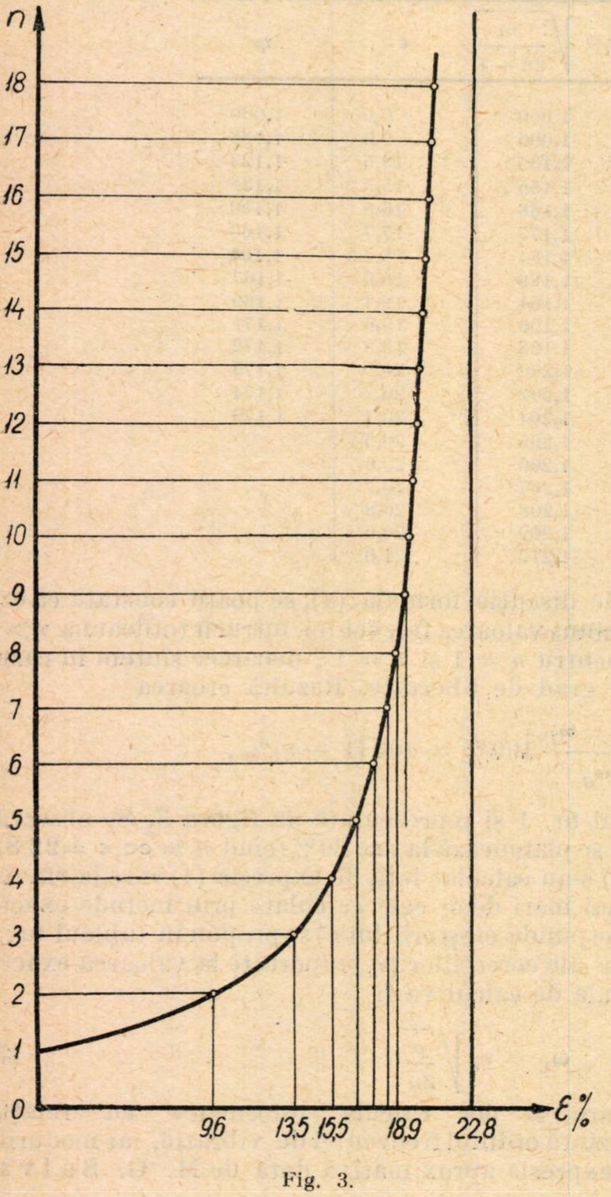


Fig. 3.

Utilizarea acestor expresii în condițiile enunțate mai sus evită un calcul mai laborios prin aplicarea unor metode analitic precise în dauna unei exactități practic neînsemnate. De fapt însăși ipotezele simplificatoare care stau la baza calculului elastic cît și la aprecierea diferiților parametri ce intră în calcul pot justifica introducerea în unele etape de calcul a unor relații aproximative.

EXEMPLU DE CALCUL

S-a considerat cadru din figura 4 pentru care încărcările și datele geometrice sînt date în tabloul nr. 2.

Calculul prin rezolvarea exactă a determinantului sistemului de ecuații scris în metoda deplasărilor s-a făcut considerînd masele uniform distribuite pe stîlp și rigle, și anume:

$m_r = 10\ m_0$ (aceiași pentru toate riglele),

$m_1 = m_2 = 1{,}65\ m_0$,

$m_3 = m_4 = 1{,}35\ m_0,$
$m_5 = m_6 = m_0.$

Tabloul nr. 2

i	$M_i = \alpha_i M_0$	α_i	$l_i = \lambda_i l_0$	λ_i	$I_i = k_i I_0$	k_i
1	$30{,}55\ m_0 l_0$	1,085	l_0	1	$4{,}7 I_0$	4,7
2	$30{,}10\ m_0 l_0$	1,070	l_0	1	$4{,}7 I_0$	4,7
3	$29{,}65\ m_0 l_0$	1,055	l_0	1	$2{,}4 I_0$	2,4
4	$29{,}13\ m_0 l_0$	1,035	l_0	1	$2{,}4 I_0$	2,4
5	$28{,}60\ m_0 l_0$	1,015	l_0	1	I_0	1,0
6	$28{,}10\ m_0 l_0$	1,000	l_0	1	I_0	1,0

Formulele (2) și (4) s-au aplicat în ipoteza concentrării maselor la nivelul fiecărui etaj.

S-au luat următoarele valori de bază :

$M_0 = 28{,}10\ m_0 l_0$
$I_0 = I_6$
$l_0 = l$

Au rezultat pentru prima frecvență proprie de vibrație valorile :

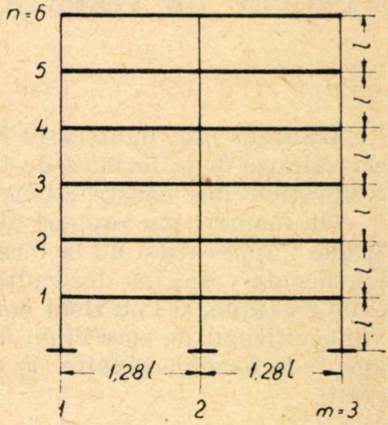


Fig. 4.

— prin rezolvarea exactă a determinantului sistemului de ecuații în metoda deplasărilor

$$\omega_{exact} = 2{,}465 \sqrt{\frac{E I_0}{M_0 l_0^3}}; \qquad (8)$$

— prin aplicarea formulei lui Geiger redusă (7) (prin coeficientul de corecție $\eta_r = 1{,}160$ corespunzător lui $n = 6$) :

$$\omega_1 = 2{,}47 \sqrt{\frac{E I_0}{M_0 l_0^3}}; \qquad (9)$$

— prin aplicarea formulei (4)

$$\omega_I = 2{,}51 \sqrt{\frac{E I_0}{M_0 l_0^3}}. \qquad (10)$$

De fapt rezultatului obținut în (10) i se poate face o reducere de circa 2 % , ajungîndu-se la aceiași valoare rezultată în (9) (reducerea coeficientului η la coeficientul η_r s-a făcut ținînd seama de aceleași procente).

De aici rezultă rapiditatea de calcul și suficienta aproximare în cazul folosirii fie a formulei lui Geiger redusă (7), fie a expresiei (4) în comparație cu un rezultat obținut prin dezvoltări laborioase.

Primită la redacție la 15 iunie 1957.

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ ГЕЙГЕРА К ВЫЧИСЛЕНИЮ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТАВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РАМОЧНЫХ СООРУЖЕНИЙ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Даются дополнительные сведения в связи с областью применения формулы Гейгера (2) для расчета собственной частоты колебаний рамочных сооружений.

На основании результатов, полученных в работах [1], [2], показано, что применение формулы Гейгера к расчету первой частоты колебаний многоярусных рам может быть и в дальнейшем полезно с практической точки зрения, если учитывать формулу перемещений 3) и поправочный коэффициент из таблицы I. В практических целях можно использовать сокращенную формулу (7). Это доказано на примере расчета, данного на рис. 4.

PRÉCISIONS SUR L'APPLICATION DE LA FORMULE DE GEIGER AU CALCUL DE LA PREMIÈRE FRÉQUENCE PROPRE DE VIBRATION DES CONSTRUCTIONS SUR CADRES

(RÉSUMÉ)

L'auteur fait, dans cette Note, des précisions concernant les limites de la validité de la formule de Geiger (2) appliquée à la fréquence propre de vibration des constructions sur cadres.

On montre, par rapport aux résultats obtenus dans les travaux [1], [2], que l'application de la formule de Geiger au calcul de la première fréquence de vibration des cadres étagés peut encore être utile du point de vue pratique, si l'on tient compte de l'expression des déplacements (3) et du coefficient de correction du tableau 1. En pratique, on pourra faire usage de la formule réduite (7). L'exemple de calcul de la figure 4 illustre ce fait.

BIBLIOGRAFIE

1. Mihail Ifrim, *O formulare energetică privind calculul frecvenţei oscilaţiilor proprii ale cadrelor etajate*. Comunicările Acad. R. P. R., t. VII, nr. 7, p. 649.
2. — *Calculul dinamic al cadrelor elastice pe baza principiului conservării energiei*. Studii şi cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, nr. 2, 1957, p. 393.
3. Mario G. Salvadori, *Earthquake Stresses in shear Buildings*. ASCE, t. 119, New York, 1954.
4. I. L. Korcinski, *Kolebania vîsotnîh zdanii*. Moscova, 1953.
5. A. W. Anderson ş. a., *Lateral forces of earthquake and wind*. Proceedings ASCE, t. 77, aprilie 1951.
6. A. P. Filippov, *Kolebania uprughih sistem*. Kiew, 1956.

STUDIU ASUPRA BARAJELOR DE GREUTATE EVIDATE

DE

R. PRIŞCU şi ST. CĂCIULESCU

A. GENERALITĂŢI

Ideea practicării de goluri în corpul barajelor de greutate a apărut datorită faptului că eforturile care acţionează în cele mai solicitate secţiuni ale acestor baraje sînt situate în general sub valorile de care este capabil betonul. O micşorare a secţiunilor active conduce la eforturi efective mai mari şi implicit la o mai raţională utilizare a materialului de construcţie. La baza realizărilor moderne de baraje evidate stă propunerea inginerului italian Figari [5] care prevede ca golurile să fie dispuse în zona de mijloc a barajului şi prelungite pînă în suprafaţa de fundaţie (fig. 1 *a*). Această dispoziţie corespunde întru totul cu modul în care acţionează din punct de vedere static un baraj de greutate şi este justificată de spectrul liniilor de egal efort principal, trasate în ipoteza lacului plin şi gol (fig. 1 *b*). Acesta arată că zonele din interiorul profilului sînt mai puţin solicitate decît cele exterioare şi că, prin urmare, zona care poate fi slăbită este aceea de mijloc.

Deşi propusă încă din anul 1900, ideea lui Figari este perfecţionată şi realizată de-abia în anul 1935 de către A. Stucky prin barajul Dixence din Elveţia [1]. Acest baraj, înalt de 87 m, se compune dintr-o serie de elemente juxtapuse, ale căror dimensiuni rezultă din figura 2 *a*. De remarcat faptul că golurile din rosturi sînt închise în aval.

Începînd din anul 1938, barajele evidate se aplică în numeroase cazuri şi în Italia. Cele 13 baraje construite pînă astăzi, dintre care cel mai înalt este barajul Ancipa din Sicilia ($H = 111{,}50$ m), sînt realizate după proiectele lui C. Marcello. Cel mai cunoscut şi mai reprezentativ este barajul Bau-Muggeris din Sardinia [3] înalt de 63 m, intrat în funcţie în anul 1949. Caracteristicile geometrice ale unui element component, cu golurile din rosturi deschise în aval, rezultă din figura 2 *b*.

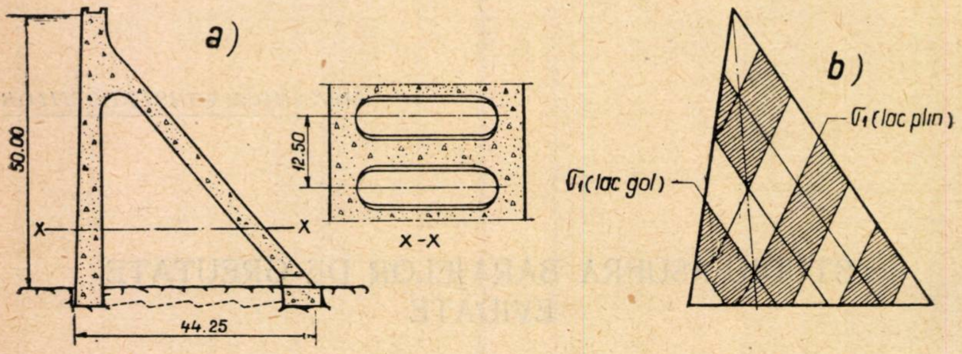

a)
50.00
12.50
X
X
X-X
44.25
b)
σ₁(lac plin)
σ₁(lac gol)

Fig. 1. — *a*) Propunerea Figari ; *b*) linii de egal efort principal.

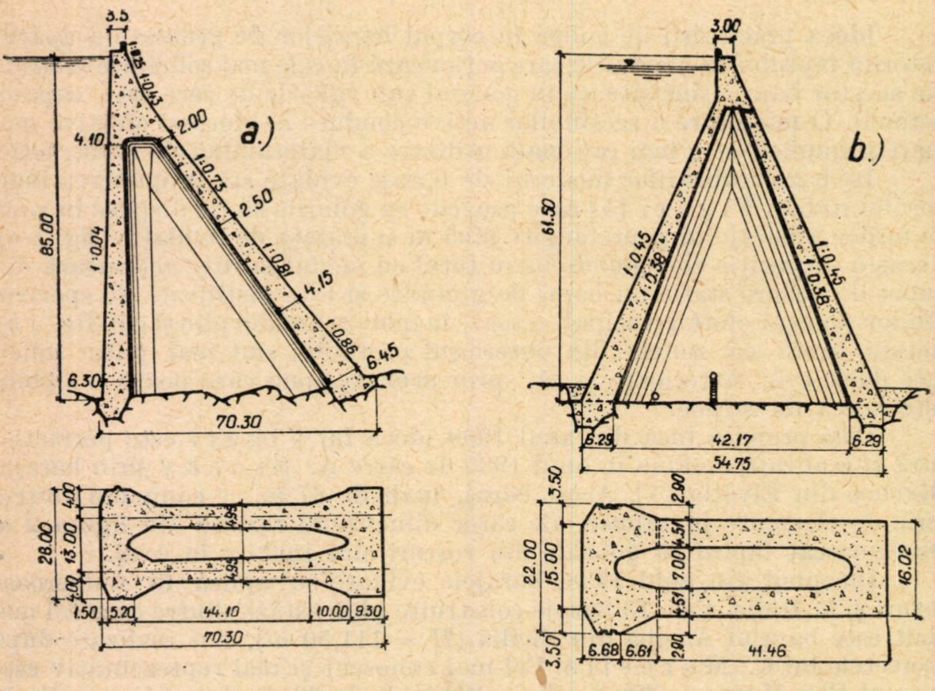

3.5
1:0.25
1:0.43
2.00
a.)
4.10
1:0.73
2.50
85.00
1:0.04
1:0.81
4.15
1:0.86
6.45
6.30
70.30
4.00
28.00
13.00
4.00
4.95
4.95
1.50
5.20
44.10
10.00
9.30
70.30
3.00
b.)
61.50
1:0.45
1:0.38
1:0.45
1:0.38
6.29
42.17
6.29
54.75
3.50
2.90
22.00
15.00
4.51
7.00
4.51
16.02
3.50
6.68
6.61
2.90
41.46

Fig. 2. — *a*) Barajul Dixence ; *b*) barajul Bau-Muggeris.

Avantajele pe care le prezintă barajele de greutate evidate față de cele de greutate obișnuite au fost sintetizate de către C. Marcello în diverse articole apărute în ultimul timp [2], [3], [4]. Pe scurt, acestea ar fi următoarele :

a. Reducerea subpresiunilor care acționează la talpa barajului și a presiunilor din porii betonului, provocate de apele de infiltrație. Acest fenomen se explică prin efectul drenant pe care îl exercită golurile, atît în suprafața de fundație cît și în corpul barajului.

b. Stabilitatea la alunecare, mărită atît prin reducerea subpresiunilor cît și prin contribuția pe care o aduce rezistența la forfecare a rocei, cuprinsă în interiorul golului central al unui element component.

c. Degajarea mai ușoară a căldurii de priză a cimentului, care în cazul barajelor masive aduce multe inconveniente.

d. Economia de beton, care, funcție de tipul de baraj, conduce la o economie mai mare sau mai mică de cost și la o durată de execuție mai redusă.

e. Posibilitatea unei supravegheri directe a comportării construcției, mult mai ușoară și mai eficace decît în cazul barajelor de greutate obișnuite.

Față de avantajele enumerate mai sus este cazul a se indica și unele probleme mai puțin clarificate de care este bine a se ține seama. Acestea sînt :

a. Problema concentrărilor de eforturi în fundațiile care încarcă terenul în mod discontinuu [2].

b. Problema comportării statice a elementelor unui baraj evidat, fundate pe versanți puternic înclinați.

c. Problema efectelor variațiilor de temperatură ale mediului exterior asupra stării de efort a unui baraj evidat și asupra durabilității betoanelor [1].

B. CONDIȚII DE BAZĂ

În lucrarea de față se examinează cele două tipuri de baraje evidate : închis în aval și deschis în aval. Scopul urmărit este acela de a determina, pe baza unor criterii de stabilitate cunoscute, profilele optime, apoi modul în care acestea se comportă din punct de vedere static și economia lor în raport cu barajele de greutate obișnuite.

Sînt de menționat rezultatele interesante obținute de C. Marcello care, admițînd un profil simetric (pantele amonte și aval 1 : 0,45), studiază, comparativ cu un baraj de greutate (panta amonte 1 : 0,06, panta aval 1 : 0,70), variația cu înălțimea barajului a eforturilor, a coeficientului de alunecare și a economiei de volum [3].

Considerînd înălțimea barajului dată, în cele ce urmează se examinează alte aspecte ale problemei și anume : variația pantelor paramentelor, a eforturilor și a economiei de volum funcție de doi parametrii importanți — coeficientul de frecare statică între beton și rocă și coeficientul de evidare. Formulele ce se vor deduce vor putea servi la dimensionarea directă a unui baraj evidat, care, după cum se va arăta, nu are în toate cazurile un profil simetric.

În două lucrări anterioare privind profilul optim al barajelor de greutate obişnuite [6] şi al barajelor de greutate cu rosturi lărgite [7], s-au indicat criteriile utilizate pentru dimensionarea acestor baraje, precum şi ce se înţelege prin denumirea de profil optim.

Primul criteriu constă în condiţia ce se pune ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul. În ipoteza repartiţiei liniare a eforturilor, acest lucru se scrie sub forma

$$\sigma_{am} = \frac{\Sigma V}{\Omega} + \frac{M}{W} = 0. \tag{1}$$

Uneori această condiţie se înlocuieşte cu aceea ca efortul principal de la piciorul amonte, paralel cu paramentul, să fie nul. Deoarece fundaţia este solicitată însă de efortul vertical şi, la înălţimi curente, eforturile principale de tensiune care acţionează de-a lungul paramentului au valori situate sub cele admisibile, se va admite mai departe condiţia enunţată mai sus.

Al doilea criteriu constă în condiţia ce se pune pentru ca profilul să fie stabil la alunecare în secţiunea de fundaţie. Acest lucru este echivalent la limită cu condiţia ca coeficientul de alunecare (raportul între suma forţelor orizontale ΣH şi suma forţelor verticale ΣV) să fie egal cu coeficientul de frecare statică al materialului din care este construit barajul, cu roca de fundaţie

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = f. \tag{2}$$

În cazul barajelor evidate, care beneficiază de o încastrare suficientă în fundaţie, coeficientul de frecare ce se introduce în calcul poate fi mărit faţă de cel determinat prin încercări pe teren cu circa 10 — 20%.

Scriind aceste condiţii pentru barajele de greutate obişnuite, s-au obţinut două ecuaţii avînd ca necunoscute panta aval (λ) şi panta amonte (λ_1) a profilului. Rezolvînd sistemul de ecuaţii au rezultat pantele profilului triunghiular, care în acelaşi timp are efortul vertical amonte nul şi este stabil la alunecare, profil care s-a denumit optim. Expresiile obţinute pentru λ şi λ_1 sînt :

$$\lambda = \frac{\gamma - \lambda_1 f (\gamma + \gamma_b')}{f \gamma_b'}, \tag{3}$$

$$(1 - m)\, \lambda_1^2 + \frac{1}{f} \frac{\gamma_b}{\gamma} \lambda_1 - \frac{1}{f^2} + \frac{\gamma_b'}{\gamma} = 0, \tag{4}$$

iar pentru efortul normal vertical de la piciorul aval

$$\sigma_{av} = \frac{H}{(\lambda_1 + \lambda)^2} [\gamma_b \lambda_1 (\lambda_1 + \lambda) + \gamma (1 - \lambda \lambda_1)]. \tag{5}$$

În aceste relații s-au făcut următoarele notații, care se vor păstra și în continuare:

γ = greutatea specifică a apei;
γ_b = greutatea specifică a betonului;
m = coeficientul de reducere al subpresiunilor;
$\gamma'_b = \gamma_b - m\gamma$.

Aducînd anumite simplificări geometrice barajelor evidate (care rezultă din figurile 5 și 8), se mai fac următoarele notații:

L = lățimea frontală a unui bloc (distanța între două rosturi);
α = coeficientul de evidare, care rezultă făcînd raportul între lățimea totală a golurilor și lățimea L a unui bloc;
β = raportul între lățimea totală a plăcilor laterale (după orizontală) și baza blocului $(\lambda_1 + \lambda)\,H$;
η = raportul între înălțimea plinului de la coronament și înălțimea barajului H;
φ = raportul între înălțimea cuprinsă pe verticala ce trece prin vîrful triunghiului interior și înălțimea barajului H (baraj deschis în aval);
ε = raportul între distanța de la centrul de greutate al secțiunii de fundație la paramentul amonte și jumătatea bazei blocului (baraj deschis în aval).

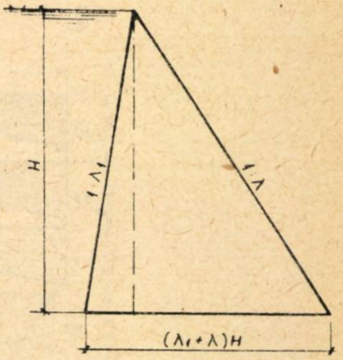


Fig. 3. — Profilul unui baraj de greutate obișnuit.

Pentru a obține expresiile pantelor paramentelor amonte și aval ale celor două tipuri de baraje evidate, se va proceda în același mod cum s-a indicat mai sus pentru barajele de greutate obișnuite.

Asupra subpresiunilor s-a făcut ipoteza că acestea acționează numai asupra plăcii amonte, cu o distribuție liniară de la valoarea presiunii hidrostatice amonte γH, la zero pe marginea aval.

Această ipoteză s-a verificat pe cale experimentală, prin metoda analogiei electrohidrodinamice, în secțiunea de fundație a unui baraj evidat, în studiu. Determinările au fost făcute în Atelierul de cercetări hidraulice I. S. P. E., de către ing. T. Zaharova. În figura 4 se indică unele din rezultatele obținute și anume: spectrul hidrodinamic, în ipoteza scurgerii plane a apelor de infiltrație, practic concentrat în regiunea amonte a suprafeței de fundație (*a*); repartiția subpresiunilor (t/m^2) în diverse secțiuni (*b*) și forțele de subpresiune pe metru linear (*c*). În aceleași schițe sînt indicate comparativ subpresiunile în ipoteza repartiției liniare. Din ultima diagramă rezultă că raportul între subpresiunile totale în cele două cazuri, experimental și liniar este $S_1/S_2 = 1{,}20$, ceea ce conduce la o acoperire a ipotezei admise în calculele ce urmează de circa 20%.

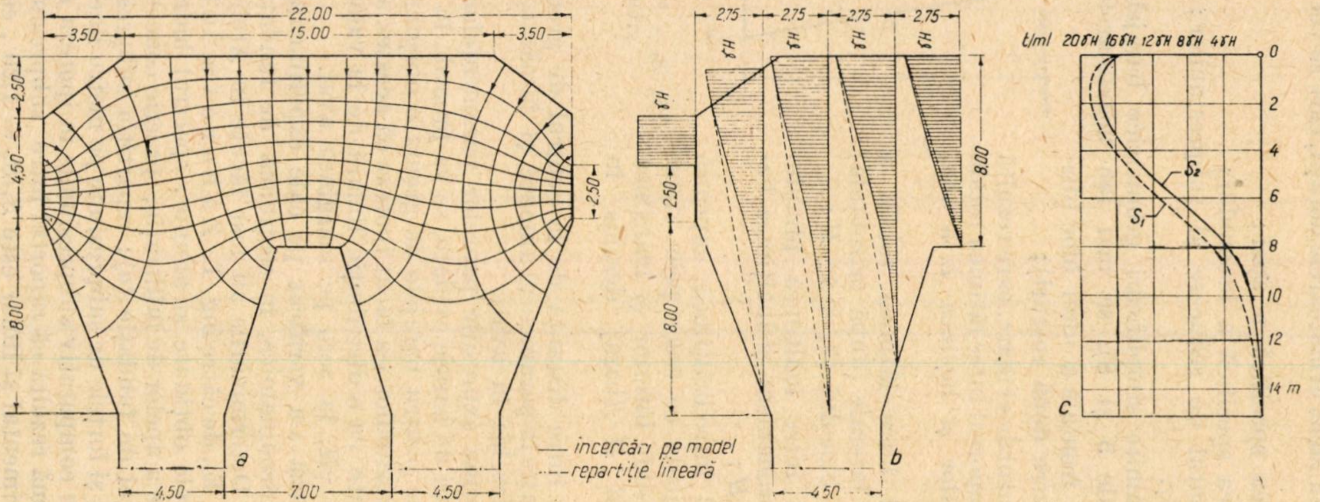

22,00
3,50
15,00
3,50
2,50
4,50
8,00
2,50
a
4,50
7,00
4,50
2,75
2,75
2,75
2,75
γH
γH
γH
γH
γH
2,50
8,00
8,00
b
4,50
— încercări pe model
--- repartiție lineară
t/ml
20γH
16γH
12γH
8γH
4γH
0
2
4
6
8
10
12
14 m
S_2
S_1
c

Fig. 4. — Subpresiuni în suprafața de fundație a unui baraj evidat ; *a*) spectru hidrodinamic ; *b*) subpresiuni în diverse secțiuni ; *c*) repartiția subpresiunilor totale pe unitatea de lungime.

C. BARAJE EVIDATE, ÎNCHISE ÎN AVAL

1. Anularea tensiunilor amonte

Considerînd forțele care acționează asupra barajului în ipoteza lacului plin (fig. 5), se pune condiția ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul.

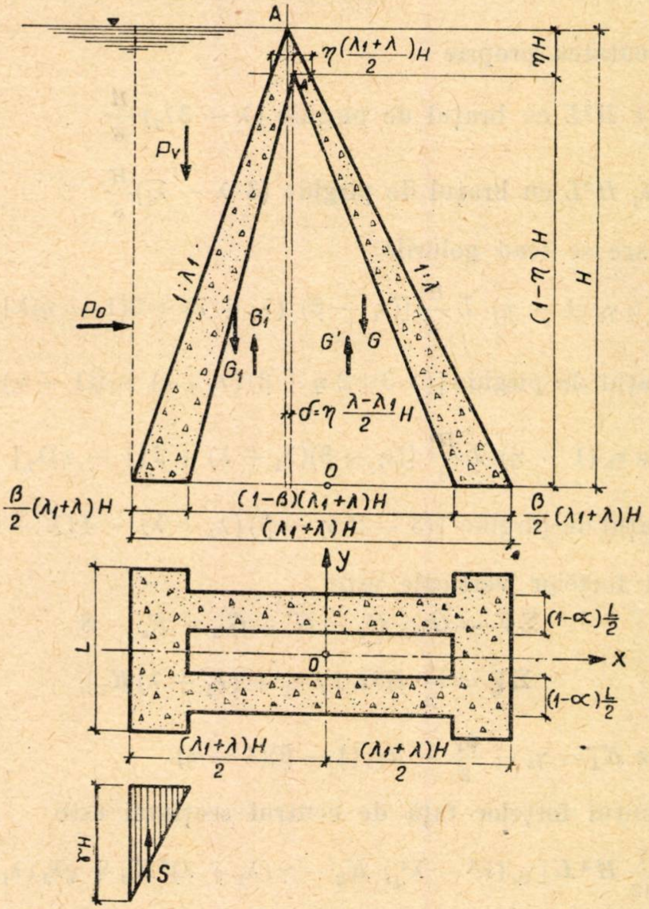

A
$\eta\frac{(\lambda_1+\lambda)}{2}H$
ηH
P_v
$1:\lambda_1$
$1:\lambda$
$H(1-\eta)$
H
P_0
G_1'
G_1
G'
G
$\sigma=\eta\,\frac{\lambda-\lambda_1}{2}H$
O
$\frac{\beta}{2}(\lambda_1+\lambda)H$
$(1-\beta)(\lambda_1+\lambda)H$
$\frac{\beta}{2}(\lambda_1+\lambda)H$
$(\lambda_1+\lambda)H$
y
L
$(1-\alpha)\frac{L}{2}$
X
O
$(1-\alpha)\frac{L}{2}$
$\frac{(\lambda_1+\lambda)H}{2}$
$\frac{(\lambda_1+\lambda)H}{2}$
γH
S

Fig. 5. — Forțele care acționează asupra unui baraj evidat închis în aval.

Forțele care acționează și brațele lor de pîrghie față de centrul de greutate al secțiunii de fundație sînt :

— presiunea orizontală a apei

$P_0 = \frac{1}{2}\,\gamma\,H^2L$ cu brațul de pîrghie $\frac{H}{3}$

— presiunea verticală a apei

$P_v = \frac{1}{2} \gamma \ \lambda_1 \ H^2 L$ cu brațul de pîrghie $(\lambda_1 + 3 \ \lambda) \ \frac{H}{6}$

— subpresiunea

$S = \frac{1}{4} \ \beta \ \gamma(\lambda_1 + \lambda) \ H^2 L$ cu brațul de pîrghie $(3 - \beta)(\lambda_1 + \lambda) \frac{H}{6}$

— greutatea proprie

$G = \frac{1}{2} \ \gamma_b \ \lambda \ H^2 L$ cu brațul de pîrghie $(\lambda - 3\lambda_1) \frac{H}{6}$

$G_1 = \frac{1}{2} \gamma_b \ \lambda_1 \ H^2 L$ cu brațul de pîrghie $(3 \ \lambda - \lambda_1) \frac{H}{6}$

din care se scad golurile

$G' = \alpha \gamma_b (1 - \eta) \ L \frac{H^2}{4} [(\eta - \beta) \ (\lambda_1 + \lambda) + 2(1 - \eta)\lambda]$

cu brațul de pîrghie $[(-3 + 2 \eta + \beta) (\lambda_1 + \lambda) + 4(1 - \eta) \lambda] \frac{H}{6}$

$G'_1 = \alpha \gamma_b (1 - \eta) \ L \frac{H^2}{4} \ [(\eta - \beta)(\lambda_1 + \lambda) + 2 (1 - \eta)\lambda_1]$

cu brațul de pîrghie $[(3 - 2 \ \eta - \beta) (\lambda_1 + \lambda) - 4 (\lambda - \eta) \lambda_1] \frac{H}{6}$.

Suma forțelor verticale este

$$\Sigma V = G + G_1 - G' - G'_1 + P_v - S$$

sau

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2 L \ [\gamma \ \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) \ K_1],$$

în care $K_1 = \gamma_b - \frac{\beta\gamma}{2} - \alpha\gamma_b (1 - \beta)(1 - \eta)$.

Momentul forțelor față de centrul secțiunii este

$$M = \frac{1}{12} H^3 \ L \ [\gamma_b \ (\lambda^2 - \lambda^2_1) \ K_2 - \gamma \ (\lambda_1 + \lambda)^2 K_3 + \gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma],$$

în care

$$K_2 = 1 - \alpha \ (1 - \beta) \ (1 - \eta)^2,$$

$$K_3 = \beta \frac{(3 - \beta)}{2}.$$

Suprafața de fundație este

$$\Omega = LH \ (\lambda_1 + \lambda) \ [1 - \alpha(1 - \beta)] = LH \ (\lambda_1 + \lambda) \ K_4,$$

iar modulul de rezistență față de axa Oy

$$W = \frac{LH^2}{6} (\lambda_1 + \lambda)^2 [1 - \alpha (1 - \beta)^3] = \frac{LH^2}{6} (\lambda_1 + \lambda)^2 K_5.$$

Înlocuind aceste expresii în formula (1), se obțin eforturile normale verticale la picioarele barajului

$$\sigma_{av}^{am} = \frac{H}{2 (\lambda_1 + \lambda)} \left[\frac{\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1}{K_4} \pm \frac{\gamma_b (\lambda^2 - \lambda_1^2) K_2 - \gamma (\lambda_1 + \lambda)^2 K_3 + \gamma\lambda_1 (\lambda_1 + 3\lambda) - 2\gamma}{(\lambda_1 + \lambda) K_5} \right] \tag{6}$$

în care

$$K_4 = 1 - \alpha(1 - \beta) \text{ şi } K_5 = 1 - \alpha (1 - \beta)^3$$

Anulînd efortul amonte se obține ecuația

$$(\lambda_1 + \lambda) K_5 [\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1] + K_4 [\gamma_b (\lambda^2 - \lambda^2{}_1) K_2 - \gamma(\lambda_1 + \lambda)^2 K_3 + \\ + \gamma (\lambda_1 + 3 \lambda) \lambda_1 - 2\gamma] = 0 \tag{6'}$$

2. Stabilitatea la alunecare

Punînd condiția astfel încît coeficientul de alunecare să fie egal cu coeficientul de frecare statică

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = \frac{\gamma}{\gamma\lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda) K_1} = f$$

se obține

$$\boxed{\lambda = \frac{\gamma - \lambda_1 f (\gamma + K_1)}{f K_1}} \tag{7}$$

3. Profilul optim

Înlocuind pe λ cu expresia lui (7) în ecuația (6′) dedusă prin anularea efortului amonte, se obține după lungi transformări ecuația care îl dă pe λ_1 optim (valabilă soluția cu semnul +):

$$\boxed{\begin{aligned} &[\gamma_b (\gamma + 2K_1) K_2 \quad - \gamma^2 K_3 \quad - (3\gamma + 2K_1) K_1] \lambda_1^2 - \\ &- \frac{\gamma}{f} \left[\frac{K_1 K_5}{K_4} + 2 \frac{\gamma_b}{\gamma} (\gamma + K_1) K_2 - 2 \gamma K_3 - 3 K_1 \right] \lambda_1 + \\ &+ \frac{\gamma}{f^2} \left(\frac{K_1 K_5}{K_4} + \gamma_b K_2 - \gamma K_3 - 2 \frac{f^2}{\gamma} K_1^2 \right) = 0 \end{aligned}} \tag{8}$$

4. Concluzii

Pentru a se putea trage unele concluzii, s-au efectuat o serie de calcule numerice bazate pe formulele deduse mai sus. S-au admis următoarele date constante : $\gamma = 1{,}0$ t/m³, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m³ şi $\eta = 0{,}10$. S-au calculat

Tabloul nr. 1

α	λ_1	λ	$\lambda_1 + \lambda$	λ_1	λ	$\lambda_1 + \lambda$	$\frac{\sigma_{av}}{H}$	$\frac{\sigma_{av}}{\sigma_{av\alpha=0}}$	$\frac{\sigma_1}{H}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_1\alpha=0}$	$\frac{V}{V\alpha=0}$	λ_1	λ	$\lambda_1 + \lambda$
$f=0{,}50$														
	$\beta=0{,}20$			$\beta=0{,}25$								$\beta=0{,}30$		
0	0,516	0,441	0,957	0,516	0,441	0,957	2,082	1,000	2,487	1,000	1,000	0,516	0,441	0,957
0,3	0,567	0,275	0,842	0,561	0,281	0,842	3,086	1,474	3,310	1,331	0,701	0,551	0,291	0,842
0,4	0,662	0,208	0,870	0,650	0,219	0,869	3,288	1,579	3,440	1,386	0,662	0,636	0,232	0,868
0,5	0,768	0,130	0,898	0,750	0,144	0,894	3,581	1,720	3,650	1,469	0,618	0,730	0,161	0,891
0,6	0,888	0,034	0,922	0,862	0,054	0,916	3,972	1,910	3,970	1,600	0,569	0,834	0,077	0,911
0,7	1,020	(−0,078)	0,942	0,986	(−0,053)	0,933	4,452	2,170	4,520	1,815	0,513	0,949	(−0,023)	0,926
$f=0{,}60$														
	$\beta=0{,}20$			$\beta=0{,}25$								$\beta=0{,}30$		
0	0,314	0,559	0,873	0,314	0,559	0,873	1,909	1,000	2,505	1,000	1,000	0,314	0,559	0,873
0,3	0,335	0,448	0,783	0,329	0,454	0,783	2,760	1,446	3,333	1,326	0,715	0,320	0,463	0,783
0,4	0,425	0,382	0,807	0,414	0,392	0,806	2,952	1,546	3,400	1,351	0,674	0,400	0,405	0,805
0,5	0,526	0,306	0,832	0,509	0,319	0,828	3,220	1,687	3,540	1,417	0,629	0,490	0,335	0,825
0,6	0,639	0,213	0,852	0,615	0,231	0,846	3,582	1,876	3,760	1,505	0,577	0,589	0,253	0,842
0,7	0,764	0,104	0,868	0,732	0,128	0,860	4,083	2,140	4,140	1,655	0,519	0,697	0,157	0,854

Tabloul nr. 1 (continuare)

	$f=0,70$													
	$\beta=0,20$			$\beta=0,25$							$\beta=0,30$			
0	0,148	0,678	0,826	0,148	0,678	0,826	1,730	1,000	2,525	1,000	1,000	0,148	0,678	0,826
0,3	0,136	0,623	0,759	0,130	0,629	0,759	2,425	1,402	3,380	1,338	0,733	0,122	0,637	0,759
0,4	0,227	0,555	0,782	0,216	0,556	0,781	2,618	1,513	3,440	1,365	0,690	0,203	0,577	0,780
0,5	0,327	0,473	0,800	0,311	0,488	0,799	2,875	1,655	3,550	1,403	0,641	0,293	0,504	0,797
0,6	0,440	0,379	0,819	0,416	0,398	0,814	3,190	1,845	3,685	1,465	0,587	0,391	0,420	0,811
0,7	0,561	0,272	0,833	0,532	0,292	0,824	3,651	2,110	3,960	1,570	0,526	0,498	0,321	0,819

	$f=0,80$													
	$\beta=0,20$			$\beta=-0,25$							$\beta=0,30$			
0	0,004	0,799	0,803	0,004	0,799	0,803	1,555	1,000	2,549	1,000	1,000	0,004	0,799	0,803
0,3	(−0,051)	0,815	0,764	(−0,056)	0,820	0,764	2,111	1,357	3,530	1,384	0,758	(−0,064)	0,828	0,764
0,4	0,045	0,738	0,783	0,035	0,747	0,782	2,282	1,467	3,550	1,394	0,710	0,022	0,759	0,781
0,5	0,151	0,650	0,801	0,135	0,663	0,798	2,508	1,612	3,600	1,415	0,657	0,116	0,680	0,796
0,6	0,268	0,546	0,814	0,244	0,565	0,809	2,810	1,808	3,700	1,450	0,599	0,218	0,588	0,806
0,7	0,396	0,425	0,821	0,364	0,451	0,815	3,231	2,080	3,870	1,530	0,535	0,329	0,482	0,811

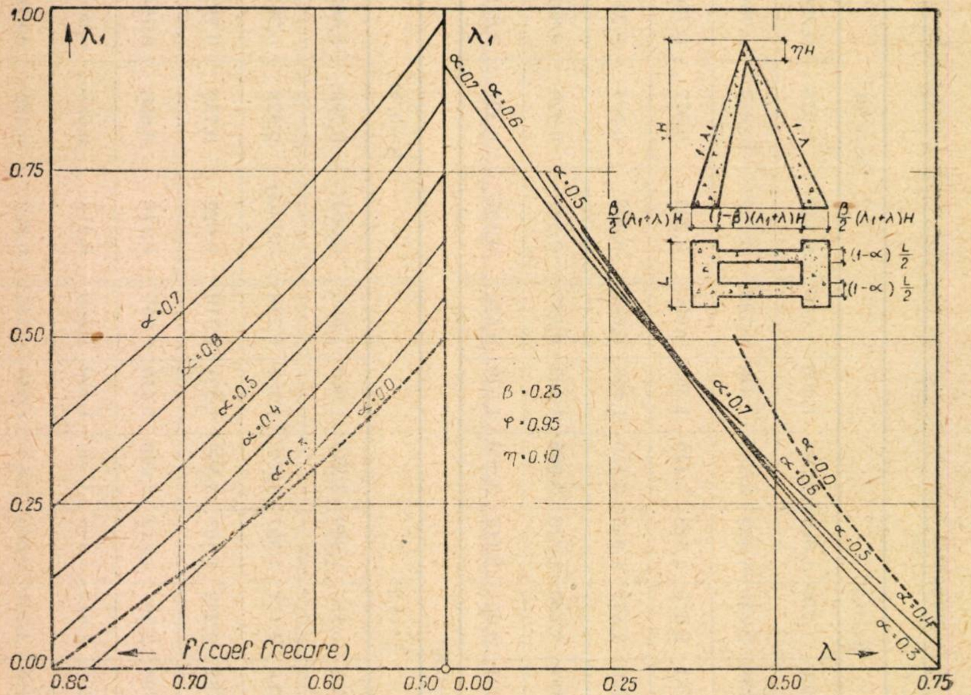


Fig. 6. — Variația lui λ și λ_1 funcție de coeficientul de frecare statică (f) și de coeficientul de evidare (α), în cazul unui baraj evidat închis în aval.

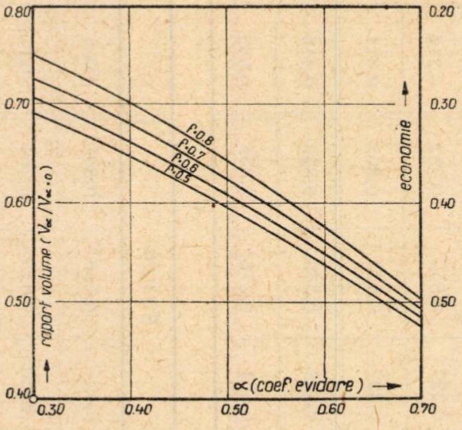


Fig. 7. — Variația raportului între volumele de beton pe metru liniar ale unui baraj evidat, închis în aval, și ale unui baraj de greutate obișnuit ($m = 0{,}75$).

diferitele valori caracteristice, făcîndu-se să varieze : coeficientul de frecare statică f (de la 0,50 la 0,80), coeficientul de evidare α (de la 0,30 la 0,70) şi coeficientul β (de la 0,20 la 0,30). Pentru $\beta = 0,25$ (cifră care se realizează în mod obişnuit) s-au calculat eforturile specifice de la piciorul aval σ_{av}/H (vertical) şi σ_1/H (principal), precum şi, comparativ cu barajele de greutate obişnuite, rapoartele între volume pe metru liniar, între eforturile verticale şi cele principale de la piciorul aval.

Volumele de beton pe metru liniar de baraj s-au calculat :

— pentru barajul de greutate obişnuit după formula

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)\, H^2 \tag{9}$$

— pentru barajul evidat, închis în aval, după formula

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)\, [1 - \alpha(1 - \beta)\, (1 - \eta)]\, H^2 \tag{10}$$

Rezultatele obţinute sînt trecute în tabloul nr. 1 şi, pentru $\beta = 0,25$, în diagramele din figurile 6 şi 7.

Examinînd cifrele obţinute, se pot trage următoarele concluzii :

a. *Coeficientul* β (*grosimea relativă a plăcilor amonte și aval*) *nu are practic nici o influenţă asupra înclinării celor două paramente* (*tabloul nr. 1*).

b. *Înclinarea paramentului amonte faţă de verticală* (λ_1) *este puternic influenţată de coeficientul de frecare statică* (f) *și de coeficientul de evidare* (α). *Ea este cu atît mai mare cu cît* f *este mai mic și* α *mai mare. Înclinarea paramentului aval faţă de verticală* (λ) *nu variază practic cu coeficientul de evidare* (*fig. 6*).

c. *În cazuri normale* ($\beta = 0,25$ *și* $\alpha = 0,60$), *eforturile verticale dela piciorul aval sînt cu circa 80% mai mari decît pentru barajul de greutate obişnuit, iar cele principale cu circa 50%* (*fapt care se explică prin înclinarea mai redusă a paramentului aval faţă de verticală — tabloul nr. 1*).

d. *Economia de volum crește cu coeficientul de evidare, atingînd un procent de 40 % pentru* $\alpha = 0,60$ (*fig. 7*). *Această economie teoretică se micșorează însă cu cîteva procente prin introducerea vutelor de racord, a coronamentului, și cu deosebire prin forma văii barate care poate fi diferită de cea dreptunghiulară.*

MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848

D. BARAJE EVIDATE, DESCHISE ÎN AVAL

Pentru simplificarea calculelor se va admite că golurile laterale au respectiv lăţimea pe jumătate din aceea a golului central. În acelaşi scop, coeficientul φ, a cărui valoare este foarte apropiată de unitate, se va considera egal cu 1,0, deşi într-o primă fază formulele s-au dedus ţinînd seama de el. Coeficientul de evidare α, care rezultă făcînd raportul între lăţimea totală a golurilor şi lăţimea blocului L, îşi păstrează şi în acest caz semnificaţia.

1. Anularea tensiunilor amonte

Considerînd forțele care acționează asupra barajului în ipoteza lacului plin (fig. 8), se pune condiția ca efortul normal vertical de la piciorul amonte să fie nul.

Forțele care acționează și brațele lor de pîrghie față de centrul de greutate al secțiunii de fundație, depărtat cu $\varepsilon \frac{(\lambda_1+\lambda)}{2} H$ față de paramentul amonte, sînt :

— presiunea orizontală a apei

$P_0 = \frac{1}{2} \gamma H^2 L$ cu brațul de pîrghie $\frac{H}{3}$

— presiunea verticală a apei

$P_v = \frac{1}{2} \gamma \lambda_1 H^2 L$ cu brațul de pîrghie $[(3\varepsilon - 2)\lambda_1 + 3\varepsilon\lambda] \frac{H}{6}$

— subpresiunea

$S = \frac{1}{4} \beta\gamma(\lambda_1+\lambda) H^2 L$ cu brațul de pîrghie $(3\varepsilon - \beta)(\lambda_1+\lambda) \frac{H}{6}$

— greutatea proprie

$G = \frac{1}{2} \gamma_b \lambda H^2 L$ cu brațul de pîrghie $[3(2-\varepsilon)(\lambda_1+\lambda) - 4\lambda] \frac{H}{6}$

$G_1 = \frac{1}{2} \gamma_b \lambda_1 H^2 L$ cu brațul de pîrghie $[3\varepsilon(\lambda_1+\lambda) - 4\lambda_1] \frac{H}{6}$

din care se scad :

— golul interior, aval de verticala punctului A'

$$G' = \frac{1}{8} \alpha\gamma_b (1-\eta) [(\eta-\beta)(\lambda_1+\lambda) + 2(1-\eta)\lambda] H^2 L$$

cu brațul de pîrghie $[(6 - 3\varepsilon - 2\eta - \beta)(\lambda_1+\lambda) - 4(1-\eta)\lambda] \frac{H}{6}$

— golul interior și golurile laterale, amonte de verticala punctului A'

$$G_1' = \frac{1}{4} \alpha\gamma_b (1-\eta) [(\eta-\beta)(\lambda_1+\lambda) + 2(1-\eta)\lambda_1] H^2 L$$

cu brațul de pîrghie $[(3\varepsilon - 2\eta - \beta)(\lambda_1+\lambda) - 4(1-\eta)\lambda_1] \frac{H}{6}$

— golurile laterale, aval de verticala punctului A'

$$G'' = \frac{1}{8} \alpha \gamma_b [(2-\eta)\lambda + \eta\lambda_1] H^2 L$$

cu brațul de pîrghie $[(6 - 3\varepsilon - 2\eta)(\lambda_1+\lambda) - 4(1-\eta)\lambda] \frac{H}{6}$.

Suma forțelor verticale este

$$\Sigma V = G + G_1 - G' - G_1' - G'' + P_v - S$$

sau

$$\Sigma V = \frac{1}{2} H^2 L \, (K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda)$$

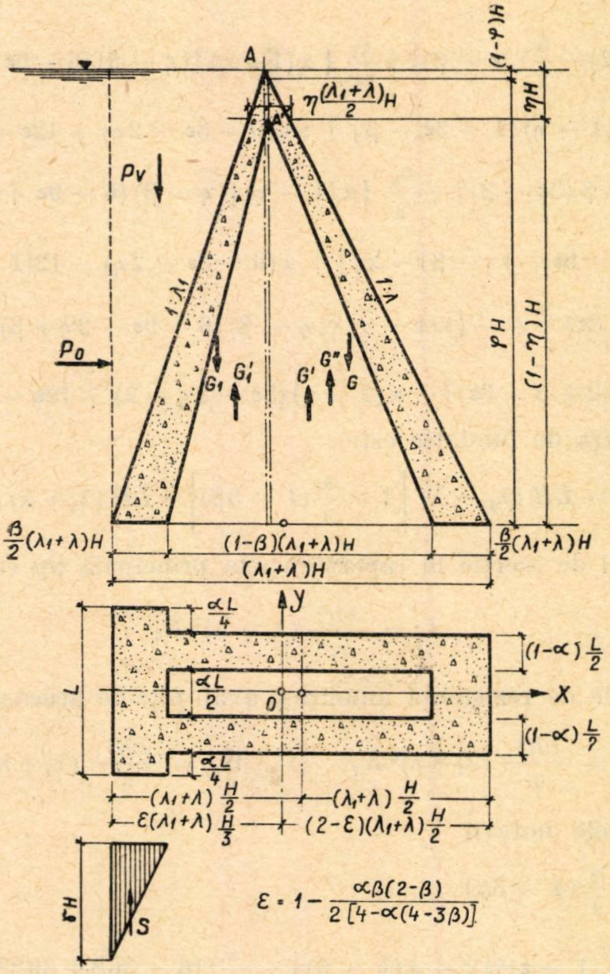

A
A'
$\eta \frac{(\lambda_1+\lambda)}{2} H$
$(1-\varphi)H$
ηH
φH
$H(1-\eta)$
p_v
p_0
$1:\lambda_1$
$1:\lambda$
G_1
G_1'
G'
G''
G
$\frac{\beta}{2}(\lambda_1+\lambda)H$
$(1-\beta)(\lambda_1+\lambda)H$
$\frac{\beta}{2}(\lambda_1+\lambda)H$
$(\lambda_1+\lambda)H$
y
$\frac{\alpha L}{4}$
$(1-\alpha)\frac{L}{2}$
L
$\frac{\alpha L}{2}$
0
X
$(1-\alpha)\frac{L}{2}$
$\frac{\alpha L}{4}$
$(\lambda_1+\lambda)\frac{H}{2}$
$(\lambda_1+\lambda)\frac{H}{2}$
$\varepsilon(\lambda_1+\lambda)\frac{H}{3}$
$(2-\varepsilon)(\lambda_1+\lambda)\frac{H}{2}$
φH
S
$\varepsilon = 1 - \frac{\alpha\beta(2-\beta)}{2[4-\alpha(4-3\beta)]}$

Fig. 8. — Forţele care acţionează asupra unui baraj evidat deschis în aval.

în care

$$K_1 = \frac{\gamma_b}{4} \, [4 - \alpha(1-\eta)(5 - 3\beta - \eta) + \alpha] + \gamma \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)$$

$$K_2 = \frac{\gamma_b}{4} [4 - \alpha\,(1-\eta)(3 - 3\beta + \eta) - \alpha] - \gamma \frac{\beta}{2} \cdot$$

Momentul forțelor față de centrul de greutate al secțiunii este

$$M = \frac{1}{12} H^3 L (K_3 \lambda_1^2 + K_4 \lambda_1 \lambda + K_5 \lambda^2 - 2\gamma)$$

în care

$$K_3 = \gamma [(3\varepsilon - 2) - \frac{\beta}{2}(3\varepsilon - \beta)] + \frac{\gamma_b}{4} \{ \alpha (1 - \eta) [(\eta - \beta)(6 - 9\varepsilon + 2\eta + \beta) +$$

$$+ 4 (1 - \eta)(4 - 3\varepsilon - \beta] + \alpha\eta (6 - 3\varepsilon - 2\eta) + 12\varepsilon - 16\}$$

$$K_4 = \gamma [3\varepsilon - \beta (3\varepsilon - \beta)] + \frac{\gamma_b}{2} \{\alpha (1 - \eta) [(\eta - \beta)(6 - 9\varepsilon + 2\eta + \beta) +$$

$$+ (1 - \eta)(6 - 9\varepsilon + 4\eta - - \beta) - 2\eta] + \alpha (6 - 3\varepsilon - 2\eta) - 12(1 - \varepsilon)\}$$

$$K_5 = \gamma (\beta - 3\varepsilon) \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma_b}{4} \{\alpha(1 - \eta) [(\eta - \beta)(6 - 9\varepsilon + 2\eta + \beta) +$$

$$+ 2 (1 - \eta) (2 + \beta - 3\varepsilon)] - \alpha (2 - \eta)(3\varepsilon - 2\eta - 2) + 12\varepsilon - 8\}$$

Suprafața de fundație este

$$\Omega = LH (\lambda_1 + \lambda) \left[1 - \frac{\alpha}{4}(4 - 3\beta)\right] = LH (\lambda_1 + \lambda) K_6,$$

iar momentul de inerție în raport cu axa principală *Oy* este

$$I_y = \frac{LH^3}{12} (\lambda_1 + \lambda)^3 K_7'$$

Modulele de rezistență amonte și aval, față de aceeași axă *Oy*, sînt

$$W_{am} = \frac{LH^2}{6} (\lambda_1 + \lambda)^2 K_7 \quad \text{și} \quad W_{av} = \frac{LH^2}{6} (\lambda_1 + \lambda)^2 K_8$$

cu următoarele notații

$$K_6 = 1 - \frac{\alpha}{4} (4 - 3\beta)$$

$$K_7' = 1 + \frac{3}{2}(1 - \varepsilon)^2 [2 - \alpha (1 - \beta)] - \frac{\alpha}{16}(16 - 36\beta + 30\beta^2 - 9\beta^3) -$$

$$- \frac{3}{2} \alpha \left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\left(1 - \varepsilon + \frac{\beta}{2}\right)^2$$

$$K_7 = \frac{K_7'}{\varepsilon}$$

$$K_8 = \frac{K_7'}{2 - \varepsilon}$$

Înlocuind expresiile obținute în formula (1) se obține efortul vertical amonte

$$\sigma_{am} = \frac{H}{2\,(\lambda_1 + \lambda)} \left[\frac{\lambda_1 K_1 + \lambda K_2}{K_6} + \frac{K_3 \lambda_1^2 + K_4 \lambda_1 \lambda + K_5 \lambda^2 - 2\gamma}{(\lambda_1 + \lambda)\, K_7} \right] \qquad (11)$$

care, anulat, conduce la ecuația

$$K_7 (\lambda_1 + \lambda)\,(\lambda_1 K_1 + \lambda\, K_2) + K_6 (K_3 \lambda_1^2 + K_4 \lambda_1 \lambda + K_5 \lambda^2 - 2\gamma) = 0 \qquad (11')$$

și efortul vertical aval

$$\sigma_{av} = \frac{H}{2\,(\lambda_1 + \lambda)} \left[\frac{\lambda_1 K_1 + \lambda K_2}{K_6} - \frac{K_3 \lambda_1^2 + K_4 \lambda_1 \lambda + K_5 \lambda^2 - 2\gamma}{(\lambda_1 + \lambda)\, K_8} \right] \qquad (12)$$

2. Stabilitatea la alunecare

Punînd condiția astfel încît coeficientul de alunecare să fie egal cu coeficientul de frecare statică f

$$\frac{\Sigma H}{\Sigma V} = \frac{\gamma}{K_1 \lambda_1 + K_2\, \lambda} = f$$

se obține

$$\boxed{\lambda = \frac{\gamma - \lambda_1 f K_1}{f K_2}} \qquad (13)$$

3. Profilul optim

Înlocuind pe λ cu expresia lui (13) în ecuația (11') dedusă prin anularea efortului amonte, se obține după lungi transformări ecuația care îl dă pe λ_1 optim (valabilă soluția cu semnul $+$):

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{K_2\, K_3}{K_1} - K_4 + \frac{K_1\, K_5}{K_2}\right) K_6\, \lambda_1^2 + \\ &+ \frac{\gamma}{f}\left(\frac{K_2\, K_7}{K_1} - K_7 + \frac{K_4\, K_6}{K_1} - 2\, \frac{K_5\, K_6}{K_2}\right)\lambda_1 + \\ &+ \frac{1}{K_1}\, \frac{\gamma^2}{f^2}\left(K_7 + \frac{K_5\, K_6}{K_2} - 2\, \frac{f^2}{\gamma}\, K_2 K_6\right) = 0 \end{aligned}} \qquad (14)$$

4. Concluzii

La fel ca în cazul barajelor evidate închise în aval, s-au efectuat o serie de calcule numerice, admițîndu-se următoarele date constante: $\gamma = 1{,}0$ t/m^3, $\gamma_b = 2{,}3$ t/m^3, $\eta = 0{,}10$ și $\varphi = 0{,}95$. S-au calculat diferitele

Tabloul nr. 2

α	λ_1	λ	$\lambda_1+\lambda$	λ_1	λ	$\lambda_1+\lambda$	$\frac{\sigma_{av}}{H}$	$\frac{\sigma_v}{\sigma_{av\alpha=0}}$	$\frac{\sigma_1}{H}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{1\alpha=0}}$	$\frac{V}{V_{\alpha=0}}$	λ_1	λ	$\lambda_1+\lambda$
$f = 0{,}50$														
	$\beta = 0{,}20$			$\beta = 0{,}25$								$\beta = 0{,}30$		
0	0,516	0,441	0,957	0,516	0,441	0,957	2,082	1,000	2,487	1,000	1,000	0,516	0,441	0,957
0,3	0,568	0,286	0,854	0,559	0,295	0,854	3,164	1,520	3,439	1,382	0,691	0,551	0,303	0,854
0,4	0,658	0,227	0,885	0,646	0,739	0,885	3,456	1,660	3,653	1,468	0,646	0,636	0,249	0,885
0,5	0,757	0,158	0,915	0,744	0,171	0,915	3,858	1,853	3,971	1,596	0,596	0,729	0,186	0,915
0,6	0,868	0,075	0,943	0,852	0,090	0,942	4,429	2,127	4,465	1,795	0,539	0,831	0,110	0,941
0,7	0,991	(−0,027)	0,964	0,968	(−0,060)	0,962	5,286	2,539	5,286	2,125	0,475	0,943	0,018	0,961
$f = 0{,}60$														
	$\beta=0{,}20$			$\beta = 0{,}25$								$\beta = 0{,}30$		
0	0,314	0,559	0,873	0,314	0,559	0,873	1,909	1,000	2,505	1,000	1,000	0,314	0,559	0,873
0,3	0,339	0,458	0,797	0,332	0,465	0,797	2,828	1,481	3,438	1,372	0,707	0,325	0,472	0,797
0,4	0,427	0,399	0,826	0,417	0,408	0,826	3,090	1,618	3,605	1,439	0,661	0,408	0,418	0,826
0,5	0,523	0,330	0,853	0,511	0,341	0,853	3,451	1,807	3,852	1,537	0,609	0,498	0,455	0,853
0,6	0,631	0,246	0,877	0,615	0,261	0,876	3,968	2,078	4,238	1,691	0,550	0,596	0,279	0,875
0,7	0,749	0,147	0,896	0,728	0,166	0,894	4,747	2,486	4,877	1,946	0,484	0,704	0,188	0,892

Tabloul nr. 2 (continuare)

	f = 0,70													
	β = 0,20			β = 0,25								β = 0,30		
0	0,148	0,678	0,826	0,148	0,678	0,826	1,730	1,000	2,525	1,000	1,000	0,148	0,678	0,826
0,3	0,145	0,631	0,776	0,139	0,637	0,776	2,490	1,439	3,499	1,385	0,727	0,132	0,644	0,776
0,4	0,235	0,567	0,802	0,226	0,576	0,802	2,726	1,575	3,631	1,438	0,629	0,216	0,586	0,802
0,5	0,333	0,494	0,827	0,322	0,505	0,827	3,047	1,761	3,825	1,514	0,624	0,309	0,518	0,827
0,6	0,443	0,406	0,849	0,427	0,421	0,848	3,512	2,030	4,135	1,637	0,562	0,408	0,439	0,847
0,7	0,561	0,303	0,864	0,540	0,322	0,862	4,214	2,436	4,651	1,841	0,494	0,516	0,344	0,860

	f = 0,80													
	β = 0,20			β = 0,25								β = 0,30		
0	0,004	0,799	0,803	0,004	0,799	0,803	1,555	1,000	2,549	1,000	1,000	0,004	0,799	0,803
0,3	(−0,036)	0,818	0,782	(−0,041)	0,823	0,782	2,161	1,389	3,602	1,413	0,753	(−0,048)	0,830	0,782
0,4	0,061	0,745	0,806	0,053	0,754	0,806	2,373	1,526	3,721	1,460	0,701	0,044	0,762	0,806
0,5	0,166	0,662	0,828	0,155	0,673	0,828	2,665	1,713	3,872	1,519	0,642	0,142	0,686	0,828
0,6	0,282	0,565	0,847	0,266	0,580	0,846	3,081	1,981	4,116	1,615	0,577	0,248	0,587	0,845
0,7	0,404	0,457	0,861	0,386	0,473	0,859	3,711	2,386	4,534	1,780	0,504	0,362	0,495	0,853

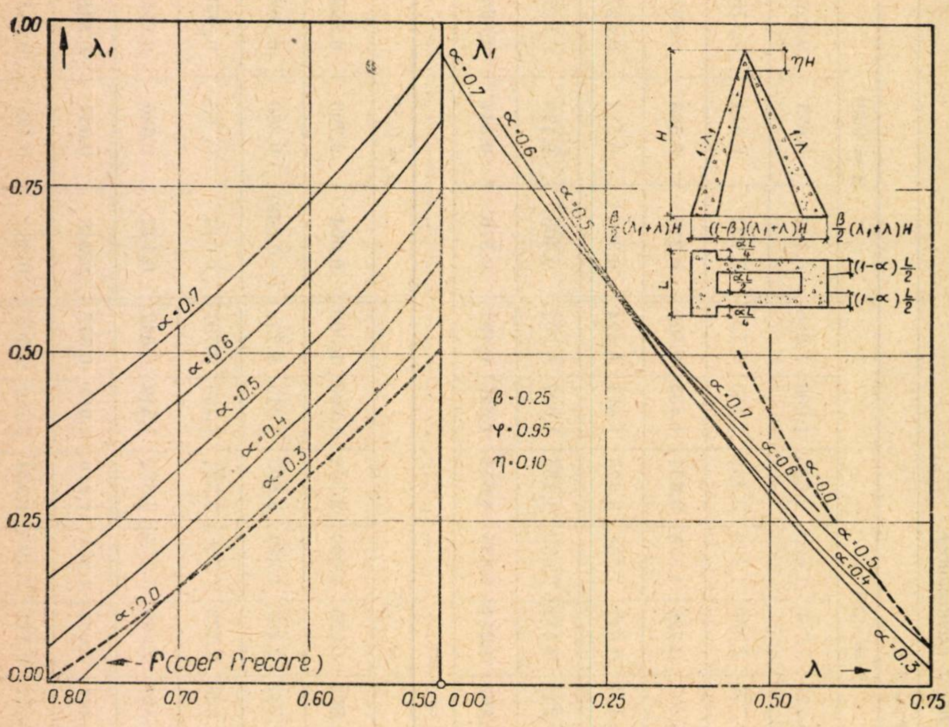


Fig. 9. — Variaţia lui λ şi λ_1 funcţie de coeficientul de frecare statică (f) şi de coeficientul de evidare (α) în cazul unui baraj evidat, deschis în aval.

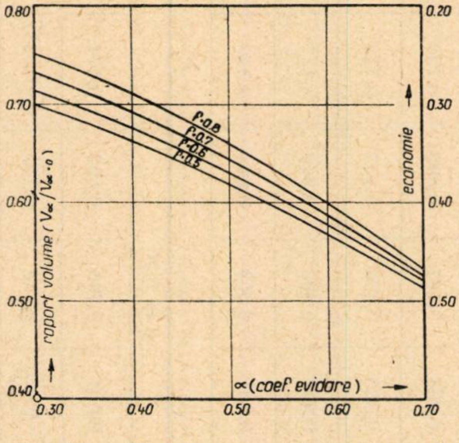


Fig. 10. — Variaţia raportului între volumele de beton pe metru liniar ale unui baraj evidat, deschis în aval şi ale unui baraj de greutate obişnuit ($m = 0{,}75$).

valori caracteristice, făcîndu-se să varieze coeficientul de frecare statică f, coeficientul de evidare α şi coeficientul β.

Volumul de beton pe metru liniar, pentru barajul evidat deschis în aval, s-a calculat după formula

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda)\left[1 - \frac{\alpha}{2}(1 - \beta)(1 - \eta) - \alpha\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\varphi\right]H^2 \qquad (15)$$

Rezultatele obţinute sînt trecute în tabloul nr. 2 şi, pentru $\beta = 0{,}25$, în diagramele din figurile 9 şi 10.

Examinînd cifrele obţinute, se pot trage următoarele concluzii :

a. *Ca şi în cazul barajelor evidate închise în aval, coeficientul* β (*grosimea relativă a plăcilor amonte şi aval*) *nu are practic nici o influenţă asupra înclinării celor două paramente* (*tabloul nr. 2*).

b. *De asemenea, înclinarea paramentului amonte faţă de verticală* (λ_1) *este puternic influenţată de coeficientul de frecare statică* (f) *şi de coeficientul de evidare* (α). *Ea este cu atît mai mare cu cît f este mai mic şi α mai mare. Înclinarea paramentului aval faţă de verticală* (λ) *nu variază practic cu coeficientul de evidare* (*fig. 9*).

c. *În cazuri normale* ($\beta = 0{,}25$ *şi* $\alpha = 0{,}60$), *eforturile verticale de la piciorul aval sînt cu circa 100% mai mari decît pentru barajul de greutate obişnuit, iar cele principale cu circa 70%* (*fapt care se explică prin înclinarea mai redusă a paramentului aval faţă de verticală — tabloul nr. 2*).

d. *Economia de volum creşte cu coeficientul de evidare, atingînd un procent de 45% pentru $\alpha = 0{,}60$* (*fig. 10*). *Ca şi în cazul precedent, această economie teoretică se micşorează însă cu cîteva procente prin introducerea vutelor de racord, a coronamentului şi cu deosebire prin forma văii barate, care poate fi diferită de cea dreptunghiulară.*

★

Din cele expuse mai sus se pot desprinde cîteva concluzii de ordin general, care, într-o anumită măsură, completează cele cunoscute pînă acum despre barajele evidate. Elementele noi care fac posibilă o apreciere mai concretă a celor două tipuri, închis şi deschis în aval, precum şi o dimensionare directă, sînt următoarele :

1. Un profil de baraj evidat se acomodează în mod preponderent cu capacitatea de rezistenţă la alunecare a terenului prin înclinarea paramentului amonte. Acesta, folosind pentru stabilitate efectul componentei verticale a presiunii apei, devine cu atît mai înclinat faţă de verticală cu cît evidarea este mai accentuată şi rezistenţa la alunecare mai redusă. Deci, cu cît evidarea creşte, forma profilului se apropie mai mult de aceea a barajelor cu pile subţiri de diferite tipuri (Noetzli, Ambursen sau cu bolţi multiple), înclinate mult faţă de verticală în amonte şi mai puţin în aval.

2. Secţiunile de fundaţie reducîndu-se faţă de cazul barajelor de greutate obişnuite, eforturile verticale de la piciorul aval cresc teoretic cu 80% pînă la 100%, iar cele principale cu 50% pînă la 70%. Prin aceasta materialul de construcţie, care în general este capabil de eforturi mai mari, este mai bine utilizat, în timp ce pentru roca de fundaţie se impun condiţii mai

pretențioase decît în cazul barajelor de greutate obișnuite. Aceste condiții, înrăutățite într-o oarecare măsură de discontinuitatea fundațiilor, privesc atît rezistența rocei în sine, cît și comportarea ei sub acțiunea apelor de infiltrație, care se scurg cu gradienți măriți.

3. În schimbul unei calități mai ridicate cerute rocei de fundație, formele mai zvelte ale barajelor evidate conduc la economii de volum substanțiale (în jur de 40%). Economia de cost propriu-zisă se reduce însă cu cîteva procente din cauza îngroșărilor constructive, a prețului mai ridicat pe metru cub de beton și a formei geometrice a văii barate.

Primită la redacție la 11 mai 1957.

ОБ ОБЛЕГЧЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПЛОТИНАХ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

В настоящей работе рассматриваются 2 типа облегченных плотин: с перекрытыми и открытыми свобми на низовой стороне. На основании критериев устойчивости на опрокидывание и на скольжение определяются оптимальные профили, а затем работа их со статической точки зрения и получаемая по отношению к обычным гравитационным плотинам экономия.

После общего описания облегченных плотин даются некоторые формулы, при помощи которых исследуется колебание уклонов граней, напряжений и экономии объема в зависимости от двух основных параметров — коэффициента статического трения между бетоном и породой и коэффициента облегчения (отношение ширины пустот к общей ширине одного блока).

В основном выводе следующие.

1. Профиль облегченной плотины лучше всего приспособлен к сопротивляемости на скольжение грунта благодаря уклону верховой грани. Последняя приобретает тем больший уклон к вертикали, чем больше облегченность и чем меньше сопротивление на скольжение.

2. Поскольку сечения основания меньше, чем в обычных гравитационных плотинах, вертикальные напряжения у низовой пяты теоретически повышаются на 80 — 100%, а главные — на 50 — 70%. Благодаря этому строительный материал, который вообще может выдержать большие напряжения, лучше использован, в то время как требования, предъявляемые грунту основания, более строгие, чем в случае обычных гравитационных плотин.

3. Требуемое высокое качество грунта основания компенсируется тем, что легкие формы облегченных плотин приводят к существенной экономии объема бетона (около 40%) по сравнению с обычными гравитационными плотинами. Экономия стоимости несколько меньшая по причине различных факторов.

ОБЪЯСНЕНИЕ РИСУНКОВ

Рис. 1. — *a* — предложение Фигари ; *b* — линия главного одинакового напряжения.

Рис. 2. — *a* — плотина Диксенса *b* — плотив Бау-Мугтериса.

Рис. 3. — Профиль обычной гравитационной плотины.

Рис. 4. — Противодавление на поверхности основания облегченной плотины. *a* — гидродинамический спектр ; *b* противодавление в разных профилях ; *c* — распределение суммарное противодавление на единицу длины.

Рис. 5. — Силы, действующие на облегченную плотину с перекрытыми с низовой стороны швами.

Рис. 6. — Изменения λ и λ_1 в зависимости от коэффициента статического трения (f) и коэффициента облегчения (α) в случае облегченной плотины с перекрытыми с низовой стороны швами.

Рис. 7. — Изменения отношения между объемами бетона на линейный метр облегченной плотины с перекрытыми с низовой стороны швами и обычной гравитационной плотины $(m = 0{,}75)$.

Рис. 8. — Силы, действующие на облегченную плотину с открытыми с низовой стороны швами.

Рис. 9. — Изменения λ и λ_1 в зависимости от коэффициента статического трения (f) и коэффициента облегчения (α) в случае облегченной плотины с открытыми с низовой стороны швами.

Рис. 10. — Изменения отношения между объемами бетона на линейный метр облегченной илотины с открытыми с низовой стороны швами и обычной гравитационной плотины $(m = 0{,}75)$.

ÉTUDE SUR LES BARRAGES À GRAVITÉ, ÉVIDÉS

(RÉSUMÉ)

Dans le présent travail, on étudie deux types de barrages évidés : fermés (fig. 5) et ouverts au parement aval (fig. 8). En considérant la condition de non-extension et la condition de stabilité au glissement, on détermine les profils optimums, leur comportement au point de vue statique et l'économie qu'ils représentent par rapport aux barrages à gravité usuels.

Après une présentation générale des barrages évidés, on déduit quelques formules à l'aide desquelles on étudie la variation des pentes des parements, des efforts et de l'économie du volume, en fonction de deux paramètres importants : le coefficient de frottement statique et le coefficient d'évidement (le rapport entre la largeur des évidements et la largeur totale d'un bloc).

Les conclusions finales sont, en résumé, les suivantes :

1. Le profil d'un barrage évidé s'adapte avec prépondérance à la capacité de résistance au glissement du terrain par l'inclinaison du parement amont. Ce dernier devient d'autant plus incliné, par rapport à la veticale, que l'évidement est plus accentué et la résistance au glissement, moindre.

2. Les sections des fondations étant plus réduites, par rapport à celles des barrages à gravité usuels, les efforts verticaux au pied du parement aval augmentent théoriquement de 80% à 100% et les efforts principaux, de 50% à 70%. Le matériel de construction, qui en général est capable

d'efforts plus importants, est ainsi mieux utilisé, tandis que les conditions imposées au terrain de fondation sont plus sévères que dans le cas des barrages à gravité usuels.

3. S'ils requièrent des qualités supérieures au terrain de fondation, les barrages évidés apportent en échange des économies importantes du volume de béton (en général 40%) par rapport aux barrages à gravité usuels. L'économie du prix de revient est tout de même moindre, à cause de différents facteurs.

EXPLICATION DES FIGURES

Fig. 1. — *a*) Proposition de Figari ; *b*) lignes d'égal effort principal.

Fig. 2. — *a*) Le barrage Dixence ; *b*) le barrage Bau-Muggeris.

Fig. 3. — Profil d'un barrage-poids habituel.

Fig. 4. — Sous-pressions à la surface de fondation d'un barrage évidé. *a*) Spectre hydrodynamique ; *b*) sous-pressions dans différentes sections ; *c*) répartition des sous-pressions totales par unité de longueur.

Fig. 5. — Les forces qui sollicitent un barrage évidé, fermé au parement aval.

Fig. 6. — Variations de λ et λ_1, en fonction du coefficient de frottement statique (f) et du coefficient d'évidement (α), pour le cas d'un barrage évidé, fermé au parement aval.

Fig. 7. — Variations du rapport entre les volumes du béton par mètre linéaire pour un barrage évidé, fermé au parement aval, et pour un barrage-poids habituel ($m = 0{,}75$).

Fig. 8. — Les forces qui sollicitent un barrage évidé, ouvert au parement aval.

Fig. 9. — Variations de λ et de λ_1, en fonction du coefficient de frottement statique (f) et du coefficient d'évidement (α), pour le cas d'un barrage évidé, ouvert au parement aval.

Fig. 10. — Variations du rapport entre les volumes du béton par mètre linéaire pour un barrage évidé, ouvert au parement aval, et pour un barrage-poids habituel ($m = 0{,}75$).

BIBLIOGRAFIE

1. A. Stucky, *Mesures et observations sur le barrage de la Dixence.* Messungen, Beobachtungen, und Versuche an Schweizerischen Talsperren, Bern, 1946.
2. C. Marcello, *Moderner Talsperrenbau in Italien.* Schweizerische Bauzeitung, nr. 33, 34, 35, 1950.
3. — *La diga Bau Muggeris sull'alto corso del Flumendosa.* L'Energia Elettrica, nr. 6, 1951.
4. — *Dighe a gravità alleggerite.* Wasser und Energiewirtschaft, nr. 7, 8, 9, 1956.
5. N. Kelen, *Gewichtsstaumauern und massive Wehre.* Berlin, 1933.
6. R. Prișcu, *Asupra profilului optim al barajelor de greutate.* Studii și cercetări de mecanică și metalurgie, t. IV, 1953.
7. — *Asupra barajelor de greutate cu rosturi lărgite.* Studii și cercetări de mecanică aplicată, nr. 3 — 4, 1954.

TRATAMENTE MECANICE ŞI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

ASUPRA UNEI CONDIŢII LA LIMITĂ ÎN ANALOGIA HIDRODINAMICĂ A LAMINĂRII

DE

M. POPOV, E. DECIU, şi I. MITRICĂ

Pentru studierea repartiţiei presiunii de laminare se utilizează şi analogia hidrodinamică. După cum se cunoaşte, date fiind starea de tensiuni şi distribuţia vitezelor, trecerea metalului printre cei doi cilindri este considerată analoagă cu scurgerea unui fluid vîscos printr-un ajutaj a cărui formă este dată de suprafaţa de contact dintre metalul laminat şi cilindrii laminorului.

Într-o lucrare precedentă [1] am prezentat o soluţie a acestei probleme, luînd în considerare condiţiile la limită aşa cum sînt puse în literatură [2]. Rezultatele obţinute aduc o apropiere din punct de vedere calitativ a alurei curbei presiunilor şi a valorii coeficientului de avansare al materialului faţă de rezultatele experimentale.

În lucrarea de faţă urmărim o şi mai mare apropiere de fenomenele reale ce au loc în timpul laminării metalelor. Astfel după cum este cunoscut, pe prima porţiune definită de unghiul de prindere α (fig. 1) are loc o deformare plastică, iar pe o a doua porţiune definită de unghiul β are loc o revenire elastică a materialului şi în consecinţă, prin analogia de faţă vom studia mişcarea ce are loc într-un ajutaj convergent-divergent.

Considerăm un laminor ai cărui cilindrii de rază R se rotesc cu viteză unghiulară ω. Înălţimea iniţială a materialului laminat este $2H_0$, iar cea finală $2H_1$. Notăm cu $2h$ valoarea variabilă a înălţimii.

Vom studia cazul unei laminări care se face fără tracţiune.

În lucrare se admite că pe zona de deformare a materialului, în special la laminarea la cald, cilindrii datorită robusteţii lor capătă deformaţii mici, ceea ce permite neglijarea acestora şi ca urmare considerăm arcul AB (fig. 1) ca arc de cerc. De asemenea se neglijează deformaţiile laterale ale materialului, care sînt mici în comparaţie cu celelalte, aşa după cum este cunoscut din experienţe. Aceasta conduce la studierea unei probleme plane.

Vom utiliza ecuaţiile lui Navier-Stokes simplificate la forma ecuaţiilor stratului de lubrifiant ale lui Reynolds şi ecuaţia continuităţii

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Vom considera viscozitatea constantă.

Studiul mişcării din partea convergentă a ajutajului. Facem ipoteza că la periferie materialul are aceeaşi viteză ca şi cilindrii şi că pentru $y=0$, mişcarea are loc doar după axa x, viteza u fiind maximă în acest caz. Curgerea începînd chiar de la intrarea materialului între cilindri, în secţiunea AA' presiunea este nulă. În secţiunea BB', unde materialul a atins o stare maximă de modificare a secţiunii şi unde se termină zona de deformare plastică, facem ipoteza că tensiunea σ_x este proporţională cu limita de curgere a materialului la gradul de deformare respectiv. Legătura dintre tensiune şi presiune în această secţiune o obţinem din legea plasticităţii

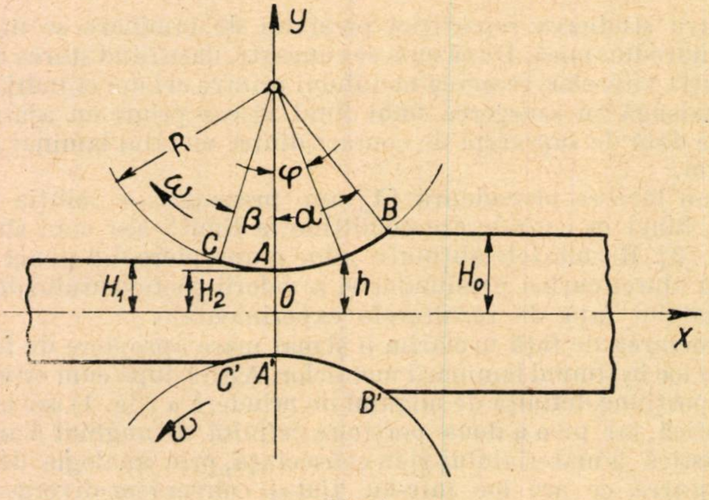


Fig. 1

$$\sigma_1 - \sigma_3 \approx 1{,}15\; k_f, \tag{3}$$

unde k_f este limita de curgere a materialului.

Ţinînd seama de schema de tensiune adoptată curent în teoria laminării metalelor, vom avea

$$\sigma_3 = \nu k_f\,; \qquad \sigma_1' = p_2 \tag{4}$$

și ca urmare se obține în secțiunea BB'

$$p_2 \approx (1{,}15 + \nu)\, k_f. \tag{5}$$

Limita de curgere k_f ce o vom lua în considerare depinde de material, temperatură și este variabilă cu gradul de reducere prin laminare, [1], [3], [4] și [5]. Coeficientul de proporționalitate ν este funcție de material, gradul de reducere prin laminare și implicit de ridicarea temperaturii datorită deformării.

Dacă considerăm că în secțiunea BB' este atinsă chiar limita de curgere k_f, atunci $\nu = 1$ și urmează că

$$p_2 \approx 2{,}15\, k_f. \tag{5'}$$

În aceste condiții relația (5) este verificată în mod satisfăcător de către experiențe [5].

Prin urmare condițiile la limită pentru mișcarea din partea convergentă a ajutajului sînt :

$$\left.\begin{array}{lll} y = h, & u = -\omega(R + H_1 - h), & v = -\omega x, \\ y = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0, & v = 0, \\ \varphi = \alpha, & p = 0, & \\ \varphi = 0, & p = p_2 = (1+\nu)\, k_f. & \end{array}\right\} \tag{6}$$

Urmînd aceeași cale ca și în lucrarea precedentă [1], vom obține legea de variație a vitezei u

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}(y^2 - h^2) - \omega(R + H_1 - h) \tag{7}$$

și gradientul presiunii după direcția x

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3\mu\omega}{h^3}\left[h^2 - h(R + H_1) + C\right]. \tag{8}$$

Pentru studiul mișcării în partea convergentă a ajutajului facem în calcule ipoteza simplificatoare

$$H_1 \approx H_2, \tag{9}$$

care în acest caz este satisfăcătoare.

Avînd în vedere că AB este un arc de cerc, adică

$$h = R + H_1 - \sqrt{R^2 - x^2} \tag{10}$$

și făcînd schimbarea de variabilă

$$x = R \sin\varphi \tag{11}$$

se obține legea de variație a presiunii

$$\left.\begin{aligned} p(\varphi) &= 3\mu\omega R\int \frac{[H_1+R(1-\cos\varphi)]^2-(R+H_1)[H_1+R(1-\cos\varphi)]+C}{[H_1+R(1-\cos\varphi)]^3}\cos\varphi\, d\varphi + C_1,\\ p(\alpha) &= 0,\\ p(0) &= p_2. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Efectuînd calculele, expresia finală a legii de repartiție a presiunii este

$$\begin{aligned} p(\varphi) = 3\mu\omega\Bigg\{ &-\varphi + (\delta+1)\left[1 - \frac{1}{\delta(\delta+2)} + \frac{3C}{2R^2\delta^2(\delta+2)^2}\right]\xi + \\ &+ \frac{C}{2R^2\delta(\delta+2)}\left[1 + \frac{3}{\delta(\delta+2)} + \frac{\delta+1}{\delta+1-\cos\varphi} - \frac{2R^2(\delta+1)^2}{C}\right]\zeta + C_1\Bigg\}, \end{aligned} \quad (13)$$

unde s-a notat [1]

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{2}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{\delta+2}{\delta}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right),\\ \zeta &= \frac{\sin\varphi}{\delta+1-\cos\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Valorile constantelor rezultă din condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} C &= 2R^2\delta(\delta+2)\frac{\arccos[1-\delta(\eta-1)]+(\delta+1)\left[\left(\frac{1}{\delta(\delta+2)}-1\right)\xi_0+\frac{\delta+1}{\delta(\delta+2)}\zeta_0\right]-\frac{p_2}{3\mu\omega}}{\frac{3(\delta+1)}{\delta(\delta+2)}\xi_0+\left(1+\frac{3}{\delta(\delta+2)}+\frac{\delta+1}{\delta\eta}\right)\zeta_0},\\ C_1 &= \frac{p_2}{3\mu\omega}, \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

unde s-a notat cu ξ_0 și ζ_0 valorile expresiilor ξ și respectiv ζ din (14) pentru valoarea unghiului $\varphi = \alpha$ și care se mai pot calcula [1] și cu relațiile

$$\left.\begin{aligned} \xi_0 &= \frac{2}{\sqrt{\delta(\delta+2)}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(\delta+2)(\eta-1)}{2-\delta(\eta-1)}},\\ \zeta_0 &= \frac{\sqrt{\delta(\eta-1)[2-\delta(\eta-1)]}}{\delta\eta}. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

S-au utilizat expresiile adimensionale δ și η definite de

$$\delta = \frac{H_1}{R}; \qquad \eta = \frac{H_0}{H_1}. \quad (17)$$

Plasarea zonei de presiune maximă se poate afla din condiția

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{18}$$

care conduce la soluția

$$h_0 = \frac{R + H_1 - \sqrt{(R+H_1)^2 - 4C}}{2}. \tag{19}$$

sau

$$\varphi_0 = \arc\cos\left\{\frac{\delta + 1}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{(1+\delta)^2 - 8\delta(\delta+2)\frac{\arccos[1-\delta(\eta-1)] + (\delta+1)\left[\left(\frac{1}{\delta(\delta+2)} - 1\right)\xi_0 + \frac{\delta+1}{\delta(\delta+2)}\zeta_0\right] - \frac{p_2}{3\mu\omega}}{\frac{3(\delta+1)}{\delta(\delta+2)}\xi_0 + \left(1 + \frac{3}{\delta(\delta+2)} + \frac{\delta+1}{\delta\eta}\right)\zeta_0}}\right\}. \tag{20}$$

Din relația (20) se vede că plasarea presiunii maxime nu mai depinde doar de caracteristicile geometrice ale laminării, ca în soluția precedentă [1] sau cea dată de S. M. Targ [2], ci depinde pe lîngă acestea și de natura materialului, temperatura și viteza de laminare. Cum constanta C este în cazul de față mai mică decît în cazul precedent rezultă că presiunea maximă este plasată mai spre ieșirea materialului dintre cilindrii laminorului.

Studiul mișcării din partea divergentă a ajutajului. În mare parte se păstrează aceleași condiții la limită ca și în prima zonă a ajutajului. Astfel admitem că la periferie materialul are aceeași viteză ca și cilindrii și că pentru $y = 0$, mișcarea are loc doar după axa x, viteza u fiind maximă în acest caz. În planul axelor cilindrilor, în urma celor arătate mai înainte, valoarea presiunii va fi dată de relația (5), respectiv (5′). Pentru secțiunea de ieșire CC' admitem una din ipotezele utilizate în teoria lubrificației și anume că în această secțiune presiunea p^* se anulează o dată cu $\frac{\partial p^*}{\partial x}$. Această ultimă condiție nu corespunde întru totul cazului real, unde se remarcă tendința curbei de a avea un minim sub axa absciselor, dar se apropie în suficientă măsură de el, încît rezultatul final să fie mulțumitor.

Așadar condițiile la limită pentru mișcarea din partea divergentă a ajutajului sînt:

$$\left.\begin{array}{lll} y = 0, & \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & v = 0, \\ y = h, & u = -\omega(R + H_2 - h), & v = \omega|x|, \\ \varphi = 0, & p^* = p_2, & \\ \frac{\partial p^*}{\partial x} = 0, & p^* = 0. & \end{array}\right\} \tag{21}$$

În cadrul studiului mișcării din această a doua parte a ajutajului nu mai putem admite ipoteza simplificatoare (9). De asemenea vom utiliza pentru presiuni notația $p^\star$, pentru a face în diferitele formule distincția între cele două zone cercetate.

Procedînd ca mai înainte vom obține legea de variație a vitezei

$$u = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p^\star}{\partial x}(y^2 - h^2) - \omega(R + H_2 - h) \tag{22}$$

și expresia gradientului presiunii

$$\frac{\partial p^\star}{\partial x} = 3\,\mu\omega\,\frac{(R + H_2)\,h + C^\star}{h^3}\cdot \tag{23}$$

Ținînd seama că BC este un arc de cerc, corelația dintre h și x va fi dată de

$$h = R + H_2 - \sqrt{R^2 - x^2} \tag{24}$$

și făcînd schimbarea de variabilă dată de relația (11) se obține legea de variație a presiunii

$$p^\star(\varphi) = 3\,\mu\omega R\int\frac{(R+H_2)\,[H_2+R\,(1-\cos\varphi)] + C^\star}{[H_2 + R\,(1 - \cos\varphi)]^3}\cos\varphi\,d\varphi + C_1^\star, \tag{25}$$

care fiind rezolvată se obține

$$\begin{aligned} p^\star(\varphi) = 3\mu\omega\Big\{&(\Delta+1)\left[\frac{1}{\Delta(\Delta+2)} + \frac{3C^\star}{2R^2\Delta^2(\Delta+2)^2}\right]\xi^\star + \\ &+ \frac{C^\star}{2R^2\Delta(\Delta+2)}\left[1 + \frac{3}{\Delta(\Delta+2)} + \frac{\Delta+1}{\Delta+1-\cos\varphi} + \frac{2R^2(\Delta+1)^2}{C^\star}\right]\zeta^\star + C_1^\star\Big\}, \end{aligned} \tag{26}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$\left.\begin{aligned} \xi^\star &= \frac{2}{\sqrt{\Delta(\Delta+2)}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\Delta+2}{\Delta}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right), \\ \zeta^\star &= \frac{\sin\varphi}{\Delta+1-\cos\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

și

$$\Delta = \frac{H_2}{R} = \delta - 1 + \cos\beta. \tag{28}$$

Din condiția $p^\star = p_2$ cînd $\varphi = 0$ rezultă imediat valoarea constantei

$$C_1^\star = C_1 = \frac{p_2}{3\mu\omega}\cdot \tag{29}$$

Din $\dfrac{\partial p^\star}{\partial x} = 0$ rezultă

$$C^\star = -\,\delta R^2(\delta + \cos\beta). \tag{30}$$

Punînd condiția $p^* = 0$ cînd $\frac{\partial p^*}{\partial x} = 0$ și ținînd seama de relațiile (27), (28) și (30), expresia (26) devine o ecuație în β, a cărei rezolvare conduce la determinarea unghiului β ce definește partea divergentă a ajutajului și totodată permite și calcularea înălțimii minime

$$H_2 = H_1 - R(1 - \cos\beta). \tag{31}$$

Rezolvarea se poate face prin încercări și apreciem că nu este prea dificilă, dat fiind valorile mici ale unghiului β.

Cînd se trasează curba presiunilor se constată că pentru $\varphi = 0$ apare un punct de intersecție în locul de racordare al curbei $p(\varphi)$ dată de relația (13), cu curba $p^*(\varphi)$ dată de relația (26). Aceasta desigur nu corespunde fenomenului real care este continuu, însă abaterea este mică, mai cu seamă că curba $p^*(\varphi)$ prezintă aici un punct de inflexiune.

Racordarea celor două curbe se face în acest caz mult mai acceptabil decît în cazul curbelor obținute pe baza teoriei plasticității [1], [4], [5] și [6].

Studiul coeficientului de avansare al materialului. Schimbarea condițiilor la limită afectează și coeficientul de avansare al materialului, definit [2] de

$$k = \frac{Q - Q_1}{Q_1}, \tag{32}$$

unde Q este debitul de material ce trece prin secțiunea minimă, iar Q_1 debitul ce ar trece prin aceeași secțiune dacă toate particulele ar fi animate de o viteză egală cu viteza periferică a cilindrului.

După cum am arătat [1] forma generală este

$$k = \frac{C}{RH_2} - 1 \approx \frac{C}{RH_1} - 1 \tag{33}$$

și ea conduce la

$$k = 2\delta^2(\delta+2)\frac{\arccos[1-\delta(\eta-1)] + (\delta+1)\left[\left(\frac{1}{\delta(\delta+2)} - 1\right)\xi_0 + \frac{\delta+1}{\delta(\delta+2)}\zeta_0\right] - \frac{p_2}{3\mu\omega}}{\frac{3(\delta+1)}{\delta(\delta+2)}\xi_0 + \left(1 + \frac{3}{\delta(\delta+2)} + \frac{\delta+1}{\delta\eta}\right)\zeta_0} - 1. \tag{34}$$

Din relația (34) se vede că coeficientul de avansare al materialului spre deosebire de soluția propusă anterior [1] și cea dată de Targ [2], nu este numai funcție de elementele geometrice ale laminării, ci depinde pe lîngă acestea și de natura materialului, temperatura și viteza de laminare. Corecția adusă de relația (34) soluției precedente este de așa natură încît păstrează rezultatele în limitele valorilor experimentale obținute de I. M. Pavlov [2].

Curgerea ce are loc în partea convergentă a ajutajului definită de unghiul α, mai poate fi studiată și printr-o metodă aproximativă, care să conducă în ceea ce privește coeficientul de avansare al materialului la rezultate apropiate de cele de mai sus, dar care să fie mai ușor accesibile calculului. Pentru aceasta pornim de la relația (9), dezvoltăm radicalul în serie și oprind primii doi termeni [1], vom avea

$$h \approx H_1 + \frac{x^2}{2R}. \tag{35}$$

Această corelație între h și x corespunde înlocuirii arcului de cerc AB cu un arc de parabolă.

Tot pentru simplificarea calculelor vom mai admite ipoteza simplificatoare (9).

În acest caz legea de variație a presiunii va fi

$$p\,(h) = 3\mu\omega\sqrt{\frac{R}{2}}\left\{\frac{2}{\sqrt{H_1}}\left(1 - \frac{R+H_1}{2H_1} + \frac{3C}{8H_1^2}\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{h-H_1}{H_1}} + \right.$$
$$\left. + \left[C\left(\frac{1}{2h} + \frac{3}{4H_1}\right) - (R+H_1)\right]\frac{\sqrt{h-H_1}}{hH_1} + C_1\right\}, \tag{36}$$

unde constantele au valorile:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1} + \frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\eta-1} - \sqrt{2\delta}\,\frac{p_2}{3\mu\omega}}{\frac{1}{H_0}\left(\frac{1}{2H_0} + \frac{3}{4H_1}\right)\sqrt{\eta-1} + \frac{3}{4H_1^2}\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1}}. \\ C_1 &= \frac{p_2}{3\mu\omega\sqrt{\frac{R}{2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Cu aceste valori pe baza expresiei (33), coeficientul de avansare al materialului poate fi calculat cu relația aproximativă

$$k \approx \frac{\left(\frac{1}{\delta} - 1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1} + \frac{\delta+1}{\delta\eta}\sqrt{\eta-1} - \sqrt{2\delta}\,\frac{p_2}{3\mu\omega}}{\frac{1}{\delta\eta}\left(\frac{1}{2\eta} + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\eta-1} + \frac{3}{\delta}\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1}} - 1. \tag{38}$$

Cînd

$$\sqrt{\eta-1} < 1, \tag{39}$$

expresia (39) se mai poate scrie

$$k \approx \frac{[\eta\,(1-\delta) + 1 + \delta]\sqrt{\eta-1} - \eta\sqrt{2\delta^3}\,\frac{p_2}{3\mu\omega}}{\left(3\eta + \frac{1}{2\eta} + \frac{3}{4}\right)\sqrt{\eta-1}} - 1. \tag{40}$$

obținută prin dezvoltarea în serie a lui $\operatorname{arctg}\sqrt{\eta-1}$ și din care s-a reținut primul termen. Această aproximație poate fi aplicată și în relațiile (14), (16), (27) și (36) aducînd o modificare a rezultatelor valorice de cîteva procente.

⁂

Pentru compararea rezultatelor obținute cu date practice, am considerat o laminare experimentală la rece fără tracțiune, [5], laminatul fiind oţel St. 1010 de dimensiuni $2H_0 = 1{,}9$ mm, $2H_1 = 1{,}45$ mm. Viteza cilindrilor a fost $v = 77$ mm/s.

Diagrama experimentală a presiunii este trasată după oscilogramă [5].

Pentru aflarea limitei de curgere am recurs la un oţel cu proprietăţi apropiate, mai ales în zona deformărilor mici, deoarece nu am găsit curbele variaţiei limitei de curgere în funcţie de gradul de reducere pentru oţelul laminat St. 1010. De asemenea am ales un exemplu cu un grad de reducere mai mic, pentru ca încălzirea materialului din timpul laminării să nu aibă vreo influenţă prea mare şi ca urmare am considerat $\nu = 1$.

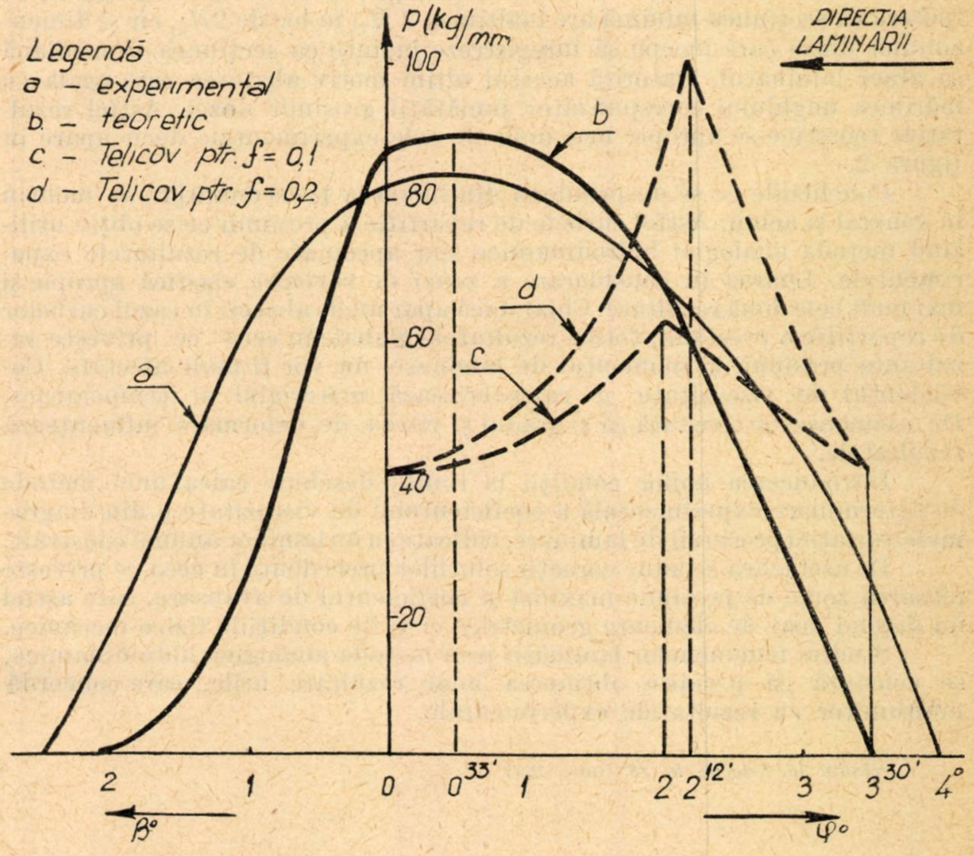


Fig. 2

Pentru determinarea valorii coeficientului de viscozitate dinamică μ trebuia recurs la o dată experimentală, care să permită acest lucru. În acest sens am pus condiţia ca cele două curbe, teoretică şi experimentală, să aibă maximul plasat în aceeaşi secţiune. Astfel, în acest caz a rezultat valoarea $\mu = 0{,}467$ kgfs/mm^2.

Cu aceste date, rezultatele sînt prezentate în figura 2.

În aceeaşi figură mai sînt trasate curbele ce se obţin cu formula lui A. I. Ţelikov [6] dedusă pe baza legilor plasticităţii, coeficientul de frecare avînd valorile $f = 0,1$, respectiv $f = 0,2$.

Se constată o apropiere satisfăcătoare a rezultatelor teoretice de cele experimentale. Unghiul de prindere teoretic α este mai mic decît cel experimental. Aceasta se datoreşte atît faptului că a fost determinat în ipoteza că secţiunea minimă are înălţimea $2\ H_1$, în loc de $2H_2$, cît şi dimensiunilor dozei care începe să înregistreze înainte ca secţiunea ei mediană să atace laminatul. Datorită acestui ultim motiv abaterea este egală cu mărimea unghiului corespunzător jumătăţii grosimii dozei. Astfel rezultatele teoretice se apropie mai mult de cele experimentale decît apare în figura 2.

Concluziile ce se desprindeau din lucrarea precedentă [1] se menţin în general şi acum. Astfel curbele de repartiţie a presiunii ce se obţin utilizînd metoda analogiei hidrodinamice sînt apropiate de rezultatele experimentale. Luarea în considerare a zonei de revenire elastică apropie şi mai mult cele două rezultate. Chiar dacă apar unele abateri în cazul curbelor de repartiţie a presiunii, totuşi rezultatele globale în ceea ce priveşte rezultanta presiunii şi momentul de laminare, nu vor fi mult afectate. Coeficientul de viscozitate μ caracterizează materialul şi temperatura. De asemenea se constată că şi gradul şi viteza de deformare influenţează rezultatele.

Introducerea noilor condiţii la limită deschide calea unei metode de determinare experimentală a coeficientului de viscozitate μ din diagramele variaţiei presiunii de laminare, ridicate cu un laminor anume construit.

De asemenea se aduc corecţii soluţiilor precedente în ceea ce priveşte plasarea zonei de presiune maximă şi coeficientul de avansare, care astfel nu depind doar de elemente geometrice ci şi de condiţiile fizico-mecanice.

Studiul fenomenelor laminării prin metoda analogiei hidrodinamice, se constată că permite obţinerea unor rezultate utile, care concordă mulţumitor cu rezultatele experimentale.

Primită la redacţie la 28 iunie 1957.

ОБ ОДНОМ ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ АНАЛОГИИ ПРОКАТКИ

(КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ)

Рассматривается вопрос прокатки металлов при помощи гидродинамической аналогии. Используются для этой цели уравнения вязких жидкостей. Процесс прокатки принимается аналогичным истечению из конфузорно-диффузорного сопла. Конфузорный участок сопла соответствует зоне пластической деформации металла, а диффузорная часть — зоне упругого восстановления.

Такой постановкой задачи достигается приближение теоретических результатов, касающихся кривой распределения прокаточных давлений к экспериментальным данным. В то же время формулы, определяющие коэффициент подачи металла и положение участка наибольшего удельного давления, учитывают влияние свойств и температуры металла, степень и скорость деформации, а также геометрические характеристики прокатки.

SUR UNE CONDITION À LA LIMITE DANS L'ANALOGIE HYDRODYNAMIQUE DU LAMINAGE

(RÉSUMÉ)

Les auteurs étudient les phénomènes dus au laminage des métaux. Le phénomène est étudié par l'analogie hydrodynamique à l'aide des équations des fluides visqueux, en le considérant analogue à l'écoulement dans un ajutage convergent-divergent. La portion convergente de l'ajutage correspond à la région de déformation plastique du métal et la portion divergente, à la région de détente élastique. On pose les conditions à la limite (6) et (21), dont on remarque celles qui correspondent à la section placée dans le plan des axes des cylindres, déduites de la loi de la plasticité.

Par cette façon d'étudier le problème, les résultats théoriques se rapprochent des résultats expérimentaux en ce qui concerne la courbe de répartition des pressions de laminage. En même temps, les formules qui donnent le coefficient d'avancement du matériel et la position de la région de pression maximum, contiennent l'influence de la nature et la température du matériel, le taux et la vitesse de déformation, ainsi que les caractéristiques géométriques du laminage.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popov, E. Deciu și I. Mitrică, *Considerații asupra unei analogii hidrodinamice a laminării*. Studii și cercetări de mecanică aplicată, t. VIII, 1956, nr. 3,
2. S. M. Targ, *Osnovnîe zadaci teorii laminarnîh tecenii*. Gosudarstvennoe izdatelstvo tehniko-teoreticeskoi literaturî. Moscova-Leningrad, 1951.
3. E. Siebel, *Die Bedeutung der Fliesskurve bei der Kaltformgebung*. V.D.I, t. 98, 1956, nr. 4.
4. P. W. Whiton, *Computation of Roll Force and Torque in Cold Rolling by Modern Theory*. Journal of Applied Mechanics, iunie 1956, vol. 23, nr. 2.
5. A. A. Korolev, *Novîie issledovania deformații metalla pri prokatke*. Mașghiz, Moscova, 1953.
6. A. I. Țelikov, *Instalații de laminoare*. Ed. Tehnică, București, 1952.

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

NOMOGRAME PENTRU CALCULUL GENERATOARELOR DE GAZE MOTOCOMPRESOARE UTILIZATE LA ANTRENAREA PNEUMATICĂ A ROTOARELOR DE ELICOPTER

DE

ŞT. ANDREI

1. NOTAŢII

P_m — puterea la arbore a motorului (CP);

P_{ad} — puterea adiabatică a gazului $\left(\frac{\text{kcal}}{\text{s}}\right)\left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}}\right)$;

p_a — presiune de admisie în motor $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

p_{m_E} — presiunea medie a gazelor de evacuare în colector $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

p_{m_e} — presiunea gazelor de evacuare la ieşirea din colector $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

p_c — presiunea fluidului în circuitul compresor $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

p_0 — presiunea mediului ambiant în condiţii sol standard $\left(10\ 330\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

Δ_p — cădere de presiune $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$;

T_a — temperatura la admisie în motor (°K);

T_{m_E} — temperatura medie (raportată la masă) a gazelor de evacuare în colector (°K);

T_{m_e} — idem la ieşirea din colector (°K);

T_0 — idem mediului ambiant la sol standard (288°K);

c — consumul specific de combustibil al motorului $\left(\frac{\text{kg}}{\text{CPh}}\right)$;

q — consumul specific de combustibil al motorului $\left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)$;

η_t — randamentul termic al motorului ;

η_c — randamentul compresorului ;

$\eta_{c\,ad}$ — randamentul adiabatic al compresorului ;

η_{ad} — randamentul generatorului de gaze (adiabatic) ;

η_{cm} — randamentul mecanic al compresorului ;

α — coeficientul de exces de aer ;

ψ — coeficientul de baleiaj ;

c_0 — consum teoretic de aer al motorului $\left(\frac{kg}{kg}\right)$;

Q_c — debitul de aer al compresorului $\left(\frac{kg}{s}\right)$;

Q_m — debitul de gaze al motorului $\left(\frac{kg}{s}\right)$;

Q_{ma} — consumul de aer al motorului ;

H — cantitatea de căldură primită sau cedată raportată la 1 kg combustibil ars în motor $\left(\frac{kcal}{kg}\right)$;

h — idem exprimat în procente din puterea calorică a combustibilului (%) ;

W_h — căldura cedată fluidului de răcire de către motorul complet $\left(\frac{kcal}{min}\right)$;

ξ_t — randamentul arderii în motor, coeficient adimensional de cădere de presiune ;

c_p | — căldura specifică medie la presiune constantă în intervalul de temperaturi considerat $\left(\frac{kcal}{kg\,s}\right)$;

c_v | — idem la volum constant $\left(\frac{kcal}{kg\,s}\right)$;

$\delta' = \frac{1}{\delta}$ — raport de detentă ;

V — viteza fluidului $\left(\frac{m}{s}\right)$;

γ — greutatea specifică a fluidului $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$;

$G_{răc}$ — debitul de aer pentru răcirea motorului complet $\left(\frac{kg}{s}\right)$;

ρ — masa specifică a fluidului $\left(\frac{kg\,s^2}{m^4}\right)$;

$\Delta t_{răc}$ — creşterea de temperatură a aerului de răcire (°) ;

ΔT_c — creşterea de temperatură în compresor (°) ;

A — suprafaţa de răcire a aripioarelor motorului (m^2) ;

$\mathcal{R}_e$ — numărul lui Reynolds ;

v — volum specific $\left(\frac{m^3}{kg}\right)$;

U — debit volumetric $\left(\frac{m^3}{s}\right)$;

s — secţiuni (m^2) ;

d — diametre (m) ;

$H_{c_{ad}}$ — înălţime manometrică de refulare a compresorului ideal (m);

π_c — raportul de compresie în compresor.

N o t ă. Simbolurile sînt însoţite de un indice arătînd secţiunea din circuit la care se referă caracteristica.

2. INTRODUCERE

Eficacitatea antrenării pneumatice a rotoarelor de elicopter este condiţionată în mare măsură de caracteristicile gazului furnizat de generatorul de gaze şi de randamentul adiabatic al acestuia.

Stabilirea compromisului optim între cerinţele aerotermo-dinamice interne ale fluidului motor şi cele de aerodinamică externă ale rotorului, impun luarea în considerare de către proiectanţi a unui domeniu întins de caracteristice ale fluidului motor (debite, presiuni, temperaturi) ceea ce conduce la calcule analitice laborioase pentru generatorul de gaze.

În lucrarea de faţă şi pentru simplificarea acestor calcule se indică o metodă de calcul, prin folosirea de nomograme în cazul particular al generatoarelor de gaze motocompresoare (motor compensat constînd din motor de aviaţie cu piston antrenînd un compresor rotaţional).

2.1. Schema generală a circuitelor de gaze este arătată în figura 2.1.1. Există două fluxuri de gaze interdependente, influenţîndu-se reciproc sau nu, corespunzătoare celor două maşini cuplate între ele, motorul (*m*) şi compresorul (*c*), ce formează ansamblul motocompresor.

În cazul cel mai general (aşa cum este arătat în linii pline în fig. 2.1.1.) motorul este cu supraalimentare totală, admisia sa fiind legată direct de refularea compresorului, iar energia gazelor de evacuare se recuperează total la ieşirea din motocompresor, prin amestecare cu aerul refulat de compresor.

În cazuri particulare, pe de o parte, supraalimentarea poate să fie parţială (degradarea entalpiei aerului refulat de compresor prin strangularea circuitului de admisie în motor cu ajutorul unui volet reglabil) sau nulă (admisie directă din atmosferă), iar pe de altă parte, recuperarea energiei gazelor de evacuare poate să fie nulă (eşapare directă în atmosferă) sau să se facă nu prin amestec ci direct printr-un flux independent, putînd avea în acest fel o infinitate de combinaţii, dintre care cele de bază sînt definite mai departe în 3.1.

Pe scurt deci, fluxul de gaze motor (cald, secundar) se prelevează în principiu din fluxul de gaze refulat de compresor însă utilizarea entalpiei acestora poate fi totală, parţială (degradarea entalpiei) sau nulă (admisie directă din atmosferă) după caz. Pe de altă parte, entalpia gazelor la evacuarea motorului poate fi recuperată fie prin amestec, fie direct, sau poate să nu fie recuperată de loc în cazul eşapamentului liber.

Fluxul compresor este utilizat în principiu (aşa cum este arătat în linii pline în fig. 2.1.1.) pentru răcirea forţată a motorului, în zborul la punct fix sau oblic, deci cu viteză de translaţie nulă sau redusă a elicopterului. Acest lucru se poate face în două moduri, fie utilizînd porţiunea aspiraţiei din circuitul compresorului (răcirea pe aspiraţie aşa cum este arătat în fig. 2.1.1.*a*), fie utilizînd porţiunea de refulare (răcirea pe refulare aşa cum este arătat în fig. 2.1.1.*b*).

În zborul de translaţie, de croazieră, viteza de înaintare fiind importantă, se poate asigura în general răcirea liberă a motorului. În acest scop, prin dispozitive adecvate, se pune în funcţie circuitul de răcire liberă şi se scurtcircuitează circuitul de răcire forţată, după cum este indicat prin linii punctate în figura 2.1.1.

În regimuri de zbor de tranziţie, se poate folosi o combinaţie între cele două sisteme de răcire.

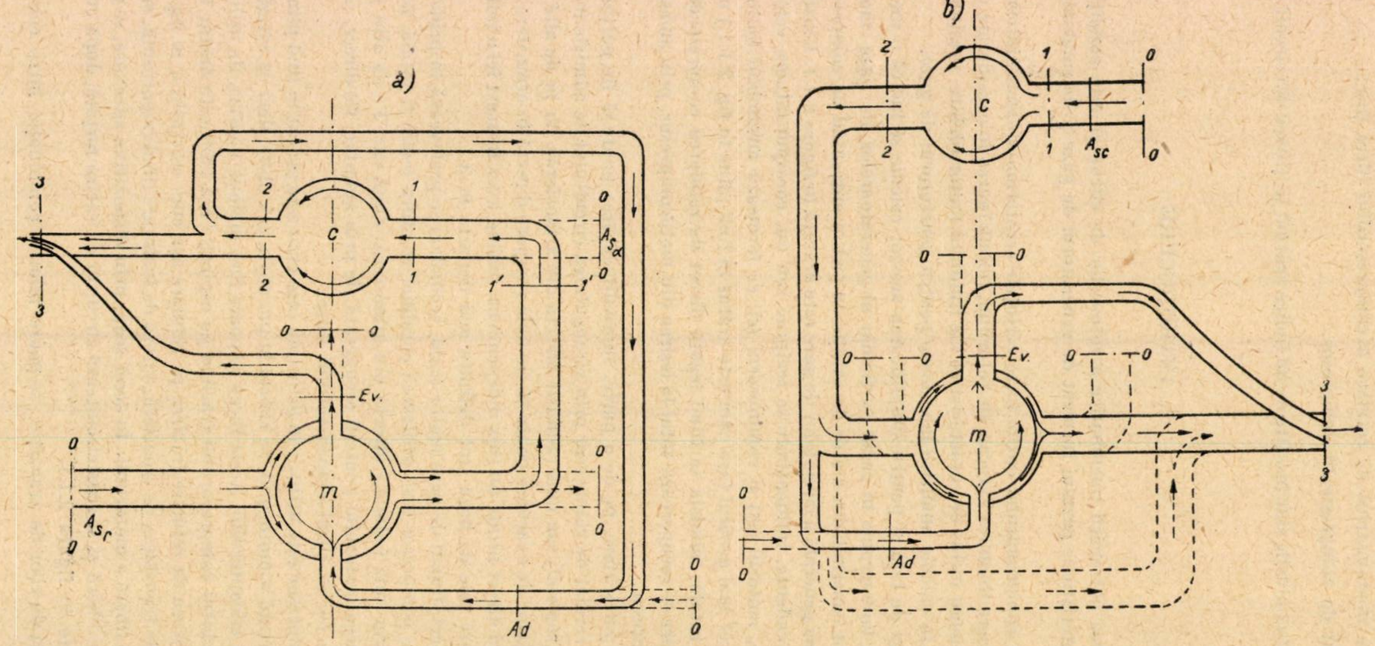

a)
c
A_{sa}
Ev.
m
A_{sr}
Ad
b)
c
A_{sc}
Ev.
m
Ad

Fig. 2.1.1.

Pe scurt deci, fluxul compresor are o utilizare nulă (zbor de translaţie), parţială (zbor de tranziţie) sau totală (zbor la punct fix sau vertical) a aspiraţiei (*a*) sau refulării (*b*) pentru răcirea motorului.

Energia mecanică furnizată la arbore, de motor, este cedată integral compresorului (cuplaj direct-motor compensat). Caracteristica de debit a compresorului trebuie să asigure un debit minim, strict necesar răcirii motorului, la punct fix, la regimul cel mai defavorabil.

Peste acest minim sînt posibile diferite combinaţii între debitul şi presiunea de refulare a compresorului care să satisfacă relaţia de putere, cota respectivă din debitul compresorului care nu este necesară răcirii motorului la punct fix, fiind prelevată direct din atmosferă în cazul schemei de răcire „*a*”, sau refulată direct în cazul schemei de răcire *b* după cum este indicat, punctat în figura 2.1.1. În acest scop se poate folosi o vană reglabilă pe circuitul direct care să asigure partajul celor două fluxuri.

2.2. Scopul lucrării este de a studia variaţia puterii şi randamentului adiabatic al generatorului de gaze motocompresor în diferite combinaţii compatibile de interacţiune ale celor două fluxuri şi diferite caracteristice de compresor satisfăcînd condiţiile indicate mai sus.

Notă. În acest studiu care are un scop concret, se vor folosi la trasarea nomogramelor anumiţi coeficienţi numerici avînd o valoare medie uzuală, valabili pentru un anteproiect. În cursul proiectării, evident că aceşti coeficienţi pot fi modificaţi sau determinaţi experimental pentru cazul în speţă, aducîndu-se corecţiile respective.

3. CARACTERISTICILE CIRCUITULUI MOTOR „m” (FLUIDULUI CALD-SECUNDAR)

Performanţele unui motor cu piston de o configuraţie şi caracteristice geometrice date, depind de condiţiile la admisie şi evacuare.

3.1. Pentru regimul nominal maximum, de decolare (care este regimul de bază pentru calculul energetic al elicopterelor) din infinitatea de combinaţii posibile variind condiţiile la admisie şi evacuare conform schemei din figura 211, alegem 9 combinaţii de bază definite în tabloul nr. 3.1 *).

Luînd ca referinţă performanţele combinaţiei 0—0, în tabloul nr. 3.2 se arată valorile relative ale performanţelor pentru restul combinaţiilor luate în considerare, în cazul curent al unui motor de aviaţie cu piston, clasic (cu amestec prealabil şi aprindere comandată), de construcţie normală. Pentru fiecare caz în speţă, la proiectare, aceste valori evident că sînt de revizuit şi completat prin date experimentale. Pentru alte genuri de motoare (cu injecţie şi autoaprindere, compund etc.) aceste date trebuie adaptate genului respectiv.

3.1.1. Notaţiile întrebuinţate în tabloul nr. 3.2 au următoarele semnificaţii:

$A = 1 - \alpha(p_{c_2} - p_0)$ cu $\alpha = 0{,}0000294$ pentru unităţile de măsură folosite (variaţia puterii cu contrapresiunea la eşapament). Această expresie mai poate fi scrisă sub forma

$$A = 1 - \alpha p_0(\bar{p}_{c_2} - 1) \text{ cu } \bar{p}_{c_2} = \frac{p_{c_2}}{p_0}.$$

Grafic variaţia lui A şi $1/A$ cu $\bar{p}_{c_2}$ este arătată în diagrama din figura 3.1.1.

---

*) Pentru parametrii gazului furnizat de generatorul de gaze la fiecare din aceste combinaţii putem avea cele trei variante în funcţie de modul de răcire al motorului : liber (direct), forţat (*a* la aspiraţie sau *b* la refulare).

Tabloul nr. 3.1

Combinația		Condiții motor					
Caracteristica	Notația prescurtată	Admisie			Evacuare		
		Starea	p	T	Starea	p	T
Admisie, evacuare liberă în atmosferă	0 – 0	0	p_0	T_0	0	p_0	T_E
Admisie liberă, amestec gaze evacuare cu aerul comprimat la refularea compresorului	0 – 2	0	p_0	T_0	2	p_2	T_E
Admisie liberă, evacuare liberă însă în capătul palei	0 – 5(0)	0	p_0	T_0	5(0)	p_0	T_{e_5}
Supraalimentare integrală, evacuare liberă	2 – 0	2	p_2	T_2	0	p_0	T_E
Supraalimentarea integrală, amestec gaze evacuare cu aerul refulat de compresor	2 – 2	2	p_2	T_2	2	p_2	T_E
Supraalimentarea integrală, evacuarea liberă însă în capătul palei	2 – 5(0)	2	p_2	T_2	5(0)	p_0	T_{e_5}
Supraalimentarea în altitudini limitată la restabilirea puterii de la sol, evacuare liberă	2(0) – 0	2(0)	p_0	T_2	0	p_0	T_E
Idem la admisie, amestec gaze evacuare cu aerul de refulare	2(0) – 2	2(0)	p_0	T_2	2	p_2	T_E
Idem la admisie, evacuare liberă însă la capătul palei	2(0) – 5(0)	2(0)	p_0	T_2	5(0)	p_0	T_{e_5}

$B = \beta \frac{500 + t_0}{p_0} \cdot \frac{p^*_{a_{\mathrm{lim}}}}{500 + t^*_{c_2}}$ **) $- (\beta - 1)$ cu $\beta \cong 1{,}1$ (variaţia puterii cu condiţiile la admisie şi evacuare presupuse identice) în care: $p^*_{a_{\mathrm{lim}}} \leqslant p^*_{c_2}$ este presiunea de admisie maximă ce o poate suporta motorul, adaptat ca atare, pentru o funcţionare de scurtă durată, în cazul că $p^*_{c_2} \geqslant p^*_{a_{\mathrm{lim}}}$ sau egală cu $p^*_{c_2}$ în caz că această presiune este mai mică decît presiunea de admisie maximă ($p^*_{a_{\mathrm{lim}}}$ s-a limitat la maxim 1,4 p_0 în studiul de faţă).

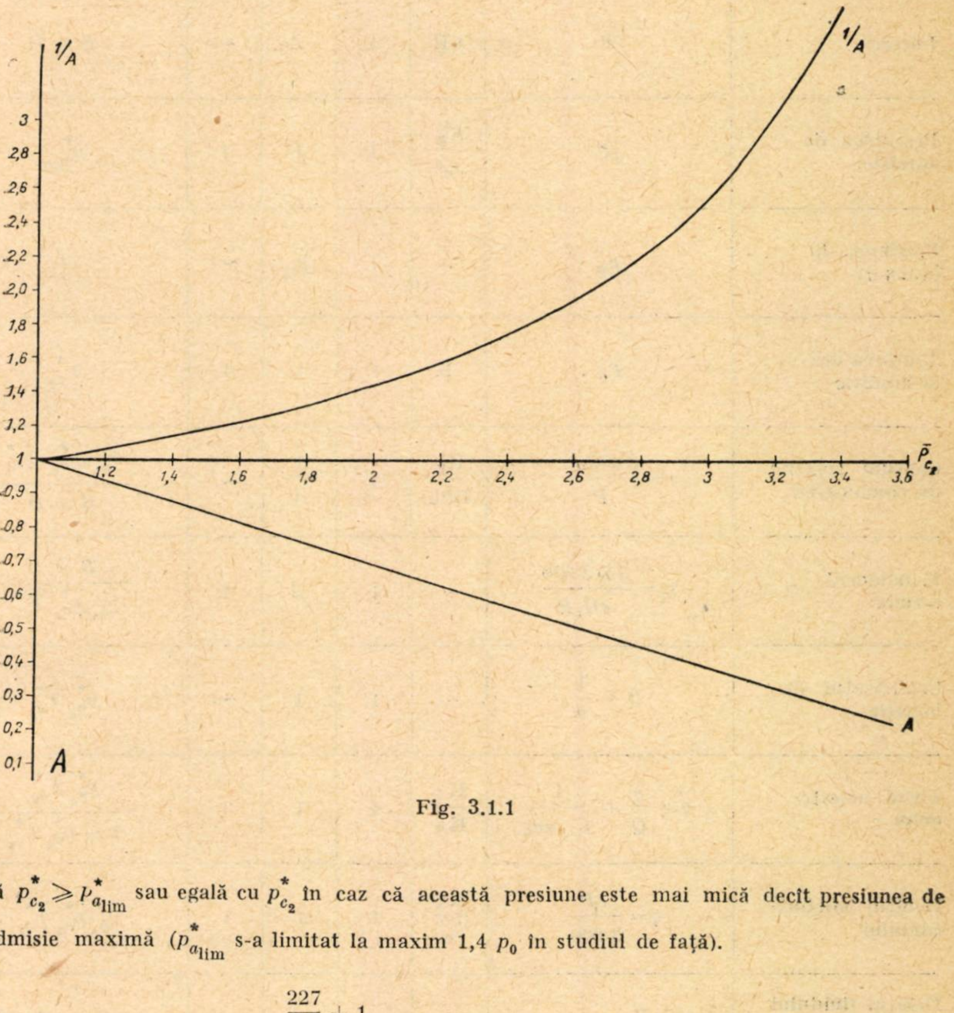


Fig. 3.1.1

$$B = 1{,}1\, \bar{p}^*_{a_{\mathrm{lim}}} \frac{\frac{227}{T_0} + 1}{\frac{227}{T_0} + \bar{T}^*_{c_2}} - 0{,}1 = 1{,}1\, \bar{p}^*_{a_{\mathrm{lim}}} \cdot \frac{1{,}789}{0{,}789 + T^*_{c_2}} - 0{,}1$$

**) Semnul * indică parametrii gazului frînat.

Tabloul

MĂRIMEA			COMBI			
Denumirea	Simbol și valoare	Unit. de măs.	0—0	0—2	0—5(0)	2—0
Puterea	P	CP	1	A	~1	$B \times D$
Presiunea de admisie	p_a^*	$\frac{Kg}{m^2}$	1	1	1	$\bar{p}^*_{a_{\text{lim}}}$
Presiunea la evacuare	p_E	,,	1	$\bar{p}_{c_2}$	~1	1
Temperatura la admisie	T_a	°K	1	1	1	$\bar{T}^*_{c_2}$
Consum specific de combustibil	$c = \frac{3\,600\,q}{P}$	$\frac{Kg}{CPh}$	1	$\frac{1}{A}$	~1	$\frac{\bar{\gamma}_{a_e} \cdot \bar{p}^*_{a_e} \cdot \bar{T}^*_{c_2}}{B \times D}$
Randament termic	$\eta_t = \frac{75 \cdot 3\,600}{cH_cE}$	—	1	A	1	$\frac{B \times D}{\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$
Coeficientul de bogăție	$\beta = \frac{1}{\alpha}$	—	1	1	~1	$\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$
Titlul amestecului	$\bar{q} = \frac{q}{Q} = \frac{1}{1+\alpha\sigma_0}$	$\frac{Kg}{Kg}$	1	1	1	$\frac{\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$
Debitul combustibilului	$q = \frac{cP}{3\,600}$	$\frac{Kg}{s}$	1	1	1	$\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$
Debitul fluidului cald amestec motor	$Q = \frac{q}{q} = q + Q_a$	,,	1	1	1	$\bar{\gamma}_{a_e}\left(1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}\right)$
Debitul aerului motor	$Q_a = Q - q = $ $= q\alpha\,\psi\,a_0$	,,	1	1	1	$\bar{\gamma}_{a_e}$

nr. 3, 2

NAŢIE

2—2	2—5(0)	2(0)—0	2(0)—2	2(0)—5(0)
$B \times C$	$B \times D$	1	A	1
$\bar{p}^*_{a_{\lim}}$	$\bar{p}^*_{a_{\lim}}$	$\bar{p}^*_{a_m}$	$\bar{p}^*_{a_m}$	$\bar{p}^*_{a_m}$
$\bar{p}_{c_2}$	~ 1	1	$\bar{p}_{c_2}$	~ 1
$\bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{T}^*_{c_2}$
$\frac{\bar{\gamma}_{a_e} \cdot \bar{p}^*_{a_e} \cdot \bar{T}^*_{c_2}}{B \times C}$	$\frac{\bar{\gamma}_{a_e} \cdot \bar{p}^*_{a_e} \cdot \bar{T}^*_{c_2}}{B \times D}$	$\bar{\gamma}_{a_m} \cdot \bar{p}^*_{a_m} \cdot \bar{T}^*_{c_2}$	$\frac{\bar{\gamma}_{a_m} \cdot \bar{p}^*_{a_m} \cdot \bar{T}^*_{c_2}}{A}$	$\bar{\gamma}_{a_m} \cdot \bar{p}^*_{a_m} \cdot \bar{T}^*_{c_2}$
$\frac{B \times C}{\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{B \times D}{\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{1}{\gamma_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{A}{\bar{\gamma}_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{1}{\bar{\gamma}_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$
$\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{p}^*_{a_m} \cdot \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}$
$\frac{\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{\bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{\bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{\bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{g_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$	$\frac{\bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}{1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}}$
$\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{\gamma}_{a_e} \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{\gamma}_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{\gamma}_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}$	$\bar{\gamma}_{a_m} \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}$
$\bar{\gamma}_{a_e} \left(1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}\right)$	$\gamma_{a_e} \left(1 + \bar{p}^*_{a_e} \bar{T}^*_{c_2}\right)$	$\bar{\gamma}_{a_m} \left(1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}\right)$	$\gamma_{a_m} \left(1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}\right)$	$\bar{\gamma}_{a_m} \left(1 + \bar{p}^*_{a_m} \bar{T}^*_{c_2}\right)$
$\bar{\gamma}_{a_e}$	$\bar{\gamma}_{a_e}$	$\bar{\gamma}_{a_m}$	$\bar{\gamma}_{a_m}$	$\bar{\gamma}_{a_m}$

în care

$$\overline{p}^{\star}_{a_{\text{lim}}} = \frac{p^{\star}_{a_{\text{lim}}}}{p_0};\ \overline{T}^{\star}_{c_2} = \frac{T^{\star}_{c_2}}{T_0}.$$

$$C = 1 - \alpha\,(p_{c_2} - p_{a_{\text{lim}}}) = 1 - \alpha p_0\,(\overline{p}_{c_2} - \overline{p}_{a_{\text{lim}}}) \text{ cu } \overline{p}_{a_{\text{lim}}} \leqslant \overline{p}_{c_2}$$

$$D = 1 + \alpha\,(p_{a_{\text{lim}}} - p_0) = 1 + \alpha\, p_0\,(\overline{p}_{a_{\text{lim}}} - 1)$$

Notă. Avînd în vedere viteza redusă de circulaţie a gazelor (sub 100 m/s) practic $p^{\star} \cong p$; $T^{\star} \sim T$.

Deci

$$B \cdot C = \left[1{,}1\,\overline{p}^{\star}_{a_{\text{lim}}} \cdot \frac{1{,}789}{0{,}789 + \overline{T}^{\star}_{c_2}} - 0{,}1\right]\left[1 - 0{,}0000294\, p_0\,(p_{c_2} - \overline{p}_{a_{\text{lim}}})\right],$$

$$B \cdot D = \left[1{,}1\overline{p}_{a_{\text{lim}}} \cdot \frac{1{,}789}{0{,}789 + \overline{T}^{\star}_{c_2}} - 0{,}1\right]\left[1 + 0{,}0000294\, p_0\,(\overline{p}_{c_{\text{lim}}} - 1\right].$$

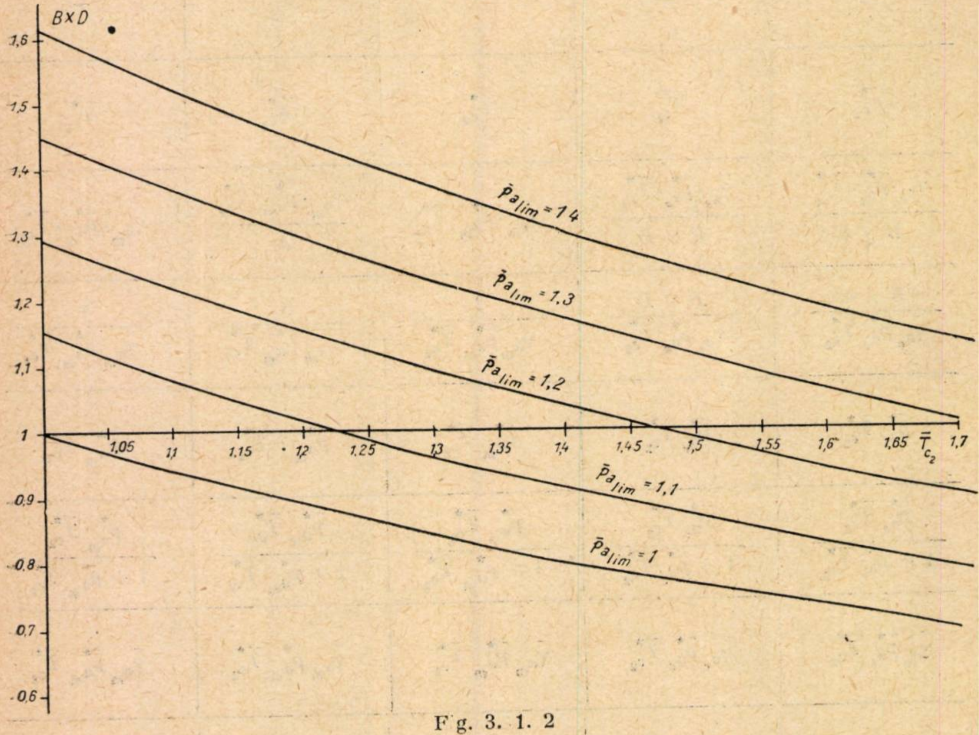


Fig. 3.1.2

Grafic, variaţia lui $B \times D$ în funcţie de parametri de care depinde este arătată în diagrama din figura 3.1.2 şi a lui $B \times C$ în diagrama din figura 3.1.3.

3.1.2. Notă. În cazul 2(0) — 0 presiunea de admisie se menţine la o valoare minimă ($\overline{p}^{\star}_{a_m}$) strict necesară pentru a compensa scăderea puterii datorită admisiei aerului la temperatura $\overline{T}^{\star}_{c_2}$, adică în acest caz $B \times D = 1$ prin alegerea convenabilă a lui $\overline{p}^{\star}_{a_m}$.

Asupra debitului aerului motor s-a făcut ipoteza creşterii lui proporţional cu greutatea specifică a sa în cazul supraalimentării.

De asemenea în acest caz, asupra debitului de combustibil s-a făcut ipoteza necesităţii unei îmbogăţiri suplimentare pentru a asigura răcirea internă proporţional cu presiunea şi temperatura de admisie adică finalmente cu $\bar{p}_a^{*2}$ ceea ce ar impune o corecţie asupra puterii respective exprimate prin $B \times D$ ce s-a neglijat însă.

Variaţia celorlalţi parametri rezultă implicit din cele de mai sus aşa cum s-a arătat în tabloul nr. 3.2.

În măsura necesităţilor pe aceleaşi figuri se poate trasa variaţia grafică şi a acestor parametri.

3.2. Parametri caracteristici pentru gazele de evacuare ale motorului cu piston se determină în baza bilanţului termic raportat la 1 kg combustibil ars în motor [1]

$$H_c = H_e + H_g + H_h + H_u + H_r$$

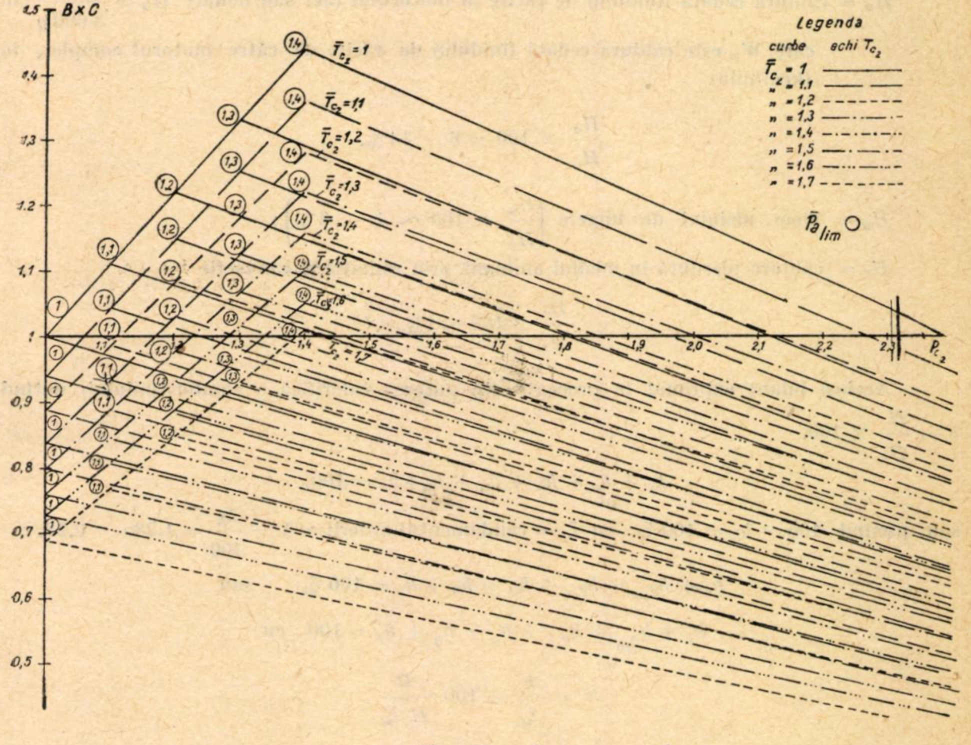


Fig. 3. 1. 3

în care

H_c = puterea calorifică a combustibilului (inferioară) în kcal/kg (10 500 kcal/kg);

H_e = căldura transformată în lucru mecanic în motor (kcal/kg) $H_e = H_c \pi_t$;

H_g = căldura cedată gazelor în timpul trecerii lor prin motor şi care serveşte la mărirea entalpiei lor la ieşirea din motor.

$$H_g = H_{g_{co}} + H_{g_{ci}}$$

în care

$$H_{g_{co}} = \alpha\, a_0\, \psi\, c_{p_a} (T_a - T_h)$$

este căldura transmisă aerului în compresor în urma consumului de lucru mecanic cu

$\alpha = \frac{1}{\beta}$ coeficient de exces de aer;

a_0 = cantitatea teoretică minimă de aer necesară arderii complete a 1 kg combustibil (~ 15 kg/kg);

ψ = coeficientul de spălare (baleiaj) al motorului egal cu 1 pentru $p_e/p_a = 1$;

T_a, p_a, temperatura şi presiunea la admisie în motor; $H_{g_{ci}}$ = căldura primită de gaze în timpul trecerii prin cilindri; H_h = energia chimică a combustibilului netransformată în timpul arderii în energie calorică (ardere incompletă $\frac{H_h}{H_c} \times 100 \sim 6{,}5\%$) (kcal/kg);

H_a = căldura cedată fluidului de răcire al motorului (aer sau lichid) $H_a = \frac{W_n}{3\,600\,q}$, în care W_n este căldura cedată fluidului de răcire de către motorul complet, în (kcal/min)

$$\frac{H_a}{H_c} \times 100 = 6 - 14\%,$$

H_u = idem, uleiului de ungere $\left(\frac{H_u}{H_c} \times 100 \sim 1 - 3\%\right)$;

H_r = căldura pierdută în mediul ambiant prin radiaţie şi convecţie

$$\frac{H_r}{H_c} \times 100 \sim 1\%.$$

Acelaşi bilanţ exprimat în procente din puterea calorifică a combustibilului, notînd $h = \frac{H}{H_c} \times 100$.

$$h_c + h_g + h_h + h_a + h_u + h_r = 100,$$

sau punînd $100 - h_h = 100\,\xi_t$ cu ξ_t = randamentul arderii $= 1 - \frac{h_h}{100} = 1{,}28\alpha - 0{,}28$,

$$h_e + h_{g_{co}} + h_{g_{ci}}^{-} + h_a + h_u + h_r = 100\,\xi_t \qquad \text{sau}$$

$$h_e' + h_{g_{co}}' + h_{g_{ci}}' + h_a' + h_u' + h_r' = 100 \quad \text{cu}$$

$$h' = \frac{h}{\xi_t} = 100\,\frac{H}{H_c\,\xi_t}.$$

Pentru cazul în speţă $H_{g_{co}}$ (respectiv $h_{g_{co}}$ sau $h_{g_{co}}'$) este nul, motorul neantrenînd un compresor propriu.

Din bilanţ se poate deduce în consecinţă valoarea lui $H_{g_{ci}}$ (respectiv $h_{g_{ci}}$ sau $h_{g_{ci}}'$) iar din egalitatea:

$$H_{g_{ci}} = (1 + \psi\,\alpha a_0)\, c_{p_{gaz}} \Big|_{273}^{T_{m_E}} (T_{m_E} - 273) - \alpha a_0 \psi c_{p_{aer}} \Big|_{273}^{T_a} (T_a - 273),$$

temperatura medie (raportată la masă) a gazelor de evacuare în colector T_{m_E} fără considerarea arderii suplimentare în colector care survine la α mic (amestec bogat) și ψ mare (spălare mare).

3.2.1. Pentru a analiza variația lui T_{m_E} în cele 9 combinații luate în considerare pornind de la un motor de bază dat, vom grupa termenii din bilanț după cum urmează

$$H_{g_{ci}} = H_c - H_e - \sum \text{rest } H \qquad \text{sau}$$

$$h_{g_{ci}} = 100\,(1 - \eta_t) - \sum \text{rest } h \qquad \text{sau}$$

$$h'_{g_{ci}} = 100\left(1 - \frac{\eta_t}{\xi_t}\right) - \sum \text{rest } h' \qquad \text{în care}$$

$$\xi_t = 1{,}28\alpha - 0{,}28 \quad \text{pentru } \alpha \leqslant 1 \text{ și}$$

$$\xi_t = 1 \qquad \text{pentru } \alpha \geqslant 1\,.$$

În ultima expresie pentru motoarele normale și la regiunile principale Σ rest h' variază între 13–17%, iar η_t între 0,16–0,32.

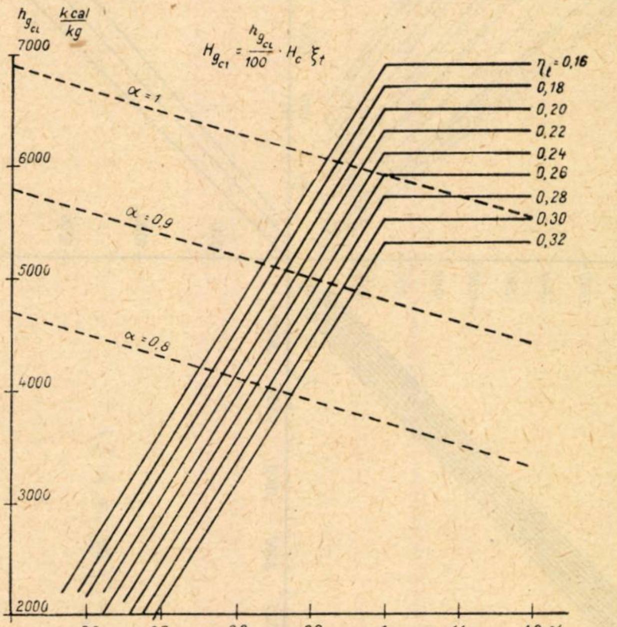


Fig. 3. 2. 2

3.2.2. Valoarea lui $H_{g_{ci}}$ se deduce din relația

$$H_{g_{ci}} = \frac{h'_{g_{ci}}}{100} H_c \cdot \xi_t$$

și este arătată în diagrama din figura 3.2.2. în funcție de η_t și α, pentru o valoare Σ rest $h' \sim 15\%$ considerată constantă într-o primă aproximație pentru toate combinațiile.

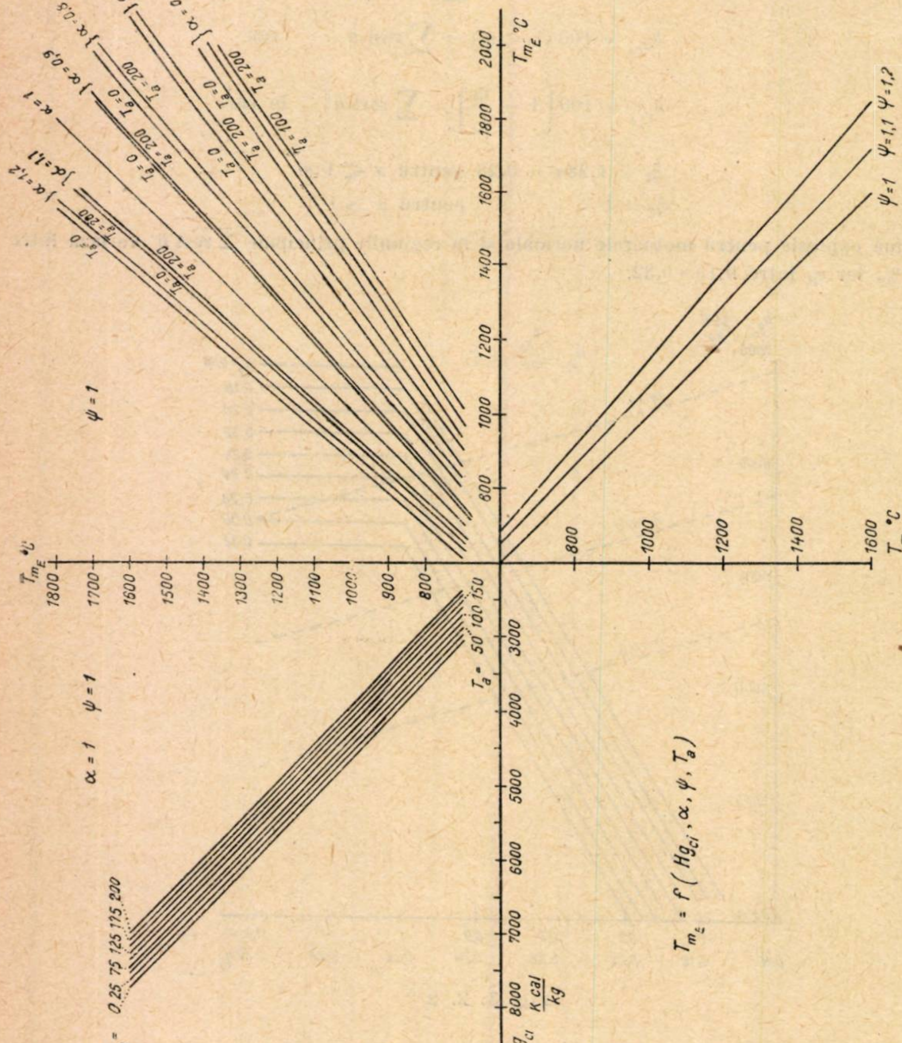

T_{m_E} °C
1800
1700
1600
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
$\psi = 1$
$\alpha = 1$ $\psi = 1$
$T_a =$ 0 25 75 125 175 200
$T_a =$ 50 100 150
3000
4000
5000
6000
7000
8000
Hg_{ci} $\frac{K\,cal}{kg}$
$T_{m_E} = f\,(Hg_{ci}, \alpha, \psi, T_a)$
600
1000
1200
1400
1600
1800
2000
T_{m_E} °C
$\alpha = 0{,}6$
$\alpha = 0{,}7$
$\alpha = 0{,}5$
$\alpha = 0{,}9$
$\alpha = 1$
$\alpha = 1{,}1$
$\alpha = 1{,}2$
$T_a = 0$
$T_a = 100$
$T_a = 200$
800
1000
1200
1400
1600
T_{m_E} °C
$\psi = 1$
$\psi = 1{,}1$
$\psi = 1{,}2$

Fig. 3. 2, 3

3.2.3. Avînd valoarea lui $H_{g_{ci}}$ se deduce T_{m_E} din ecuaţia de mai sus reprezentată grafic în nomograma din figura 3.2.3. pentru diferite valori uzuale ale lui α, ψ, T_a.

În acest grafic valorile lui $c_p \Big|_0^t$ s-au dedus din relaţia cunoscută $c_p = c_v + AR$ în care c_v şi R s-au luat din tabelele uzuale pentru aer, amestec şi gaze arse pentru diferite valori considerate ale lui α şi la temperaturile corespunzătoare $[c_p = f(\alpha, t)]$.

Pentru simplificare s-a luat c_v amestec $\sim c_v$ aer.

Deci

$$c_p \text{ aer} = c_v \text{ aer}\,(t) + AR \text{ amestec}\,(\alpha, t),$$

$$c_p \text{ gaz} = c_v \text{ gaz}\,(\alpha, t) + AR \text{ gaz}\,(\alpha, t).$$

Valorile de mai sus ale lui T_{m_E} trebuie corectate prin considerarea arderii suplimentare în colector la amestecuri bogate şi baleiaj important la calculul temperaturii gazelor de evacuare la ieşirea din colector.

3.3. Puterile mai sus considerate ale motorului sînt valabile cu condiţia ca contrapresiunea la eşapament să nu depăşească o valoare admisibilă prin subdimensionarea colectorului de evacuare.

În acest sens este necesar ca secţiunea de trecere a gazelor de evacuare prin colector să satisfacă relaţiile empirice $s_E \geqslant 25 \pm 5$ cm² pentru fiecare 100 CP dezvoltate de motor san

$$s_E \geqslant 0{,}0030\,\frac{P_m}{100}\ (\mathrm{m}^2).$$

3.3.1. Presiunea gazelor de evacuare în colector, respectiv excesul de presiune faţă de mediul din aval în care se face eşapamentul, rezultă din considerarea secţiunii de ieşire din colector care trebuie să satisfacă inegalitatea de mai jos

$$0{,}0030\,\frac{P_m}{100} \leqslant s_{e_5} \leqslant s_E$$

$$\frac{1}{\delta^\star} = \delta'^\star = \frac{p^\star_{m_E}}{p_h} < \delta'^\star_{cr} \sim 1{,}86,$$

în care p_h este presiunea statică în mediul de eşapare care poate fi presiunea atmosferică ($p_h = p_c$) în cazul ajutajului reactiv (5(0)) sau neutilizării energiei gazelor de evacuare (0) sau presiunea din aval de compresor ($p_h = p_{c_2}$) în cazul utilizării energiei gazelor de evacuare prin amestec [2].

În cazul ajutajului reactiv neglijăm într-o primă aproximaţie pierderile pe conductă pînă la ajutaj avînd în vedere vitezele resduse în conductă ale gazelor ($p_{e_4}' - p_{m_E}$).

Pentru debitul dat al gazelor de evacuare (Q_m) rezultă o dependenţă strictă între secţiunea de ieşire şi δ', prima trebuind să satisfacă inegalitatea de mai sus şi în principiu să fie cît mai mare pentru ca, contrapresiunea să fie cît mai mică la motor, iar în cazul ajutajului reactiv, viteza de ejecţie (V_{e_5}) să rezulte şi ea cît mai mică pentru o utilizare maximă a energiei reactive.

Această dependenţă este dată de ecuaţia de debit

$$Q_m = \mu\, s_{e_5} \cdot \gamma_{e_5} \cdot V_{e_{5t}} \qquad \text{sau}$$

$$\frac{Q_m}{s_{e_5}} = \mu\, \gamma_{e_5} \cdot V_{e_{5t}} \text{ cu } \mu = 0{,}94 - 0{,}96 \sim 0{,}95,$$

$$\text{în care } \gamma_{e_5} = \frac{p_{m_E}}{R_{\text{gaz}}\, T_{m_e}} \cdot \delta^{\frac{1}{k_{\text{gaz}}}} \text{ cu } \delta = \frac{p_h}{p_{m_E}} = \frac{1}{\delta},$$

$$V_{e_{5t}} = \sqrt{2g\,\frac{c_p \text{gaz}}{A}\,T^\star_{m_e}\left(1 - \delta^{\star\,\frac{k_{\text{gaz}}-1}{k_{\text{gaz}}}}\right)}.$$

Deci

$$\frac{Q_m}{s_{e_5}} = 0{,}95 \cdot \frac{p_{m_E}}{R_{\text{gaz}} \cdot T_{m_e}} \cdot \delta^{\frac{1}{k_{\text{gaz}}}} V_{e_{5t}}$$

variația lui $V_{e_{5t}}$ în funcție de $T^{*}_{m_e}$ și δ^{*} este dată în diagrama din figura 3.3.1.

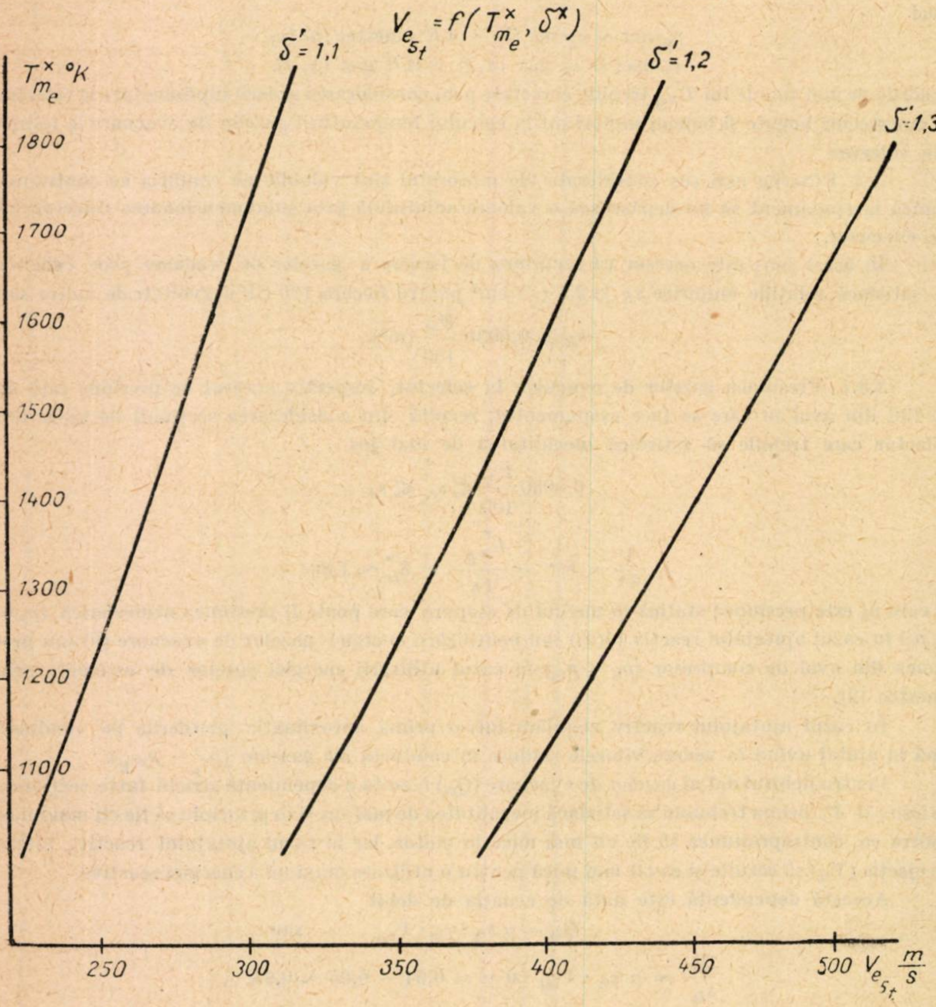


Fig. 3. 3. 1

3.3.2. Valorile lui $T^{*}_{m_e} \sim T_{me} = 0{,}90-0{,}95\ T_{m_E}\ (T'_{m_E})$ se iau din graficul anterior care se corectează pentru amestecuri bogate și baleiaj important după cum urmează din relația

$$H_{g_{ci}} + H_{\text{col}} = (1 + \alpha_{\text{col}} \cdot a_0)\, c_{p_{\text{gaz}}} \Big|_{273}^{T'} (T'_{m_E} - 273) - \alpha_{\text{col}}\, a_0\, c_{p_a} \Big|_{273}^{T_a} (T_a - 273),$$

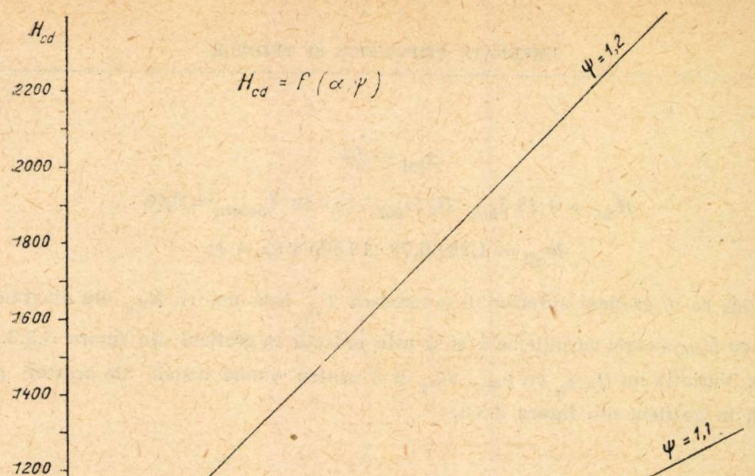


Fig. 3. 3. 2

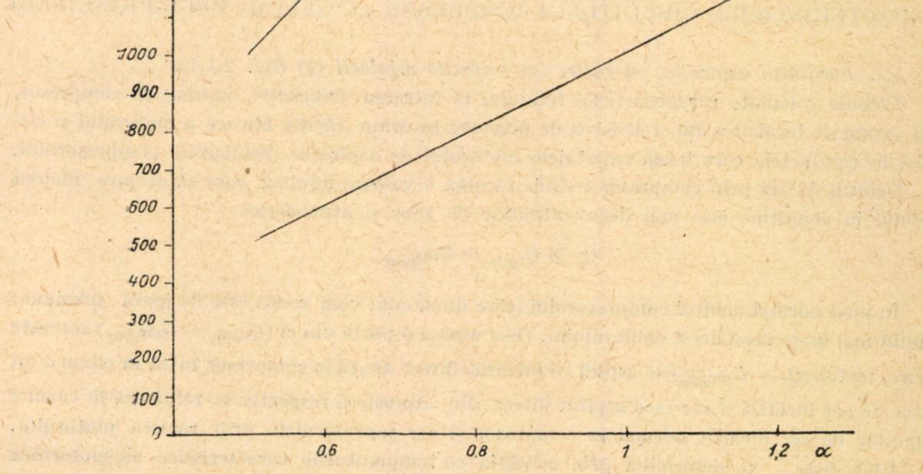


Fig. 3. 3. 3

în care

$$\alpha_{\text{col}} = \psi\alpha$$

$$H_{\text{col}} = 1{,}28\ \xi_{\text{ard}} \cdot H_c (\alpha_{\text{col}} - \alpha)\ \text{cu}\ \xi_{\text{ardere}} \sim 0{,}78$$

$$H_{\text{col}} = 1{,}28 \cdot 0{,}78 \cdot 10\,500\ \alpha\ (\psi - 1).$$

Aceasta revine ca în graficul anterior să se citească T'_{m_E} însă pentru $H_{g_{ci}}$ din diagrama figurii 3.2.2 sporit cu H_{col} a cărei variaţie cu α şi ψ este arătată în graficul din figura 3.3.2.

3.3.3. Variaţia lui $Q_{m/s_{e_5}}$ cu p_{m_E}, T_{m_E} şi δ pentru valori uzuale ale acestor parametri este arătată în graficul din figura 3.3.3.

4. CARACTERISTICILE CIRCUITULUI COMPRESOR „C" (FLUID RECE-PRINCIPAL)

4.1. *Porţiunea aspiraţiei cu răcire* (*a*) *respectiv refulării* (*b*) (fig. 2.1.1).

Trebuie calculate caracteristicile fluidului la intrarea (respectiv ieşirea) în compresor, ţinînd seama de încălzirea lui şi căderea de presiune în urma răcirii eficace a motorului şi circulaţiei în conductele care leagă capotajele motorului de aspiraţia (refularea) compresorului.

Debitul de aer prin compresor trebuie să aibă o valoare minimă care să asigure răcirea motorului în condiţiile cele mai dezavantajoase de zbor şi atmosferice

$$Q_c \geqslant Q_{c_{\min}} = G_{\text{răc}_{\min}}.$$

În mod normal debitul compresorului (care după cum vom vedea este de joasă presiune) este mult mai mare decît acest debit minim. Deci numai o parte din el ($Q_{c_{\min}} = G_{\text{răc}_{\min}}$) serveşte la răcire, restul ($Q_c - G_{\text{răc}_{\min}}$) se aspiră (refulează) direct aşa că în compresor intră în cazul *a* un amestec de aer încălzit şi aer rece aspirat direct din atmosferă respectiv se refulează în cazul *b* un amestec de aer încălzit normal în compresor şi aer supraîncălzit prin răcirea motorului.

4.1.1. $G_{\text{răc}_{\min}}$ se determină prin condiţia ca temperaturile caracteristice ale motorului (şi în special temperatura la bujia cea mai dezavantajoasă şi a uleiului de răcire) să nu depăşească anumite valori maxime în condiţiile cele mai dezavantajoase pe care le considerăm deocamdată zborul la punct fix la sol cu o temperatură $t_{a_e} = t_h^{\star} \sim t_h \sim t_{AS} + 25° = 40°C$. O metodă expeditivă empirică este a considera căldura evacuată la răcire exprimată în funcţie de puterea dezvoltată de motor, care pentru motoarele actuale uzuale are forma

$$W_n = 260 - 320\ P_m \sim 300\ P_m \left(\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right)$$

şi condiţia ca aerul de răcire să nu sufere o creştere de temperatură care să depăşească valorile normale în condiţiile cele mai dezavantajoase considerate mai sus

$$\Delta t_{\text{răc}_0} = 55 - 70°\text{C} \sim 60°\text{C}\ (\text{maxim la}\ G_{\text{răc}_{\min}}).$$

Rezultă cu valorile admise mai sus

$$G_{\text{răc}_{\min}} = \frac{W_n}{3\,600 \cdot c_p \cdot \Delta t_{\text{răc}_{\max}}} = \frac{300\ P_m}{3\,600 \cdot 0{,}24 \cdot 60} \sim \frac{P_m}{173} \left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right),$$

adică 5,8 kg/s la 1 000 CP (valori uzuale 5—7—kg/s şi 1 000 CP).

O metodă mai exactă folosește ecuația de echilibru între căldura cedată de fluidul motor și preluată de fluidul de răcire la echilibru termic [1] și [2]

$$G_{răc_{min}} = K\,Q_{m_a}\left[\frac{t_e - t_{buj}}{t_{buj} - t_{a_e}}\right]^{\frac{1}{m}},$$

cu valori medii $K = \frac{1}{c} = 1{,}5 - 2{,}5 \sim 1{,}73$,

$$t_{a_e} = 40°\mathrm{C} + \Delta T^{*}_{c_{real}} \quad \text{cu} \quad \Delta T^{*}_{c_{real}} = 0 \text{ în cazul } a,$$

$$t_e = (\text{la } \alpha \sim 0{,}85) \sim 660°\mathrm{C},$$

$$t_{buj} = 230 - 260 \sim 240°\mathrm{C},$$

$$m = 0{,}5 - 0{,}6 \sim 0{,}55,$$

cu cifrele medii admise

$$G_{răc_{min}} \cong 1{,}73\left(\frac{420}{200 - \Delta T^{*}_{c_{real}}}\right)^{\frac{1}{0{,}55}} \cdot Q_{m_a}\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right),$$

$$G_{răc_{min}} \cong 6{,}65\,Q_{m_a} \text{ în cazul } a;$$

$$Q_{m_a} = q \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot \psi \quad \text{sau}$$

$$\frac{G_{răc_{min}}}{q} = \overline{G}_{răc_{min}} = 26\left(\frac{420}{200 - \Delta T^{*}_{c_{real}}}\right)^{\frac{1}{0{,}55}} \alpha\psi \sim 100\,\alpha\psi \quad \text{în cazul } a.$$

În diagrama din figura 4.1.1 este indicată variația $\overline{G}_{răc_{min}} = f(\alpha, \psi)$ în cazu la. În cazul b cifrele respective din diagramă se multiplică cu $A = 0{,}26\left(\frac{420}{200 \cdot \Delta T^{*}_{c_{real}}}\right)^{\frac{1}{0{,}55}}$ a cărui variație cu $\Delta T^{*}_{c_{real}}$ este arătată în aceeași diagramă.

4.1.2. Creșterea de temperatură a aerului de răcire rezultă din relația

$$\Delta t_{răc} = \frac{W_n}{3\,600 \,.\, c_p \cdot G_{răc}} = \frac{\alpha_{a_c} \cdot A_{cil} \cdot \Delta\theta}{3\,600 \,.\, c_p \cdot G_{răc}},$$

cu

$$\alpha_{a_c} = 60 - 120\left[\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{m^2\,h^0}}\right] \sim 75, \quad [2]$$

$$A_{cil} = 40 - 50\left(\frac{\mathrm{dcm^2}}{l}\right) \sim 0{,}5\,C\,(\mathrm{m^2}),$$

pentru motoare de circa 25 CP/1, deci

$$A_{\text{cil}} \cong \frac{P_m}{50}\ (\text{m}^2)\ \text{cu}\ P_m\ (\text{CP})$$

$$\Delta\theta = t_{\text{buj}} - t_{a_e} \cong 200 - \Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}},$$

deci cu valorile admise

$$\Delta t_{\text{răc}_{\text{max}}} = \frac{75}{0{,}24 \cdot 50 \cdot 26 \cdot 420^{1/0{,}55}} \cdot \frac{\left(200 - \Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}}\right)^{\frac{1{,}55}{0{,}55}}}{\grave{e} \cdot \alpha \cdot \psi}$$

$$\Delta t_{\text{răc}_{\text{max}}} \cong \frac{1}{250\,000} \cdot \frac{\left(200 - \Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}}\right)^{2{,}82}}{c \cdot \alpha \cdot \varphi} \qquad \text{sau}$$

$$\Delta_{t_{\text{răc}_{\text{max}}}} \cong \frac{12{,}5}{c\,\alpha\psi},$$

în cazul *a*

În graficul din figura 4.1.2 se arată $\Delta t_{\text{răc}_{\text{max}}} = f(c, \alpha, \psi)$ în cazul *a* valabilă cu condiția asigurării lui $G_{\text{răc}_{\text{min}}}$. Pentru cazul *b* se multiplică cu $B = \dfrac{\left(200 - \Delta T_{c_{\text{real}}}\right)^{2{,}82}}{3\,150\,000}$ a cărei variație cu $\Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}}$ este arătată în aceeaşi diagramă.

Notă. Acest calcul bazat pe valori medii verosimile ale diferiților coeficienți empirici este valabil pentru anteproiect rămînînd a fi verificați experimental la realizare și precizați la proiectare.

În orice caz nu sînt posibile surprize deoarece este totdeauna posibil reglajul vanelor, pe elicopterul realizat, pentru a asigura condițiile de funcționare ale motorului, chiar dacă în practică vor rezulta abateri de la cifrele determinate prin calcul.

Notă. În grafic s-a trasat *c* independent de α. În realitate există o dependență strînsă între *c* (respectiv η_i deci η_t) şi α pentru un motor dat la care se cunoaşte la regimul de bază $\alpha = 1$) valoarea lui η_i (deci η_t şi *c*) şi variația acestuia cu α. Acest lucru este definit experimental pentru motorul dat, în anteproiect putîndu-se lua valorile lui din bibliografie [1].

4.1.3. Căderea de presiune în circuitul de răcire al motorului (cazul *a* răcire pe aspirația compresorului)

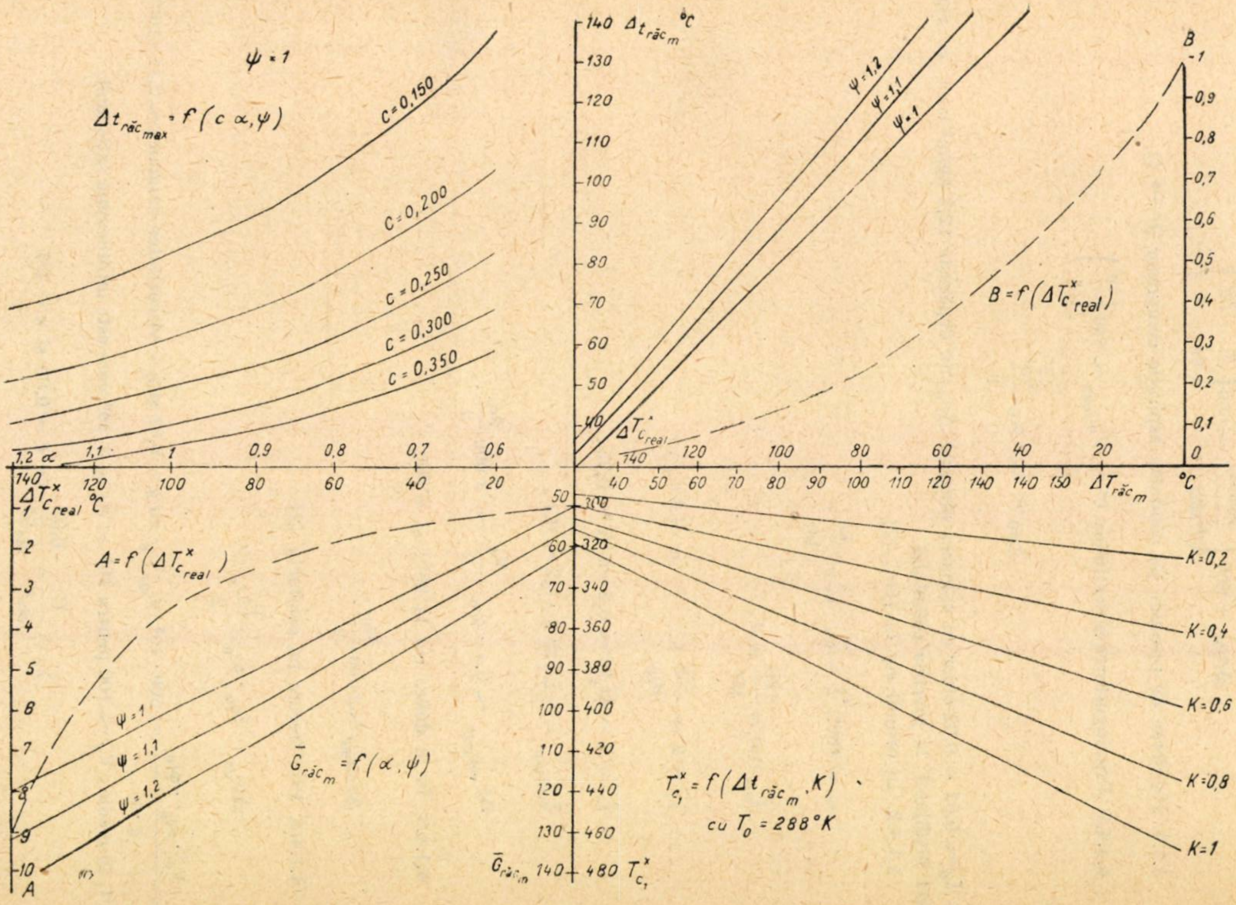
$$\Delta p_{\text{răc}} = \xi_{\text{cil}} \cdot \rho\, \frac{v_i^2}{2}$$

s-a calculat într-o primă aproximație pe baza datelor medii. Pentru o organizare rațională, în toate combinațiile răcirii motorului (capotaje, deflectoare, coturi etc.) se pot lua următoarele cifre de bază :

$$\xi_{\text{cil}} = 3{,}00 - 4{,}2 \sim 4,$$

Viteza inițială a aerului în canalele formate de nervuri pentru motorul de bază (0—0, α, $\psi = 1$) la regimul de calcul se poate considera $\simeq$ 50 m/s. Deci

$$\Delta p_{\text{răc}_0} = \frac{4}{16} \cdot 50^2 \sim 650 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right),$$



$\psi = 1$
$\Delta t_{răc_{max}} = f(c\,\alpha, \psi)$
C = 0,150
C = 0,200
C = 0,250
C = 0,300
C = 0,350
1,2 α 1,1 1 0,9 0,8 0,7 0,6
140 120 100 80 60 40 20
$\Delta T^{x}_{c_{real}}$ °C
$A = f(\Delta T^{x}_{c_{real}})$
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 A
ψ = 1
ψ = 1,1
ψ = 1,2
$\bar{G}_{răc_m} = f(\alpha, \psi)$
140 130 120 110 100 90 80 70 60 50 40 $\Delta t_{răc_m}$ °C
ψ = 1,2
ψ = 1,1
ψ = 1
$\Delta T^{*}_{c_{real}}$
140 120 100 80 60 40 20 0
B
-1 0,9 0,8 0,7 0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0
$B = f(\Delta T^{x}_{c_{real}})$
40 50 60 70 80 90 100 110 120 140 140 150 $\Delta T_{răc_m}$ °C
50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 $\bar{G}_{răc_m}$
300 320 340 360 380 400 420 440 460 480 $T^{x}_{c_1}$
K = 0,2
K = 0,4
K = 0,6
K = 0,8
K = 1
$T^{x}_{c_1} = f(\Delta t_{răc_m}, K)$
cu $T_0 = 288$ °K

Fig. 4. 1. 2

pentru altă combinaţie sau regim

$$\Delta p_{\text{răc}_0} = 650\left(\frac{G_{\text{răcmin}}}{G_{\text{răc}_0}}\right)^2 = 650\left(\frac{q}{q_0}\cdot\frac{\alpha\psi}{1}\right)^2,$$

4.1.4. Pierderea de presiune pe conducte aspiraţie compresor (0′ → 1).

4.1.4.1. Prin îngustarea în secţiunea 0′ cu $V_{0'_{\max}} \sim 100 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$

$$\Delta p_0 = \xi_0 \cdot \rho_{c0'}\frac{V_{0'}^2}{2}$$

cum $\xi_{0'} \sim 0{,}01 - 0{,}02$ chiar cu valoarea maximă $\Delta p_{0'}$ nu depăşeşte 12,5 kg/m² ceea ce este perfect neglijabil la precizia calculului.

4.1.4.2. În primul cot la 180°, [2]

$$\omega = 180°,\ \bar{\xi} = \bar{\omega},\quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{90},$$

$$\bar{\xi}_{\text{cot}}(\omega) = \frac{180}{90} = 2,$$

$$\bar{r}_i = 2 = \frac{2r_i}{d_{c0'}},\qquad r_i = 2\,d_{c0}',$$

$$\bar{\xi}_{r_i} = 1 - k\bar{r}_i^{0{,}1} \sim 0{,}2 \text{ cu } K \sim 0{,}75,$$

$$\xi_{\text{cot}_{180°}} = \bar{r}_i\,\xi_{r_i} \cong 2\cdot 0{,}2 \sim 0{,}4,$$

$$\Delta p_{\text{cot}_{180°}} \sim 0{,}4\cdot\rho_{c0'}\cdot\frac{V_0'}{2} \sim 4\,000\,\frac{\rho_{c0'}}{2}.$$

4.1.4.3. În al doilea cot la 90° : ω = 90°,

$$\Delta p_{\text{cot}_{90°}} \sim 2\,000\,\frac{\rho_{c0'}}{2}.$$

4.1.4.4. Prin frecare pe conductă [2]

$$\Delta p_{c_{fr}} = \xi_{c_{fr}}\cdot\rho_{c_0'}\cdot\frac{V_0'}{2},$$

$\mathfrak{Re} = \dfrac{V_0'\cdot d_{c_0}'\cdot\varphi c_0'}{g\cdot\eta} \sim 500\cdot 10^5\cdot d_{c_0}'\gamma_{c_0}'$ cu $g = 9{,}81$ şi η = viscozitatea dinamică $\sim 2{,}11\cdot 10^{-6}$ la 75°C în medie ; $V_0' \sim 100$ pentru $10^5 < \mathfrak{Re} < 3.10^6$ care este întotdeauna satisfăcut.

$$\lambda_c = \frac{C}{\mathfrak{Re}^{\varkappa}} = \frac{0{,}09}{\mathfrak{Re}^{1/7}} \text{ cu } c = 0{,}09 \text{ şi } \varkappa = 1/7$$

$$\xi_{c_{fr}} = \frac{\lambda_c\cdot l_c}{d_{c_0'}} = \frac{2.0.09}{d_{c_0'}\cdot\mathfrak{Re}^{1/7}} = \frac{0{,}18}{d_{c_0'}(500\cdot 10^5 d_{c_0}'\gamma_{c_0}')^{1/7}},$$

cu $l_c \sim 2$ m pentru toate combinațiile.

$$\xi_{c_{fr}} = \frac{0{,}036}{d_{c_0}'^{8/7} \cdot \gamma_{c_0}'^{1/7}}$$

$$\Delta p_{c_{fr}} = \frac{360}{d_{c_0}'^{8/7} \cdot \gamma_{c_0}'^{1/7}} \cdot \frac{\rho_{c_0}'}{2}.$$

4.1.5. Caracteristicile fluidului în secțiunea 1′ (înainte de amestecare cu aerul ambiant)

$$p_{c_1'} = p_0 - \sum \Delta p = p_0\left(1 - \frac{\Sigma \Delta p}{p_0}\right) \text{ cu } p_0 = 10\,330 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right),$$

$$\sum \Delta p = \Delta p_{\text{răc}} + \Delta p_{\text{cot}_{180°}} + \Delta p_{\text{cot}_{90°}} + \Delta p_{c_{fr}},$$

$$\sum \Delta p = 650 \left(\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\alpha\psi}{1}\right)^2 + \left(6\,000 + \frac{360}{d_{c_0}'^{8/7} \cdot \gamma_{c_0}'^{1/7}}\right) \cdot \frac{\rho_{c_0}'}{2}.$$

Pentru motorul și condițiile de bază această valoare este

$$\sum \Delta p_0 = 650 + \left(6\,000 + \frac{360}{1{,}21\, q^{4/7} \cdot 0{,}985}\right) \cdot 0{,}046, \text{ cu}$$

$$\Delta t_{\text{răc}_{\text{max}_0}} = 50°;\ Tc_0' = 313 + 50 = 363°\text{K},$$

$$p_{c_0'} = 10\,330 - 650 = 9\,680 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right),$$

$$v_{c_0}' = R \cdot \frac{T_{c_0}'}{p_{c_0}'} = 29{,}3 \cdot \frac{363}{9\,680} = 1{,}1 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}\right),$$

$$\gamma_{c_0}' = \frac{1}{v_{c_0}'} = 0{,}91 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right);\ \rho_{c_0}' = \frac{\gamma_{c_0}'}{9{,}81} = 0{,}093 \left(\frac{\text{kg s}^2}{\text{m}^4}\right),$$

$$U_{c_0}' = G_{\text{răc}_{\text{min}}} \cdot v_{c_0}' = 110\, q_0 \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right);\ s_{c_0}' = \frac{u_{c_0}'}{v_0'} = 1{,}1\ q_0\ (\text{m}^2),$$

$$d_{c_0}' = \sqrt{\frac{4}{\pi}\, s_{c_0}'} = \sqrt{1{,}4\, q_0} = 1{,}185 \sqrt{q_0}\ (\text{m}).$$

Deci

$$\sum \Delta p = 650 + \left(276 + \frac{13{,}9}{q_0^{4/7}}\right) = 926 + \frac{13{,}9}{q_0^{4/7}}.$$

Cum termenul din paranteză este relativ mic față de primul, neglijăm variațiile coeficienților numerici pentru cazul general și considerăm valabilă relația

$$\sum \Delta p = 650 \left(\frac{q}{q_0} \cdot \frac{\alpha\psi}{1}\right)^2 + \left(276 + \frac{13{,}9}{q^{4/7}}\right).$$

Variaţia lui $\Sigma\ \Delta p$ cu $\frac{q}{q_0}$, α, ψ se poate studia pentru un q dat după exemplul din diagrama din figura 4.1.5 trasat pentru $q = 0{,}01735$ kg/s (ce corespunde la un motor de circa 250 CP)

$$T_{c_1}' \cong T_{c_0}' = T_0 + \Delta T_{\text{răcmax}}.$$

în care ΔT este determinat în graficul din figura 4.1.2.

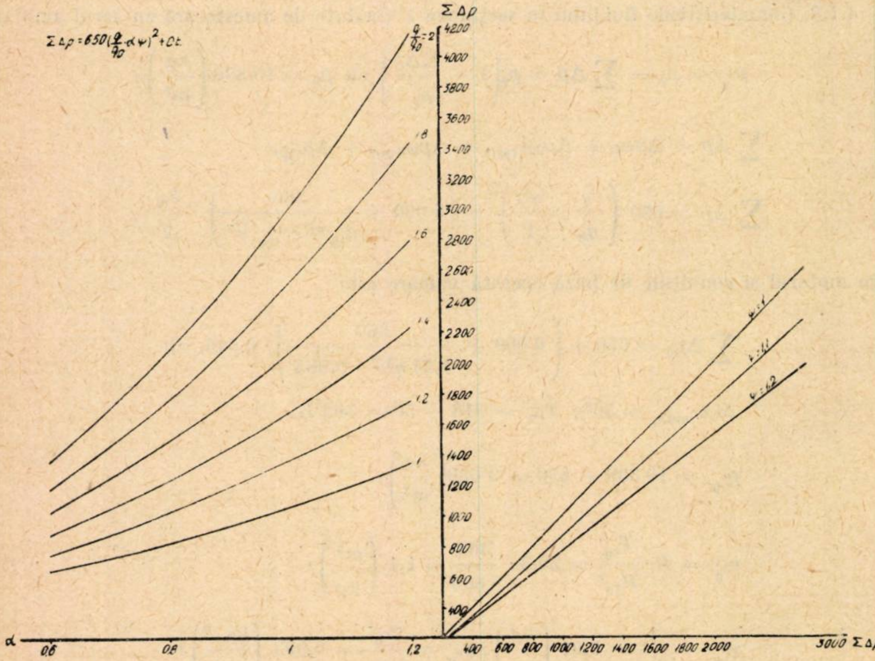


Fig. 4.1.5

Notă. Pe aceeaşi diagramă şi pentru exemplificare s-a trasat curba $\Sigma\Delta p$ la $\frac{q}{q_0} = 1$ şi $\psi = 1$ şi pentru valorile $q = 0{,}0353$ (corespunzînd la un motor de circa 500 CP), $q = 0{,}0707$ (circa 1 000 CP), $q = 0{,}1415$ (circa 2 000 CP). Se observă că diferenţele sînt relativ mici (variază între 8—0,7 %), motiv pentru care în anteproiect se poate neglija variaţia lui Δp cu q şi lua valorile acoperitoare din diagrama figurii 4.1.5.

4.1.6. Caracteristicile fluidului în secţiune 1 — 3′ (la intrarea în compresor după amestecare cu aerul ambiant pentru cazul *a* sau la refulare după răcirea motorului pentru cazul *b*).

După cum s-a arătat pentru răcirea motorului se foloseşte numai o cotă $KQ_c = Q_{c_{\min}} = G_{\text{răc}_{\min}}$ din debitul compresorului iar restul adică $(1 - K)\ Q_c$ se prelevează direct din atmosferă prin deschiderea parţială a voletului As_d de aspiraţia directă, în cazul *a* sau se refulează direct prin voletul Rf_d în cazul *b*, în cantitatea necesară pentru acest scop, adică astfel ca să reproducă aceeaşi rezistenţă hidraulică $\Delta p_d = \Sigma\Delta p_{\text{răc}}$ — ceea ce se poate realiza, comandat, urmărind temperatura la chiulasă şi ulei, sau automat, printr-un servomotor detectat de aceleaşi temperaturi.

În această situație, la intrare în compresor (*a*) sau ieșire (*b*), caracteristicile fluidului vor fi determinate pe baza formulelor de amestec a două fluide echipresiune : $p_{c_{1-3'}} = p_{c_{1'-2'}} = p_{0-c_2}\left(1 - \frac{\Sigma \Delta p}{p_{0-c2}}\right)$ definit anterior, din care unul cald, $T_{c_{1'-3'}} = T_{0-c_2} + \Delta T_{\text{răc}_{\max}}$ de debit $KQ_c = G_{\text{răc}_{\min}}$ iar celălalt relativ rece (T_{a_c} sau T_{c2}) de debit $(1 - k)\ Q_c = Q_c - G_{\text{răc}_{\min}}$ din relația calorimetrică a amestecurilor

$$Q_c T^{*}_{c_{1-3'}} \cdot C_{p_{1-3'}} = G_{\text{răc}_{\min}} T^{*}_{c_{1'-3'}} C_{p_{1'-3'}} + (Q_c - G_{\text{răc}_{\min}})\ T^{*}_{0-c2} \cdot c_{p_{0c2}}$$

$$T^{*}_{c_{1-3'}} = \frac{G_{\text{răc}_{\min}} T^{*}_{c_{1'-3'}} c_{p_{1'-3'}} + (Q_c - G_{\text{răc}_{\min}})\ T^{*}_{0 c_2} \cdot c_{p_{0-c2}}}{Q_c\, c_{p\,1-3}},$$

cum $c_{p_{1'-3'}} \sim c_{p_{0-c_3}} \sim c_{p_{1-3}}$,

$$T^{*}_{c\,1-3'} \cong T_{c1'-3'} + \frac{V^2_{1-3'}}{2\,010} \sim T_{0-c_2} + \Delta T_{\text{răc}_{\max}} \quad \text{cu} \quad V_{1-3'} \sim 70 - 80 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

și neglijînd răcirea pe conductă (compensare între răcire prin conductibilitate și încălzire prin frînare)

$$T^{*}_{c_{1-3'}} = K\,(T_{0-c2} + \Delta T_{\text{răc}_{\max}}) + (1 - k)\ T_{0-c_2},$$

$$T^{*}_{c_{1-3}} = T_{0-c_2} + K\ \Delta T_{\text{răc}_{\max}} \quad \text{cu} \quad K = \frac{G_{\text{răc}\,\min}}{Q_c} \leqslant 1.$$

În același grafic din figura 4.1 (1—2) s-a trasat și variația lui

$T^{*}_{c_1} = f\,(\Delta T_{\text{răc}_{\max}},\ K)$ în cazul *a* și pentru $T_0 = 288°\text{K}$ (fig. 4.1.6.).

4.2. Porțiunea ,,compresor'' (1 → 2).

4.2.1. Din relațiile cunoscute pentru calculul compresoarelor centrifugale

$$P_c = P_m = \frac{Q_c \cdot H_{c_{ad}}}{75 \cdot \eta_c}\ (\text{CP}) \quad \text{cu} \quad \eta_c = \eta_{c_{ad}} \cdot \eta_{c_m} \ \text{în care}$$

$\eta_{c_{ad}} = 0{,}72 - 0{,}78$; $\eta_{c_m} = 0{,}97 - 0{,}98$ deci $\eta_c = 0{,}7 - 0{,}765$ în medie 0,75.

4.2.2. Din condițiile impuse de răcirea motorului

$$Q_c \geqslant G_{\text{răc}_{\min}}$$

deci

$$Q_{c\,\min} = G_{\text{răc}\,\min} \quad \text{sau} \quad \frac{Q_{c\,\min}}{q} = \frac{G_{\text{răc}\,\min}}{q} = \overline{G}_{\text{răc}_{\min}}$$

de unde rezultă

$$H_{c_{ad}} \leqslant H_{c_{ad}\,\max} = \frac{75 \cdot P_m \cdot \eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\,\min}} = \frac{75\,\dfrac{P_m}{q} \cdot \eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\,\min}} = \frac{75 \cdot \dfrac{3\,600}{c}\,\eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\,\min}}$$

$$H_{c_{ad}\max} = \frac{75\,\dfrac{\eta_t \cdot H_c \cdot 427}{75}\,\eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\,\min}} = \frac{427\,H_c\,\eta_t\,\eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\,\min}},$$

$$H_{c_{ad}\max} = 4{,}5 \cdot 10^6\,\frac{\eta_t \cdot \eta_c}{\bar{G}_{\text{răc}\min}},$$

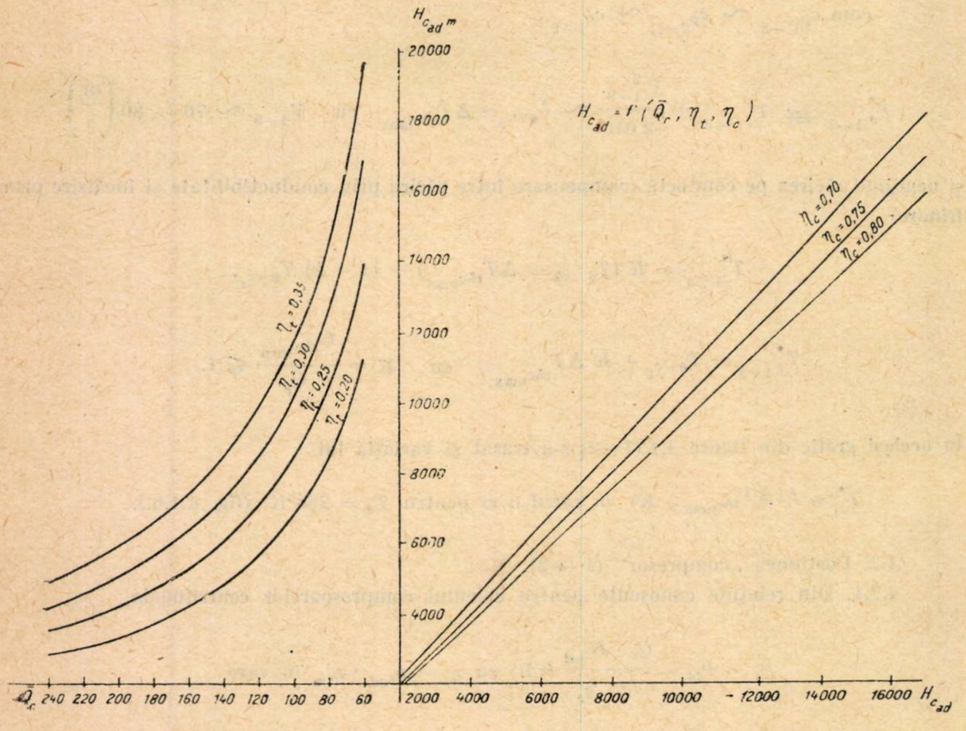


Fig. 4.2.3

4.2.3. Pentru valori intermediare

$$Q_c \cdot H_{c_{ad}} = 4{,}5 \cdot 10^6 \cdot \eta_t \cdot \eta_c \cdot q$$

$$H_{c_{ad}} = 4{,}5 \cdot 10^6 \cdot \frac{\eta_t \cdot \eta_c}{\bar{Q}_c} \quad \text{cu} \quad \bar{Q}_c = \frac{Q_c}{q}\,.$$

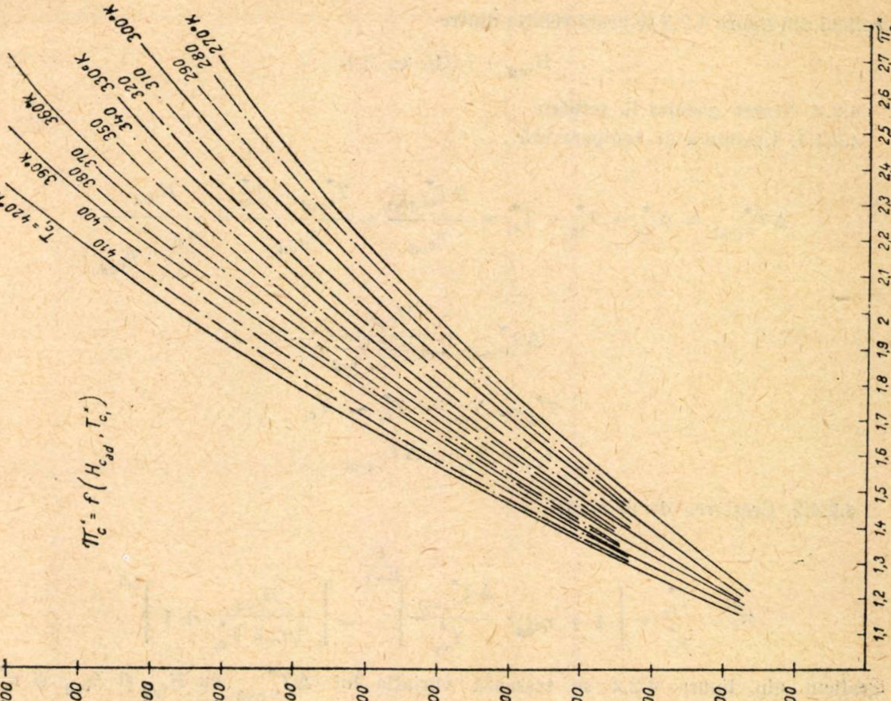


Fig. 4.2 b

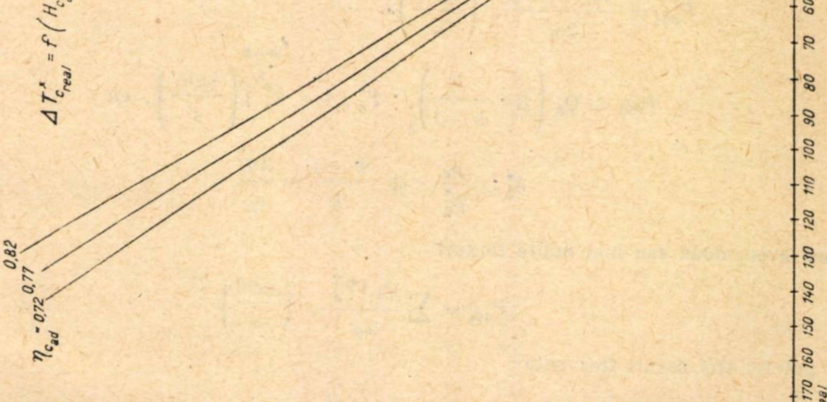


Fig. 4.2.4. a

În graficul din figura 4.2.3 se arată relaţia dintre

$$H_{c_{ad}} = f(\overline{Q}_c, \eta_t, \eta_c).$$

4.2.4. Starea gazului la refulare

4.2.4.1. Creşterea de temperatură

$$\Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}} = \Delta t^{\star}_{c_2} = T^{\star}_{c_2} - T^{\star}_{c_1} = \frac{\Delta T^{\star}_{ci_{\text{deal}}}}{\eta_{c_{ad}}} = \frac{T^{\star}_{c_{2ad}} - T^{\star}_{c_1}}{\eta_{c_{ad}}} = \frac{H_{c_{ad}}}{\frac{C_p}{A} \cdot \eta_{e_{ad}}}$$

$$\Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}} = \frac{H_{c_{ad}}}{102{,}5\, \eta_{e_{ad}}}$$

$$T^{\star}_{c_2} \sim T_{c_2} \qquad T^{\star}_{c_1} \sim T_{c_1}$$

$$T_{c_2} = T_{c_1} + \Delta T_{c_{\text{real}}}.$$

4.2.4.2. Creşterea de presiune

$$\pi^{\star}_c = \frac{p^{\star}_{c_2}}{p^{\star}_{c_1}} = \left[1 + \eta_{c_{ad}} \cdot \frac{\Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}}}{T^{\star}_{c_1}}\right]^{\frac{k}{k-1}} = \left[\frac{H_{c_{ad}}}{102{,}5\, T^{\star}_{c_1}} + 1\right]^{3,5}.$$

În graficul din figura 4.2.4 se trasează variaţia lui $\Delta T^{\star}_{c_{\text{real}}}$ cu $H_{c_{ad}}$ şi $\eta_{c_{ad}}$ şi $\pi^{\star}_c = f(H_{c_{ad}}, T^{\star}_{c_1})$.

5. PUTEREA GAZULUI (GENERATORULUI DE GAZE) ÎN SECŢIUNEA 3

5.1. Este definită prin puterea adiabatică a gazului la ieşirea din generator (energia produsă în unitatea de timp prin detenta izentropică a fluidului la presiunea ambiantă p_0 cu un randament presupus egal cu 1).

Dacă avem un singur flux de caracteristici cunoscute $(Q, T, c_p, p, V)_3$ în secţiunea 3

$$P_{ad_3} = \frac{Q_3 \cdot A \cdot V_d^2}{2g} \quad \left(\frac{\text{kcal}}{\text{s}}\right),$$

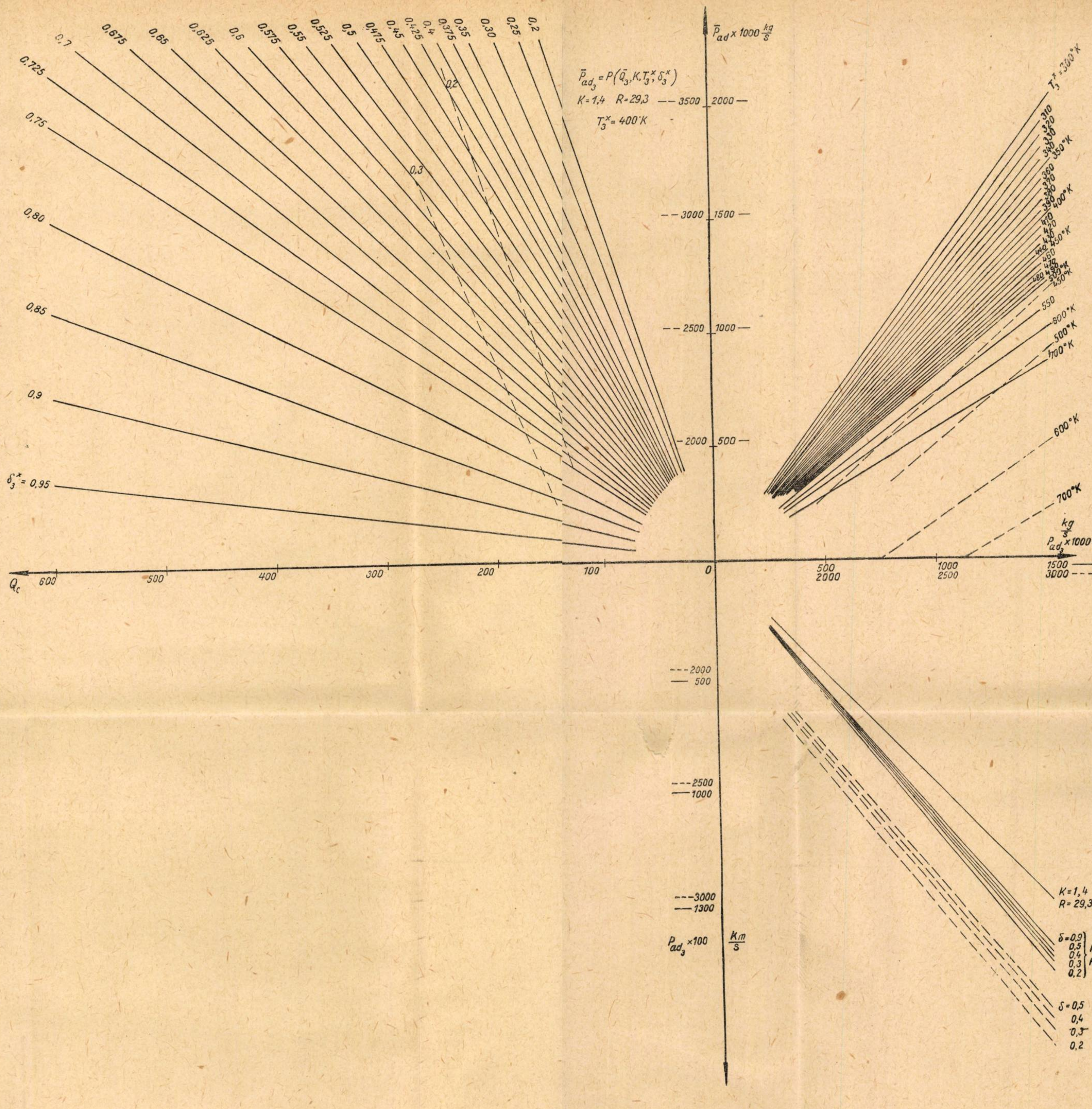
$$P_{ad_3} = Q_3 \left(R \cdot \frac{k}{k-1}\right)_3 \cdot T^{\star}_3 \left[1 - \delta_3^{\star \frac{k-1}{k}}\right] \left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right), \text{ cu}$$

$$\delta^{\star}_3 = \frac{p_0}{p^{\star}_3} \quad \text{şi} \quad \frac{k-1}{k} = \frac{AR}{c_p}.$$

Dacă avem două sau mai multe fluxuri

$$P_{ad_3} = \sum \frac{Q_3 A V_d^2}{2g} \quad \left(\frac{\text{kcal}}{\text{s}}\right).$$

Se pot ivi trei cazuri frecvente



$\bar{P}_{ad_3} = P(\bar{Q}_3, K, T_3^x, \delta_3^x)$
K=1,4 R=29,3
T_3^x= 400°K
$\bar{P}_{ad} \times 1000 \frac{kg}{s}$
0,2
0,25
0,30
0,35
0,375
0,4
0,425
0,45
0,475
0,5
0,525
0,55
0,575
0,6
0,625
0,65
0,675
0,7
0,725
0,75
0,80
0,85
0,9
δ_3^x= 0,95
0,2
0,3
3500
2000
3000
1500
2500
1000
2000
500
T_3^x=300°K
310
320
330
340
350°K
360
370
380
390
400°K
410
420
430
440
450°K
460
470
480
490
500°K
450°K
550
600°K
500°K
700°K
600°K
700°K
$\frac{kg}{s}$
$P_{ad_3} \times 1000$
1500
3000
Q_c
600
500
400
300
200
100
0
500
2000
1000
2500
2000
500
2500
1000
3000
1300
$P_{ad_3} \times 100$
$\frac{km}{s}$
K=1,4
R=29,3
δ=0,9
0,5
0,4
0,3
0,2
K=1,33
R=29,3
δ=0,5
0,4
0,3
0,2

Fig 5. 2. 1

5.1.1. *Cazul 1.* Nu se recuperează energia gazelor de evacuare ale motorului. În acest caz caracteristicile fluidului în secțiunea 3 sînt aproximativ identice cu cele în secțiunea 2 (aerul refulat de compresor)

$$P_{ad_3} = \frac{Q_c V_d^2}{2\,g} = Q_c \left(R\,\frac{k}{k-1}\right)_{c_2} \cdot T^{\star}_{c_2} [\,1 - \delta^{\star\left(\frac{k-1}{k}\right)_{c_2}}_{c_2}\,] \quad \left(\frac{\text{kgm}}{\text{s}}\right),$$

$$\frac{P_{ad_3}}{q} = \overline{P}_{ad_3} = \overline{Q}_c \left(R\,\frac{k}{k-1}\right)_{c_2} T^{\star}_{c_2} [\,1 - \delta^{\star\left(\frac{k-1}{k}\right)_{c_2}}_{c_2}\,] \quad (\text{m}).$$

Valorile lui c_p, R sînt acelea pentru aer la temperaturi cuprinse între 15—300°C. Acest caz este valabil pentru combinațiile : 0—0, 2—0, 2(0)—0.

5.1.2. *Cazul 2.* Se recuperează energia gazelor de evacuare sub forma unui flux independent, de obicei tub concentric interior. Valabil pentru combinațiile 0—5(0), 2—5 (0), 2(0)—5(0)

$$P_{ad_3} = \frac{Q_{c_3} \cdot V_{cd}^2}{2g} + \frac{Q_m \cdot V_{md}^2}{2g},$$

$$\frac{P_{ad_3}}{q} = \overline{P}_{ad_3} + \frac{\overline{Q}_{c_3} V_{cd}^2}{2\,g} = \frac{\overline{Q}_m V_{md}^2}{2g} \quad \text{cu} \quad V_{md} \sim V_{e_{5t}}\,.$$

Primul termen este acelaşi cu cel de la cazul 1 cu remarca că pentru 0—5(0), $Q_{c_3} = Q_{c_2} = Q_c$. Pentru 2—5(0) şi 2(0)—5 (0), $Q_{c_3} = Q_c - Q_{m_a}$. Pentru al 2-lea se poate folosi graficul care dă variaţia lui $V_{e_{5t}}$ cu $T^{\star}_{m_c}$ şi $\delta^{\star}_{m_E}$.

5.1.3. *Cazul 3.* Se recuperează energia gazelor de evacuare sub forma unui amestec a două fluide cvasiechipresiune (gaze evacuate şi aer refulat de compresor). Valabil pentru combinaţiile 0—2, 2—2, 2(0)—2. În acest caz caracteristicile fluidului în secţiunea 3 se stabilesc din relaţia calorimetrică a amestecurilor

$$Q_a \cdot T^{\star}_{a_3}\, c_{pa_3} = Q_{c_3} \cdot T^{\star}_{c_3}\, c_{p_{c_3}} + Q_m\, T^{\star}_{m_c}\, c_{pm_c} \quad \text{cu} \quad Q_a = Q_{c_3} + Q_m\,,$$

$$T_{a_3} = \frac{Q_{c_3} T^{\star}_{c_3} c_{pc_3} + Q_m T^{\star}_{m_c} c_{pm_c}}{(Q_{c_3} + Q_m)\, c_{pa_3}},$$

sau raportînd la q şi sus şi jos $\left(\frac{Q}{q} = \overline{Q}\right)$

$$T^{\star}_{a_3} = \frac{\overline{Q}_{c_3} T^{\star}_{c_3} c_{pc_3} + \overline{Q}_m T^{\star}_{m_c} c_{pm_c}}{(\overline{Q}_{c_3} + \overline{Q}_m)\, c_{pa_3}},$$

raportînd la $\overline{Q}_m$ şi sus şi jos punînd $\frac{\overline{Q}_c}{\overline{Q}_m} = \frac{Q_c}{Q_m} = \overline{\overline{Q}}_c$.

$$T^{\star}_{c_3} \sim T^{\star}_{c_2},\; c_{pc_3} \sim c_{pc_2},\; \overline{c}_p = \frac{c_p}{c_{pm_c}},$$

$$T^{\star}_{a_3} = \frac{\overline{\overline{Q}}_{c_3} T^{\star}_{c_2} \overline{C}_{pc_2} + T^{\star}_{m_c}}{(\overline{\overline{Q}}_{c_3} + 1)\, \overline{c}_{pa_3}}.$$

Pentru c_{pa_3} într-o primă aproximaţie şi avînd în vedere diferenţa relativ mică între c_{pc_2} şi c_{pm_c} se poate lua :

$$c_{ra_3} \sim c_{p\mathrm{med}} \sim \frac{c_{pc_2} + c_{pm_e}}{2} \qquad \text{deci} \qquad \bar{c}_{pa_3} \sim \frac{\bar{c}_{pc_2} + 1}{2}$$

mai precis

$$c_{va_3} = \frac{Q_{c_3}\, c_{vc_3} + Q_m\, c_{vm_e}}{Q_{c_3} + Q_m} = \frac{\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, c_{v\,c_2} + c_{vm_e}}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1},$$

$$(c_p - AR)_{a_3} = \frac{\bar{\bar{Q}}_{c_3}(c_p - AR)_{c_2} + (c_p - AR)_{m_e}}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1}$$

$$c_{pa_3} - AR_{a_3} = \frac{(\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, c_{pc_2} + c_{pm_e}) - A\,(\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, R_{c_2} + R_{m_e})}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1}$$

$$c_{pa_3} = \frac{(\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, c_{pc_2} + c_{pm_c}) - A\,(\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, R_{c_2} + R_{m_e}) + A\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, R_{a_3} + AR_{a_3}}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1}$$

$$c_{pa_3} = \frac{(\bar{\bar{Q}}_{c_3}\, c_{pc_2} + c_{pm_e}) - A\,[\bar{\bar{Q}}_{c_3}\,(R_{c_2} - R_{a_3}) + (R_{m_c} - R_{a_3})]}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1},$$

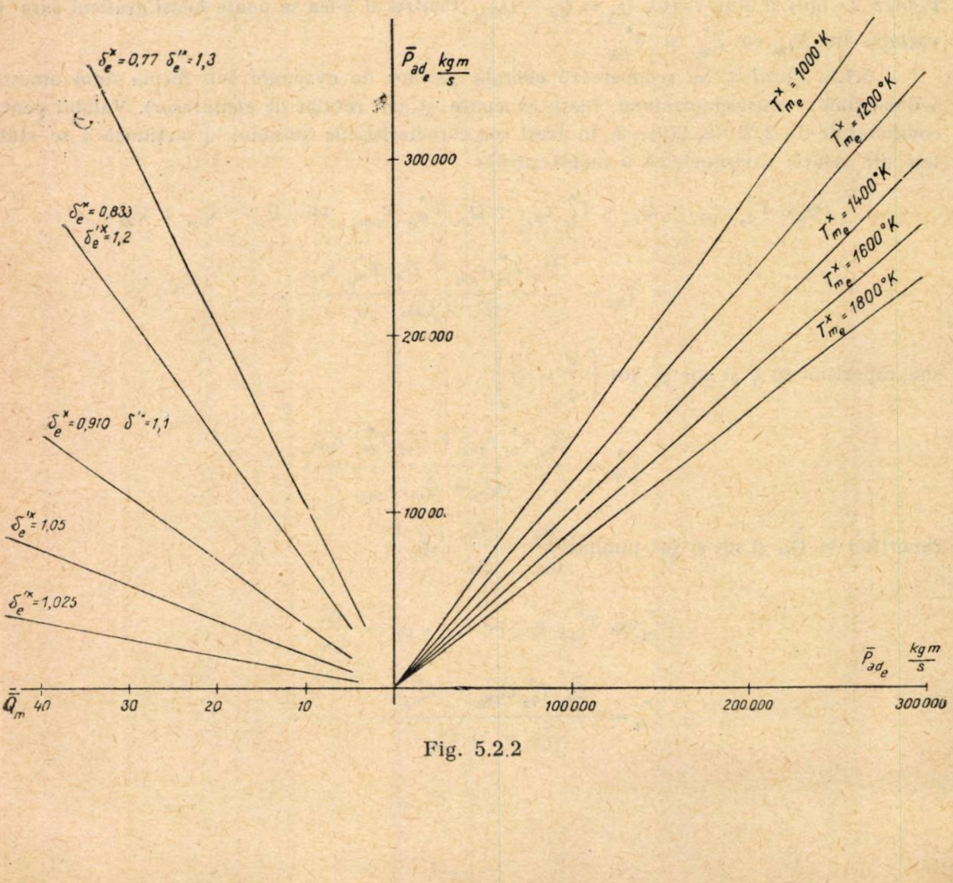


Fig. 5.2.2

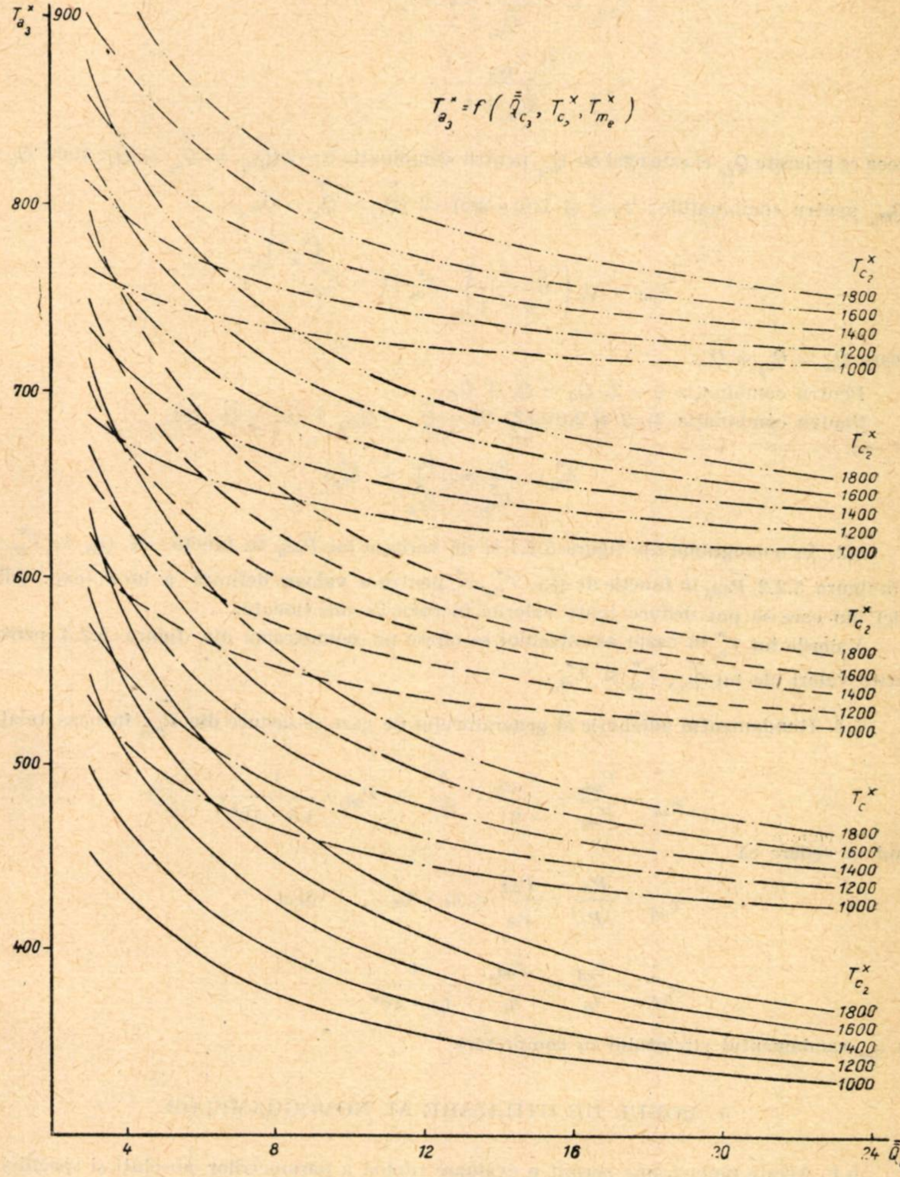

T_{a_3}^x = f(Q̿_{c_3}, T_{c_2}^x, T_{m_e}^x)
T_{a_3}^x
900
800
700
600
500
400
4
8
12
16
20
24
Q̿_{c_3}
T_{c_2}^x
1800
1600
1400
1200
1000
T_{c_2}^x
1800
1600
1400
1200
1000
T_{c_2}^x
1800
1600
1400
1200
1000
T_c^x
1800
1600
1400
1200
1000
T_{c_2}^x
1800
1600
1400
1200
1000

Fig. 5.2.3

Neglijînd termenul din paranteză [ ]

$$c_{pa_3} = \frac{\bar{\bar{Q}}_{c_3} c_{pc_2} + c_{pm_e}}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1},$$

$$c_{pc_3} = \frac{\bar{\bar{Q}}_{c_3} \bar{c}_{pc_2} + 1}{\bar{\bar{Q}}_{c_3} + 1}.$$

În ceea ce privește Q_{c_3} el este egal cu Q_{c_2} pentru combinația 0 $-$2 ($\bar{\bar{Q}}_{c_3} = \bar{\bar{Q}}_{c_2} = \bar{\bar{Q}}_c$) și cu $Q_c - Q_{m_a}$ pentru combinațiile : 2—2 și 2(0)—2(0)—2 ($\bar{\bar{Q}}_{c_3} = \bar{\bar{Q}}_c - Q_{m_a}$)

$$\bar{P}_{ad} = \bar{Q}_a \left(R \frac{k}{k-1} \right)_{a_3} T^{\star}_{a_3} [1 - \delta^{\star \left(\frac{k-1}{k}\right)_{a_3}}_{a_3}]$$

în care $Q_a = Q_{c_3} + Q_m$.

Pentru combinația 0 $-$ 2, $\bar{Q}_a = \bar{Q}_c + \bar{Q}_m$.

Pentru combinația 2—2 și 2(0)—2, $\bar{Q}_a = \bar{Q}_c - \bar{Q}_{m_a} + \bar{Q}_m = \bar{Q}_c + 1$,

$$\delta^{\star}_{a_3} = \frac{p_0}{p^{\star}_{a_3}} \sim \frac{p_0}{p^{\star}_{c_2}} \sim \delta^{\star}_{c_2}.$$

5.2. În nomograma din figura 5.2.1 se dă variația lui $\bar{P}_{ad_3}$ în funcție de $\bar{Q}_3$, k, $T^{\star}_3$, $\delta^{\star}_3$ iar în figura 5.2.2 $\bar{P}_{ad_c}$ în funcție de $\bar{Q}_m$, $T^{\star}_{me}$, $\delta^{\star}_e$ pentru o valoare definită a lui k (exp. adiabatic) din care se pot deduce toate valorile în cazurile menționate.

Valorile lui $T^{\star}_{a_3}$ în cazul amestecului se citesc pe nomograma din figura 5.2.3 pentru diferite valori ale lui $\bar{\bar{Q}}_{c_3}$, $T^{\star}_{c_2}$ și $T^{\star}_{m_e}$.

5.3. Randamentul adiabatic al generatorului de gaze se deduce din $\bar{\bar{P}}_{ad_3}$ în baza relației

$$\eta_{ad} = \frac{P_{ad_3}}{P_{cm}} = \frac{P_{ad_3}}{q} \cdot \frac{A}{H_c} = \bar{P}_{ad_3} \cdot \frac{1}{4{,}5 \cdot 10^6},$$

avînd în vedere că

$$\eta_{ad} = \frac{P_m}{P_c} \cdot \frac{P_{ad}}{P_m} = \eta_t \cdot \eta_{cc} \qquad \text{deci}$$

$$\eta_{cc} = \frac{\eta_{ad}}{\eta_t} = \frac{\bar{P}_{ad_3}}{\eta_t} \cdot \frac{1}{4{,}5 \cdot 10^6}$$

(cu η_{cc} randamentul circuitului în compresor).

6. MODUL DE UTILIZARE AL NOMOGRAMELOR

6.1. Aceste nomograme permit o evaluare rapidă a parametrilor absoluți și specifici ai generatorului de gaze în cele două situații posibile ce se pot ivi în practică și anume :

6.1.1. motor și compresor (sau cel puțin datele lor de bază dintre care obligatoriu grupul η_t, α, ψ și η_c) definite și se cere determinarea caracteristicilor gazului furnizat de generator în diferite combinații arătate mai sus și variația lor cu caracteristicile compresorului.

6.1.2. sau invers, caracteristicile gazului definite și se cere determinarea caracteristicilor motorului și compresorului capabil să le realizeze.

6.2. În ambele cazuri se trasează grafic variația lui $\overline{Q}_3$ (pornind de la valoarea minimă corespunzătoare lui $k = 1$) a parametrilor finali $\overline{P}_{ad_3}$ (respectiv η_{cd}) $T_3^\star$, $p_3^\star$ (eventual și a altor parametri intermediari) pentru diferite valori definite ale grupului interdependent η_t, α, ψ ale motorului de referință (0—0) și ale lui η_c cît și pentru diferitele combinații indicate între cele două fluxuri, de unde se alege soluția optimă în funcție de datele problemei.

De remarcat că în situația 6.1.1. grupul $(\eta_t, \alpha, \psi)_{0-0}$ și η_c au valori unice.

O dată soluția aleasă se face o verificare analitică riguroasă cu alegerea coeficienților numerici celor mai potriviți (determinați eventual experimental) soluției alese (în locul celor medii folosiți în nomograme) și cu eliminarea aproximațiilor folosite la trasarea nomogramelor.

Primită la redacție la 25 iunie 1957.

BIBLIOGRAFIE

1. M. M. Maslenikov și M. S. Rapiport, *Motoare cu piston pentru aviație.* Ed. tehnică, București, 1953.
2. V. I. Polikovski, *Instalații de forță pentru avioane.* Ed. tehnică, 1954.
3. Marchal, *Moteurs d'Aviation,* Dunod, Paris, 1948.
4. P. Morain, *Etude comparative d'helicoptères thermopropulsés.* Technique et science aéronautique, 1951, nr. 3.
5. René Dorand, *Giravions à rotors thermopropulsés par fluide moteur a basse pression.* Technique et science aéronautique, 1951, nr. 3.

BANC EXPERIMENTAL PENTRU STUDIUL REZISTENŢEI FUSURILOR LA UZURĂ ÎN REGIM NEPERMANENT

DE

N. ZELINGHER şi P. FREUND

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Încercările materialelor de antifricţiune (lagăre) se fac în general în condiţiile unor funcţionări continue, deci în cazul cînd se realizează o ungere hidrodinamică (fluidă). Aceste încercări reflectă deci într-o măsură mai restrînsă calităţile antifricţiune pozitive sau negative ale unui material de lagăr.

În zona (domeniul) unde este realizată ungerea fluidă, neexistînd un contact metalic între materialele conjugate, uzura mecanică este teoretic nulă, intervenind doar ceilalţi factori ai uzurii ca eroziune, coroziune etc. La asemenea condiţii de funcţionare sînt necesare 500—800 ore de experimentare, pentru obţinerea unor uzuri măsurabile cu aparatajul curent de măsură. Această stare de fapt duce la perioade de experimentare foarte lungi.

În exploatare, în majoritatea cazurilor, maşinile sînt supuse unui regim de funcţionare intermitent şi din acest motiv rezultatele obţinute pe baza experienţelor făcute în regim fluid, pot fi aplicate numai cu anumite rezerve în practică.

Caracteristicile antifricţiune ale unui material de lagăre apar mai evident atunci cînd avem de-a face cu un contact metalic între fus şi cuzinet. Acest lucru se poate realiza prin ungere la limită (semi-fluidă) obţinută prin oprirea şi pornirea sub sarcină a lagărului.

Consideraţiile de mai sus au determinat colectivul să elaboreze şi să realizeze schema şi instalaţia unui banc de încercarea materialelor antifricţiune, cu funcţionare în regim nepermanent.

Instalaţia realizată reproduce funcţionarea intermitentă a lagărului, prin adaptarea unor dispozitive de reglaj automat ce permit pornirea şi oprirea lagărului experimental la anumite intervale de timp dinainte fixate.

În urma experienţelor făcute pentru verificarea instalaţiei s-a constatat că timpul de experimentare se reduce de la 800 la 100 ore interval de timp în care se obţin uzuri uşor măsurabile.

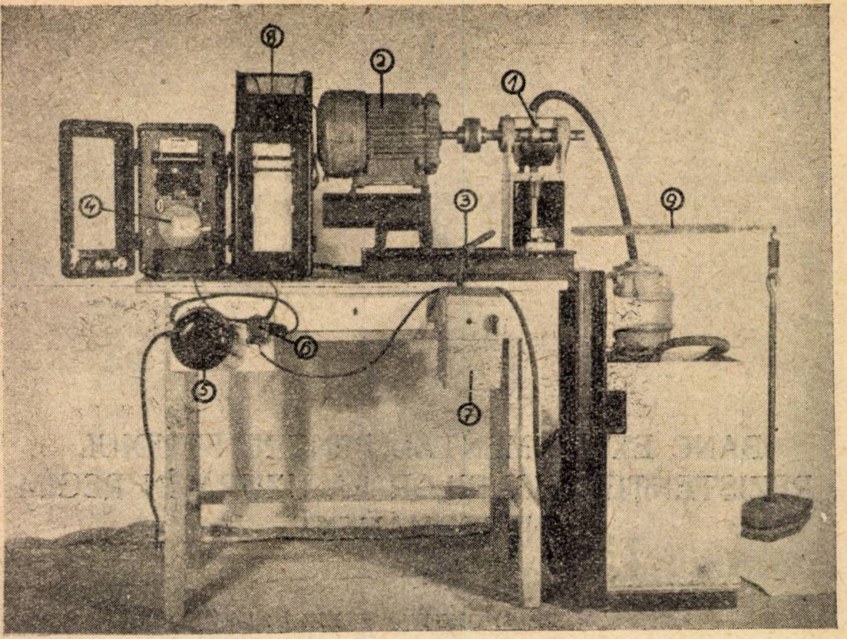


Fig. 1

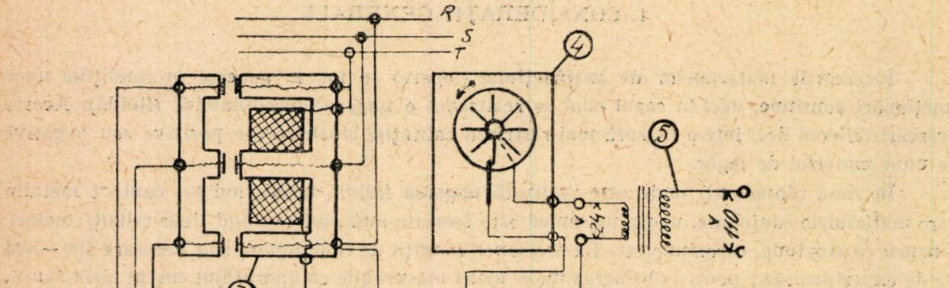

R
S
T
4
5
24
110
7
6
8
W
1
U V W
2
9

Fig. 2

2. DESCRIEREA INSTALAŢIEI

Instalaţia se compune din următoarele părţi :

1) Lagărul experimental propriu-zis.
2) Sistemul de încărcare.
3) Sistemul de acţionare.
4) Dispozitivul automat pentru realizarea funcţionării cu intermitenţă.
5) Sistemul de înregistrare şi control.
6) Sistemul de ungere.

Prezenta descriere se referă numai la dispozitivul automat pentru realizarea funcţionării cu intermitenţă, sistemul de înregistrare şi control şi sistemul de încărcare.

În figura 1 este redată fotografia instalaţiei şi în figura 2 schema de principiu.

Lagărul experimental (1) acţionat de un motor electric (2) este montat pe un batiu metalic (3). Sistemul de încărcare (9) este modificat faţă de cel utilizat la lagărele cu funcţionare continuă.

Dispozitivul automat care comandă funcţionarea cu intermitenţă este format dintr-un mecanism de ceasornic (4), un transformator (5), un releu electromagnetic (6) şi un întrerupător automat (7).

Controlul modului de funcţionare al lagărului şi al dispozitivului automat se face prin introducerea în circuitul de alimentare al motorului (2) a unui wattmetru înregistrator (8) avînd astfel pe banda de înregistrare numărul de opriri, porniri, durata funcţionării lagărului şi puterea consumată.

Sistemul de ungere are posibilitatea alimentării lagărului cu ulei sub presiune, sau prin cădere.

Sistemul de încărcare (9) este format dintr-o pîrghie cu raport de multiplicare 11 şi permite încărcări pînă la 200 kg/cm^2.

3. FUNCŢIONAREA INSTALAŢIEI

Mecanismul de ceasornic (4) comandă releul electromagnetic ajutător (6) alimentat de la un transformator (5) cu 24 V.

Prin deschiderea şi închiderea circuitului în releul ajutător (6) se comandă electromagnetul unui întrerupător (7) (DITU) care închide şi deschide circuitul electric al motorului (2).

Fazele de funcţionare ale lagărului se succed în mod automat, lagărul fiind tot timpul încărcat.

Raportul dintre timpul de funcţionare şi de repaus poate fi reglat cu ajutorul mecanismului de ceasornic.

4. EXPERIENŢE FĂCUTE PENTRU VERIFICAREA INSTALAŢIEI

S-au făcut încercări pentru stabilirea timpului minim de funcţionare pînă la obţinerea unor uzuri uşor măsurabile.

S-au constatat, în urma acestor experienţe, că după un interval de 100 ore de funcţionare, uzurile au atins valori cuprinse între 0,04 . . . 0,1 mm deci în comparaţie cu funcţionarea în regim de ungere fluid se reduce timpul de experimentare cu aproximativ 80 % (timpul de experimentare se reduce la 4 zile față de peste 20 de zile).

În intervalul de 100 ore se realizează cu reglajul făcut cîte 1 200 opriri și porniri în mod automat.

5. AVANTAJELE PREZENTATE DE INSTALAȚIE

a) Se pot realiza în laborator diverse regimuri de funcționare fluide și semi-fluide similare celor din exploatare.

b) Se reduce timpul de experimentare cu cel puțin 80 %, uzurile obținute fiind măsurabile cu aparatajul mecanic existent.

c) Prin sistemul de încărcare adoptat se pot obține încărcări specifice cuprinse între 0—200 kg/cm^2, deci o gamă largă de încărcări.

d) Sistemul de încărcare permite determinarea sarcinii direct, fără a fi necesară o etalonare prealabilă.

e) Sistemul de încărcare este robust, nu conține elemente dereglabile, deci elimină una din importantele surse de erori.

f) Un singur dispozitiv automat poate fi utilizat simultan la mai multe bancuri de experimentare.

Primită la redacție la 23 iulie 1957.

STUDIUL AEROPLANULUI „A. VLAICU II" ÎN COMPARAŢIE CU AVIOANELE TIMPULUI SĂU

DE

C. GHEORGHIU

I. INTRODUCERE

Este cunoscută contribuţia lui A. Vlaicu la dezvoltarea aeronauticii romîneşti şi a aviaţiei în general. Aeroplanele construite de el, prin soluţiile constructive aduse în probleme deosebit de dificile pentru acea vreme şi prin performanţele obţinute, înscriu realizările lui A. Vlaicu printre cele mai meritorii, din epoca spinoasă de început a aviaţiei.

De aceea considerăm că prezentarea unui studiu al aeroplanului lui Vlaicu în comparaţie cu celelalte aparate din timpul său prezintă un interes istoric deosebit. În cele ce urmează vom prezenta studiile efectuate pentru :

— stabilirea construcţiei şi dimensiunilor aeroplanului ,,Vlaicu II", a amplasării şi acţionării comenzilor, amplasarea aripilor, a transmisiei mişcării de la motor la elici, ungerea acestor transmisii, mijlocul de a menţine aeroplanul pe loc în timpul încercării motorului şi alte detalii tehnice, necesare reconstituirii desenelor de ansamblu al acestui aparat ;

— reconstituirea desenelor de ansamblu ale aeroplanului ,,Vlaicu II" care nu s-au păstrat, ca şi desenele primului aeroplan al său ,,Vlaicu I" (cu excepţia unor desene de detalii care se găsesc în satul său natal şi la Muzeul Central Militar din Bucureşti). Numai o parte din desenele originale ale aeroplanului ,,A. Vlaicu III", printr-o întîmplare fericită, au ajuns recent la Academia R.P.R., unde se găsesc actualmente.

— prezentarea comparativă a aeroplanului ,,A. Vlaicu II" faţă de celelalte avioane ale epocii, pentru a stabili în mod ştiinţific adevărul istoric privind ing. Al Vlaicu şi opera sa.

★

Vom începe prin a prezenta cîteva date biografice asupra lui A. Vlaicu, necesare pentru consideraţiile ulterioare.

Aurel Vlaicu, născut la 6 noiembrie (19 noiembrie, stil nou) 1882 în comuna Binţinţi (comună în Ardeal la 30 km de oraşul Deva), a urmat liceul la Orăştie şi Sibiu, şi apoi în condiţii materiale grele, se înscrie în 1901 la Politehnica din Budapesta, de unde trece, în 1903 în Politehnica din München.

Încă din liceu, A. Vlaicu a dovedit înclinaţii deosebite către problemele tehnice şi inginereşti, preocupîndu-se în special de problema zborului. După terminarea studiilor, A. Vlaicu se angajează la fabrica de automobile Opel din Rüsselsheim, unde-şi dovedeşte cu prisosinţă, prin activitatea depusă, calităţile sale deosebite de inventivitate şi spirit ingineresc.

Fiind însă preocupat din ce în ce mai mult de dorinţa de a realiza o *maşină de zburat*, Vlaicu se întoarce în 1908 în satul său natal. Aici după mai multe studii preliminare, realizează primul său aparat fără motor, cu care face încercări de zbor reuşite, în anul 1909. Apoi, ajutat de prieteni, pleacă la Bucureşti, unde învingînd numeroase dificultăţi reuşeşte în 1910 să obţină banii necesari construirii aeroplanului cu motor şi cumpărării motorului. Plecînd la Paris, unde îl cunoaşte şi pe Traian Vuia, Vlaicu cumpără un motor „Gnôme" de 50 CP, iar în iunie 1910 începe primele zboruri cu aparatul „Vlaicu I". Vlaicu a făcut singur atunci, în acelaşi timp cu experimentarea aparatului şi şcoala de pilot aviator.

În lunile care urmează A. Vlaicu obţine performanţe de zbor din ce în ce mai bune şi o serie de succese care-i întăresc popularitatea : cîştigarea la 11 august 1910 a întrecerii cu pilotul Bibescu care pilota un avion Blériot şi a pilotului francez Mola, care zbura pe un aeroplan Farman, zborurile din septembrie cu ocazia manevrelor armatei, mitingul aviaţiei din octombrie etc.

Datorită acestor succese, Vlaicu după numeroase dificultăţi, reuşeşte să obţină fonduri pentru construirea unui al doilea aeroplan, mai perfecţionat, care a fost construit la începutul anului 1911.

Cu acest aparat „Vlaicu II", A. Vlaicu obţine o serie de succese răsunătoare, culminînd cu victoria de la mitingul de la Aspern în 1912, unde din 43 de concurenţi (printre care se număra şi cunoscutul aviator francez Roland Garros), cîştigă numeroase premii, clasîndu-se numai pe locurile I şi II.

După acest succes, Vlaicu face un turneu în Ardeal şi apoi se întoarce la Bucureşti, unde începe construirea aeroplanului „Vlaicu III".

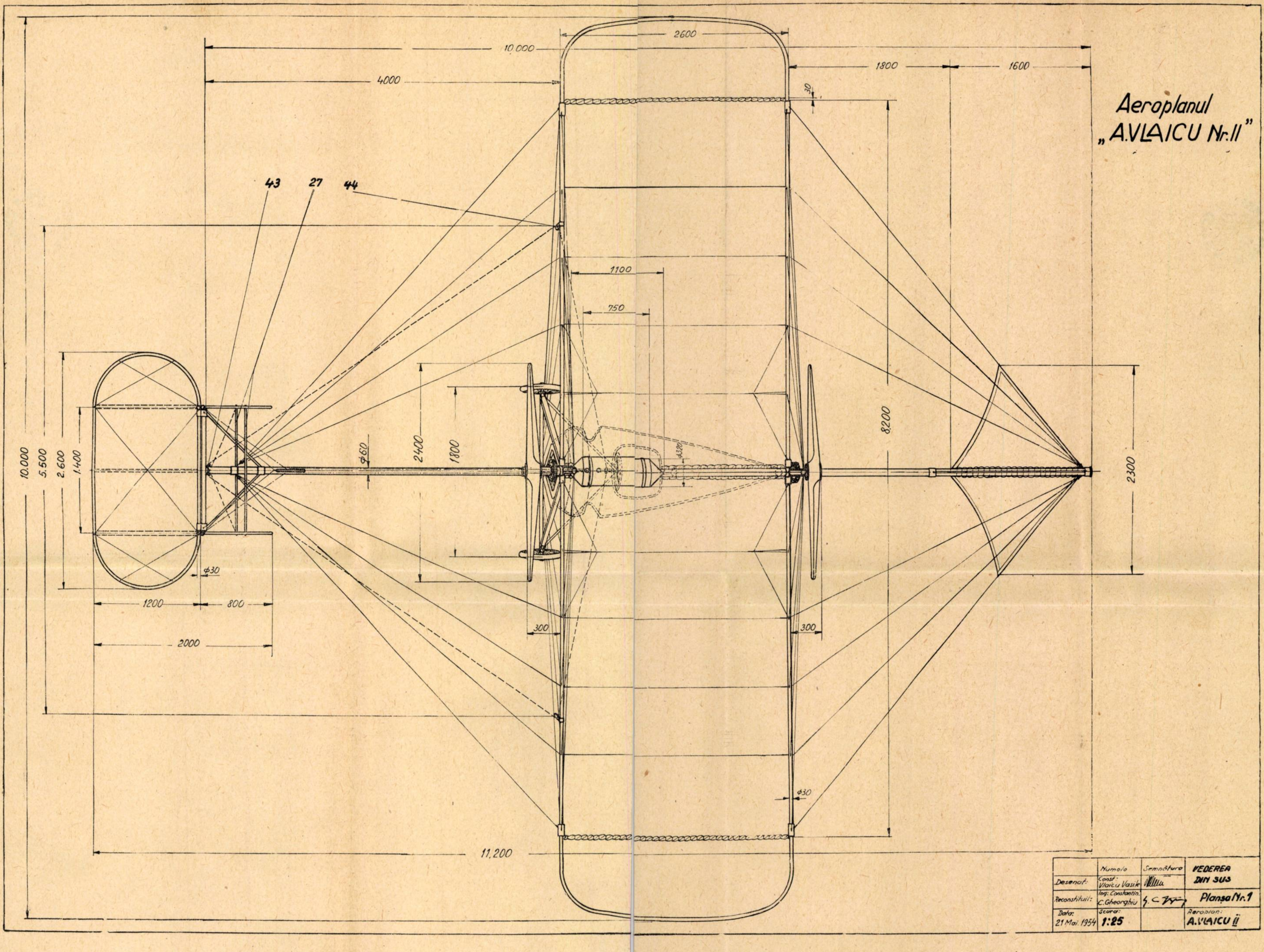
La 13 septembrie 1913, tot pe avionul „Vlaicu II", A. Vlaicu încearcă un zbor de performanţă, trecerea peste Carpaţi, care era dorinţa lui arzătoare în ultimii ani. Acest zbor, a avut un sfîrşit tragic, din motive care nu se cunosc, Vlaicu căzînd cu aeroplanul său la marginea comunei Băneşti şi pierzîndu-şi viaţa în acest accident.

Prin moartea lui A. Vlaicu, aviaţia şi ştiinţa romînească au suferit o grea pierdere. Opera lui Vlaicu însă, care simbolizează triumful geniului poporului romîn, s-a bucurat şi se bucură de aprecierea cuvenită. Regimul de democraţie populară prin grija deosebită faţă de toate valorile romîneşti, au acordat memoriei lui A. Vlaicu preţuirea ce o merită, iar Academia R.P.R. l-a primit *post mortem* în sînul său.

II. AEROPLANUL „A. VLAICU II"

Aeroplanul „A. Vlaicu II" era un monoplan parasol (cu aripa sus) şi la care ne frapează, la prima vedere, construcţia originală care nu seamănă cu nici unul din aeroplanele timpului său (planşa nr. 1).

Corpul aeroplanului la care se fixau toate celelalte organe principale, îl forma un tub de aluminiu, compus din trei părţi, avînd o lungime de 10 m. De acest tub se fixau în faţă cîrma de profunzime şi direcţia, apoi elicele, aripa, nacela cu motorul şi trenul de aterizare, iar în extremitatea cealaltă, stabilizatorul şi deriva, aşezate cruciform. La ambele capete ale tubului de aluminiu se găseau două manşoane de oţel filetate, prevăzute cu cîte un dispozitiv care permitea întinderea uniformă a sîrmelor de oţel, care solidarizau aripile de tubul de aluminiu, tubul fiind solicitat astfel numai la compresiune.


2600
10.000
4000
1800
1600
30
43
27
44
1100
750
φ60
2400
1800
φ320
8200
2300
10.000
5.500
2.600
1.400
φ30
1200
800
2000
300
300
φ30
11,200

Aeroplanul „A.VLAICU Nr.II"

	Numele	Semnătura	VEDEREA DIN SUS
Desenat:	Const: Vlaicu Vasile		
Reconstituit:	Ing: Constantin. C.Gheorghiu		Planşa Nr.1
Data: 21 Mai. 1954	Scara: 1:25		Aeroplan: A.VLAICU II

Acest aeroplan avea profundorul în faţă (tip de avion utilizat şi astăzi), sistem care prezenta avantajul de a da cîrmelor o mare eficacitate. Prin aceasta se explică maneabilitatea remarcabilă a acestui aeroplan şi posibilitatea de a-l scoate uşor din situaţii periculoase.

La o distanţă de 4 m de profundor se fixa prin mufe de oţel de tubul de aluminiu, aripa. Aripa, formată din două semiplanuri, nu avea nervuri, ci era fabricată dintr-o simplă bară de lemn de brad, curbată la etuvă şi îmbrăcată în pînză impermeabilă. Aripa avea o anvergură de 10 m şi profunzimea de 2,6 m. Suprafaţa portantă totală era de circa 30 m^2. Această construcţie prezenta o particularitate interesantă. Astfel se ştie că, teoretic, profilul ideal al aripii ar fi acela care ar varia în funcţie de unghiul de incidenţă şi de viteză. Vlaicu vedea apropierea de acest ideal teoretic, prin construirea aripii fără nervuri, deoarece în cartea lui *Aeroplanul Vlaicu* premiată de „Academia Romînă" la pagina 18 scria :

„Cînd pînza e bine întinsă la aparatul nostru se formează o curbă riguros concordantă cu centrul de presiune. Această curbă nu poate fi decît o curbură optimă, deoarece se află acolo unde în realitate se află centrul de presiune."

Pentru asigurarea stabilităţii laterale aripile formează între ele un unghi diedru deschis înspre Zenit.

Cele două elici *coaxiale* rotindu-se în sens contrar, erau montate pe rulmenţi cu bile, una înainte, iar a doua în spatele planurilor purtătoare, anulîndu-şi astfel reciproc cuplul de răsturnare. *Acest sistem constituie de asemenea o soluţie originală, asigurînd stabilitatea laterală şi executarea virajelor cu sau fără motor.*

Menţionăm că în tehnica aviaţiei nu s-a mai aplicat acest sistem decît mult mai tîrziu şi anume în 1933 la hidroavionul monoplan Machi-Castoldi cu două motoare FIAT aşezate în tandem, totalizînd 2 900 CP şi care în acel an a bătut recordul mondial de viteză, realizînd 682 km/oră.

Elicele la aeroplanul „Vlaicu II" se roteau cu 600 rot/min la o turaţie de 1200 rot/min a motorului. *Prin urmare, acest aeroplan avea aplicat şi principiul reductorului.*

Transmisia mişcării de rotaţie, de la motor la elici, se făcea în felul arătat în planşa nr. 2.

Nacela aeroplanului se află suspendată sub aripi, de tubul de aluminiu, prin două coloane din lemn de frasin lustruite.

Între coloana din faţă şi nacelă, era amplasat motorul, la înălţimea scaunului pilotului, obţinînd prin aceasta coborîrea centrului de greutate la 1 200 mm sub planuri.

În partea din faţă, deasupra, nacela avea un ecran din tablă de aluminiu pentru a proteja pilotul de curentul de aer.

Dedesubtul ei şi pe toată lungimea se găsea o patină de lemn care în partea din faţă şi din spate a aeroplanului se prelungea curbată în sus.

Motorul acestui aeroplan era un „Gnôme" rotativ, cu 7 cilindri dispuşi în stea, răciţi cu aer şi care dădea 50 CP la 1 200 rot/min.

Rezervorul de ulei şi benzină, de formă cilindrică, cu extremităţile conice, era amplasat deasupra, în V-ul planurilor, suficient de departe de motor, pentru a înlătura orice pericol de incendiu.

Trenul de aterizare al acestui aeroplan, pe vremea aceea, era unicul tren de aterizare cu roţi independente, construit în acest fel, în principiu, acelaşi cu trenurile de aterizare al avioanelor moderne de turism.

Era format din două cîrje, din lemn de frasin cu extremităţile armate metalic, a căror capăt de sus glisa pe partea superioară laterală a bifurcării coloanei din faţă şi erau solicitate mereu în jos, de două serii de inele de cauciuc (planşa nr. 3).

Cîrjele la extremitatea de jos purtau roţile din faţă ale aeroplanului.

Pentru a înlătura posibilitatea îndepărtării celor două cîrje, ele erau legate articulat, prin două tije, de patina de sub carlingă, în acelaşi plan cu rombul format de coloana de frasin din faţă. De asemenea ele erau legate prin alte două tije, convergînd pînă sub postul de pilotaj, unde se legau tot articulat de patina mediană, împiedicînd astfel ca roţile să se dea înapoi în momentul aterizării. Acest sistem este asemănător cu trenurile de aterizare utilizate curent astăzi.

La spate, sub nacelă era fixată articulat o piesă din oţel profilat, terminîndu-se la ambele capete cu cîte o furcă. Această furcă care cu un capăt se fixa oscilant printr-un ax, iar la extremitatea cealaltă, se monta roata dinapoi a aparatului.

Două arcuri spirale montate între furcă şi patină, absorbeau şocurile primite în momentul contactului cu pămîntul.

Cele trei roţi ale aeroplanului aveau anvelope cu camere cu aer aşa încît şocurile decolării, aterizării şi rulării, erau amortizate şi de elasticitatea roţilor cu cauciuc.

Referindu-se la trenul său de aterizare Vlaicu scria: *„Acest sistem absolut original, face ca contactul cu solul să fie foarte dulce şi lipsit de orice pericol"*.

Modul de acţionare al comenzilor acestui aeroplan se poate urmări pe desene (planşa nr. 1 şi nr. 2). Acţionarea comenzilor se putea face şi cu o singură mînă, deoarece atît profundorul cît şi direcţia se comandau de către pilot prin volanul din postul de pilotaj.

Volanul prin axul său, rotea într-un sens sau altul un tambur metalic (*42*, pl. nr. 2) montat prin suportul său pe tija (*40*, pl. nr. 3) care uneşte cele două transverse ce solidarizează braţele bifurcate ale coloanei de frasin din faţă şi care se putea roti în aceste traverse.

Prin această construcţie volanul cu axul şi tamburul fixat de el, era mobil în planul orizontal. Pe tamburul (*42*, pl. nr. 2) se înfăşura în aşa fel cablul prin care se comanda cîrma de adîncime, încît atunci cînd era rotit într-un sens sau altul, acest cablu se înfăşura la o extremitate a lui şi se desfăşura la cealaltă.

Datorită acestui fapt, profundorul rămînea în poziţia în care era aşezat, deci pilotul în timpul zborului putea să-şi ia mîna de pe volan, lucru ce nu se putea face la nici un alt aeroplan de pe timpul acela.

Cablurile de comandă ale profundorului erau fixate pe partea superioară a axelor de rotaţie a planurilor direcţiei (pl. nr. 2) cele două cabluri se uneau într-unul, care trecea peste scripetele de ghidaj fixat de tubul de aluminiu (*71*, pl. nr. 2), intra în tub şi ieşea din el tot peste un scripete (*72*, pl. nr. 2) chiar deasupra tamburului pe care se înfăşura.

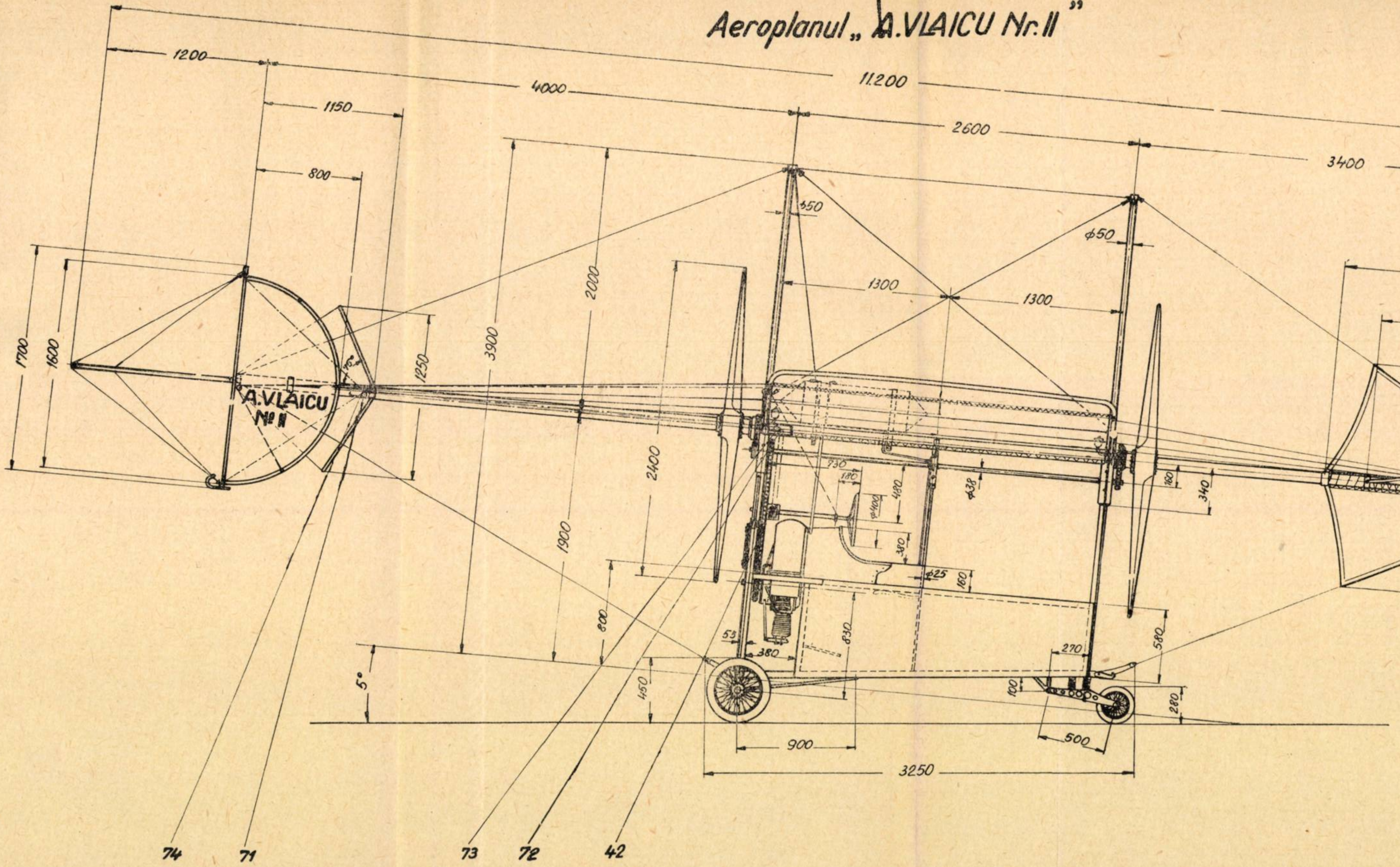
După înfăşurare pe jumătate din lungimea tamburului intra în tambur, unde se fixa printr-un şurub, iar capătul ce ieşea se înfăşura în acelaşi sens pe cealaltă jumătate din lungimea lui.

După înfăşurarea a doua, intra din nou în tubul de aluminiu prin scripetele (*73*, pl. nr. 2) ieşia din acest tub peste scripetele (*74*, pl. nr. 2) şi printr-un orificiu simetric plasat faţă de cel de intrare, ca apoi să se bifurce, iar cele două capete să se fixeze la extremitatea inferioară a axelor de oscilaţie a planurilor de direcţie (*25*, pl. nr. 2).

Direcţia la avionul Vlaicu era dublă, sistem care de asemenea este astăzi utilizat în mod curent. Planurile de direcţie se comandau tot prin cabluri de oţel. Aceste planuri, de formă semicirculară erau unite între ele prin două bare de legătură (*27*, pl. nr. 1) legate articulat. Bara de jos, împreună cu cîrmele de direcţie şi marginea posterioară a cîrmei de profunzime, de care erau fixate, forma un paralelogram deformabil într-un sens sau altul.

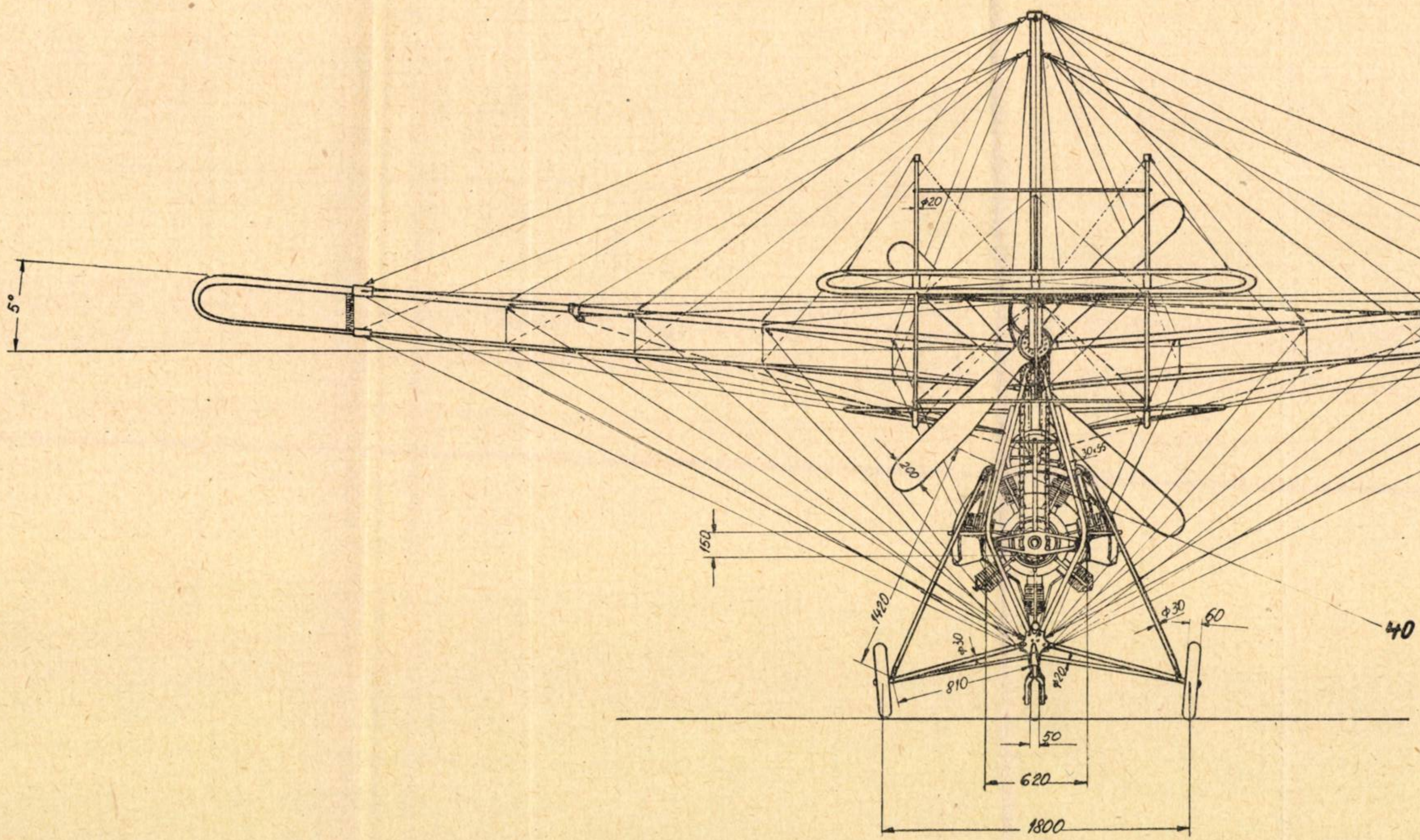
Pe axul volanului se găsea un inel cu o flanşe de formă eliptică (pl. nr. 2). Această piesă era astfel montată, încît avea o poziţie fixă pe ax, asigurată printr-un ştift ce pătrundea într-o renură a axului, axul avînd astfel posibilitatea de a se roti fără s-o antreneze.

Aeroplanul „A.VLAICU Nr. II”


11.200
1200
4000
1150
800
2600
3400
ϕ50
ϕ50
1300
1300
1800
1600
50
1800
1700
1600
1250
3900
2000
2400
1900
800
5°
450
53
380
830
930
180
480
ϕ400
380
ϕ25
160
ϕ38
160
340
270
580
100
280
500
900
3250
A.VLAICU
Nº II
74
71
73
72
42

	Numele	Semnătura	VEDEREA LATERALĂ
Desenat:	Contr. Vlaicu Vasile		
Reconstituit:	Ing. Const. C. Gheorghiu		Planşa Nr. 2
Data: 20 Iulie 1954	Scara: 1:25		Aeroplan. A. VLAICU II

Aeroplanul „A.VLAICU Nr. II"


5°
Φ20
200
30÷35
150
1420
Φ30
810
Φ20
Φ30
60
40
50
620
1800

	Numele:	Semnătura:	**VEDEREA DIN FAȚĂ**
Desenat:	Constr. Vlaicu Vasile		
Reconstituit:	Ing: Constantin C. Gheorghiu		Planșa Nr. 3
Data: 15 Aug. 1954	Scara: **1:25**		Aeroplan: **A.VLAICU II**

Volanul cu axul său nu se putea mişca în sens vertical, dar în afară de mişcarea de rotaţie într-un sens sau altul, se mai putea deplasa lateral în plan orizontal, aşa cum am arătat mai sus.

De inelul menţionat şi anume la cele două extremităţi ale flanşei sale eliptice, se fixau capetele celor două cabluri ce comandau planurile de direcţie.

De la flanșă cablurile treceau peste scripeţii fixaţi pe marginea anterioară a planurilor purtătoare (*44*, pl. nr. 1) apoi peste alţi doi scripeţi montaţi pe tubul de aluminiu (*43*, pl. nr. 1), spre a se fixa apoi fiecare în partea opusă, în punctele unde se leagă articulată la partea de jos a celor două planuri ale direcţiei, bara de legătură (*27*, pl. nr. 1).

Prin urmare, urcarea și coborîrea se obţineau prin rotirea spre dreapta, respectiv spre stînga, a volanului, iar virajul prin deplasarea volanului în direcţia respectivă.

Vlaicu în cartea în care-și descria aeroplanul la pagina 17 spunea : *„Grație acestui sistem special de cîrmuire, aeroplanul Vlaicu descrie acele curbe de rază foarte mică, ce au surprins pe cunoscători".*

III. DESCRIEREA AEROPLANELOR STRĂINE DIN PERIOADA 1908–1910 ȘI COMPARAREA AEROPLANULUI „A. VLAICU II" CU ACESTE APARATE

Aeroplanele cu care vom compara aeroplanul „A. Vlaicu II" sînt aeroplane străine, celebre în vremea aceea și din care majoritatea deţineau atunci recorduri mondiale.

Pentru a se putea face o comparaţie în primă aproximaţie între aeroplanul „A. Vlaicu II" și celelalte aeroplane consacrate ca bune în anii 1908–1910, am întocmit tabelul ce conţine caracteristicile acestor aeroplane, un grafic prin care se poate compara viteza, greutatea, puterea motorului și după silueta lor, mărimea și forma aeroplanelor (planșa nr. 4).

Înainte de a începe descrierea lor, trebuie să menţionăm că între diferitele surse pe care le-am utilizat pentru documentare în ce privește dimensiunile și caracteristicile aeroplanelor străine, există mici diferenţe, mai ales de dimensiuni. Aceste diferenţe nu afectează cu nimic studiul comparativ făcut între ele și aeroplanul „Vlaicu II", deoarece acest studiu se referă în special la construcţia și calităţile de zbor ale acestor aparate.

Pentru a face comparaţie cu aeroplanul Vlaicu, vom descrie celelalte aeroplane în ordinea din tabelul menţionat (planșa nr. 4).

1. *Aeroplanul fraților Wright* (fig. 1). Era un biplan, avînd cîrma de profunzime în faţă și direcţia în spate. Nu avea fuselaj propriu-zis, legătura între planuri și comenzi fiind făcută din bare de lemn.

Cîrma de profunzime era formată din două planuri suprapuse și așezate paralel. Între aceste două planuri paralele erau fixate două planuri verticale, care formau deriva. Cîrma de adîncime și deriva erau montate pe doi suporţi din lemn ce formau și patinele de aterizare a aeroplanului. Aripile erau construite din două longeroane de lemn pe care erau montate nervuri.

Extremitatea nervurilor înspre bordul de fugă se subţiau dînd o elasticitate și posibilitate de îndoire a extremităţilor aripilor. Această îndoire permitea deformarea capetelor planurilor purtătoare la bordul de fugă. Această deformare a extremităţilor posterioare a aripilor cunoscută sub denumirea de „gosisment" a fost aplicată prima dată de fraţii Wright, pentru comanda laterală a aeroplanului lor și funcţionarea lor se poate vedea în figura 2, efectul acestor deformări era creșterea portanţei pe unul din planuri și scăderea pe celălalt, adică înclinarea aparatului.

Motorul avea patru cilindri în linie, răcit cu apă și dădea 25 CP la 1 400 rot/min. Era amplasat pe mijlocul aripii inferioare, alături de postul de pilotaj.

Cum motorul era aşezat în dreapta axului de simetrie al aparatului, pilotul cu greutatea lui trebuia să echilibreze aparatul.

Mişcarea de la motor se transmitea prin două lanţuri şi roţi dinţate, la două elici de lemn cu axele paralele şi aşezate paralel cu axul longitudinal al aparatului (amintim că la aeroplanul ,,Vlaicu" elicele erau coaxiale).

Elicele se roteau în sens contrar cu 1/3 din turaţia motorului.

Înapoia planurilor, fixată de două bare de lemn paralele se găsea direcţia. Aceasta era formată din două planuri paralele aşezate vertical. Direcţia aeroplanului cît şi torsiunea aripilor se comanda cu o pîrghie aşezată în dreapta pilotului. Profundorul la rîndul său era comandat de o a doua pîrghie amplasată în stînga pilotului.

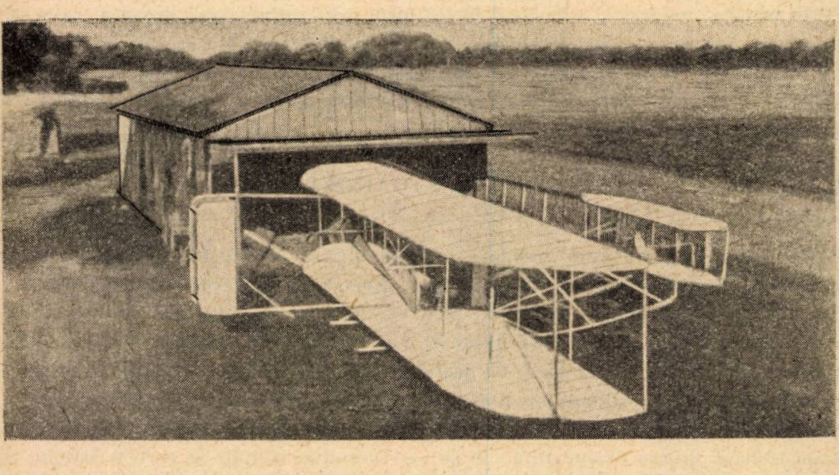


Fig. 1. — Aeroplanul fraţilor Wright.

Prin urmare, cu mîna stîngă pilotul manevra profundorul, iar cu dreapta torsiunea aripilor, direcţia şi motorul.

Ceea ce era specific acestui aeroplan, era modul de decolare. Pentru a obţine viteza necesară sustentaţiei, fraţii Wright şi-au construit un fel de catapultă, care printr-o cădere a unei greutăţi imprima aeroplanului viteza necesară decolării. Acest sistem este arătat în figura 3, deşi ingenios, constituie un dezavantaj al aeroplanului Wright, şi care a fost curînd părăsit.

2. *Aeroplanul Voisin* (fig. 4). A fost creat de fraţii Voisin, cunoscuţi în vremea aceea ca constructori renumiţi de aeroplane.

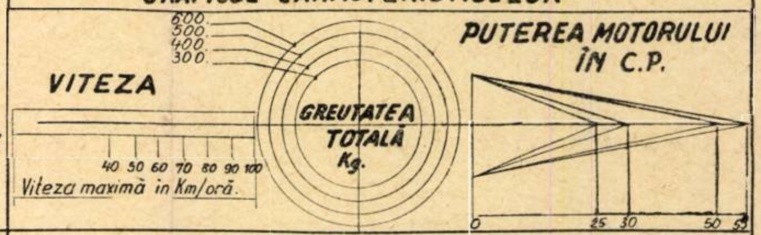
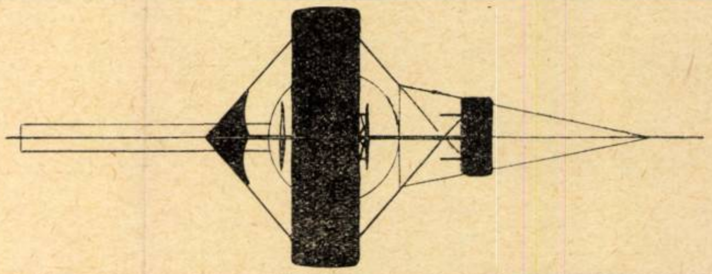
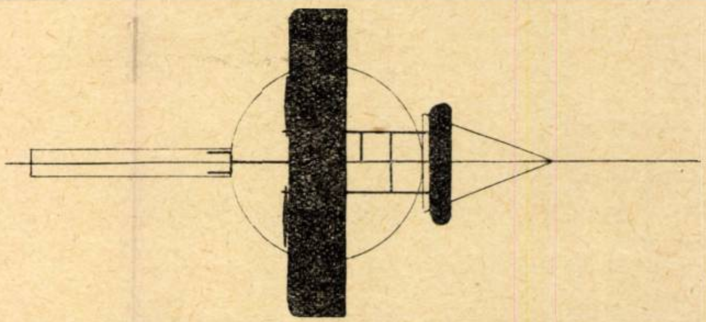
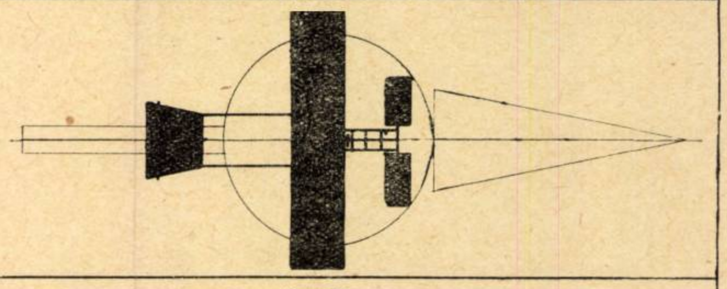
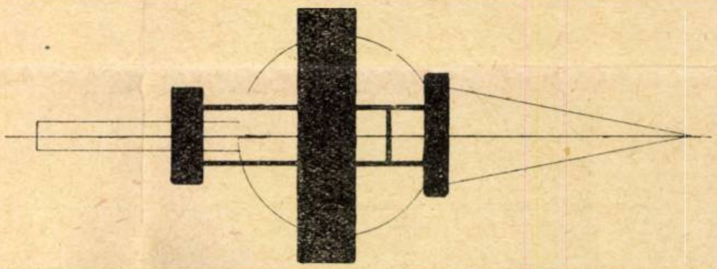
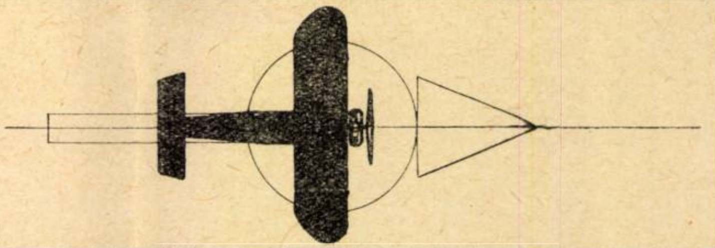
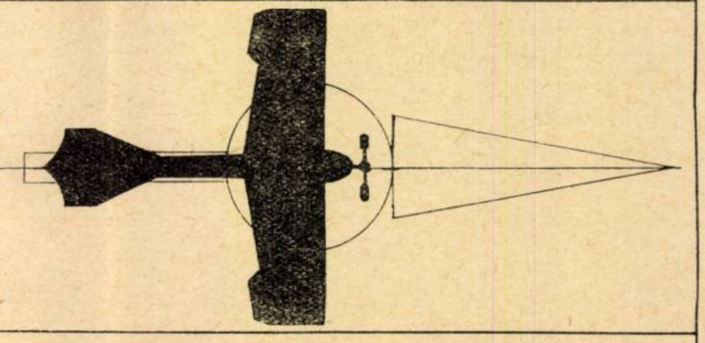
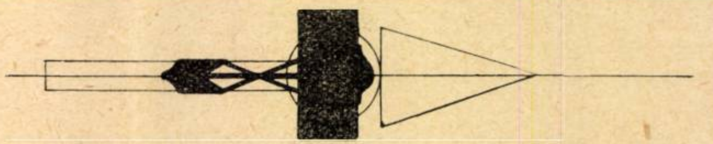
Aeroplanul creat de ei era un biplan, după formula dată de Chanutte-Wright, din care au derivat mai toate primele biplane.

Acest aeroplan avea profundorul în faţă format dintr-un plan orizontal, iar planurile purtătoare aveau un profil format din nervuri ca şi aeroplanul Wright. Comanda laterală era asigurată prin aripioare, care aveau acelaşi efect ca şi torsiunea aripilor la aeroplanul Wright.

Motorul un ,,Antoinette" ce dădea 50 CP la o turaţie de 1 050 rot/min antrena o elice montată direct pe axul său şi era montat în spatele pilotului, pe planul inferior.

Aripile erau legate de planurile fixe din spate, aşezate tot paralel, dar mai scurte şi care constituiau stabilizatorul prin patru bare de lemn întărite prin bare verticale din lemn

DATE COMPARATIVE ALE AEROPLANULUI „A.VLAICU II" CU AEROPLANELE „ CONSACRATE CA BUNE" ÎN ANII 1908÷1910.

CARACTERISTICELE AEROPLANELOR																				GRAFICUL CARACTERISTICELOR 
Nr. crt.	Denumirea Aeroplanului	Anul Fabric.	Sistemul de constr.	Distanta între planuri	Anvergură în m.	Profunzimea aripei. m.	Lungimea totală m.	Suprafața portantă în m^2.	Greutatea în ordine de sbor. Kg.	Încărcarea în Kg/m^2	Marca și felul Motorului	Puterea Motorului în CP.	Turația rot/min Motorului în	ϕ Elicei în m.	Turația elicei în rot/min.	Viteza maximăn Km/oră	Viteza de aterizare în Km/oră	Înălțimea maximă atinsă în m.	Observații	
1	„A.VLAICU II"	1910	Monoplan	–	10	2,6	11,2	30	300	10	„Gnôme" 7cilindrii în stea răcit cu aer	50	1200	2,4	600	110	60	1000		
2	„WRIGHT"	1908	Biplan cu aripi egale	1,8	12,5	2	9	60	580	9,7	„Wright" 4cilindrii răcit cu apă	25	1400	2,6	400	80	–	–	Motorul functiona cu petrol	
3	„VOISIN"	1908	Biplan cu aripi egale.	1,5	10,2	2	10,2	52	630	12,1	„Antoinette" 8cilindrii în „V" răcit cu apă	50	1050	2	1050	80	65,5	–	Planurile aveau un unghi în „V" spre Zenit.	
4	„H.FARMAN"	1909	Biplan cu aripi inegale	1,5	10,5 7	2	10	46	600	13	„Gnôme" 7cilindrii în stea răcit cu aer.	50	1200	2	1200	80	–	–	Record de-distanță și durată de sbor în care a parcurs 180 Km în 3h5' și deci cu o medie de 60 Km/oră	
5	„BLERIOT XI"	1909	Monoplan	–	9	1,8	8,8	26	480	18,4	„Ansani" 3cilindrii în evantai. Răcit cu aer	25	1200	2,1	1200	80	70	–	25-VII-1909 trecerea canalului mînecii	
6	„ANTOINETTE"	1909	Monoplan	–	12,6	3 la mijloc 2 la extrem.	12,5	30	520	17,3	„Antoinette" 8cilindrii în „V" răcit cu apă și condensație	55	1100	2,7	1100	80	–	1000	Planurile aveau un unghi usor în „V" Latham în 7-X-1910 a atins înălțimea record de 1000 m în 32 minute	
7	„LADEMOISELE"	1909	Monoplan	–	5	2	7	12	180	15	„Darracq" 2cilindrii răcit cu apă	30	1300	1,5	1300	96	–	–	A bătut recordul decolării desprinzîndu-se de pămînt pe o lungime de 65 m.	

Observații:

Aeroplanele alese pentru a le compara cu aparatul „Vlaicu II", sînt cele ce în 1910, dețineau recorduri mondiale și cari cuprind și pe acelea cari le avea armata romînă în anul 1911.

	Numele	Semnătura	GRAFIC COMPARATIV
Desenat	V. Vlaicu		
Întocmit	Ing. Constantin C. Gheorghiu		Planșa Nr. 4
Data 1-XII-1954	Scara 1:200		AEROPLAN A. VLAICU II.

și diagonale din sîrme de oțel. Între cele două planuri paralele din spate, se găsea un plan vertical, mobil, care forma cîrma de direcție.

Trenul de aterizare al acestui aeroplan era format în față din două roți cu un sistem de amortizare și avea o greutate de 80 kg, în spate avea două roți mai mici.

Comenzile acestui aeroplan se manevrau printr-un volan și anume, profundorul prin împingerea sau tragerea volanului în sens axial, iar direcția prin rotirea lui într-un sens sau altul. Aripioarele se comandau printr-o pîrghie.

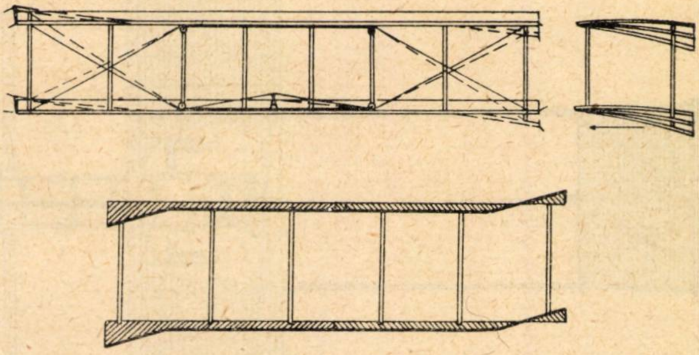


Fig. 2. — Torsionarea aripilor la aeroplanul Wright.

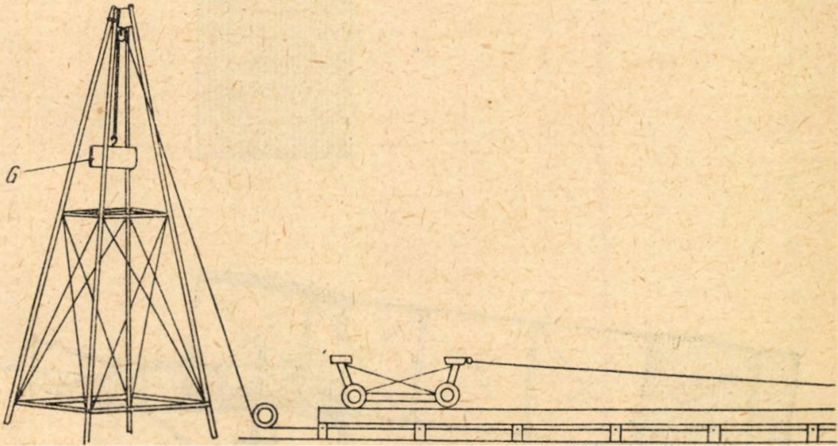


Fig. 3. — Sistemul Wright de lansare în zbor.

După acest tip, Voisin a construit și experimentat o serie întreagă de aparate a căror rezultate nu au fost satisfăcătoare.

3. *Aeroplanul Farman.* A fost cel mai perfecționat tip construit de Voisin (fig. 5). Acest aparat s-a fabricat și în țară la noi, la prima fabrică de aeroplane din Romînia, mai corect spus, în primul atelier înființat în acest scop împreună cu aerodromul și școala de pilotaj, la Chitila, de către avocatul gălățean Cerchez.

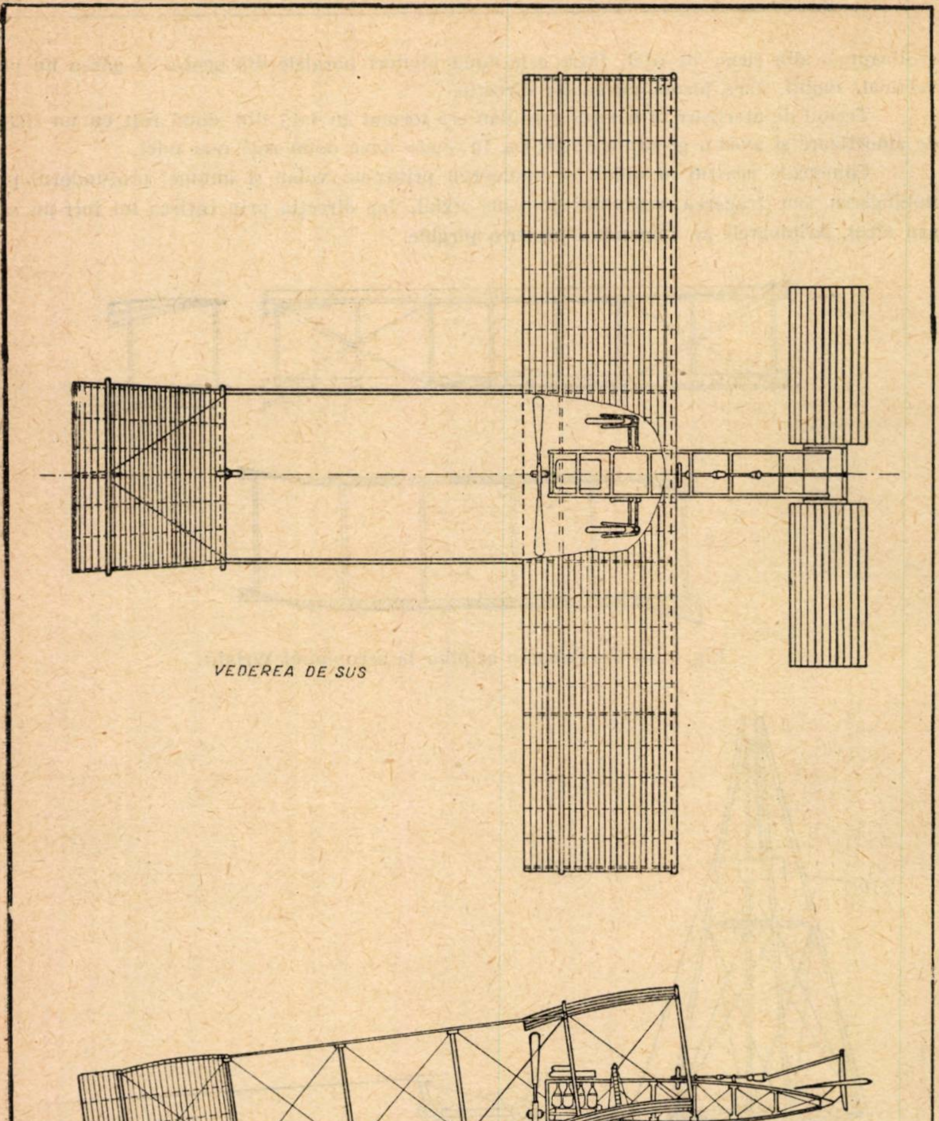

VEDEREA DE SUS
VEDEREA LATERALĂ
Scara:
1:100

Fig. 4. — Aeroplanul Voisin.

Acest tip a fost unul din primele aeroplane cu care a fost înzestrată armata romînă.

Era tot un biplan, avînd cîrma de adîncime în faţă, susţinută de patru bare ce se fixau de aripi. Planurile sînt construite cu nervuri şi sînt menţinute prin montanţi şi diagonale. Atît planul superior cît şi cel inferior au aripioare. Postul de pilotaj este pe centrul aripii inferioare, avînd amplasat în spatele său motorul care antrenează direct elicea propulsivă. Motorul acestui aeroplan era tot un Gnôme de 50 CP ca şi la ,,Vlaicu II". Un fuselaj format tot din bare de lemn poartă stabilizatorul şi direcţia aşezate în spate. Trenul de aterizare ne aminteşte suportul cu patină al aeroplanului Wright la care s-a amenajat cîte două perechi de roţi jumelate în faţă, iar la extremitatea din faţă a fiecărei patine, cîte o rotiţă mai mică.

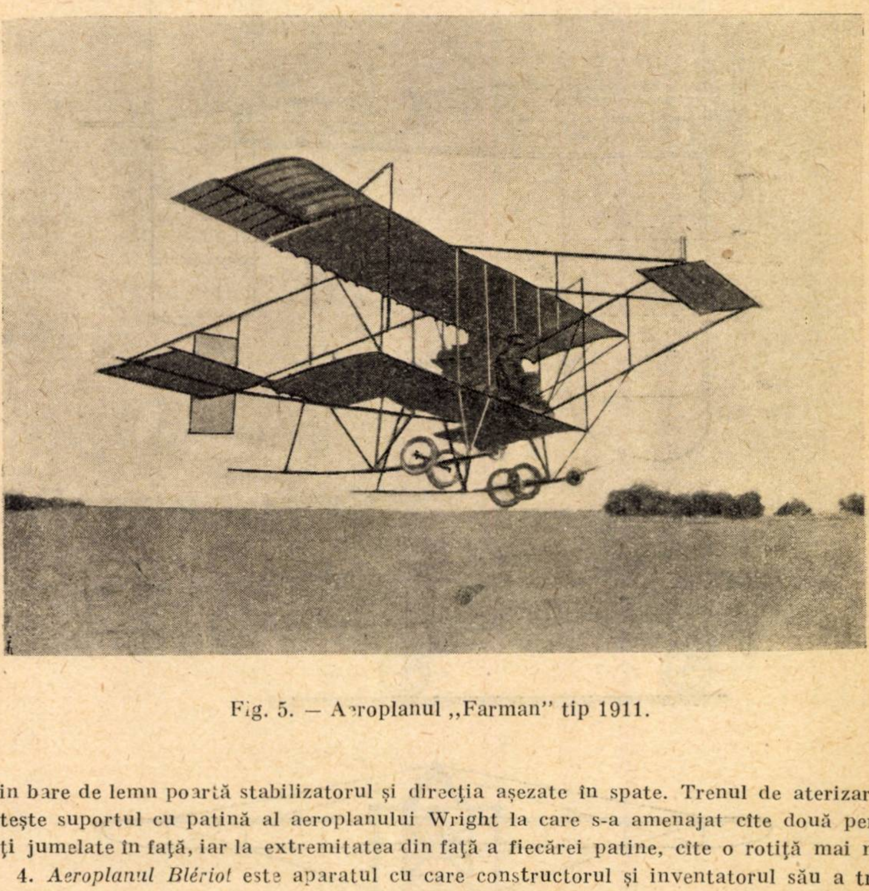


Fig. 5. — Aeroplanul ,,Farman" tip 1911.

4. *Aeroplanul Blériot* este aparatul cu care constructorul şi inventatorul său a trecut Canalul Mînecii în zbor, la data de 25 iulie 1909. Acest aparat a fost creat după experienţele şi studiile făcute pe alte şapte aparate fabricate, din care unele au zburat, altele nu.

Este interesant faptul că aeroplanul Blériot s-a perfecţionat plecînd de la formula biplan iar primele experienţe le-a făcut pe apă, căutînd să obţină viteza necesară sustentaţiei, fiind remorcat de o barcă cu motor, dar n-a reuşit să zboare. Numai al cincilea aeroplan construit, i-a permis primele zboruri după multe încercări. Acest aeroplan avea extremităţile aripilor mobile, întreg ampenajul fiind aşezat în spate. Al şaselea aparat este acela cu care a bătut recordul care l-a făcut celebru şi cu care a făcut şi zborul demonstrativ de la hipodromul din Bucureşti în anul 1909. Acest aparat era un monoplan cu aripa medie denumit ,,Blériot XI" (fig. 6).

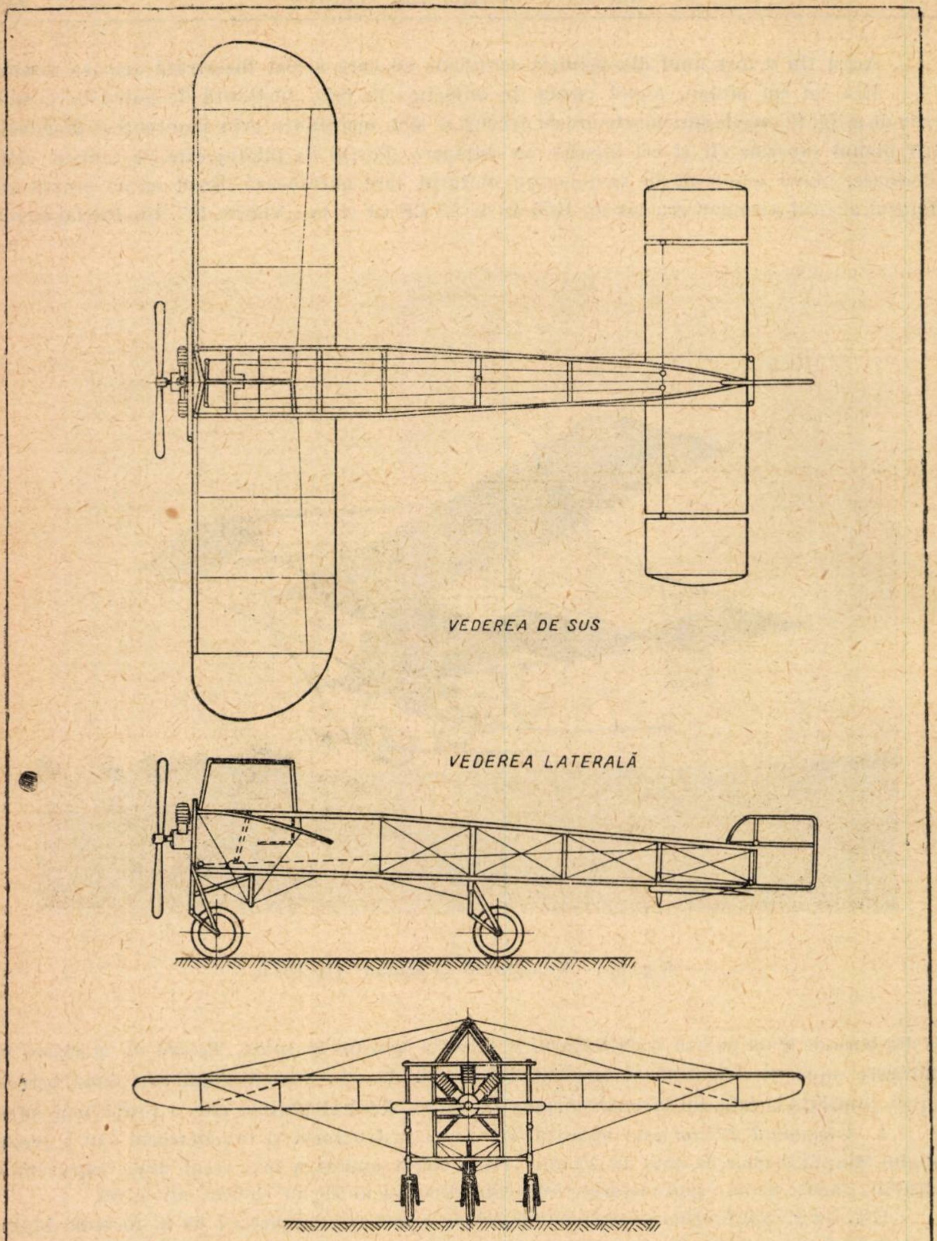

VEDEREA DE SUS
VEDEREA LATERALĂ
VEDEREA DIN FAȚĂ
Scara
1:100

Fig. 6. – Aeroplanul Blériot tip „XI”.

Aripile aveau nervuri şi erau fixate cu sîrmă de oţel la partea superioară de un suport metalic, iar la partea inferioară de o bară montată în spatele trenului de aterizaj. Fuselajul, de forma unei grinzi cu zăbrele, era acoperit în partea din faţă pînă în spatele postului de pilotaj cu pînză impregnată. În faţa fuselajului avea montat motorul, un ,,Anzani", antrenînd direct o elice tractivă. Acest motor avea trei cilindri în evantai, răciţi cu aer, ce dădea 25 CP la o turaţie de 1 200 rot/min. În spatele motorului era postul de pilotaj.

La extremitatea cealaltă a fuselajului era montat ampenajul format dintr-un plan stabilizator ale cărui extremităţi erau mobile, jucînd rolul de profundor şi aripioare în acelaşi timp şi un plan vertical mobil ce constituia direcţia.

Trenul de aterizare format în faţă din două roţi cu cauciuc, erau independente şi montate fiecare în cîte o furcă asemănătoare celor de bicicletă, prin care se fixau de cadrul metalic dreptunghiular dotat cu un sistem de amortizare prin sandowuri de cauciuc şi resoarte. În spate avea o singură roată.

Sistemul de comandă al profundorului şi al aripioarelor se făcea printr-o singură, pîrghie mobilă în toate direcţiile. Direcţia se comanda printr-o bară mobilă în jurul axului montat în mijlocul său, aşezat la picioarele pilotului. Prin urmare, urcarea, coborîrea şi înclinarea aeroplanului se comanda cu mîna prin bara menţionată mai sus, care a constituit prima manşe de la care a derivat cea de azi, iar direcţia se acţiona cu picioarele, bara mobilă constituind palonierul de astăzi.

În general, acest aeroplan este tipul care se apropie mai mult de forma aeroplanelor moderne de turism.

5. *Aeroplanul ,,Antoinette"* fig. 7. Este unul dintre cele mai bune monoplane din vremea aceea şi este aparatul care pilotat de celebrul aviator Latham, a concurat pe Blériot la zborul peste Canalul Mînecii şi numai o pană de motor în apropierea coastei engleze a făcut să nu fie el gloriosul învingător al Mînecii.

Aparatul a fost construit de constructorul Levasseur. În linii mari, forma este asemănătoare cu aceea a aeroplanului Blériot. Planurile purtătoare au forma trapezoidală şi sînt aşezate în V deschis în spre Zenit. Fuselajul este de secţiune triunghiulară cu baza în sus, subţiindu-se spre coadă. Aripile şi fuselajul sînt acoperite cu pînză şi lăcuite pentru a avea o frecare cît mai mică cu aerul, micşorînd rezistenţa la înaintare. Comanda laterală era asigurată prin aripioare ele constituiau una din caracteristicile aeroplanelor franceze.

Comanda longitudinală o asigura ampenajul format ca şi la aeroplanele moderne, din plan fix şi mobil orizontal şi plan fix şi mobil vertical.

Motorul era un ,,Antoinette" de 55 CP cu 8 cilindri în V şi antrena direct o elice metalică la 1 100 rot/min.

Trenul de aterizare, format din două roţi cu cauciuc, erau montate pe un suport metalic compus din tuburi de oţel, ce intrau unul în altul. Unul din tuburi constituia un piston plunger, ce intra în tubul cu diametrul mai mare, care constituia cilindrul. În acest cilindru se introducea aer produs cu o pompă de mînă cînd se pregătea aeroplanul pentru zbor. Deci amortizarea şocurilor se făcea prin aer comprimat. În faţă avea o cîrjă, iar la mijlocul fiecărei aripi cîte un suport a cărui extremitate era îndoită în sus contra zborului. La extremitatea posterioară a aparatului un suport fixat elastic prin sandowuri, constituia strămoşul bechiei de astăzi.

Pilotarea aeroplanului se făcea prin două volane aşezate de-a dreapta şi de-a stînga pilotului, care comandau aripioarele şi cîrma de adîncime. Direcţia se acţiona prin palonier ca şi la aeroplanul Blériot.

6. *Aeroplanul ,,La Demoiselle" al lui Santos Dumont.* Acest aparat era cel mai mic şi cel mai uşor din aeroplanele construite în 1909. Un exemplar din acest aeroplan a avut

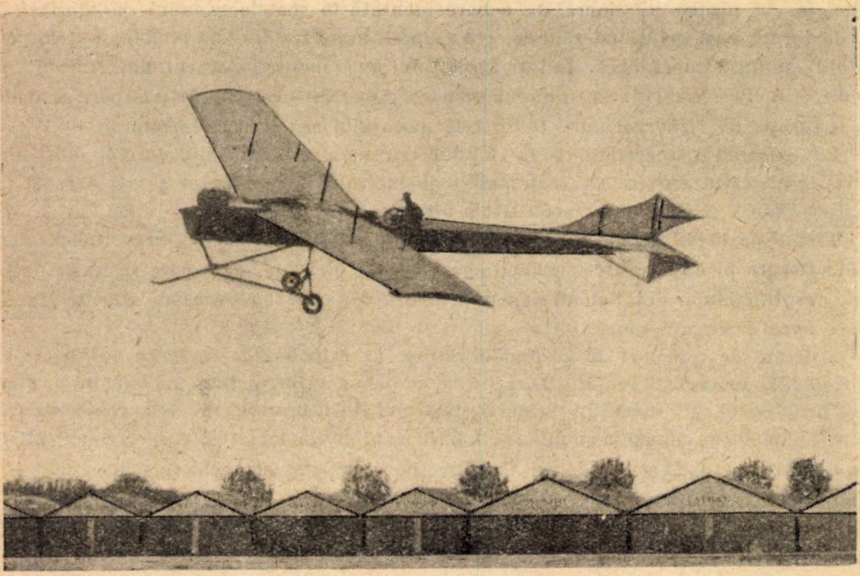


Fig. 7. — Aeroplanul „Antoinette".

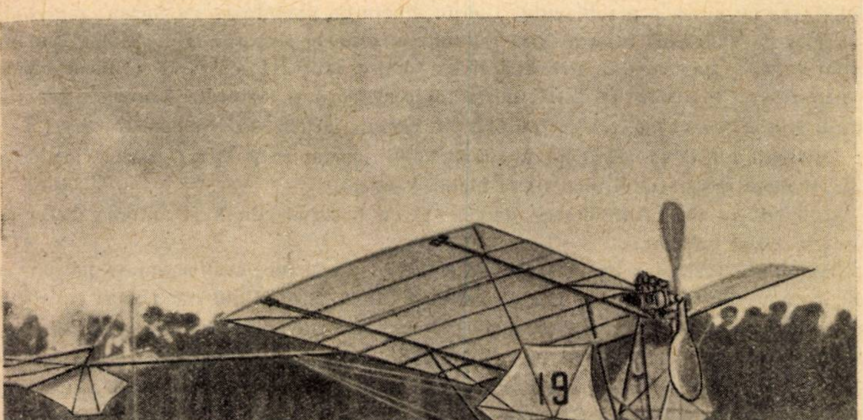


Fig. 8. — Aeroplanul „La Demoiselle".

şi şcoala de zbor din Chitila (fig. 8). Acest aparat era tot un monoplan, cu aripile de formă dreptunghiulară, avînd caracteristic faptul că avea centrul de greutate mult sub planuri, iar fuselajul era format dintr-o bară care purta în spate ampenajul, iar în faţă motorul ce antrena direct o elice.

Acest aeroplan, spre deosebire de celelalte, avea cîrmele de profunzime şi direcţie, atît în faţă cît şi în spate. La tipul mai nou, comenzile din faţă au fost abandonate.

Echilibrul lateral era asigurat prin înclinarea într-o parte sau alta a pilotului. Trenul de aterizare era format din două roţi înainte şi una în spate, fixate direct de cadrul maşinii, fără nici un sistem de amortizare.

Cu acest aparat, în septembrie 1909, Santos Dumont a reuşit să acopere 8 km în cinci minute şi să bată recordul decolării pe cea mai mică distanţă, reuşind să se desprindă de pămînt pe o lungime de numai 65 m.

★

Pentru a face comparaţie între aeroplanul „A. VLAICU II" şi aeroplanele descrise, vom analiza întîi împrejurările în care ing. Aurel Vlaicu a conceput această maşină. În anii în care Vlaicu îşi făcea studiile la Budapesta şi München, în Ungaria şi Germania nu exista nici o maşină de zburat şi nici un inventator care să fi realizat un aeroplan care să zboare. Mai mult, în bibliotecile celor două şcoli politehnice pe care le-a frecventat, n-a găsit nimic important în legătură cu problema zborului mecanic ce-l pasiona.

Abia în anul 1909, cînd Vlaicu reîntors acasă din Germania, execută primele experienţe de zbor cu planorul său, la Binţinţi, germanii dîndu-şi seama de importanţa acestei invenţii şi geloşi de prioritatea Franţei în acest domeniu, încep o campanie puternică pentru stimularea cuceririi aerului.

Dr. Karl Lanz, conducătorul unei mari fabrici din Mannheim, instituie în aprilie 1909 un premiu de 4 000 mărci, pentru acel care va reuşi să zboare primul distanţa de 1 000 m pe un aeroplan original german. Abia în 30 octombrie 1909 „Lanz-Preis der Lüfte" este cîştigat de Hans Grade, adică în timpul cînd Vlaicu îşi fabrica la Arsenalul Armatei din Bucureşti aeroplanul cu motor.

Cum la Paris n-a fost decît în luna decembrie 1909 cînd aparatul „A. VLAICU I" era aproape gata şi îşi aştepta motorul ce urma să-l cumpere din Franţa, *se poate afirma că Vlaicu înainte de a-şi concepe şi fabrica aeroplanul, nu văzuse în realitate nici o altă maşină de zburat.*

În ce priveşte documentaţia tehnică în anii aceia, ea era foarte sumară. Această documentaţie, împreună cu diferitele publicaţii care descriau aeroplanele de atunci, nu puteau constitui un material după care să se poată realiza un aeroplan şi încă un aeroplan cu asemenea calităţi cum era „A. VLAICU II". Prin urmare, Vlaicu n-a putut scoate din această documentaţie decît noţiuni generale, iar creaţia şi-a realizat-o după cercetări şi experienţe personale, făcute cu multă răbdare şi perseverenţă încă din anii studenţiei, cînd şi-a construit primele modele ale aeroplanului său de mai tîrziu. Menţionăm de asemenea că în acel timp nu era cunoscută nici celebra teorie a zborului, elaborată şi publicată abia în 1910 de către cercetătorul zborului dinamic şi întemeietorul şcoalei aerodinamice ruse, N. E. Jucovschi.

Prin urmare ing. Aurel Vlaicu şi-a proiectat şi construit aeroplanul pe baza unor date, stabilite şi obţinute prin experienţele făcute de el însuşi cu modele zburătoare şi cu planorul construit în 1909.

Dovada capacităţii sale tehnico-ştiinţifice o avem prin faptul concretizat în următoarea frază :

„Aeroplanul meu a zburat de la început fără să aibe nevoie de nici o modificare, aşa cum l-am calculat din prima zi”.

In acest fel, Vlaicu a atacat şi a rezolvat integral problema zborului, creînd un aeroplan de-o originalitate neconstestată, care nu are nici o parte copiată de pe altă maşină existentă, cum se poate remarca acest lucru la majoritatea celorlalte aeroplane din timpul său.

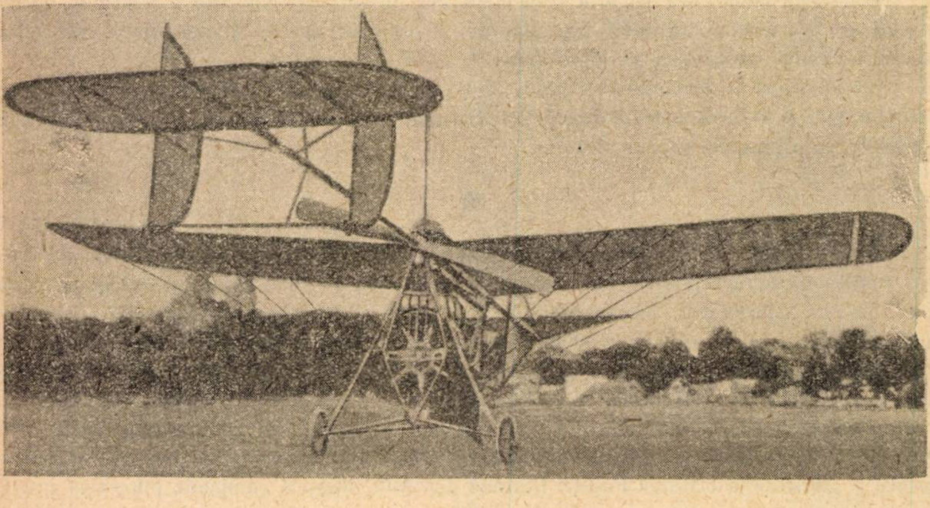


Fig. 9. — Aeroplanul „A. VLAICU II”.

Pentru a ilustra cele susţinute, să examinăm aeroplanul „VLAICU II” (fig. 9) şi să încercăm a găsi o asemănare. Nu vom găsi nici o asemănare între acest aparat şi celelalte menţionate.

În schimb dacă se compară aeroplanul „Voisin” (fig. 4) şi aeroplanul „Farman” (fig. 5) cu aeroplanul german construit de Heinkel în 1911 (fig. 10), se constată că partea din spate este aproape ca la aeroplanul Voisin, iar partea din faţă ca şi a lui Farman, deci aproape identice. De asemenea, dacă se compară aeroplanul Blériot cu aparatul „Antoinette” se constată asemănări evidente. În sfîrşit, aeroplanul „La Demoiselle” al lui Santos Dumont (fig. 8) şi aparatul lui Grade construit în 1909 (fig. 11) sînt de asemenea foarte asemănătoare.

Să comparăm acum aeroplanul „VLAICU II” cu celelalte aparate din acea vreme :

a) Siguranţa de zbor

Inginerul Aurel Vlaicu în cartea sa *Aeroplanul Vlaicu* arătînd superioritatea aeroplanului său spunea :

„Echilibrul perfect şi lipsa de orice pericol de răsturnare este asigurat datorită centrului de greutate foarte coborît”.

Un martor ocular, specialist în probleme de aviaţie şi unul din primii piloţi militari ai Romîniei, generalul inginer aviator Gh. Negrescu, în conferinţa ţinută în ziua de 21

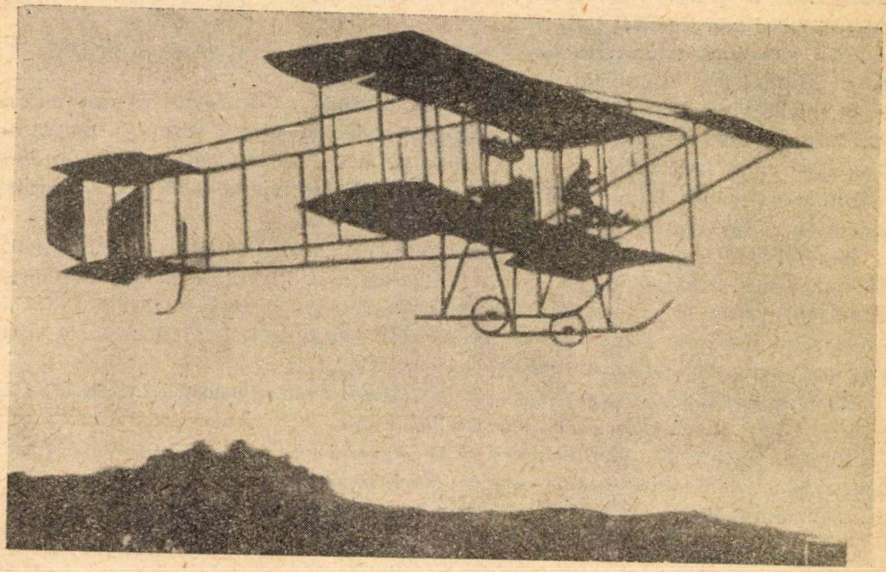


Fig. 10. — Aeroplanul „Heinkel” construit în 1911.

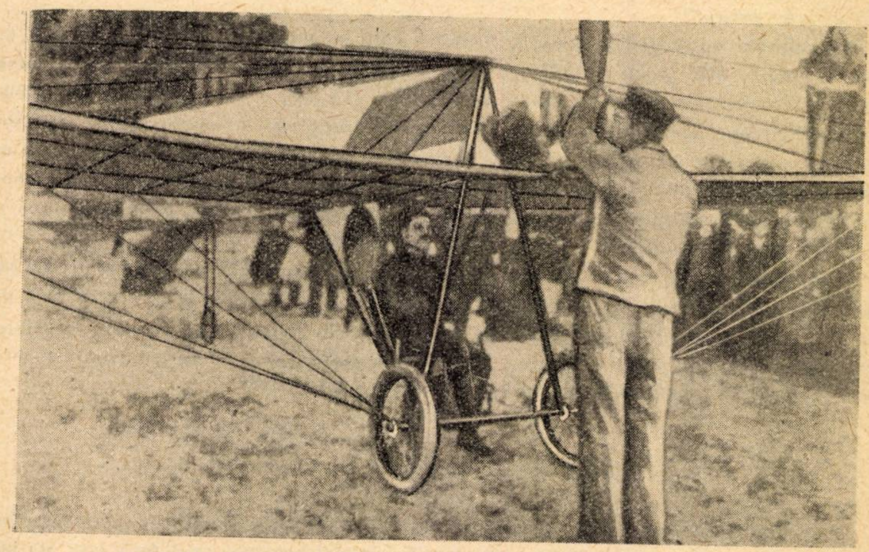


Fig. 11. — Aeroplanul „Grabe”.

octombrie 1936 la „Cercul Aeronautic" din București, intitulată *Un sfert de veac de aviație romînească,* mai tîrziu tipărită, scria :

„Mai ales după întoarcerea din Viena, Vlaicu devenise un as al zborului și noi camarazii lui nu-l mai cunoșteam.

În special virajele lui, nu se mai puteau numi viraje, adică cercuri cu raze mai mari sau mai mici, ci erau adevărate mișcări de stînga împrejur, așa că pot afirma că nu a existat pilot pînă azi ca să facă astfel de viraje *pentru că numai avionul său permitea acest lucru".*

Din același motiv, la concursul de la Aspern, celebrul aviator Garros, învingătorul de mai tîrziu al Mediteranei, l-a numit „La mouche folle".

În ce privește siguranța de zbor din punct de vedere al rezistenței aeroplanului, celebrul nostru compatriot, inginerul Traian Vuia în cartea sa : *Mărturii,* la pag. 96, ne arată că aeroplanul Voisin la primele două încercări de decolare se rupe în zbor, imediat după părăsirea pămîntului. La pagina 142 ne spune „din punct de vedere tehnic toate mașinile actuale sînt fragile, nu oferă nici o garanție de siguranță.

Ruperea unei elice și a cîrmei la aparatele Wright au cauzat moartea Lt. Selfridge, a ing. Lefèvre și schilodirea ofițerului Caldararo.

Ruperea unei aripi a adus moartea lui Delegrange și Le Blon (aparat Voisin), iar două mașini „Antoinette" și-au pierdut motoarele în aer".

La aparatul Vlaicu nu s-a întîmplat niciodată un asemenea lucru.

b) Ușurința de pilotaj

Aeroplanul „A. Vlaicu II" n-a fost zburat decît de inventatorul său.

Vlaicu în cartea sa susține : „*Pilotajul cu aeroplanul nostru e foarte ușor de învățat și lipsit de orice pericol".*

Într-adevăr, nezburînd niciodată, neștiind cum se pilotează un aeroplan, el a făcut deodată și singur, atît școala de pilot aviator cît și încercarea aeroplanului său și aceasta în numai patru zile, cum relatează un martor ocular, Georgе Costescu, în cartea sa „*Inceputurile Aviației Romîne*", la pag. 89, „*Este poate unicul caz în istoria aviației ca într-un timp atît de scurt și singur, un om să învețe să zboare*". Acest record nu ar fi fost posibil dacă pilotarea aeroplanului său n-ar fi fost simplificată la extrem, prin concentrarea tuturor comenzilor în volan și dacă pilotajul acestui aparat nu s-ar fi rezumat la două mișcări — după cum am arătat — una de rotație și a doua de deplasare într-un sens sau altul.

În ceea ce privește ceilalți aviatori, frații Wright, după cum se relatează în „*La router de l'air*" ca să poată zbura și evolua au avut nevoie de *patru ani,* Farman abia după patruzeci și cinci de zile de alergări pe teren aproape 250 de încercări de decolare, reușește să se desprindă de pămînt, iar Blériot, abia după un an și ceva și distrugerea mai multor aparate, reușește să zboare pe o distanță de mai mulți kilometri.

c) Înlăturarea capotării la aterizare

Deprinderea cu viteza este o condiție esențială a pilotării unui aeroplan. Din fazele pilotării unui aeroplan pentru cei ce învață zborul și astăzi cea mai grea fază este aterizarea și aceasta din cauza vitezei cu care atinge pămîntul. La aterizare, cele mai simple mișcări pot deveni catastrofale dacă nu sînt conjugate în timp și spațiu. De aceea majoritatea accidentelor se întîmplă astăzi ca și în trecut, tot la luarea contactului cu pămîntul. Pentru înlăturarea pericolului capotărilor atît de dese şi atît de temute de piloţii de atunci, constructorii de aeroplane au imaginat şi realizat mai multe sisteme care le găsim aplicate la diferite tipuri de aparate de zburat.

Vlaicu prin construcţia aeroplanului său a înlăturat în mare măsură acest pericol, deoarece centrul de greutate era mult sub planurile purtătoare, iar ca o siguranţă în caz de capotaj, aeroplanul „A. VLAICU II", ca şi „A. VLAICU I" era amenajat cu patina de sub carlingă curbată în sus, iar planurile de direcţie la extremitatea de jos a axelor de rotaţie, aveau fiecare cîte o piesă de forma unei tălpi de sanie, pentru ca în caz de atingere cu pămîntul, să alunece fără a distruge aparatul (planşa nr. 2).

În legătură cu trenul de aterizare al aeroplanului triciclu Vlaicu, menţionăm că sistemul cel mai modern aplicat astăzi, este tot triciclu, care pe pămînt ţine aeroplanul în poziţia de decolare adică în principiu aşa cum era şi la aeroplanul „A. VLAICU II".

În afară de cele arătate, acest aeroplan ateriza cu 60 km/oră şi chiar mai puţin.

Pentru a micşora rulajul pe pămînt, în vederea aterizărilor pe terenuri mici, Vlaicu i-a montat ulterior o frînă la roata din spate.

Această inovaţie *aplicată prima dată de Vlaicu*, nu o avea atunci nici un alt aparat de zburat, astăzi este generalizată şi o găsim la toate avioanele moderne.

Mulţumită construcţiei trenului său de aterizare şi frînei pe roata dinapoi, acest aeroplan putea ateriza pe o lungime de 20—25 m, fără pericol de capotare.

Se susţine că pentru a decola avea nevoie de un teren mai scurt de 40 m. Acest record n-a fost bătut decît în zilele noastre de aeroplane construite special pentru aterizări şi decolări scurte.

Dacă comparăm trenul de aterizare al aeroplanului „A. VLAICU II" cu a celorlalte aeroplane, constatăm o superioritate pronunţată în ce priveşte principiul de funcţionare şi construcţie, pe lîngă faptul că era cel mai uşor din toate.

Unul dintre sistemele aplicate de ceilalţi constructori pentru a înlătura pericolul capotării se poate vedea în *figura 5* la aparatul lui Henri Farman, care avea aplicat în faţa roţilor trenului de aterizare alte roţi mai mici şi două patine, care în caz de înclinare în faţă şi capotaj, se sprijineau pe teren împiedicînd capotarea.

Aeroplanul „ANTOINETTE", tipul construit în 1910 (*fig. 7*), adică în acelaşi an cu primul aparat al lui Vlaicu, trenul de aterizare era amenajat în faţă cu o cîrjă care-l apăra contra capotării.

d) *Înlăturarea efectului de desechilibrare laterală în cazul opririi bruşte a motorului*

Pe vremea lui Vlaicu era un pericol dezechilibrarea laterală în cazul opririi bruşte a motorului, de aceea Vlaicu a trebuit să aibe o preocupare deosebită pentru a găsi soluţia anulării cuplului de rotire creat de elice.

La multe aeroplane de atunci, piloţii aveau mari dificultăţi pentru menţinerea în echilibru sau redresarea aparatului, în momentul cînd oprindu-se brusc motorul, din cauza anulării cuplului motor, aeroplanul se dezechilibra.

Torsiunea aripilor după sistemul wright sau aripioarele după sistemul francez, cereau multă atenţie şi sînge rece pilotului pentru a acţiona la timp.

Vlaicu, cu ingeniozitatea cunoscută din toate detaliile aeroplanului său, a rezolvat şi această problemă, utilizînd două elici contrarotative, coaxiale.

Trebuie să menționăm că la începutul zborului mecanic, Ader, Maxim, Langley Wright, Tatin, Blériot-Voisin aveau cîte două elici, dar nici unul n-a aplicat aceste elici pe același ax.

Vlaicu a găsit și aplicat această soluție pe care nu o mai găsim la nici un alt aeroplan pînă în anul 1934. Astăzi este aplicat acest principiu la mai multe avioane moderne.

e) Ecart mare de viteză

Vlaicu ne spune în cartea sa: „*aeroplanul nostru se ridică și se coboară cu viteza de 60 km/oră, putînd întrece 100 km/oră în plin zbor*”.

Dacă privim datele caracteristice ale aeroplanelor cu care facem comparația lui „A. VLAICU II”, constatăm că nici unul din aceste aeroplane nu atinge viteza maximă a aeroplanului Vlaicu. Pe de altă parte, nici unul nu putea veni la aterizare cu viteză așa de mică față de viteza maximă de zbor. Iată deci că acest aeroplan avea unul din cele mai bune ecarturi de viteză în timpul acela.

Acest lucru era de altfel o consecință logică a faptului că aeroplanul său avea o greutate mică și un randament al elicelor superioare celorlalte aeroplane. În timp ce Farman de exemplu, cu motor de 50 CP avea o tracțiune de 120 kg, Vlaicu cu două elici ale aeroplanului său tot cu motor de 50 CP și reductor, obținea o tracțiune aproape de două ori mai mare. Principiul reducerii turației elicelor nu-l găsim decît la Wright și Vlaicu, toți ceilalți aveau elicele montate direct pe axul motorului.

f) Urcarea rapidă la un plafon cît mai ridicat

Ușurința extremă a aparatului „A. VLAICU II”, care cîntărea gata de zbor și cu pilotul la bord abia 300 kg în timp ce celelalte aeroplane din vremea aceea cîntăreau între 400 și 600 kg făcea ca încărcarea pe m^2 de suprafață portantă să fie între cele mai mici.

În al doilea rînd, cu excepția monoplanului „Antoinette”, care avea un motor de 55 CP aeroplanul „A. VLAICU II” avea unul din cele mai puternice motoare, dintre aeroplanele pe care le-am ales pentru comparat. Este deci normal, ca fiind unul din cele mai ușoare aeroplane și avînd unul din cele mai puternice motoare, pe lîngă construcția ingenioasă a aparatului său, să urce după cum spunea inventatorul „*în cîteva minute la 1000 m*”.

Subliniem faptul, că pe vremea aceea 1000 m constituia un record care abea în ziua de 7 ianuarie 1910 a fost atins de aviatorul Hubert Latham.

g) Fabricație simplă care să se poată executa în orice atelier ușor de amenajat în acest scop

Acest obiectiv a fost atins de aeroplanul „A. VLAICU II” prin faptul că el a putut fi fabricat la „Școala pentru Arte și Meserii din București” și se știe că posibilitățile atelierelor unei astfel de școli nu sînt prea mari. În ce privește celelalte aeroplane, fabricația era mai complicată dacă ținem cont că aproape toate aveau fuselaj și la toate găsim planurile construite cu nervuri care asigurau un anumit profil, așa cum au astăzi toate mașinile de zburat.

În afară de cele arătate, aeroplanul „A. VLAICU II”, tocmai prin simplitatea și ingeniozitatea construcției sale, mai avea calitatea unică de a putea fi demontat în 30 de minute și montat gata pentru zbor în două ore.

Demontîndu-i aripile, lucru ce se putea face în cîteva minute, putea fi pus la remorcă și transportat cu un automobil.

IV. CONCLUZII

Din cele de mai sus rezultă că aeroplanul „VLAICU II" ca şi celelalte două aparate construite de A. Vlaicu, se remarcă printr-o construcţie originală şi îndrăzneaţă, iar în privinţa performanţelor obţinute, acest aparat era întru totul comparabil cu celelalte aeroplane ale timpului său, în multe privinţe prezentînd o netă superioritate.

În construcţia aeroplanului Vlaicu, întîlnim o serie de idei şi soluţii deosebit de interesante şi valoroase, care astăzi sînt curent utilizate, ca: introducerea unui reductor între motor şi elici, utilizarea a două elici coaxiale contrarotative, direcţie dublă, tren de aterizare cu roţi independente, introducerea frînei pe roţi etc. Acestea, împreună cu faptul că, deşi posibilităţile de documentare ale lui Vlaicu au fost practic neexistente, aparatul său a zburat de la primele încercări şi nu a necesitat modificări ulterioare atestă excepţionalele calităţi de inginer şi inventator pe care le-a avut A. Vlaicu. De asemenea, mai dorim să remarcăm şi o altă idee a lui Vlaicu, ideia care numai din cauza dificultăţilor de realizare nu se întîlneşte astăzi chiar sub forma preconizată de el şi anume preocuparea pentru găsirea unei soluţii constructive de aripă cu profil variabil cu incidenţa şi cu viteza. Această idee, introdusă în tehnica aeronautică cu mai bine de 20 ani mai tîrziu prin sistemele de hipersustentaţie, este astăzi utilizată sub diferite forme la toate tipurile de avioane. Astfel şi în această direcţie A. Vlaicu poate fi considerat ca un precursor.

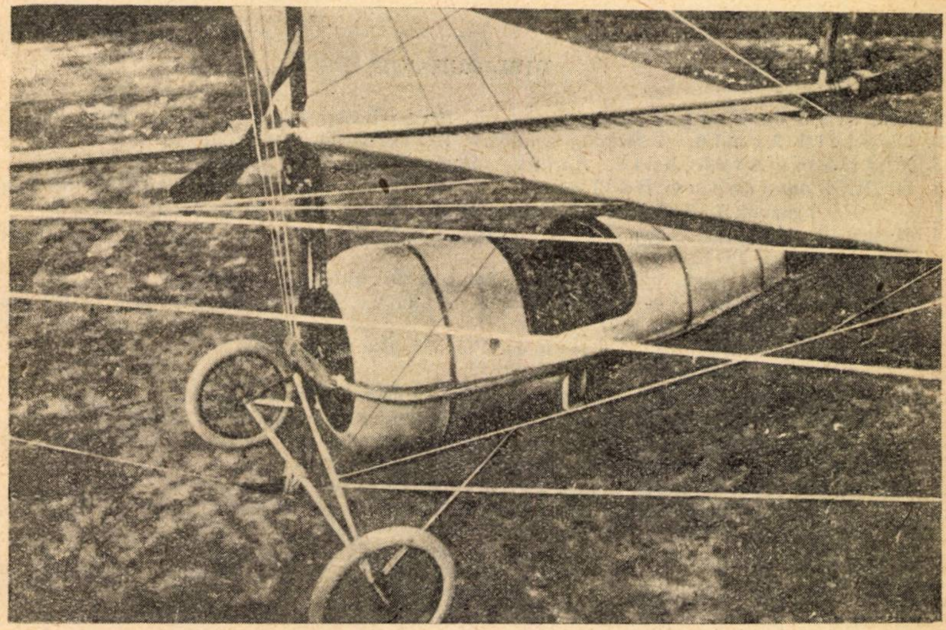


Fig. 12. — Aeroplanul „A. VLAICU III".

Moartea sa tragică a întrerupt brusc fructuoasa activitate a acestui remarcabil pionier al aviaţiei. Dacă ar fi trăit, este necontestabil că Vlaicu şi-ar fi continuat activitatea, îmbunătăţind necontenit aeroplanele sale. O dovadă în acest sens este aeroplanul „VLAICU III" (fig. 12) la care printre îmbunătăţirile aduse, remarcăm prevederea a două posturi de pilotaj, côte-à-côte şi capotarea motorului şi a cabinei, în vederea micşorării rezistenţei la înaintare a motorului şi a îmbunătăţirii răcirii motorului. Acest sistem, cunoscut astăzi sub numele de inel Townend sau NACA, este utilizat la toate avioanele moderne echipate cu motoare cu piston, sub o formă aproape identică cu aceea preconizată de Vlaicu.

În concluzie A. Vlaicu a adus o contribuţie cu totul deosebită la dezvoltarea aviaţiei. opera sa situîndu-l printre cei mai de seamă precursori ai aviaţiei moderne.

Primită la redacţie la 27 aprilie 1957.

BIBLIOGRAFIE

1. Sazerac de Forge, *L'homme s'envole.* Berger-Levrault & Co., Paris, 1909.
2. Neufeld Armin, *A sárkány repülögép.* Kellner Errö, Budapesta, 1909.
3. Williams Archibald, *Korunk találmányai.* Franklin, Budapesta, 1910.
4. Dr. R. Wagner von Dallwitz, *Hilfsbuch für der Luftschif und Flug Maschinenbau.* Rostock I.M. C.J.E. Volckmann Nachfolger (e. Wette), Greifwald, 1910.
5. Berget Alfons, *Léghajozás és Repülés.* A.K.M. Természettudományi társulat, Budapesta, 1911.
6. Aurel Vlaicu, *Aeroplanul Vlaicu.* Socec & Co., Bucureşti, 1911.
7. Szerényi-Gusztav, Dr. Visnya Aladár, *A levegö meghodítása.* Atheneum R.T., Budapesta, 1911.
8. I. Irimescu Gîndeşti, *Aurel Vlaicu.* Flacăra, Bucureşti, 1913.
9. — *Album Vlaicu.* Orăştie, 1920.
10. G. Negrescu, *Un sfert de veac de aviaţie romînească.* Bucureşti, 1936.
11. George Costescu, *Inceputurile aviaţiei romîne.* Presa Bucureşti, 1944.
12. N. A. Ceremnăh, F. F. Sepilov, *A.F. Mojaischi.* Cartea Rusă, Bucureşti, 1951.
13. Traian Vuia, *Mărturii.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
14. Carafoli Elie, *Aurel Vlaicu.* Ed. tehnică, Bucureşti, 1954.
15. — *Aurel Vlaicu.* Ed. Academiei R.P.R., Bucureşti, 1955.

DISTRIBUŢIA ACCELERAŢIILOR ÎN MIŞCAREA RELATIVĂ A RIGIDULUI

DE

RADU P. VOINEA

Să considerăm un reper fix (T_0) şi o serie de repere mobile (T_1), $(T_2)\ldots(T_n)$. Ne propunem să determinăm elementele cinematice ale distribuţiei acceleraţiilor în mişcarea absolută a reperului (T_n) (mişcarea sa faţă de (T_0)), atunci cînd sînt cunoscute elementele cinematice ale mişcărilor relative ale celor n triedre.

Se ştie că distribuţia de acceleraţii în mişcarea unui rigid este dată de formula

$$\bar{a}_Q = \bar{a}_P + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}), \tag{1}$$

P şi Q fiind două puncte ale rigidului, $\bar{a}_P$ şi $\bar{a}_Q$ acceleraţiile acestor puncte, $\bar{\omega}$ vectorul viteză unghiulară, $\dot{\bar{\omega}}$ vectorul acceleraţie unghiulară, iar $\bar{r} = PQ$ (fig. 1).

Să presupunem că, în general, parametrii cinematici $\bar{v}_i$, $\bar{a}_i$, $\bar{\omega}_i$, $\dot{\bar{\omega}}_i$ definesc mişcarea relativă a reperului (T_i) faţă de reperul (T_{i-1}), iar $\bar{v}_P$, $\bar{a}_P$, $\bar{\omega}$ şi $\dot{\bar{\omega}}$ definesc mişcarea absolută a triedrului (T_n) faţă de (T_0).

Cu aceste notaţii, problema enunţată la începutul articolului este echivalentă cu următoarea :

Să se exprime parametrii cinematici $\bar{a}_P$, $\bar{\omega}$ şi $\bar{\omega}$ în funcţie de parametri cinematici $\bar{v}_i$, $\bar{a}_i$, $\bar{\omega}_i$ şi $\dot{\bar{\omega}}_i$.

a. *Calculul expresiei acceleraţiei* $\bar{a}_P$. Să considerăm punctele solidare cu reperele (T_i) şi (T_{i-1}) care coincid la un moment dat cu punctul P (fig. 1). Fie $\bar{a}_P^{(i)}$ şi $\bar{a}_P^{(i-1)}$ acceleraţiile lor absolute (faţă de reperul imobil (T_0)). Se poate stabili cu uşurinţă o relaţie de recurenţă între cele două acceleraţii, folosind formula cunoscută de compunere a acceleraţiilor unui punct material

$$\bar{a}_a = \bar{a}_t + \bar{a}_r + \bar{a}_c, \tag{2}$$

unde $\bar{a}_a$ este acceleraţia absolută, $\bar{a}_t$ este acceleraţia de transport, $\bar{a}_r$ este acceleraţia relativă iar $\bar{a}_c$ este acceleraţia complimentară (Coriolis).

Pentru cazul considerat mai sus, dacă $\bar{a}_P^{(i)}$ este considerată acceleraţie absolută, atunci $\bar{a}_P^{(i-1)}$ joacă evident rolul de acceleraţie de transport. Acceleraţia relativă (a punctului P solidar cu T_i, faţă de $T_{(i-1)}$ este

$$a_r = \bar{a}_i + \dot{\bar{\omega}}_i \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}_i), \tag{3}$$

iar accelerația complimentară va fi dată de formula lui Coriolis

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega}_t \times \bar{v}_r\,. \tag{4}$$

În cazul de față $\bar{\omega}_t$ (viteza unghiulară a mișcării de transport) va fi egală cu suma vitezelor unghiulare ale mișcărilor triedrelor $T_1 \ldots T_{i-1}$ adică

$$\bar{\omega}_t = \sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_j. \tag{5}$$

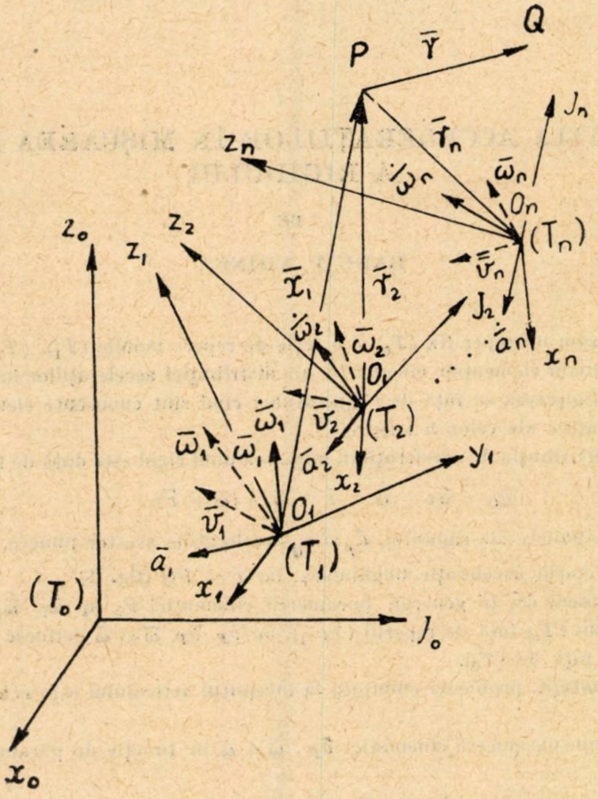

P
$\bar{r}$
Q
J_n
Z_n
$\bar{r}_n$
$\bar{\omega}_n$
$\dot{\omega}_n$
O_n
(T_n)
$\bar{v}_n$
$\bar{a}_n$
x_n
Z_0
Z_2
Z_1
$\bar{r}_1$
$\bar{r}_2$
J_2
$\dot{\omega}_2$
$\bar{\omega}_2$
O_1
(T_2)
$\bar{v}_2$
$\bar{a}_2$
x_2
$\dot{\omega}_1$
$\bar{\omega}_1$
$\bar{\omega}_1$
y_1
O_1
$\bar{v}_1$
$\bar{a}_1$
(T_1)
x_1
(T_0)
J_0
x_0

Fig. 1

Viteza relativă $\bar{v}_r$ din formula (4) va fi în cazul de față

$$\bar{v}_r = \bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i. \tag{6}$$

Rezultă

$$\bar{a}_c = 2\left(\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_j\right) \times [\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i]. \tag{7}$$

Ținînd seama de (3), (7) și de considerațiile făcute mai sus, în baza cărora $\bar{v}_a = \bar{a}_P^{i}$ și $a_t = \bar{a}_P^{(i-1)}$ rezultă în baza formulei (2)

$$\bar{a}_P^{(i)} = \bar{a}_P^{(i-1)} + \bar{a}_i + \dot{\bar{\omega}}_i \times \bar{r}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{\omega}_i \times \bar{r}_i) + 2\left[\sum_{j=1}^{i-1} \bar{\omega}_j\right] \times (\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{r}_i). \tag{8}$$

Făcînd în această formulă $i = 1, 2, \ldots, n$ și ținînd seamă că $\overline{a}_P^{(n)} = \overline{a}_P$ deoarece triedrul (T_0) este fix, iar $\overline{a}_P^{(n)} = \overline{a}_P$ (accelerația absolută a punctului P), rezultă, prin adunarea relațiilor astfel obținute

$$\overline{a}_P = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{a}_i + \dot{\overline{\omega}}_i \times \overline{r}_i + \overline{\omega}_{ti} \times (\overline{\omega}_i \times \overline{r}_i)\right] + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_j \times [\overline{v}_i + \overline{\omega}_i \times \overline{r}_i]. \tag{9}$$

Formula (9) rezolvă problema determinării accelerației absolute a punctului P.

b. *Calculul expresiei vitezei unghiulare absolute* $\overline{\omega}$. Problema aceasta este bine cunoscută Expresia vitezei unghiulare absolute este

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i. \tag{10}$$

c. *Calculul expresiei accelerației unghiulare absolute* $\dot{\overline{\omega}}$. Expresia acestei accelerații unghiulare se obține derivînd expresia (10). Ținînd seama că vectorii $\overline{\omega}_i$ definesc mișcări relative, deci se cunosc expresiile proiecțiilor acestor vectori pe axele triedrelor mobile T_i, se obține

$$\dot{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial t} + \overline{\omega}_{ti} \times \overline{\omega}_i\right],$$

unde prin $\dfrac{\partial \overline{\omega}_i}{\partial t}$ s-a notat derivata locală a vectorului $\overline{\omega}_i$ (accelerația unghiulară relativă, notată mai sus cu $\dot{\overline{\omega}}_i$), iar prin $\overline{\omega}_{ti}$ s-a notat vectorul viteză unghiulară a mișcării de transport a triedrului (T_i). Expresia acestui vector, așa cum s-a văzut mai sus, este dată de (5). Rezultă atunci pentru $\dot{\overline{\omega}}$ expresia

$$\dot{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\omega}}_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_j \times \overline{\omega}_i. \tag{11}$$

Formula (11) generalizează formula lui Coriolis din cazul punctului material. Expresia

$$\overline{\omega}_c = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\omega}_j \times \overline{\omega}_i \tag{12}$$

ar putea fi numită prin analogie *accelerație unghiulară complimentară*.

Formulele (9), (10) și (11) rezolvă complet problema compunerii accelerațiilor în mișcarea relativă a rigidului.

Cazuri particulare

a. *Compuneri de translații*. În cazul cînd se compun mișcări ce au *distribuții de accelerații* de translație ($\overline{\omega}_i = 0$, $\dot{\overline{\omega}}_i = 0$), rezultă în baza formulelor (10) și (11)

$$\overline{\omega} = 0, \; \dot{\overline{\omega}} = 0, \tag{13}$$

adică mișcarea rezultantă are de asemenea o distribuție de accelerații de translație.

b. *Compuneri de rotații concurente*. În acest caz, vectorii $\overline{r}_i$ coincid ($\overline{r}_1 = \overline{r}_2 = \overline{r}_3 = \ldots$ $\ldots = \overline{r}_n$) iar $\overline{\omega}_i \parallel \dot{\overline{\omega}}_i$. Mișcarea rezultantă nu este o rotație, ci o are distribuția de accelerații caracteristică unui rigid cu un punct fix, vectorii $\overline{\omega}$ și $\dot{\overline{\omega}}$ avînd direcții oarecari, așa cum se poate verifica ușor cu formula (11).

Se observă că, chiar dacă mişcările relative sînt uniforme ($\dot{\overline{\omega}}_i = 0$), mişcarea rezultantă are acceleraţie unghiulară $\dot{\overline{\omega}}$, din cauza termenului complimentar (12).

c. *Compuneri de rotaţii paralele.* În acest caz acceleraţia complimentară este nulă şi acceleraţia unghiulară $\dot{\overline{\omega}}$ are o expresie mai simplă

$$\overline{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i, \qquad \dot{\overline{\omega}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\overline{\omega}}_i \tag{14}$$

Acesta este cazul mişcărilor plane.

Primită la redacţie la 4 iulie 1957.

NOTE

O VERIFICARE EXPERIMENTALĂ A METODEI CLASICE DE CALCUL LA ARIPI DIN LEMN

DE

A. PETRE

Metodele de calcul pentru structuri cu înveliş rezistent de secţiune constantă şi multiplu conexă conţin un număr de ipoteze simplificatoare. Prezenţa longeronilor conduce la utilizarea ipotezei că aceştia preiau întreaga încovoiere, respectiv eforturile unitare normale pe secţiunea transversală, fără o participare a învelişului. Utilizarea de învelişuri subţiri face posibilă utilizarea ipotezei unei repartiţii constante ale eforturilor unitare tangenţiale după grosimea învelişului. Cele două ipoteze, împreună cu neglijarea eforturilor unitare suplimentare datorită împiedicării deplanării, conduc la ipoteza fluxului de forfecare constant în înveliş.

Modul de asamblare a structurii, proprie materialului utilizat, introduce de asemenea diferenţa între repartiţia reală şi cea teoretică.

Lucrarea prezentată are scopul stabilirii pe cale experimentală a diferenţei între repartiţia teoretică în ipotezele simplificatoare de mai sus şi repartiţia reală pentru o structură de lemn de secţiune constantă monolongeron cu înveliş rezistent avînd forma din figura 1.

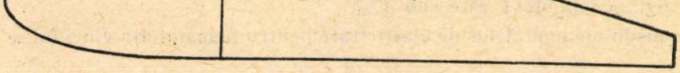


Fig. 1

Starea de tensiune s-a determinat prin tensometri rezistivi de tip IMA şi COWO cu înregistrare pe hîrtie fotosensibilă. Pentru înveliş şi inima longeronului s-au utilizat cîte trei mărci tensometrice, aşezate în rozetă la 120°. Se obţine în modul acesta starea de deformaţie a învelişului.

Pentru a se obţine starea de tensiune este necesar să se cunoască constantele elastice ale materialului.

Deoarece învelişul se construieşte în general pentru lemn sub formă de placaj din foi suprapuse, iar modulele de elasticitate diferă după direcţia fibrelor fiecărei foi, este necesar a se determina pe de o parte modulele de elasticitate ale unei foi și pe de altă parte modulele de elasticitate medii ale ansamblului.

Determinarea modulelor de elasticitate ale unei foi s-a efectuat experimental prin încovoierea în două direcții a unei porțiuni de placaj de 1,5 mm grosime totală compusă din cinci foi de grosime egală.

Deoarece între modulele de elasticitate longitudinal E_L și transversal E_T și coeficienții de contracție transversală μ_L și μ_T există relația

$$E_L \mu_T = E_T \mu_L \tag{1}$$

și cum modulele de elasticitate E_L și E_T sînt în general pentru lemn mult diferite, se poate neglija produsul $\mu_L \mu_T$ față de 1.

Dacă se notează cu w_1 și w_2 săgețile unei porțiuni de placaj în încovoiere cilindrică sub un moment dat respectiv M_1 și M_2 se obține

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{1-\mu_L \mu_T} \frac{M_1}{E_L I_1 + E_T I_2}, \\ w_2 &= \frac{1}{1-\mu_L \mu_T} \frac{M_2}{E_L I_2 + E_T I_1}, \end{aligned} \tag{2}$$

unde I_1 și I_2 sînt momentele de inerție ale secțiunii transversale a ansamblului compus numai din foile cu fibrele așezate longitudinal, respectiv numai cele așezate transversal.

Datele și rezultatele experimentale au fost

$$\begin{array}{llll} M_1 = 65 \text{ kgcm}, & w_1 = 2{,}4 \text{ cm}, & I_1 = 8{,}25 \text{ h}^3, & h = 0{,}3 \text{ mm}, \\ M_2 = 12{,}2 \text{ kgcm}, & w_2 = 1{,}5 \text{ cm}, & I_2 = 2{,}167 \text{ h}^3, & \end{array}$$

de unde cu ajutorul relațiilor (2) se obține

$$\begin{aligned} E_L &= 120\,000 \text{ kg/cm}^2, \\ E_T &= 5\,000 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Calculele s-au obținut neglijînd produsele $\mu_L \mu_T$ față de 1. Acest produs se poate scrie

$$\mu_L \mu_T = \mu_L^2 \frac{E_T}{E_L}. \tag{4}$$

Cu datele din (3) și știind că μ_L este sub 0,5, rezultă că eroarea ce se introduce neglijînd produsul $\mu_L \mu_T$ față de 1 este sub 1 %.

Valorile medii ale modulelor de elasticitate pentru placajul din cinci foi se pot determina din relațiile

$$\begin{aligned} E_{L_\text{med}} &= \frac{3hE_2 + 2hE_T}{5h}, \\ E_{T_\text{med}} &= \frac{2hE_L + 3hE_T}{5h}, \end{aligned} \tag{5}$$

de unde

$$\begin{aligned} E_{L_\text{med}} &= 74\,000 \text{ kg/cm}^2, \\ E_{T_\text{med}} &= 51\,000 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Pentru simplificare vom considera un modul de elasticitate medie de $E_\text{med} = 62\,500 \text{kg/cm}^2$.

Modulul de elasticitate transversal determinat experimental este de

$$G = 30\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

Cu aceste valori pentru o placă omogenă ar trebui să existe relaţia

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)},$$

de unde se obţine valoarea lui μ_{med} pentruca ansamblul să poată fi considerat ca şi izotrop

$$\mu_{\text{med}} = \frac{E}{2G} - 1 = 0{,}04.$$

Pentru a se calcula starea de tensiune se poate utiliza metoda grafică.

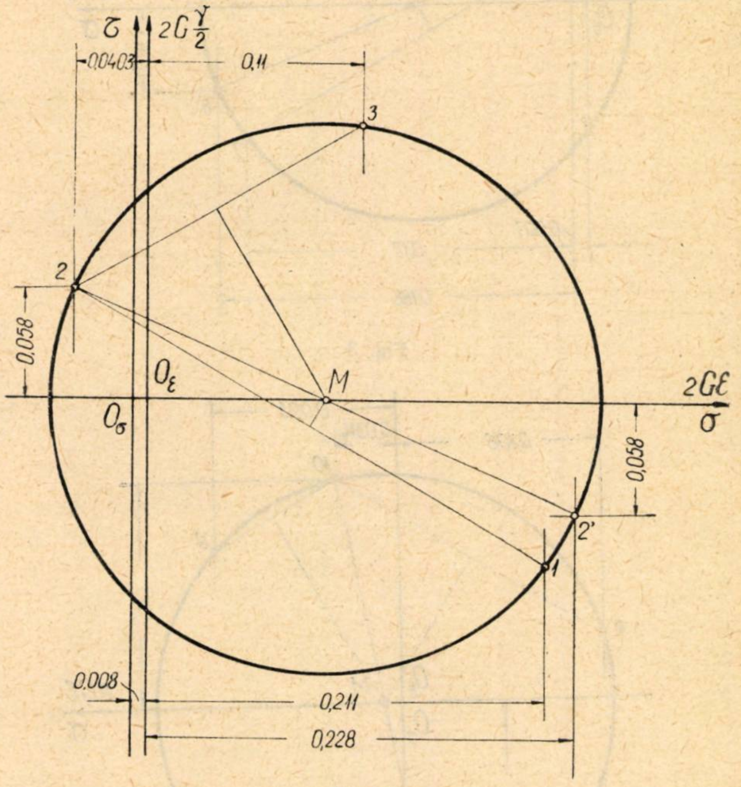


Fig. 2

Se desenează cercul lui Mohr pentru deformaţii în coordonate amplificate cu $2G$. Acelaşi cerc va reprezenta şi cercul lui Mohr pentru tensiuni, dacă se ia ca origine pentru tensiuni un punct O_σ pe abscisă, care faţă de centrul cercului M şi originea axelor de coordonate pentru deformaţii O_ε este astfel încît

$$\frac{\overline{O_\sigma M}}{\overline{O_\varepsilon M}} = \frac{\sigma_{\text{med}}}{2G\,\varepsilon_{\text{med}}} = \frac{1 + \mu_{\text{med}}}{1 - \mu_{\text{med}}},$$

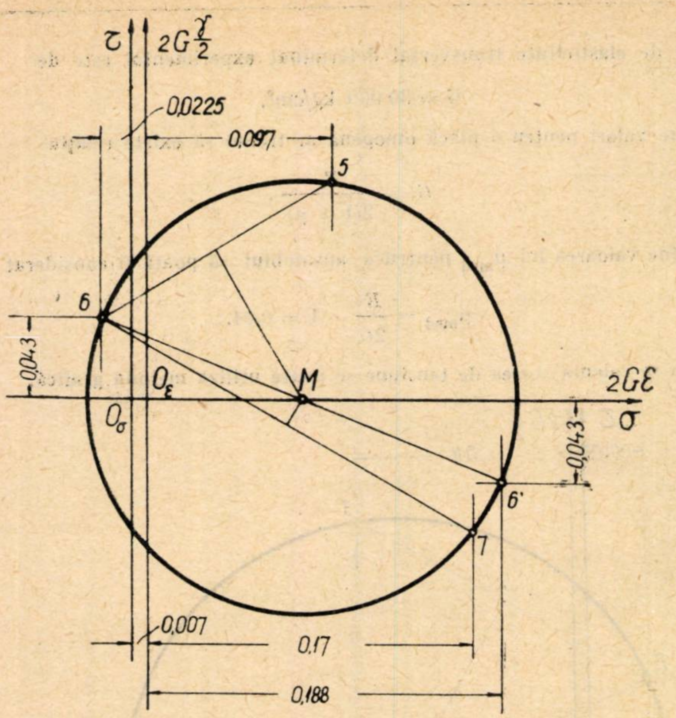

τ
2G γ/2
0,0225
0,097
5
6
0,043
O_ε
M
2Gε
O_σ
σ
0,043
6'
7
0,007
0,17
0,188

Fig. 3

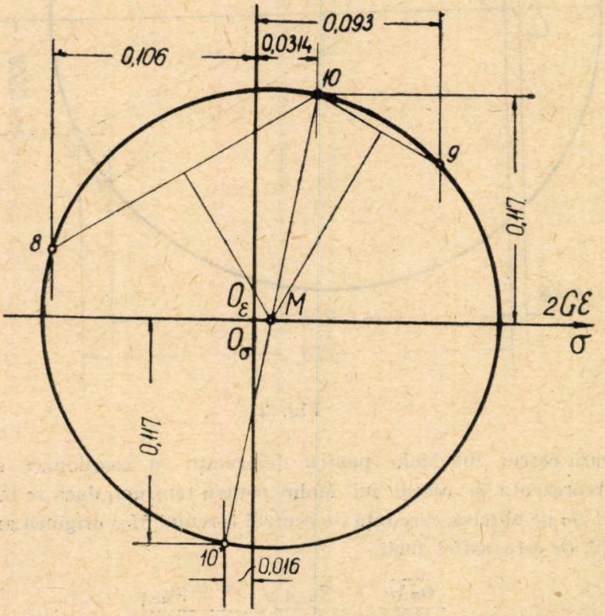

0,093
0,106
0,0314
10
9
0,117
8
O_ε
M
2Gε
O_σ
σ
0,117
10'
0,016

Fig. 4

respectiv introducînd numeric valoarea lui μ_{med} se obține

$$\frac{\overline{O\sigma M}}{\overline{O\varepsilon M}} = 1,082.$$

În cele ce urmează mărcile tensometrice au fost notate cu 1, 2 și 3 pentru intradosul bordului de atac, cu 5, 6 și 7 cele de pe intradosul bordului de fugă și cu 8,9 și 10 cele de pe inima longeronului.

Încărcarea s-a efectuat prin resurse, iar sarcina s-a măsurat prin accelerațiile suferite de avion. Pentru fiecare determinare s-au efectuat cel puțin două evoluții. Valorile tensiunilor sînt calculate pentru unitatea de coeficient de accelerație. Datele de calcul sînt trecute pentru secțiunea verticală paralelă la axul avionului. Axa normală la această secțiune s-a notat cu x. Rezultatele obținute sînt trecute mai jos iar determinarea stării de tensiune s-a obținut prin construcțiile din figurile 2, 3 și 4.

Marca tensometrică	Data zborului	Tipul tensometrului	Ordonată tensogramă etalonare mm*)	Tensiune corespunzătoare etalon. kg/mm	Ordonată maximă tensogramă obținută prin media a două încărcări mm
1	1.V zbor	1 IMA	11	0,217	23,75
2	31.IV ,,	1 COWO	26	0,217	10
3	26.III ,,	2 COVO	19	0,303	21,5
5	28.IV ,,	1 IMA	5,5	0,303	5,5
6	31.IV ,,	2 COWO	26	0,217	8,5
7	31.IV ,,	2 IMA	14	0,303	24,5
8	26.III ,,	3 COVO	18,5	0,303	28,75
9	26.III ,,	2 IMA	11	0,217	15
10	26.III ,,	1 IMA	11	0,217	5

Marca tensometrică	$E\varepsilon$ kg/mm²	$2G\varepsilon$ kg/mm²	Date de calcul kg/mm²	Tensiuni reale în secțiunea de calcul kg/mm²	Eroare raportată la tensiunea maximă din longeron de 0,67 kg/mm² %
1	0,217	0,209	$\tau_{xy} = 0,0515$	$\tau_{xy} = 0,058$	− 1
2	−0,0418	−0,0403	$\sigma_x = 0 \div 0,67$	$\sigma_x = 0,236$	−34
3	0,115	0,11	$\sigma_y = 0$	$\sigma_y = -0,034$	+ 4,8
5	0,101	0,097	$\tau_{xy} = 0,0081$	$\tau_{xy} = 0,0044$	− 5,2
6	−0,0234	−0,0225	$\sigma_x = 0 \div 0,67$	$\sigma_x = 0,155$	−29
7	0,177	0,17	$\sigma_y = 0$	$\sigma_y = 0,0155$	− 2,3
8	+0,098	−0,0943	$\tau_{xy} = 0,1125$	$\tau_{xy} = 0,117$	−0,67
9	+0,0326	+0,0314	$\sigma_x = 0$	$\sigma_x = 0,0314$	−4,7
10	−0,111	−0,106	$\sigma_y = 0$	$\sigma_y = -0,016$	+2,4

---

*) Datele experimentale au fost ridicate de colectivul compus din C. Tanasiciuc și F. Arhip.

Se observă că pentru inima longeronului şi bordul de atac erorile de metodă nu sînt mari.

Pentru bordul de fugă erorile devin mari şi calculul simplificat nu mai este acoperitor. În acest caz pe lîngă erorile de metodă se adaugă eroarea introdusă de neglijarea longeronului fals şi a sarcinilor aerodinamice locale.

Este interesant că învelişul participă numai cu 30—40% din sarcina de calcul după Navier chiar pentru partea întinsă.

Neparticiparea învelişului decît în această proporţie ar putea fi explicată în plus prin imposibilitatea unei întinderi perfecte a placajului în fabricaţie precum şi de deformarea acestuia după alte forme decît longeronul, pe curbe de lungimi mai scurte.

Primită la redacţie la 26 iunie 1957.

RECENZII

IAN N. SNEDDON, *Elements of partial differential equations* (Introducere în ecuaţiile cu derivate parţiale), Ed. Mc. Graw-Hill, New York, 1957, 327 pag.

Numele profesorului Ian N. Sneddon, de la Universitatea din Glasgow, este bine cunoscut inginerilor şi fizicienilor noştri, care se ocupă cu cercetarea ştiinţifică, mai ales de cînd datorită apariţiei unei traduceri în limba rusă, clasicul său tratat asupra transformărilor integrale a devenit accesibil unor cercuri mai largi.

Noua sa lucrare, o introducere în teoria și practica ecuaţiilor cu derivate parţiale, este destinată aceleiaşi categorii de cititori şi este gîndită şi întocmită anume în acest scop.

Este peste tot vizibilă străduinţa autorului de a prezenta teoria, nu ca un scop în sine, ci exclusiv în vederea unei aplicări imediate în problemele pe care tehnica sau laboratorul le pun cercetării.

Nu este deci de mirare că în expunerea sa autorul, graţie îndelungatei sale experienţe în predarea matematicilor superioare către tehnicieni, îşi impune şi reușește să conducă pe cititor de la cele mai simple noţiuni introductive, pînă la problemele cele mai dificile, folosind aproape exclus mijloace elementare.

Fiecare metodă prezentată, este ilustrată imediat prin exemple calculate pînă la rezultatul final. Numeroase exerciţii, alese cu îngrijire și dozate gradat, unele din ele cu caracter teoretic, au de scop să consolideze cunoştinţele cititorului și să-i dea siguranţa şi încrederea necesare unei mînuiri independente a puternicului instrument matematic expus în lucrare. Un mic rafinament pedagogic : la sfîrşitul cărţii se dau soluţiile numai pentru exerciţiile cu număr impar, în scopul evident de a excita pe cititor să caute singur soluţiile celorlalte exerciţii.

O rapidă trecere în revistă a cuprinsului acestei excelente lucrări va arăta cît de mult material de preţ a putut fi condensat în cele 322 pagini de text, de către autor.

Astfel în primul capitol sînt studiate ecuaţiile diferenţiale ordinare cu mai mult de două variabile, în măsura în care sînt necesare studiului ecuaţiilor cu derivate parţiale de primul ordin. Deosebit de elegant sînt expuse condiţiile de integrabilitate ale formelor diferenţiale pfaffiene, precum şi folosirea acestora în termodinamica axiomatică a lui Carathéodory.

Capitolul următor se dedică ecuaţiilor cu derivate parţiale de primul ordin. Se arată cum se ajunge la asemenea ecuaţii, se enunţă problema lui Cauchy şi apoi se dă soluţia generală a ecuaţiilor liniare de primul ordin. Pentru ecuaţiile neliniare se dezvoltă metoda caracteristicilor datorită lui Cauchy, metoda Lagrange-Charpit şi aceea a lui Jakoby. Ca aplicaţie se examinează o problemă din teoria statistică a dezvoltării bateriilor, cu ajutorul unei forme simplificate a ecuaţiilor lui Fokker-Planck-Einstein-Kolmogorov.

Al treilea capitol se ocupă cu studiul general al ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea. După ce se indică modul de formare al acestor ecuaţii şi problemele fizice guvernate de ele, se expune şi se explică larg o metodă simbolică pentru integrarea ecuaţiilor liniare de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi. Pentru ecuaţiile cu coeficienţi variabili se prezintă metoda caracteristicilor. Apoi se expune pentru ecuaţiile hiperbolice metoda lui Riemann. iar în legătură cu cele parabolice, metoda separării variabilelor. Urmează o introducere rapidă în metoda transformărilor integrale (Fourier, Laplace, Hankel, Mellin) sprijinită pe exemplificări, după care se încheie capitolul cu un paragraf consacrat ecuaţiilor neliniare de tip Monge-Ampère. Cele trei capitole care mai urmează sînt destinate fiecare unei ecuaţii speciale, frecvent întîlnite în fizica matematică, și anume ecuaţiilor lui Laplace, a undelor și a difuziei.

Ecuației lui Laplace i s-a rezervat cel de-al patrulea capitol al lucrării. După ce se arată domeniile în care intervine această ecuație se dau soluțiile clasice ale teoriei potențialelor, arătîndu-se că ele verifică ecuația. Se examinează condițiile la limite ale lui Dirichlet, Neumann și Churchill în problemele interioare și exterioare, după care se pășește la integrarea ecuației prin metoda separării variabilelor. Cu acest prilej se introduc funcțiile sferice și cilindrice și se exprimă soluțiile cu ajutorul lor.

Apoi urmează o scurtă expunere a metodei inversiunii și o mai largă tratare a metodei funcțiilor lui Green, precum și a problemei mixte în condiții Neumann și Dirichlet concomitent. Ecuația bidimensională este tratată larg, se arată reducerea ei la una integrală de speța a doua, precum și folosirea funcțiilor de variabilă complexă și a transformărilor conforme. Capitolul se încheie cu un paragraf consacrat funcțiilor lui Green pentru ecuația bidimensională.

Penultimul capitol are ca obiect ecuația undelor. Se urmează aceeași cale ca în capitolul precedent, arătîndu-se domeniile controlate de această ecuație și indicîndu-se soluțiile „elementare" ale ecuației unidimensionale sub forme dată de d'Alembert și aceea datorită lui Fourier-Poisson. Apoi se revine la metoda caracteristicilor, dîndu-se soluția lui Riemann-Volterra pentru undele unidimensionale. Cazul bidimensional este ilustrat cu ajutorul metodei separării variabilelor, cu care prilej se studiază membrana dreptunghiulară și cea circulară. Se indică apoi rapid posibilitatea folosirii unor metode variaționale în cazul unor condiții la limite mai complexe.

Problema tridimensională este expusă în cîteva cazuri simple, după care se trece la deducerea soluțiilor sub formă integrală ale lui Helmholtz, Kirchhoff etc. și la stabilirea funcției lui Green corespunzătoare ecuației undelor. În legătură cu ecuația neomogenă a undelor se introduc și se folosesc integralele lui Marcel Riesz.

Capitolul se încheie cu o examinare a ecuației neomogene a undelor cu ajutorul metodei clasice a lui Riemann și a uneia recente datorite lui Copson.

Ecuația difuziei ocupă ultimul capitol al lucrării. Și aici se începe cu trecerea în revistă a problemelor fizice în care intervine această ecuație, după care se examinează după o metodă datorită lui Bartels și Churchill, integrarea unei forme generalizate a ecuației difuziei, în condiții complicate la limite. Teoremei lui Duhamel, pe care se bazează metoda, i se dă o demonstrație elementară directă, fără a se recurge la transformări funcționale. Apoi se introduc ca soluții elementare, soluția experimentală și integrala lui Laplace-Poisson, arătîndu-se că verifică ecuația difuziei. Metoda separării variabilelor este reluată și aici în exemple uni- și bidimensionale, iar transformările integrale folosite sub forma integralei lui Laplace. Capitolul se încheie cu un paragraf consacrat folosirii funcțiilor lui Green în problema de difuzie și cu unul destinat difuziei cu surse distribuite continuu, studiat atît clasic cît și cu ajutorul transformările integrale tip Fourier.

Un apendice expune sumar noțiunile din geometria diferențială referitoare la sistemele parametrice de suprafețe, care intervin în cursul lucrării.

Această scurtă examinare a conținutului lucrării, arată clar bogăția neobișnuită de material și varietatea metodelor, atît clasice cît și moderne, folosite de profesorul Sneddon în expunerea sa. Trebuie relevat că autorul reușește să creeze din teoria ecuațiilor cu derivate parțiale un instrument de lucru ușor de mînuit, deosebit de util și necesar tehnicienilor, folosind mijloace simple și în general elementare, fără însă ca prin aceasta să sacrifice cîtuși de puțin din vigoarea matematică indispensabilă unei tratări la nivel înalt.

O lipsă, desigur neesențială, dar totuși simțită de tehnicieni, o constituie absența metodelor directe de aproximație (Ritz, Galerkin etc.) și a celor grafo-analitice (Schmidt, Liebmann etc.) a căror întrebuințare tinde să devie curentă.

Este de dorit ca valoroasa lucrare a profesorului Sneddon să fie pusă cît mai curînd la dispoziția inginerilor și fizicienilor noștri, într-o traducere corespunzătoare în limba romînă.

L. G. Hamburger

N. I. BEZUHOV, *Teoria elasticității și plasticității*, Ed. Tehnică, București, 1957, 508 pag.

Mecanica mediului solid deformabil a luat o astfel de dezvoltare, încît scrierea unui tratat cuprinzător și în același timp amănunțit, tratat în care să-și găsească locul probleme mereu mai numeroase examinate cu ajutorul unui aparat de cercetare mereu mai rafinat, pare să devină tot mai dificilă.

După cartea clasică, dar deja depășită, a lui Love, nu au existat încercări de alcătuire a unei astfel de opere capitale la nivelul științei contemporane; se scriu fie monografii, fie manuale didactice. Din această din urmă categorie face parte și cartea recenzată.

Într-o expunere vie și colorată, autorul își propune să prezinte cîteva din problemele simple și totodată actuale ale teoriei. La prima vedere de altfel, cartea pare destinată începătorilor.

După capitolul introductiv, cu pagini sugestive despre ipotezele de bază ale teoriei și despre raporturile sale cu disciplinele înrudite (mai ales, rezistența materialelor), se studiază (în capitolul II) sistemul de ecuații statice și geometrice ale teoriei elasticității, concomitent cu pregătirea unor noțiuni necesare în teoria plasticității. Capitolul III dă sistemul complet de ecuații al teoriei elasticității, și elementele de teorie plană și stare axial-simetrică. În capitolul IV se studiază cîteva din așa-numitele *probleme simple* (probleme în care ecuațiile Beltrami-Michell sînt identic verificate). Capitolul V alege, din așa-numitele *probleme clasice*, problema semispațiului (și a semiplanului) cu aplicații la problema de contact. În capitolul VI se dau elemente de teoria torsiunii barelor și profilelor cu pereți subțiri. În sfîrșit, capitolul VII se ocupă de așa-numita *teorie aplicată a elasticității*, alegînd drept temă a expunerii teoria plăcilor subțiri și teoria profilelor, după Vlasov.

Materialul cuprins în aceste capitole consacrate teoriei elasticității este elementar. Multe raționamente importante sînt suprimate, dîndu-se doar rezultate finale (vezi de pildă condițiile Saint-Venant, reduse la rolul de condiții necesare; ecuațiile Beltrami-Michell, a căror deducere nu se dă; problema ștanței rigide plane circulare, pentru care soluția se dă fără demonstrații etc.). Marele număr de exemple din studiul problemei plane sînt construite după metoda inversă. Soluția problemei Flamant-Boussinesq este prezentată aproape intuitiv.

Ni se pare că o asemenea construcție riscă să dea celui ce ia pentru prima oară contact cu teoria elasticității, o imagine netezită a dificultăților. Probleme elementare, tratate cu mijloace elementare, nu pot da o imagine exactă nici despre tematica, nici despre puternicele mijloace matematice ale teoriei contemporane.

Ceea ce ni se pare foarte valoros în carte, este continua referire la soluțiile rezistenței materialelor, la metodele înrudite ale staticii construcțiilor, la critica și analiza mijloacelor de experimentare. De aceea, ni se pare că lucrarea nu poate sluji drept introducere în teoria elasticității, dar că, epurată de multitudinea de exemple rudimentare și îmbogățită cu o analiză tot atît de vie a unor probleme mai puțin banale, ea poate fi citită cu interes și folos de către cei deja introduși în problemă.

Trecînd la partea a doua a cărții, consacrată teoriei plasticității și reologiei, vom găsi o construcție de același tip cu cea a primei părți.

În capitolul VIII sînt date ecuațiile teoriei plasticității cunoscute sub numele de *teoria lui Henky-Iliușin*. Expunerea este foarte rezumativă (teorema lui Iliușin asupra încărcării simple, precum și ecuațiile descărcării sînt doar amintite), pentru unele probleme nedîndu-se nici măcar formularea matematică. Capitolul IX tratează pe scurt cîteva probleme elementare (încovoiere pură, răsucire pură, problema axial-simetrică etc.), numai cu ajutorul teoriei lui Henky-Iliușin. Capitolul X conține indicații asupra unor probleme practice (stări-limită, placa circulară), și unele rezultate ale lui Sokolovski (asupra mediilor friabile și ecuațiile teoriei curgerii). În capitolul XI se fac considerații interesante asupra metodelor folosite în teoria elasticității, plasticității, mecanica construcțiilor și reologie.

Aceste ultime patru capitole rezumă deci, sau amintesc numai, principalele rezultate ale uneia din teoriile plasticității. Cercul foarte strîmt de informare, limitarea expunerii la una singură din teoriile plasticității, cu neglijarea foarte importantelor teorii ale lui Prandtl-Reuss, Saint-Venant-Lévy-Mises, Prager, neglijarea informării asupra lucrărilor capitale ale lui Kármán, Taylor, Kocetkov, Lunț, White și Griffis, Zverev etc. în problema dinamică, în sfîrșit, bibliografia deficientă (nici măcar lucrările lui Henky nu sînt amintite) contribuie la formarea unei păreri incomplete și insuficient de fidele despre stareaactuală a teoriei.

Cîteva observații despre traducerea făcută de Ed. tehnică. Condițiile grafice de apariție sînt foarte bune, există însă greșeli de traducere. Unele din ele pot fi găsite cu ușurință de cititor („axial-simetric" în loc de „polar-simetric" și „simplificat" în loc de „rectificat", „curgere lentă" în loc de „fluaj"). Altele pretează însă la confuzie (de pildă, traducerea prin același cuvînt, „curgere" a două noțiuni atît de diferite ca **течение** și **текучесть**). Uneori, pe aceiași pagină chiar, mai multe cuvinte rusești sînt traduse prin același cuvînt. De ex. **сдвиг** și **скольжение** se traduc amîndouă prin „lunecare". În sfîrșit, apar și greșeli de nescuzat, ca traducerea cuvîntului **течение** prin „deformare".

Traducînd cartea lui N.I. Bezuhov, Ed. tehnică a făcut o operă utilă.

Liviu Solomon și *Nicolae Cristescu*

V. V. BOLOTIN, *Dinamiceskaia ustoicivosti uprughih sistem* (Stabilitatea dinamică a sistemelor elastice), Gosudarsvennoe isdatelstvo tehnico-teoreticescoiliteraturi, Moscova 1956, 600 pag.

Problema condiţiilor în care mişcarea unui punct, sistem de puncte sau continuu se menţine în vecinătatea unei mişcări date sau, utilizînd un termen consacrat, problema stabilităţii mişcării, capătă pentru prima dată o formulare precisă în lucrarea lui Liapunov *Problema generală a stabilităţii mişcării* apărută la Harkov în 1892. În această lucrare se dă un conţinut precis noţiunii de stabilitate şi sînt prezentate o serie de metode care permit să se afirme dacă o mişcare este stabilă sau nu, în cazul în care aceasta este descrisă de un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare.

În cazul mişcării elastice, problema este mai complicată din cauza structurii ecuaţiilor ce o descriu. Ea poate fi formulată astfel : să se găsească relaţiile dintre parametrii mişcării pentru care vectorul deplasării elastice creşte în modul cu timpul. În această formulare problema a fost mult studiată, mai ales în ultimii 40 de ani. Dintre autorii care au dat contribuţii preţioase cităm : N. M. Beleeaev, N. N. Bogoliubov, R. Einaudi, N.N. Kocin, N.M. Crîlov, E. Mettler etc.

În cartea care face obiectul acestei recenzii sînt prezentate atît rezultate originale cît şi unele rezultate obţinute de alţi autori. Metoda de cercetare utilizată are la bază aplicare judicioasă a unei proprietăţi a soluţiilor ecuaţiei de tip Mathieu-Hille. Proprietatea rezultă din următoarea teoremă :

*Între două soluţii periodice ale ecuaţiei de tip Mathieu-Hille există stabilitate sau instabilitate după cum soluţiile periodice respective au perioade diferite sau aceiaşi perioadă**). Teorema se extinde şi la alte tipuri de ecuaţii şi este în particular valabilă pentru anumite ecuaţii matriciale.

În prima parte a cărţii sînt examinate probleme în care mişcarea este descrisă chiar de o ecuaţie de tipul pomenit, sau de una completată cu termeni liniari sau neliniari. Rezultatele se obţin cu aplicarea directă a teoremei de mai sus în primul caz, şi se suprapun celor obţinute pe altă cale de N.M. Beleeaev, şi celor obţinute experimental. Prin prezenţa termenilor neliniari ecuaţia de bază nu mai păstrează proprietatea semnalată anterior. În prezenţa acestor termeni autorul cercetează comportarea mişcării fie în vecinătatea mişcării perioadice, cercetînd comportarea mişcării perturbate în aproximaţie de ordinul întîi, fie utilizînd metode proprii mecanicii neliniare (metoda lui Teodorcic, metoda variaţiei lente a amplitudinii).

Pentru sistemele elastice, de care autorul se ocupă în partea a doua a cărţii problema este adusă la cazul precedent. Scriind ecuaţiile integrale care descriu fenomenul şi propunînd acestor ecuaţii soluţii de o anumită formă, problema se reduce la o ecuaţie diferenţială matricială pentru care este valabilă teorema enunţată. În acest mod se reduce din nou problema la cercetarea condiţiilor de existenţă de soluţii periodice. Sînt tratate problemele amortizării şi a prezenţei factorilor neliniari.

În partea a treia a lucrării sînt date o serie de aplicaţii ale teoriei pentru cîteva tipuri de construcţii. Se urmăresc în general două probleme :

— stabilitatea dinamică a sistemelor ce sînt solicitate de sarcini ce dau naştere înainte de pierderea stabilităţii numai la eforturi axiale ;

— stabilitatea formelor simetrice de deformaţii la construcţiile simetrice, încărcate simetric. Se ştie că aceste construcţii pentru anumite valori ale parametrilor îşi pierd stabilitatea căpătînd deformaţii antisimetrice foarte periculoase.

Se urmăreşte de asemenea influenţa unor factori neliniari (elasticitatea neliniară, inerţie neliniară, amortizare neliniară) şi efectul lor asupra mărimii amplitudinii. Din cauza lor, amplitudinea devine staţionară şi în zona de instabilitate.

Autorul studiază stabilitatea dinamică a barei drepte, arcelor, plăcilor, pînzelor subţiri. Pornind de la pierderea stabilităţii plane a barei se atacă problema stabilităţii dinamice a podurilor suspendate. Pentru studiul cadrelor se porneşte de la unele metode de calculul vibrațiilor proprii și a sarcinilor critice ale cadrelor care permit rezolvarea aproximativă a stabilității dinamice.

---

*) Fie $F(x,y,y',y'', \alpha, \beta) = 0$ ecuaţia din enunţ. Dacă pentru $\alpha = \alpha_1(\beta)$ şi $\alpha_i = \alpha_e(\beta)$ avem soluţiile periodice din teoremă şi dacă cele două curbe din planul parametrilor închid un domeniu D, în toate punctele $M(\alpha, \beta) \in D$ avem stabilitate sau instabilitate, după cum în lungul curbelor $\alpha = \alpha_i \, (i = 1,2)$ avem soluţii de perioade diferite sau de aceeaşi perioadă.

Subliniind caracterul unitar al cărții, unitatea realizată prin reducerea problemei de stabilitate la cercetarea condițiilor de existență a soluțiilor periodice pentru o anumită ecuație diferențială, observăm totuși că autorul a utilizat unele metode fără să se preocupe de valabilitatea algoritmului de calcul în problema studiată (ex. metoda variației lente a amplitudinei, metoda lui Teodorcic, de asemenea; cercetînd mișcarea perturbată în vecinătatea soluției periodice n-a menționat legitimitatea operației).

În general cartea prezintă un material original foarte interesant care permite rezolvarea problemei stabilității dinamice într-un mare număr de construcții întîlnite în practică. Autorul însăși rezolvă un mare număr de probleme de acest gen; problemele rezolvate prezentînd ele însile un mare interes arată în același timp cît de fecundă este metoda utilizată. Lucrarea este cu atît mai valoroasă cu cît în acest domeniu sînt foarte puține lucrări de sinteză.

S. Răutu și Fl. Dincă

I. Polytechnische Tagung der Technischen Hochschuhle Dresden, von 18 bis 20 Iuni 1956 (Prima sesiune politehnică a Politehnicii din Dresda, de la 18 pînă la 20 iunie 1956), Technische Hochschuhle, Dresden.

Volumul care cuprinde rapoartele și referatele prezentate la prima sesiune politehnică organizată în luna iunie 1956 de către Politehnica din Dresda demonstrează multiplele preocupări științifice ale corpului didactic al cunoscutei instituții de învățămînt superior.

Caracterul festiv al primei sesiuni a fost accentuat și prin prezența a numeroși oaspeți din străinătate, din păcate nu și din țara noastră, care au adus salutul lor lucrărilor sesiunii și au participat activ la lucrările acesteia, prezentînd referate sau luînd cuvîntul în cadrul discuțiilor.

Primele patru referate cuprinse în volum se referă la probleme cu caracter general, legate de anumite aspecte ale dezvoltării tehnicii moderne. Astfel despre *Noua epocă a dezvoltării tehnice* a vorbit locțiitorul președintelui consiliului de miniștri, Fritz Selbmann, care a insistat în deosebi asupra celor mai importanți factori ai procesului revoluției tehnice și anume utilizarea energiei atomice și automatizarea completă a proceselor industriale. Din analiza situației din Germania, privită prin prisma influenței pe care acești doi factori o au asupra dezvoltării viitoare a tehnicii, rezultă cîteva sarcini importante pentru politehnici, dintre care prima este aceea de a sprijini introducerea tehnicii moderne.

Profesorul dr. H. Frühauf a prezentat în același cadru general un interesant referat *Despre stadiul actual al electronicii industriale*, care conține o privire de ansamblu asupra aplicațiilor electronicei în cadrul producției industriale. De la aplicațiile tehnicii frecvențelor înalte, atît de numeroase și variate, la comenzile electronice ale mașinilor unelte, la încercările nedestructive ale materialelor și la prelucrarea electro-erozivă a metalelor, referatul ne dezvăluie vastele posibilități ale acestei ramuri tehnico-științifice puse în slujba ridicării productivității muncii.

Al treilea referat, al prof. dr. G. E. R. Schulze intitulat *Proprietățile tehnice și structura atomistică a materialelor noastre* aduce în discuție, prin numeroase exemple, influența pe care așezarea atomilor în rețeaua cristalină o are asupra unor importante proprietăți tehnice ale diferențelor materiale.

În sfîrșit, ultimul referat general, susținut de prof. ing. H. Lohmann se ocupă de *Direcția de dezvoltare a pregătirii inginerilor.* În lumina necesităților tehnicii moderne apar o serie de noi probleme legate de pregătirea inginerilor și chiar de aceea a cadrelor didactice din politehnici.

Partea cea mai mare a volumului o alcătuiesc referatele și rapoartele asupra colocviilor ținute în cadrul celor nouă facultăți ale Politehnicii din Dresda. Astfel, din facultatea de matematici și științe naturale, secția de matematici și fizică prezintă un referat susținut de J. Henke, intitulat *Comparația diferitelor camere Röntgen cu unghi mic.* Aceste aparate servesc la măsurarea intensității de dispersie care iese sub un unghi mic dintr-un preparat supus razelor Röntgen și în referat se analizează principalele tipuri existente, prezentîndu-se în încheiere un aparat realizat în Institutul de röntgenografie al facultății.

Secția de chimie și biologie a aceleiași facultăți este reprezentată printr-un referat al prof. dr. A. Simon asupra substanțelor ce servesc la impregnarea lemnului în vederea conservării lui.

Secția de topografie a facultății de construcții a ținut în cadrul sesiunii o serie de colocvii pe teme de specialitate. Astfel, în Institutul geodetic, un colocviu condus de prof. dr. ing. G. Peschel, s-a ocupat de problemele speciale ale triangulației de ordin superior, participarea la discuții fiind foarte numeroasă. În același institut, a avut loc și colocviul referitor la noi rezultate ale cercetărilor în nivelmentul de precizie, sub aceeași conducere. De asemenea sub conducerea prof. dr. ing. W. Zill s-au ținut colocvii despre precizia măsurătorilor optice ale distanțelor și despre metodica învățămîntului geodeziei în politehnici. Catedra de fotogrametrie, condusă de prof. dr. A. Bucholtz a avut colocvii referitoare la determinarea fotogrametrică a punctului de trecere prin procedee sovietice, la determinarea prin radio a înălțimii avioanelor ce iau fotografii, la dependența între scara fotografiilor și a hărților, la stabilizarea aparatelor fotografice în timpul zborului și la problematica triangulației electronice. În toate aceste referate, au fost discutate probleme moderne de mare actualitate ale geodeziei, topografiei și aerofotogrametriei.

În cadrul facultății de mecanică, mai multe institute au ținut colocvii pe diferite teme. Remarcăm astfel colocviul Institutului de organe de mașini în care s-a prezentat referatul susținut de dr. M. Bergsträsser asupra calculului formei dinților de bună rezistență. Mai multe referate se referă la colocviile Institutului de economia energiei. Printre acestea, cel prezentat de dr. ing. W. Pauer are ca obiect *Importanța considerentelor economice în termotehnică*; semnalăm de asemenea referatul ing. K. Stieper care se ocupă de problema calculului economic al schimbătoarelor de căldură și pe acela al ing. W. Ullmann asupra transportului energiei la distanță. Problema influenții depunerilor asupra funcționării schimbătoarelor de căldură este tratată în referatul susținut de prof. dr. ing. H. Hausen în cadrul colocviului Institutului de termodinamică și mașini termice. Un interesant și amplu referat intitulat *Utilizarea modelelor de mecanisme în învățămînt și cercetare* a fost prezentat de dr. ing. H. Brandenberger la colocviul Institutului de mecanisme și mecanică fină.

Numeroase referate au fost susținute și în colocviile institutelor facultății de tehnologie. La colocviul Institutului de științele exploatării și normare, directorul acestuia prof. dr. ing. K. Koloc a prezentat un referat asupra domeniului de probleme al normării tehnice și standardizării. În colocviile Institutului de tehnologia materialelor au fost susținute mai multe referate interesante dintre care semnalăm pe acela foarte amplu al dr. ing. G. Rosmann despre dezvoltarea tablelor de transformatori anizotrope în Republica Democrată Germană, apoi referatul dr. ing. H. Ringpfeil asupra bazelor metalurgice ale eficacității termobimetalelor și acela în care O. Henkel prezintă un nou material magnetostrictiv de înaltă elasticitate. În institutul pentru tehnologia mecanică a lemnului au avut loc colocvii la care au fost susținute referate cu privire la modificarea tehnicii lemnului și influența ei supra consumului de lemn (prof. dr. ing. H. Flemming), trecerea la lucrul pe bandă în industria scaunelor (ing. W. Eckoldt), situația și perspectivele valorificării deșeurilor de lemn (dr. ing. K. Eisner), prelucrarea deșeurilor de foioase în plăci prin procedeul uscat (dr. L. Varju).

Facultatea de aviație a avut, în cadrul sesiunii, numeroase colocvii, în care au fost prezentate referate cu un conținut variat și deosebit de interesant. Astfel, un amplu referat, cuprinzînd numeroase date, susținut de ing. H. Wocke, are ca obiect analiza și perspectivele dezvoltării avioanelor comerciale. Pe aceeași linie se înscrie și referatul ing. K. Freytag asupra rentabilității diferitelor tipuri de avioane în transportul pe distanță redusă. O problemă actuală de aerodinamică este urmărită în referatul prof. dr. ing. G. Backhaus intitulat *Contribuție la determinarea creșterii de rezistență a aripilor în săgeată*, în care se prezintă atît calcule teoretice cît și rezultatele experimentale, pentru comparație. Prof. dr. G. Cordes a prezentat un referat despre influența compresoarelor axiale supersonice asupra dezvoltării turboreactoarelor. În referatul *Acumularea energiei într-o ocnă de sare*, prof. dr. ing. W. Richter și ing. F. Detsch expun o soluție ingenioasă pentru realizarea unei suflerii supersonice cu intermitență în care s-a utilizat drept rezervor de vid camera unei ocne de sare abandonată. O prezentare din păcate prea rezumativă o are referatul *O contribuție la teoria aripii* de H. J. Maschek. Ultimul referat în domeniul aviației este întocmit de prof. dr. R. Schmidt, și are ca obiect problema măririi rezonanței paletelor turbinelor cu gaze. În cadrul facultății de electronică, remarcăm referatul susținut de prof. dr. ing.

H. Kindler în cadrul colocviului Institutului de tehnica reglajului, care a avut ca temă electronica în tehnica reglajului. Exemplele date sînt interesante și edificatoare pentru însemnătatea problemei. Institutul de electroacustică și acustica construcţiilor a ţinut colocvii pe mai multe teme în care s-au prezentat referatele *Măsurarea proprietăţilor acustice spaţiale pe modele* (prof. dr. ing. W. Reichardt) și *25 de ani de măsurători electronice ale mărimilor mecanice* (dr. ing. M. Nier), acesta din urmă deosebit de interesant prin actualitatea problemei pe care o tratează. În colocviul Institutului de instalaţii energetice electrice, prof. dr. ing. H. Schultze a susţinut referatul *Probleme actuale ale reţelelor de tensiune medie*, iar în colocviul Institutului de aparate electrice și mecanice de precizie, ing. K. Thielecke a prezentat un referat asupra cinematicii selectoarelor din centralele telefonice.

Colocviul facultăţii de ingineri economiști cu tema *Formarea inginerilor economiști în școlile superioare* (referat susţinut de prof. dr. ing. H. Siemens) a ocazionat ample discuţii.

Semnalăm și referatele prezentate în colocviile facultăţii de silvicultură despre creșterea plopilor bogaţi în celuloză (prof. dr. H. Schönbach), metodele obţinerii lemnului de valoare (prof. dr. ing. A. Heger), perspective de recoltare ale materialului lemnos (prof. dr. ing. E. Kienitz) și tehnica transportului lemnului în exploatările forestiere (prof. dr. ing. E. Stentzel).

Facultatea de pedagogie profesională și știinţe generale a avut de asemenea colocvii în mai multe institute în care s-au prezentat referate de specialitate privind în special formarea inginerilor (prof. ing. H. Lohmann), problemele pedagogiei profesionale în educarea politehnică a tineretului (dr. H. Kaiser), situaţia și tendinţele de dezvoltare ale didacticii instruirii profesionale (dr. D. Hering), gîndirea politehnică în dezvoltarea gustului (prof. K. Trinks).

Această sumară trecere în revistă a încercat să scoată în evidenţă multiplele preocupări știinţifice ale personalului didactic al Politehnicii din Dresda, care este organizată ca un centru de cercetare, precum și ampla participare a specialiștilor din restul Republicii Democrate Germane și din alte ţări. Publicarea în volum a referatelor susţinute la sesiune este o operă utilă și poate constitui un imbold pentru instituţiile similare de învăţămînt superior.

T. Oroveanu

ACADEMIA REPUBLICII POPULARE ROMÎNE
INSTITUTUL DE MECANICĂ APLICATĂ „TRAIAN VUIA”

STUDII ȘI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul VIII 1957

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

INDEX ALFABETIC

STUDII ȘI CERCETĂRI

Nr. Pag.

CINEMATICA ȘI DINAMICA SOLIDELOR

FLORIAN V. N., Cinematica sapelor cu role conice. 3 637
HACKER T. și BURACU A., Un procedeu de cercetare a mișcării perturbate a avionului în faza fugoidă, cînd mișcarea de bază este nepermanentă 3 629
TIPEI N., Asupra mișcării de cădere a rachetelor. 3 619

AEROMECANICĂ

CARAFOLI E. și IONESCU M., Scurgeri conice de ordin superior în jurul aripilor triunghiulare subțiri sau de grosime simetrică (o teorie generală unitară) 3 677
CARAFOLI E. și HOROVITZ B., Scurgerea supersonică omogenă de ordin superior în jurul unei aripi unghiulare prevăzută cu placă normală 4 959
DARIE GH. N., Aplicarea metodei Carafoli la calculul rezistenței de undă a aripii delta dublu conice cu panta dublă. 3 725
DUMITRESCU LUCIAN, Determinarea efectului de ejecție la profile cu volet fluid (jet-flap) 2 357
HACKER T., Despre comportarea avionului în zbor în atmosferă agitată 4 983
PANTAZOPOL D., Determinarea aproximativă a repartiției de presiuni în lungul unui obstacol situat în curent supersonic de gaz. 3 737
PATRAULEA N. N., Calculul deflecțiunii vînei și al vitezelor induse pe discul rotorului de elicopter 1 13
PATRAULEA N. N., Profil cu volet fluid în prezența unor singularități date 2 313
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L., POPESCU C., CĂPRIȚĂ D., și GAB H., Cercetări experimentale asupra profilelor aerodinamice suflate 2 319
PATRAULEA N. N. și DUMITRESCU L., Influența pereților asupra încercărilor de aripi toroidale în suflerii circulare 3 703
PATRAULEA N. N., Indicații asupra măririi coeficientului de calitate al elicelor propulsive 3 711
PAVELESCU D. și OLARU D., Cu privire la determinarea unor parametri ai rachetelor auxiliare 1 23
SĂVULESCU ȘT., Asupra determinării caracteristicilor stratului limită prin utilizarea unor profile tip de viteze și temperaturi. 2 341
SĂVULESCU ȘT., Aplicarea metodei profilelor tip de viteze și temperaturi la calculul stratului limită de pe un corp de revoluție. . . 4 975

HIDRODINAMICĂ

	Nr.	Pag.
KAHAN M. şi IAMANDI C., Mărirea capacităţii de spălare şi transport aluvionar a scurgerilor în canale scurte	1	219
KAHAN M. şi HÎNCU S., Dinamica curenţilor sub presiune în canale cu rugozitate mixtă	2	557
KAHAN M. şi HÎNCU S., Despre similitudinea dintre curenţii cu nivel liber şi curenţii sub presiune	4	1011
MANEA V., Calculul masei aparente pentru carene alungite	2	547
MATEESCU CR., KAHAN M., FILOTTI A. şi DELICAN D., Studiul mişcării aluviunilor în regim uniform	3	757
MATEESCU CR., Metode noi de determinare a distribuţiei vitezelor în mişcarea uniformă a fluidelor vîscoase	4	991
OROVEANU T., O metodă aproximativă pentru studiul scurgerii staţionare planradiale a unui amestec de lichid şi gaz printr-un mediu poros	2	541
OROVEANU T., Asupra scurgerii nestaţionare a unui amestec compresibil de lichid şi gaz printr-un mediu poros	3	779
VASILESCU GR., Transformarea braţului Sulina în canal maritim. Soluţie care conduce la asigurarea ieşirii la mare şi la valorificarea bogăţiilor Deltei Dunării	1	233

REZISTENŢA MATERIALELOR—ELASTICITATE

	Nr.	Pag.
ARCAN M., STOENESCU F. şi MIHAIL R., Cercetări cu privire la introducerea unui nou material pentru modele în fotoelasticitate : Dinox F. 110	4	1133
BUZDUGAN GH., Studiu comparativ între diverse metode pentru calculul fundaţiilor masive de maşini	2	437
CALCAN V., IONESCU I. şi GOLDENBERG N., Mase plastice pe bază de furfurol şi derivaţi. V. Influenţa tratamentului termic asupra comportării faţă de apă şi ulei a textolitului cu răşină furfurol-fenolică	3	847
DUMITRESCU L. şi STĂNESCU C., Torsiunea unei bare cilindrice neomogene	1	111
HAMBURGER L., DINCĂ FL. şi MANEA V., Asupra torsiunii unor bare cilindrice	4	1091
IONESCU I., CALCAN V. şi GOLDENBERG N., Mase plastice pe bază de furfurol şi derivaţi. IV. Influenţa tratamentului termic asupra unor rezistenţe la eforturi progresive la rupere, ale textolitului cu răşină furfurol-fenolică	1	171
LIBRESCU LIVIU, O nouă formulare a problemei generale a învelitorilor subţiri elastice	2	511
NICOLAU ED., Cu privire la influenţa unui mediu elastic de încastrare asupra distribuţiei tensiunilor într-o consolă	2	525
NICOLAU EDUARD, Deformaţii la o consolă încastrată într-un mediu elastic	4	1145
PANĂ GH. I., Folosirea lemnului alterat pentru construcţii şi industrie	1	155
PÎRVULESCU N. S., Efectul forţei centrifuge asupra rezistenţei prăjinilor de foraj	3	805
PROCOPOVICI E., Asupra deformării transversale a unei bare solicitate prin şoc axial	1	141
PROCOPOVICI E., Asupra deformării transversale a barelor elastice solicitate de o forţă axială impulsivă	3	839
RĂUTU S. şi DINCĂ FL., Asupra comportării barei drepte supusă la sarcini dinamice axiale	1	135
SOLOMON L. şi DRĂGHICESCU D., Asupra utilizării transformărilor conforme în problema plană a elasticităţii pentru domenii dublu conexe	4	1115

Nr. Pag.

STĂNESCU CRISTIAN şi VISARION VIOREL, O metodă pentru calculul învelitorilor cilindrice de secţiune circulară cu ortotropie de material 4 1173

TEODORESCU P. P., Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere 1 115

TEODORESCU PETRE P., Asupra calculului grinzilor pereţi cu o singură deschidere 2 451

TEODORESCU PETRE P., Asupra calculului semispaţiului elastic sub acţiunea unor sarcini periodice. 3 831

TEODORESCU P. P., Asupra unor probleme spaţiale ale teoriei elasticităţii 4 1101

VISARION V., O metodă pentru calculul dinamic al tuburilor şi învelitorilor cilindrice circulare 2 491

UNGERE—FRECARE—UZURĂ

CONSTANTINESCU V. N., Calculul lagărelor fără joc radial supuse la forţe şi viteze variabile. 3 789

CONSTANTINESCU V. N., TANASICIUC C. şi GRABARI V., Determinarea experimentală a sarcinii pe osiile vagoanelor de cale ferată 4 1051

ROZEANU L. şi PREOŢESCU O., Consideraţii asupra uzurii ansamblurilor de frecare în perioada de rodaj 1 85

TIPEI N. şi NICA AL., Asupra condiţiilor la limită în problema lubrificaţiei 1 63

TIPEI N., Lubrificaţia suprafeţelor cilindrice cu mişcare de rostogolire şi de alunecare 4 1039

VASILCA GH., Studiul coeficientului de frecare într-un lagăr circular cu ajutorul curbelor $p = g(V)$ 1 75

TEHNICA MĂSURĂTORILOR

PAVELESCU D. şi PANTELIMON TH., Asupra înregistrării pe bandă magnetică a unor mărimi mecanice cu variaţii „lente". 4 1073

VIBRAŢII

IFRIM MIHAIL, Calculul dinamic al cadrelor elastice pe baza principiului conservării energiei 2 393

IFRIM MIHAIL, Precizări în legătură cu aplicarea formulei lui Geiger la calculul primei frecvenţe proprii de vibraţie ale clădirilor în cadre 4 1197

MANEA V. şi PROCOPOVICI E., Asupra unei metode grafice pentru determinarea frecvenţelor proprii ale vibraţiilor flexionale la grinzi libere cu distribuţie neuniformă a rigidităţii şi a masei. 3 897

TONDL A., Mişcarea periodică a rotoarelor cu o caracteristică neliniară a reazemelor. 1 35

TONDL ALEŠ, Rezonanţa subarmonică a unui rotor cu o caracteristică neliniară a reazemelor 2 379

TEORIA MECANISMELOR

BOGDAN R., PELECUDI CR., BUGAIEVSKI E. şi CALMACIUC L., Studiu asupra determinării pe cale experimentală a deplasărilor în mecanismele plane 3 663

BUGAIEVSKI E., BOGDAN R. şi PELECUDI C., Contribuţii la clasificarea mecanismelor spaţiale 2 407

MANGERON D., DRĂGAN C. şi SVIJEVSCHI VL., O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor şi a maşinilor 1 51

Nr. Pag.

MECANICA CONSTRUCȚIILOR

CĂRARE TEODOR și AMZULESCU CEZAR, Calculul cadrelor tip shed prin ecuații cu diferențe finite 1 189
IFRIM MIHAIL, Considerații în legătură cu un criteriu de pierdere a stabilității elastice a sistemelor de bare 1 213
PRIȘCU RADU, Contribuții la problema determinării temperaturilor de calcul pentru barajele arcuite 2 585
PRIȘCU R. și CONSTANTINESCU M., O metodă de determinare a distribuției presiunii hidrostatice în secțiunea maestră a barajelor arcuite 3 887
PRIȘCU R. și CĂCIULESCU ST., Studiu asupra barajelor de greutate evidate 4 1205
WEISSENBERG M. și CIUNGU S., Deformațiile elementelor de beton armat și precomprimat supuse la încovoiere cu armătura neaderentă 3 867

TRATAMENTE MECANICE ȘI PRELUCRAREA MEDIILOR SOLIDE CONTINUE

FLORESCU C. și ZELINGHER N., Cercetări asupra rezistenței la penetrare a solului 3 925
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M. și PASCU N., Cu privire la parametrii geometrici ai cuțitului armat cu plăcuță de carburi metalice 2 423
POPOV M., DECIU E. și MITRICĂ I., Considerații asupra unei analogii hidrodinamice a laminării 3 905
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M. și PASCU N., Despre regimul optim de așchiere cu cuțite de strung armate cu plăcuțe din carburi metalice 3 915
POPOV M., DECIU E. și MITRICĂ I., Asupra unei condiții la limită în analogia hidrodinamică a laminării 4 1229

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

ANDREI ȘT., Nomograme pentru calculul generatoarelor de gaze motocompresoare utilizate la antrenarea pneumatică a rotoarelor de elicopter 4 1241
FLORESCU C. și ZELINGHER N., Penetrograf dinamic pentru sol, cu acționare manuală tip IMA-II. 3 935
GHEORGHIU D., Studiul aeroplanului „A. VLAICU II" în comparație cu avioanele timpului său 4 1279
PAVELESCU D., Cu privire la studiul uzurii cuțitelor de strung (iradiate) pentru determinarea parametrilor optimi de așchiere. 1 265
ZELINGHER N. și FREUND P., Banc experimental pentru studiul rezistenței fusurilor la uzură în regim nepermanent 4 1275

NOTE

PETRE A., O verificare experimentală a metodei clasice de calcul la aripi de lemn 4 1303
VOINEA RADU P., Distribuția accelerațiilor în mișcarea relativă a rigidului 4 1299

RECENZII

BOLOTIN V. V., *Dinamiceskaia usloicivosti uprughih sistem* (Stabilitatea dinamică a sistemelor elastice). Gosudavstvenoe izd. tehniko-teoreticeskoe literaturî, Moscova, 1956, de S. Răutu și Fl. Dincă 4 1312

	Nr.	Pag.
BEZUHOV N. I., *Teoria elasticității și plasticității*. Ed. tehnică, București, 1957, de L. Solomon și N. Cristescu	4	1310
CARAFOLI E., *Aerodinamica vitezelor mari*. Ed. Acad. R.P.R., București, 1957, de N. Tipei	2	603
KALMANOK A. S., *Rasciot balok-stenok* (Calculul grinzilor pereți). Gos. izd. lit. po stroitelstvu i arhitekture, Moscova, 1956, de P. P. Teodorescu	3	943
KAMMERER A., *Les propriétés mécaniques des solides réels et la théorie de l'élasticité* (Proprietățile mecanice ale solidelor reale și teoria elasticității). Ed. Herman & Cie. Paris, 1951, de P. P. Teodorescu	2	604
KOLLBRUNNER F. KURT și MEISTER MARTIN, *Knicken* (Flambajul). J. Springer, Berlin-Göttingen, 1955, de A. Beleș	3	942
SNEDDON IAN N., *Elements of partial differential equations* (Introducere în ecuațiile diferențiale parțiale). Ed. Mc.Graw-Hill, New York, 1957, de L. C. Hamburger	4	1309
SNITKO N. K., *Ustoicivost sjatîh i sjato-izognutîh sterjnevîh sistem* (Stabilitatea sistemelor de bare comprimate). Ed. de stat pentru literatura de construcții și arhitectură, Moscova-Leningrad, 1956, de M. Ifrim	3	945
* * *, *Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. v. W.G.L.* (Anuarul 1955 al societății științifice pentru aeronautică). Akademie Verlag, Berlin, 1956, de N. Tipei	3	939
* * *, *I. Polyechnische Tagung der Technischen Hochschule Dresden, von 18 bis 20 Juni 1956* (Prima Sesiune a Politehnicii din Dresda de la 18 pînă la 20 iunie 1956). Ed. Technische Hochschule Dresden, 1956, de T. Oroveanu	4	1313
* * *, *Recomandări pentru concepția și calculul îmbinărilor cu șuruburi*, Société Belge des Mécaniciens, Bruxelles, 1956, de Gh. Vasilca	8	941
* * *, *Résistance des matériaux, théorique et expérimentale*. I. Théorie de l'élasticité et des structures élastiques (Rezistența materialelor teoretică și experimentală. I. Teoria elasticității și a structurilor elastice). Dunod, Paris, 1955, de Beleș A. și Mihăilescu M. . . .	1	285

АКАДЕМИЯ РУМЫНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ „ТРАЯН ВУЯ“

ТРУДЫ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Том VIII 1957

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

№ Стр.

СТАТЬИ

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

ТИПЕЙ Н., О движении ракет во время падения 3 619
ФЛОРИАН В. Н., Кинематика долот с коническими шороками 3 637
ХАКЕР Т. и БУРАКУ А., Способ исследования возмущенного движения самолета в длиннопериодическом этапе при неустановившемся основном движении 3 629

АЭРОМЕХАНИКА

ДАРИЕ Г. Н., Применение метода Карафоли для расчета волнового сопротивления треугольного двуконусного крыла с двойным углом наклона 3 725
ДУМИТРЕСКУ Л., Определение коэффициента эжекции для профилей с текучим закрылком 2 357
КАРАФОЛИ Е. и ИОНЕСКУ М., Коническое обтекание высшего порядка вокруг тонких треугольных крыльев или крыльев переменной толщины (Унитарная общая теория) 3 677
КАРАФОЛИ Е. и ХОРОВИЦ Б., Сверхзвуковое однородное обтекание высшего порядка треугольного крыла с нормальной пластиной . . . 4 959
ПАВЕЛЕСКУ Д. и ОЛАРУ Д., Об определении некоторых параметров вспомогательных ракет 1 23
ПАНТАЗОПОЛ Д., Приближенное определение распределения давлений вдоль препятствия расположенного в сверхзвуковом потоке газа . . . 3 737
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Расчет дефлекции струн и индуктивных скоростей на диске ротора геликоптера 1 13
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Профиль с текучим закрылком в случае заданных особенностей 2 313
ПАТРАУЛЯ Н. Н., ДУМИТРЕСКУ Л., ПОПЕСКУ К., КЭПРИЦЭ Д. и ГАБ Х., Экспериментальные исследования сдуваемых аэродинамических профилей 2 319
ПАТРАУЛЯ Н. Н. и ДУМИТРЕСКУ Л., Влияние стенок на испытание тороидальных крыльев в круглой аэродинамической трубе 3 703
ПАТРАУЛЯ Н. Н., Указания относительно увеличения качественного коэффициента пропульсивных винтов 3 711
СЭВУЛЕСКУ Ш., Об определении характеристик пограничного слоя путем применения типовых профилей для скоростей и температур . . . 2 341
СЭВУЛЕСКУ Ш., Применение метода типовых профилей скоростей и температур к расчету пограничного слоя на теле вращения 4 975
ХАКЕР Т., О поведении самолета при полете в возмущенной атмосфере . . 4 983

ГИДРОДИНАМИКА

№ Стр.

ВАСИЛЕСКУ Г., Превращение сулинского рукава в морской канал. Радикальное решение для обеспечения выхода в море и для освоения богатств дельты Дуная . 1 233
КАГАН М. и ЯМАНДИ К., Увеличение способности размыва и перемещения наносов воды, текущей по коротким каналам . 1 249
КАГАН М. и ХЫНКУ С., Динамика напорного потока в каналах с неравномерной шероховатостью . 2 557
КАГАН М. и ХЫНКУ С., К вопросу о подобии потоков со свободной поверхностью и напорных потоков . 4 1011
МАНЯ В., Расчет кажущейся массы для удлиненных корпусов . 2 547
МАТЕЕСКУ Г., КАГАН М., ФИЛОТИ А. и ДЕЛИКАН Д., Исследование движения наносов в равномерном режиме . 3 757
МАТЕЕСКУ Г., Новые методы определения распределения скоростей в равномерном движении вязких жидкостей . 4 991
ОРОВЯНУ Т., Приближенный метод изучения стационарного плоскорадиального течения смеси жидкости и газа сквозь пористую среду . 2 541
ОРОВЯНУ Т., О нестационарном движении сжимаемой смеси жидкости и газа через пористую среду . 3 779

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ — УПРУГОСТЬ

АРКАН М., СТОЕНЕСКУ Ф. и МИХАИЛ Р., Исследование по внедрению нового материала Динокс Ф-110 для изготовления моделей в области фотоэластичности . 4 1133
БУЗДУГАН Г., Сравнительное обследование разных методов расчета сплошных фундаментов для машин . 2 437
ВИСАРИОН В., Метод для динамического расчета труб и кругло-цилиндрических оболочек . 2 491
ГАМБУРГЕР Л., ДИНКЭ Ф. и МАНЯ В., О кручении некоторых цилиндрических стержней . 4 1091
ДУМИТРЕСКУ Л. и СТЭНЭСКУ К.. Кручение неоднородного цилиндрического стержня . 1 111
ИОНЕСКУ И., КАЛКАН В. и ГОЛЬДЕНБЕРГ Н., Пластмассы на основе фурфурола и дериватов. IV. Влияние термической обработки на некоторые сопротивления прогрессивным усилиям на излом текстолита с феноло-фурфуроловой смолой . 1 171
КАЛКАН В., ИОНЕСКУ И. и ГОЛЬДЕНБЕРГ Н., Пластические массы на основе фурфурола и его производных. V. Влияние термической обработки на поведение в воде и масле текстолита с фурфуроло-фенольной смолой . 3 847
ЛИБРЕСКУ Л., Новая формулировка общей задачи тонких гибких оболочек 2 511
НИКОЛАУ Э., О влиянии упругой среды заделки на распределение напряжений в консоле . 2 525
НИКОЛАУ Э., Деформации защемленной в упругой среде консоли . 4 1145
ПАНЭ Г. И., Об использовании испортившейся древесины в строительстве и промышленности . 1 155
ПРОКОПОВИЧ Е., О поперечной деформации стержня, подвергающегося осевому удару . 1 141
ПРОКОПОВИЧ Е., О поперечной деформации упругих стержней при осевой импульсной нагрузке . 3 839
ПЫРВУЛЕСКУ Н. С., Эффект центробежной силы на сопротивление буровых штанг . 3 805
РЭУТУ С. и ДИНКЭ Ф., О поведении подвергнутого осевым динамическим нагрузкам прямого стержня . 1 135
СОЛОМОН Л. и ДРЭГИЧЕСКУ Д., О применении конформных преобразований в плоской задаче упругости для двухсвязных областей . 4 1115
СТЭНЕСКУ К. и ВИСАРИОН В., Метод расчета цилиндрических покрытий круглого сечения ортотропией материала . 4 1173

№ Стр.

ТЕОДОРЕСКУ П. П., О расчете однопролетных балок-стенок 1 115
ТЕОДОРЕСКУ П. П., К расчету однопролетных высоких балок 2 451
ТЕОДОРЕСКУ П. П., О расчете упругого полупространства под действием периодических нагрузок 3 831
ТЕОДОРЕСКУ П. П., О некоторых пространственных задачах теории упругости 4 1101

ТРЕНИЕ — СМАЗКА — ИЗНОС

ВАСИЛЬКА Г., Изучение коэффициента трения в круглом подшипнике при помощи кривых $p = g(V)$ 1 75
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., Расчет подшипников без радиального зазора при переменных нагрузках и скоростях 3 789
КОНСТАНТИНЕСКУ В. Н., ТАНАСИЧУК Г. и ГРАБАРИ В., Экспериментальное определение нагрузки на оси железнодорожных вагонов . . . 4 1051
РОЗЯНУ Л. и ПРЕОЦЕСКУ О., Об износе узлов трения в период обкатки 1 85
ТИПЕЙ Н. и НИКА А., О предельных условиях для проблемы смазки . 1 63
ТИПЕЙ Н., Смазка цилиндрических поверхностей при движении качания и скольжения 4 1039

ТЕХНИКА ИЗМЕРЕНИЙ

ПАВЕЛЕСКУ Д. и ПАНТЕЛИМОН Т., О записи на магнитную ленту некоторых «медленно» изменяющихся механических величин 4 1073

ВИБРАЦИИ

ИФРИМ М., Динамический расчет упругих рам на основе принципа сохранения энергии 2 393
ИФРИМ М., К применению формулы Гейгера к вычислению первой частоты собственных колебаний рамочных сооружений 4 1197
МАНЯ В. и ПРОКОПОВИЧ Е., О графическом методе определения собственных частот колебаний при изгибе свободно лежащих балок с неравномерным распределением жесткости и массы 3 897
ТОНДЛ А., Периодическое движение ротора при нелинейной характеристике упругих стоек подшипников 1 35
ТОНДЛ А., Субгармоническая резонация ротора с нелинейной характеристикой упругих стоек подшипников 2 379

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ

БОГДАН Р., ПЕЛЕКУДИ Г., БУГАЕВСКИЙ Е. и КАЛМАЧУК Л., К вопросу об определении экспериментальным путем перемещений в плоских механизмах 3 663
БУГАЕВСКИЙ Е., БОГДАН Р. и ПЕЛЕКУДИ К., К вопросу о классификации пространственных механизмов 2 407
МОНЖЕРОН Д., ДРЭГАН К. и СВИЖЕВСКИЙ В., Новый метод изучения теории механизмов и машин 1 51

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

ВЕЙСЕНБЕРГ М. и ЧУНГУ С., Деформация элементов из обычного или предварительно напряженного железобетона при изгибе при отсутствии сцепления бетона с арматурой 3 867
ИФРИМ М., Об одном критерии потери эластичной стабильности системами штанг 1 213
КЭРАРЕ Т. и АМЗУЛЕСКУ Ц., Расчет рам шедового типа при помощи уравнения в конечных разностях 1 189
ПРИШКУ Р., К вопросу определения температур для статического расчета арочных плотин 2 585

№ Стр.

ПРИШКУ Р. и КОНСТАНТИНЕСКУ М., Метод распределения гидростатического давления в центральном сечении арочных плотин 3 887

ПРИШКУ Р. и КЭЧУЛЕСКУ Ш., Об облегченных гравитационных плотинах 4 1205

МЕХАНИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ТВЕРДЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД

ПОПОВ М., ПАВЕЛЕСКУ Д., МИТРИКЭ И., ДЕЧУ Е., КАЛЧУ М. и ПАСКУ Н., О геометрических параметрах напайного резца с пластинкой из твердых сплавов 2 423

ПОПОВ М., ДЕЧУ Е. и МИТРИКЭ И., О гидродинамической аналогии прокатки 3 905

ПОПОВ М., ПАВЕЛЕСКУ Д., МИТРИКЭ И., ДЕЧУ Е., КАЛЧУ М. и ПАСКУ Н., Об оптимальном режиме резания резцами с пластинками из твердого углеродного сплава 3 915

ПОПОВ М., ДЕЧИУ Е. и МИТРИКЭ И., Об одном граничном условии в гидродинамической аналогии прокатки 4 1229

ФЛОРЕСКУ К. и ЗЕЛИНГЕР Н., Исследование проницаемости почвы . . 3 925

НУЧНЫЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ РЕФЕРАТЫ

АНДРЕЙ Ш., Номограммы для расчета мотокомпрессорных газогенераторов, используемых для пневматического приведения в движение геликоптерных роторов 4 1211

ГЕОРГИУ Д., Исследование самолета «А. Влайку II» по сравнению с современными ему самолетами . . . . , , , 4 1279

ЗЕЛИНГЕР Н. и ФРЕУНД П., Опытный стэнд для исследования устойчивости вала на износ при непостоянном режиме 4 1275

ПАВЕЛЕСКУ Д., К исследованию износа токарных резцов (облученных) для определения оптимальных параметров резания 1 265

ФЛОРЕСКУ К. и ЗЕЛИНГЕР Н., Почвенный динамический пенетрограф ручного действия типа IMA-II 3 935

ЗАМЕТКИ

ВОЙНЯ Р. П., Распределение ускорений в относительном движении жесткого тела 4 1299

ПЕТРЕ А., Экспериментальная проверка классического метода расчета деревянного крыла 4 13

РЕЦЕНЗИИ

БЕЗУХОВ Н. И., Теория упругости и пластичности. Editura tehnica, Бухарест. 1957. Л. Соломон и Н. Кристеску 4 1310

БОЛОТИН В. В., Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство технико-теоретической литературы. Москва. 1956. С. Рэуту и Ф. Динка 4 1312

КАЛМАНОК А. С., Расчет балок-стенок. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, Москва, 1956. П. П. Теодороску 3 943

КАММЕРЕР А., Механические свойства реальных твердых тел и теория упругости, Herman & C-ie, Париж. 1951. П. П. Теодореску . . 604

КАРАФОЛИ Е., Аэродинамика больших скоростей, Ed. Acad. R.P.R., Бухарест, 1957, Н. Типей 2 603

КОЛЛБРУННЕРФ. КУРТ и МЕЙСТЕР МАРТИН, Продольный изгиб. J. Springer, Берлин-Гейтинген, 1955, А. Белеш 3 942

СНЕДДОН ЯНН Н., Элементы частных дифференциальных уравнений, Mc. Graw Hill, Нью-Йорк, 1957, Л. Г. Гамбургер 4 1309

СНИТКО Н. К., Устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержневых систем. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре, Москва — Ленинград, 1956. М. Ифрим 3 945

* * * Сопротивление материалов теоретическое и экспериментальное. 1. Теория упругости и упругих структур, Dunod, Париж. 1955, Белеш А. и Михайлеску М 1 285

* * * Справочник Научного общества воздухоплавания 1955, Akademie Verlag, Берлин. 1956 Типей Н. 3 939

* * * Указания, для проектировки и расчета болтовых соединений, Société Belge des Mécaniciens, Брюссель, 1956 Василька Г. 3 941

* * Первый Политехнический съезд Дрезденского Политехникума 18—20 июля 1956, Technische Hochschule, Дрезден, 1956, Т. Оровяну 4 1313

ACADÉMIE DE LA RÉPUBLIQUE POPULAIRE ROUMAINE
INSTITUT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE «TRAIAN VUIA»

ÉTUDES ET RECHERCHES DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE

Tome VIII 1957

INDEX ALPHABÉTIQUE

ÉTUDES ET RECHERCHES

CINÉMATIQUE ET DYNAMIQUE DES SOLIDES

	Nº	Page
FLORIAN V. N., La cinématique des trépans à rouleaux coniques . . .	3	636
HACKER T. et BURACU A., Un procédé pour l'étude du mouvement perturbé de l'avion dans la phase fugoïde, lorsque le mouvement de base est impermanent	3	629
TIPEI N., Sur le mouvement de descente des raquettes	3	619

AÉROMÉCANIQUE

	Nº	Page
CARAFOLI E. et IONESCU M., High Order Conical Flows around Triangular Wings, Thin or of a Variable Thickness	3	677
CARAFOLI E. et HOROVITZ B., L'écoulement supersoniq uehomogène, d'ordre supérieur, autour d'une aile angulaire à plaque normale. .	4	959
DARIE GH. N., Application de la méthode de Carafoli au calcul de la résistance d'onde de l'aile delta doublement conique, à double pente	3	725
DUMITRESCU LUCIAN, Détermination de l'effet d'éjection, pour des profils à volet fluide (*jet-flap*)	2	357
HACKER T., Sur le comportement de l'avion pendant le vol en atmosphère agitée	4	983
PANTAZOPOL D., Détermination approximative de la répartition des pressions le long d'un obstacle placé en courant supersonique de gaz	3	737
PATRAULEA N., N., Le calcul de la déflexion de la veine et des vitesses induites sur le disque du rotor de l'hélicoptère.	1	13
PATRAULEA N. N., Profil à volet fluide en présence de singularités données	2	313
PATRAULEA N. N., DUMITRESCU L., POPESCU C., CĂPRIŢĂ D. et GAB H., Recherches expérimentales sur les profils aérodynamiques soufflés	2	319
PATRAULEA N. N. et DUMITRESCU L., Influence des parois sur les résultats des essais d'ailes toroïdales dans les souffleries à veine circulaire	3	703
PATRAULEA N. N., Quelques indications sur l'augmentation du coefficient de qualité des hélices	3	711
PAVELESCU D. and OLARU D., On the Determination of some Parameters of the Auxiliary Rockets	1	23
SĂVULESCU ST., Sur la détermination des caractéristiques de la couche limite par l'emploi de profils types de vitesses et températures . .	2	341

	Nº	Page
SĂVULESCU ST., Application de la méthode des profils types de vitesses et de températures au calcul de la couche limite sur un corps en révolution	4	975

HYDRODYNAMIQUE

	Nº	Page
KAHAN M. et IAMANDI C., Accroissement de la capacité de lavage et de transport alluvionnaire des écoulements à travers des canaux courts	1	249
KAHAN M. et HÎNCU S., La dynamique des courants sous pression dans les canaux à rugosité mixte	2	557
KAHAN M. et HÎNCU S., Sur la similitude des courants à niveau libre avec les courants sous pression	4	1011
MANEA V., Calcul de la masse apparente pour les carènes allongées	2	547
MATEESCU CR., KAHAN M., FILOTTI A. et DELICAN D., Etude du mouvement des alluvions en régime uniforme	3	757
MATEESCU CR., Nouvelles méthodes de détermination de la distribution des vitesses au cours du mouvement uniforme des fluides visqueux	4	991
OROVEANU T., Une méthode approximative pour l'étude de l'écoulement stationnaire plan-radial d'un mélange liquide-gaz à travers un milieu poreux	2	541
OROVEANU T., Sur l'écoulement non stationnaire d'un mélange compressible de liquide et de gaz à travers un milieu poreux	3	779
VASILESCU GR., Transformation du bras de Soulina en canal maritime. Solution radicale pour assurer la sortie à la mer et pour mettre en valeur les richesses du delta du Danube	1	233

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX — ÉLASTICITÉ

	Nº	Page
ARCAN M., STOENESCU F. et MIHAIL R., Recherches sur l'introduction d'un nouveau matériel pour maquettes en photoélasticité, Dinox F-110 *	4	1131
BUZDUGAN GH., Etude comparée entre différentes méthodes de calcul des fondations massives pour machines	2	437
CALCAN V., IONESCU I. et GOLDENBERG N., Masses plastiques à base de furfurol et dérivés. V. Influence du traitement thermique sur le comportement dans l'eau et dans l'huile du textolite à résine furfurol-phénolique	3	847
DUMITRESCU L. et STĂNESCU C., Torsion d'une barre cylindrique non homogène	1	111
HAMBURGER L., DINCĂ FL. et MANEA V., Sur la torsion de certaines barres cylindriques	4	1091
IONESCU I., CALCAN V. et GOLDENBERG N., Masses plastiques à base de furfurol et dérivés. IV. Influence du traitement thermique sur certaines résistances à des efforts progressifs à la rupture d'un stratifié à résine furfurol-phénolique	1	171
LIBRESCU LIVIU, Une nouvelle manière de formuler le problème général des coques minces élastiques	2	511
NICOLAU ED., Au sujet de l'influence d'un milieu élastique d'encastrement sur la distribution des tensions dans une console	2	525
NICOLAU ED., Déformations d'une console encastrée dans un milieu élastique	4	1145
PANĂ GH. I., L'utilisation du bois altéré dans le bâtiment et l'industrie	1	155
PÎRVULESCU N. S., L'effet de la force centrifuge sur la résistance des tiges de forage	3	805
PROCOPOVICI E., Sur la déformation transversale d'une barre sollicitée par choc axial	1	141

Nº Page

PROCOPOVICI E., Sur la déformation transversale des barres élastiques, sollicitées par une force axiale impulsive 3 839
RĂUTU S. et DINCĂ FL., Sur le comportement de la barre droite soumise à des efforts dynamiques axiaux 1 135
SOLOMON L. et DRĂGHICESCU D., Sur l'emploi des transformations conformes dans le problème plan de l'élasticité pour des domaines doublement connexes 4 1115
STĂNESCU CRISTIAN et VISARION VIOREL, Une méthode de calcul des enveloppes cylindriques de section circulaire et à orthotropie de matériel 4 1173
TEODORESCU P. P., Sur le calcul des poutres-parois à une seule ouverture 1 115
TEODORESCU P. P., Sur le calcul des poutres-parois à une seule ouverture 2 451
TEODORESCU P. P., Sur le calcul du demi-espace élastique sous l'action de certaines charges périodiques 3 831
TEODORESCU P. P., About some Space Problems of the Theory of Elasticity 4 1101
VISARION V., Une méthode de calcul dynamique des tubes et couvertures cylindriques circulaires 2 491

LUBRIFICATION — FROTTEMENT — USURE

CONSTANTINESCU V. N., Le calcul des paliers sans jeu radial, soumis à des charges et vitesses variables 3 789
CONSTANTINESCU V. N., TANASICIUC C. et GRABARI V., Détermination expérimentale de la charge supportée par les essieux des wagons de chemin de fer 4 1051
ROZEANU L. et PREOŢESCU O., Considérations sur l'usure des ensembles de frottement à la période de rodage 1 85
TIPEI N. et NICA AL., Sur les conditions aux limites dans le problème de la lubrification 1 63
TIPEI N., Lubrification des surfaces cylindriques à mouvement de roulement et de glissement 4 1039
VASILCA GH., Etude du coefficient de frottement dans un palier circulaire, au moyen des courbes $p = g(V)$ 1 75

TECHNIQUE DES MESURES

PAVELESCU D. et PANTELIMON TH., Magnetic Tape Recording of Mechanical Magnitudes with Slow Variations 4 1073

VIBRATIONS

IFRIM MIHAIL, Dynamic Calculus of Elastic Frames on the Basis of the Law of Conservation of Energy 2 393
IFRIM MIHAIL, Précisions sur l'application de la formule de Geiger au calcul de la première fréquence propre de vibration des constructions sur cadres 4 1197
MANEA V. et PROCOPOVICI E., Sur une méthode graphique pour déterminer les fréquences propres des vibrations flexionnelles des poutres libres, à distribution non uniforme de la rigidité et de la masse 3 897
TONDL A., Le mouvement périodique des rotors à caractéristique non linéaire des supports 1 35
TONDL ALEŠ, Die unterharmonische Resonanz eines Rotors mit nichtlinearer Charakteristik der Stützen 2 379

Nº Page

THÉORIE DES MÉCANISMES

BOGDAN R., PELECUDI CR., BUGAIEVSKI E. und CALMACIUC L., Über die experimentelle Bestimmung der Bewegung in ebenen Getrieben 3 663
BUGAIEVSKI E., BOGDAN R. et PELECUDI C., Contribution à la classification des mécanismes spatiaux 2 407
MANGERON D., DRĂGAN C. et SVIJEVSCHI VL., Une nouvelle méthode d'étude concernant la théorie des mécanismes et des machines 1 51

MÉCANIQUE DES CONSTRUCTIONS

CĂRARE TEODOR et AMZULESCU CEZAR, Calcul des cadres de type *shed* au moyen des équations aux différences finies 1 189
IFRIM MIHAIL, Considérations sur un critérium de perte de la stabilité élastique des systèmes de barres 1 213
PRIŞCU RADU, Contribution au problème de la détermination des températures de calcul pour les barrages-voûtes 2 585
PRIŞCU R. et CONSTANTINESCU M., Méthode de répartition de la pression hydrostatique dans la section centrale des barrages-voûtes 3 887
PRIŞCU R. et CĂCIULESCU ST., Etude sur les barrages à gravité, évidés 4 1205
WEISSENBERG M. et CIUNGU S., Déformations des éléments de béton armé et précontraint, à armature non adhérente, soumis à la flexion 3 867

TRAITEMENTS MÉCANIQUES ET TRAVAIL DES MILIEUX SOLIDES CONTINUS

FLORESCU C. et ZELINGHER N., Recherches sur la résistance du sol à la pénétration 3 925
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M. et PASCU N., Über geometrische Parameter des Schneidewerkzeugs mit Hartmetallplättchen 2 423
POPOV M., DECIU E. et MITRICĂ I., Considérations sur une analogie hydrodynamique du laminage 3 905
POPOV M., PAVELESCU D., MITRICĂ I., DECIU E., CALCIU M. et PASCU N., Über die günstigsten Bedingungen des Zerspannung mit Drehbankwerkzeugen mit Hartmetallplättchen 3 915
POPOV M., DECIU E. et MITRICĂ I., Sur une condition à la limite dans l'analogie hydrodynamique du laminage 4 1229

EXPOSÉS SCIENTIFIQUES ET TECHNIQUES

ANDREI ST., Nomogrammes pour le calcul des générateurs de gaz motocompresseurs employés à l'entraînement pneumatique des rotors d'hélicoptère 4 1241
FLORESCU C. et ZELINGHER N., Pénétrographe dynamique pour le sol, actionné à la main, type I.M.A.-II 3 935
GHEORGHIU D., Etude comparée de l'aéroplane „A. Vlaicu II" et des avions de son époque 4 1279
PAVELESCU D., L'étude de l'usure des outils coupants (irradiés) en vue de déterminer les meilleurs paramètres du détachement en copeaux 1 265
ZELINGHER N. et FREUND P., Banc d'essai pour l'étude de la résistance à l'usure des tourillons, en régime non permanent 4 1275

No Page

NOTES

PETRE A., Vérification expérimentale de la méthode classique de calcul des ailes de bois 4 1303
VOINEA RADU P., La distribution des accélérations dans le mouvement relatif du rigide 4 1299

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

BOLOTINE V. V., *Dinamitcheskaïa oustoïtchivosti ouproughih sistem* (Stabilité dynamique des systèmes élastiques). Gossudavstvenoé izd. tekhnikotéorititcheskoïé literaturi, Moscou, 1956, par *S. Răutu* et *Fl. Dincă* 4 1312
BÉZOUKHOV N. I., *Teoria elasticității și plasticității* (Théorie de l'élasticité et de la plasticité). Ed. Tehnică, Bucarest, 1957, par *L. Solomon* et *N. Cristescu* 4 1310
CARAFOLI E., *Aerodinamica vitezelor mari* (L'Aérodynamique des grandes vitesses). Ed. Acad. R.P.R., Bucarest, 1957, par *N. Tipei*. . . 2 603
KALMANOK A. S., *Rastchiot balok-stiénok* (Calcul des poutres-parois). Gos. izd. lit. po stroïtelstvou i architektouré, Moscou, 1956, par *P. P. Teodorescu*. 3 943
KAMMERER A., *Les propriétés mécaniques des solides réels et la théorie de l'élasticité.* Ed. Hermann & Cie, Paris, 1951, par *P. P. Teodorescu* 2 604
KOLLENBRUNNER F. KURT et MEISTER MARTIN, *Knicken* (Flambage). J. Springer, Berlin-Göttingen, 1955, par *A. Beleș*. . 3 942
SNEDDON IAN N., *Elements of partial differential equations.* Ed. McGraw Hill, New York, 1957, par *L. G. Hamburger* 4 1309
SNITKO N. K., *Oustoïtchivost i stato-izognutykh sterjnevykh sistem* (Stabilité des systèmes de barres comprimées). Gos. izd. lit. po stroït. i archit., Moscou-Leningrad, 1956, par *M. Ifrim* . . . 3 945
. * . *Jahrbuch 1955 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt e. v. W.G.L.* (Annuaire 1955 de la société scientifique pour l'aéronautique). Akademie Verlag, Berlin, 1956, par *N. Tipei* 3 939
. * . *I. Polytechnische Tagung der Technischen Hochschule Dresden, von 18 bis 20 Juni 1956* (La première session de l'Ecole Polytechnique de Dresde, du 18 au 20 juin 1956). Ed. Technische Hochschule Dresden, 1956, par *T. Oroveanu*. 4 1313
. * . *Recommandations pour la conception et le calcul des assemblages par pièces filetées,* Société Belge des mécaniciens, Bruxelles, 1956, par *Gh. Vasilca* 3 941
. * . *Résistances des matériaux, théorique et expérimentale. I. Théorie de l'élasticité et des structures élastiques.* Dunod, Paris, 1955, par *Beleș A.* et *Mihăilescu M.* 1 285

ABONAMENTELE SE FAC LA OFICIILE POŞTALE,
PRIN FACTORII POŞTALI ŞI DIFUZORII VOLUNTARI
DIN INTREPRINDERI ŞI INSTITUŢII

1